

# Topologie Ponctuelle Avancée

Notes de Cours

Master M1 — 2025–2026

*Yaë Ulrich Gaba*

---

*« Un mathématicien est une machine  
à transformer le café en théorèmes. »*

*— Alfred Rényi*

---

# Table des matières

|                                                                                      |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Préface</b>                                                                       | <b>1</b>  |
| <b>1 Rappels de Topologie Générale et Langage Catégoriel</b>                         | <b>5</b>  |
| 1.1 Espaces topologiques : définitions et premiers exemples . . . . .                | 5         |
| 1.2 Applications continues et homéomorphismes . . . . .                              | 6         |
| 1.3 Axiomes de séparation . . . . .                                                  | 7         |
| 1.4 Constructions topologiques de base . . . . .                                     | 8         |
| 1.5 Le langage catégoriel . . . . .                                                  | 8         |
| 1.6 <b>Top</b> comme catégorie : propriétés fondamentales . . . . .                  | 10        |
| 1.7 Le foncteur $\mathcal{O}$ et le treillis des ouverts . . . . .                   | 11        |
| 1.8 Topologie initiale et topologie finale . . . . .                                 | 11        |
| 1.9 Espaces de Kolmogorov et quotient $T_0$ . . . . .                                | 12        |
| 1.10 Compacité et variantes . . . . .                                                | 13        |
| 1.11 Exercices . . . . .                                                             | 13        |
| <b>2 Espaces <math>T_0</math> et Ordre de Spécialisation</b>                         | <b>15</b> |
| 2.1 L'ordre de spécialisation . . . . .                                              | 15        |
| 2.2 Topologie d'Alexandrov . . . . .                                                 | 16        |
| 2.3 Adhérence et ordre . . . . .                                                     | 16        |
| 2.4 Continuité et monotonie . . . . .                                                | 17        |
| 2.5 Le foncteur de spécialisation . . . . .                                          | 17        |
| 2.6 Espaces $T_0$ et $d$ -espaces . . . . .                                          | 18        |
| 2.7 Espaces d'Alexandrov et treillis finis . . . . .                                 | 18        |
| 2.8 Topologie supérieure d'un ordre . . . . .                                        | 18        |
| 2.9 Ensembles saturés . . . . .                                                      | 19        |
| 2.10 Stably compact spaces (aperçu) . . . . .                                        | 19        |
| 2.11 Exercices . . . . .                                                             | 19        |
| <b>3 Espaces Sobres et Locales</b>                                                   | <b>21</b> |
| 3.1 Fermés irréductibles . . . . .                                                   | 21        |
| 3.2 Espaces sobres . . . . .                                                         | 22        |
| 3.3 La sobrification . . . . .                                                       | 22        |
| 3.4 Cadres et locales . . . . .                                                      | 23        |
| 3.5 Le foncteur $\text{pt}$ et l'adjonction $\mathcal{O} \dashv \text{pt}$ . . . . . | 23        |
| 3.6 Locales spatiales et cadres spatiaux . . . . .                                   | 24        |
| 3.7 Sous-locales et noyaux . . . . .                                                 | 24        |
| 3.8 Dualité de Stone . . . . .                                                       | 25        |
| 3.9 Exercices . . . . .                                                              | 25        |

|          |                                                                         |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>4</b> | <b>Quasi-métriques et Topologie Asymétrique</b>                         | <b>27</b> |
| 4.1      | Définitions fondamentales . . . . .                                     | 27        |
| 4.2      | Topologie associée à une quasi-métrique . . . . .                       | 28        |
| 4.3      | Exemples fondamentaux . . . . .                                         | 28        |
| 4.4      | Quasi-uniformités . . . . .                                             | 29        |
| 4.5      | Complétion de quasi-espaces métriques . . . . .                         | 29        |
| 4.6      | Continuité et quasi-métriques . . . . .                                 | 30        |
| 4.7      | Quasi-métriques et réseaux de Petri (aperçu) . . . . .                  | 30        |
| 4.8      | Topologie co-directe et paire conjuguée . . . . .                       | 30        |
| 4.9      | Exercices . . . . .                                                     | 30        |
| <b>5</b> | <b>Espaces Bitopologiques</b>                                           | <b>33</b> |
| 5.1      | Définitions fondamentales . . . . .                                     | 33        |
| 5.2      | Exemples fondamentaux . . . . .                                         | 33        |
| 5.3      | Axiomes de séparation bitopologiques . . . . .                          | 34        |
| 5.4      | Normalité bitopologique . . . . .                                       | 34        |
| 5.5      | Compacité bitopologique . . . . .                                       | 35        |
| 5.6      | La dualité de Nachbin . . . . .                                         | 35        |
| 5.7      | Lien avec les espaces stablement compacts . . . . .                     | 35        |
| 5.8      | Foncteurs entre <b>BiTop</b> et <b>Top</b> . . . . .                    | 36        |
| 5.9      | Espaces bitopologiques et treillis . . . . .                            | 36        |
| 5.10     | Exercices . . . . .                                                     | 36        |
| <b>6</b> | <b>Domaines de Scott et Topologie de Scott</b>                          | <b>37</b> |
| 6.1      | Ensembles dirigés complets . . . . .                                    | 37        |
| 6.2      | La topologie de Scott . . . . .                                         | 38        |
| 6.3      | Fonctions Scott-continues . . . . .                                     | 38        |
| 6.4      | La catégorie <b>Dcpo</b> . . . . .                                      | 39        |
| 6.5      | Domaines continus . . . . .                                             | 39        |
| 6.6      | Domaines algébriques . . . . .                                          | 40        |
| 6.7      | Théorème de représentation . . . . .                                    | 40        |
| 6.8      | Exercices . . . . .                                                     | 41        |
| <b>7</b> | <b>Espaces de Convergence et Filtres</b>                                | <b>43</b> |
| 7.1      | Filtres : rappels et compléments . . . . .                              | 43        |
| 7.2      | Convergence dans les espaces topologiques . . . . .                     | 44        |
| 7.3      | Espaces de convergence . . . . .                                        | 44        |
| 7.4      | Fermeture cartésienne . . . . .                                         | 45        |
| 7.5      | Réseaux (Nets) et convergence . . . . .                                 | 45        |
| 7.6      | Filtres de Scott et convergence . . . . .                               | 45        |
| 7.7      | Espaces de Choquet . . . . .                                            | 46        |
| 7.8      | Convergence et théorie des domaines . . . . .                           | 46        |
| 7.9      | Exercices . . . . .                                                     | 46        |
| <b>8</b> | <b>Compacité dans les Espaces Non-Hausdorff</b>                         | <b>47</b> |
| 8.1      | Compacts saturés . . . . .                                              | 47        |
| 8.2      | Compactification d’Alexandroff pour les espaces non-Hausdorff . . . . . | 48        |
| 8.3      | Espaces sobres localement compacts . . . . .                            | 49        |
| 8.4      | Espaces stablement compacts . . . . .                                   | 49        |

|           |                                                           |           |
|-----------|-----------------------------------------------------------|-----------|
| 8.5       | La topologie patch . . . . .                              | 50        |
| 8.6       | Dualité de de Groot . . . . .                             | 51        |
| 8.7       | Applications en théorie des domaines . . . . .            | 51        |
| <b>9</b>  | <b>Topologie Asymétrique en Informatique Théorique</b>    | <b>53</b> |
| 9.1       | Domaines de Scott et sémantique dénotationnelle . . . . . | 53        |
| 9.2       | Domaines pour le lambda-calcul . . . . .                  | 54        |
| 9.3       | Treillis continus et théorie des langages . . . . .       | 55        |
| 9.4       | Powerdomaines . . . . .                                   | 56        |
| 9.5       | Modèles topologiques du calcul . . . . .                  | 56        |
| 9.6       | Exercices . . . . .                                       | 57        |
| <b>10</b> | <b>Théorie des Points Fixes en Topologie Avancée</b>      | <b>59</b> |
| 10.1      | Théorème de Tarski pour les treillis complets . . . . .   | 59        |
| 10.2      | Théorème de Kleene . . . . .                              | 60        |
| 10.3      | Théorème de Pataraia . . . . .                            | 61        |
| 10.4      | Plus petit point fixe en théorie des domaines . . . . .   | 61        |
| 10.5      | Applications aux définitions récursives . . . . .         | 62        |
| 10.6      | Exercices . . . . .                                       | 63        |



# Préface

Ce cours de *Topologie Ponctuelle Avancée* s'adresse aux étudiants de Master 2 et de doctorat en mathématiques pures, ainsi qu'aux chercheurs en informatique théorique souhaitant approfondir les fondements topologiques de la théorie des domaines.

## Motivations

La topologie générale, telle qu'elle est enseignée dans les cursus de licence et de première année de master, se concentre presque exclusivement sur les espaces de Hausdorff (séparés). Cette restriction, bien que naturelle pour l'analyse et la géométrie différentielle, occulte une partie considérable de la théorie. En effet, de nombreuses structures fondamentales en mathématiques et en informatique ne satisfont pas l'axiome de séparation  $T_2$  :

- Le spectre d'un anneau commutatif, muni de la topologie de Zariski, est généralement un espace  $T_0$  non  $T_1$ .
- Les domaines de Scott, essentiels en sémantique dénotationnelle, portent une topologie  $T_0$  non  $T_1$ .
- Les locales, qui généralisent la notion d'espace topologique en éliminant la référence aux points, constituent un cadre naturel pour la logique constructive et la théorie des topos.
- Les quasi-métriques, où la symétrie est abandonnée, modélisent des notions de coût asymétrique en informatique et en optimisation.

L'objectif de ce cours est de développer systématiquement la théorie topologique dans ce cadre élargi, en mettant l'accent sur les interactions entre topologie, théorie de l'ordre et informatique théorique.

## Organisation du cours

Le cours est divisé en dix chapitres, organisés en trois parties thématiques :

**Partie I : Fondements (Chapitres 1–3).** Nous commençons par un rappel systématique de topologie générale enrichi du langage catégoriel (Chapitre 1), puis nous étudions les espaces  $T_0$  via l'ordre de spécialisation, établissant le pont fondamental entre topologie et théorie de l'ordre (Chapitre 2), avant d'aborder les espaces sobres et la théorie des locales qui fournissent le cadre « sans points » de la topologie (Chapitre 3).

**Partie II : Structures asymétriques (Chapitres 4–6).** Nous développons la théorie des quasi-métriques et de la topologie asymétrique (Chapitre 4), des espaces bitopologiques qui capturent la dualité entre une topologie et sa conjuguée (Chapitre 5), puis la topologie de Scott sur les ensembles ordonnés et les domaines, fondamentale pour la sémantique dénotationnelle (Chapitre 6).

**Partie III : Convergence, compacité et applications (Chapitres 7–10).** Nous étudions les espaces de convergence généralisés et la théorie des filtres (Chapitre 7), la compacité en dehors du cadre de Hausdorff avec ses multiples variantes (Chapitre 8), les applications de la topologie asymétrique à l’informatique théorique (Chapitre 9), et enfin la théorie des points fixes topologiques avec ses applications aux domaines et à la sémantique (Chapitre 10).

## Prérequis

Le lecteur est supposé connaître :

- La topologie générale de base : espaces topologiques, continuité, compacité, connexité, axiomes de séparation  $T_0$ – $T_4$  (niveau L3/M1).
- Les notions élémentaires de théorie des ensembles ordonnés : ordres partiels, treillis, complétude.
- Les bases du langage catégoriel : catégories, foncteurs, transformations naturelles, adjonctions.
- La théorie élémentaire des espaces métriques et de la convergence.

## Conventions et notations

Tout au long de ce cours, nous adoptons les conventions suivantes :

- $(X, \tau)$  désigne un espace topologique,  $\tau$  étant la topologie (ensemble des ouverts). Lorsque la topologie est claire du contexte, nous écrivons simplement  $X$ .
- $\mathcal{O}(X)$  désigne le treillis des ouverts de  $X$ .
- $\mathcal{C}(X)$  désigne l’ensemble des fermés de  $X$ .
- $\overline{A}$ ,  $\text{Int}(A)$  désignent respectivement l’adhérence et l’intérieur de  $A \subseteq X$ .
- $\leq_X$  ou  $\sqsubseteq$  désigne l’ordre de spécialisation sur un espace  $T_0$ .
- $\downarrow x = \{y : y \leq x\}$  et  $\uparrow x = \{y : x \leq y\}$ .
- Pour un sous-ensemble  $A$ , on note  $\downarrow A = \bigcup_{a \in A} \downarrow a$  et  $\uparrow A = \bigcup_{a \in A} \uparrow a$ .
- **Top** est la catégorie des espaces topologiques et applications continues.
- **Top**<sub>0</sub> est la sous-catégorie pleine des espaces  $T_0$ .
- **Sob** est la sous-catégorie pleine des espaces sobres.



- **Loc** est la catégorie des locales.
- **Frm** est la catégorie des cadres (*frames*).
- **Dcpo** est la catégorie des dcpo et fonctions Scott-continues.
- **Dom** désigne la catégorie des domaines (selon le contexte).
- $\omega$  désigne le premier ordinal infini, identifié à  $\mathbb{N}$ .
- $\mathbb{S}$  désigne l'espace de Sierpiński  $\{0, 1\}$  avec la topologie  $\{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\}$ .

## Approche pédagogique

Chaque chapitre contient :

- Des **définitions** précises et des **théorèmes** avec démonstrations complètes.
- Des **exemples** détaillés et des **contre-exemples** illustrant les limites des résultats.
- Des **exercices** de difficulté variée, certains prolongés par des indications.
- Des encadrés **Intuition** et **Attention** pour guider la compréhension.

## Sources et références

Ce cours s'appuie principalement sur les ouvrages suivants :

- GIERZ, HOFMANN, KEIMEL, LAWSON, MISLOVE, SCOTT, *Continuous Lattices and Domains*, Cambridge University Press, 2003.
- GOUBAULT-LARRECQ, *Non-Hausdorff Topology and Domain Theory*, Cambridge University Press, 2013.
- JOHNSTONE, *Stone Spaces*, Cambridge University Press, 1982.
- VICKERS, *Topology via Logic*, Cambridge University Press, 1989.
- ABRAMSKY, JUNG, *Domain Theory*, Handbook of Logic in Computer Science, vol. 3, Oxford University Press, 1994.
- KELLY, *Bitopological Spaces*, Proc. London Math. Soc., 1963.
- FLETCHER, LINDGREN, *Quasi-Uniform Spaces*, Marcel Dekker, 1982.
- SMYTH, *Topology*, Handbook of Logic in Computer Science, vol. 1, Oxford University Press, 1992.
- ESCARDÓ, *Synthetic Topology of Data Types and Classical Spaces*, ENTCS, 2004.
- NACHBIN, *Topology and Order*, Van Nostrand, 1965.

## Remerciements

Ce cours a bénéficié des enseignements et des discussions avec de nombreux collègues travaillant à l'interface de la topologie, de la théorie de l'ordre et de l'informatique théorique. Nous remercions en particulier les étudiants dont les questions et remarques ont contribué à améliorer la présentation.

*L'auteur*

# Chapitre 1

## Rappels de Topologie Générale et Langage Catégoriel

Qu'est-ce qu'un espace ? La question paraît simple, presque naïve, et pourtant elle a obligé des générations de mathématiciens à repenser les fondements de la géométrie. Au début du XX<sup>e</sup> siècle, Felix Hausdorff, Maurice Fréchet et d'autres ont forgé le concept d'*espace topologique* — une structure si générale qu'elle englobe aussi bien les espaces euclidiens familiers que des objets exotiques où notre intuition vacille.

Ce chapitre est un point de départ, mais pas un simple réchauffé d'un cours de licence. Notre objectif est de revisiter les fondations avec un œil neuf : celui de la théorie des catégories. Nous allons reformuler les constructions classiques — continuité, produits, quotients — dans un langage qui révèle leur structure profonde. Et surtout, nous allons abandonner un préjugé tenace : celui qui voudrait que tout espace « raisonnable » soit séparé au sens de Hausdorff. Car les espaces non séparés sont au cœur de ce cours, et c'est là que les choses deviennent vraiment intéressantes.

### Intuition

Ce chapitre rappelle les notions fondamentales de topologie générale en les reformulant dans le langage catégoriel. L'objectif n'est pas de répéter un cours de L3, mais de mettre en place le vocabulaire et les outils qui seront utilisés dans les chapitres suivants, en insistant sur les aspects souvent négligés : espaces non séparés, rôle de la catégorie **Top** et ses propriétés, et les limites de l'intuition hausdorffienne.

### 1.1 Espaces topologiques : définitions et premiers exemples

Tout commence par trois axiomes. Trois règles d'une simplicité trompeuse qui déterminent quels sous-ensembles d'un ensemble  $X$  méritent d'être appelés « ouverts ». C'est le choix de ces ouverts — et non une notion de distance — qui définit la géométrie d'un espace. Hausdorff lui-même, dans son *Grundzüge der Mengenlehre* de 1914, a compris que la topologie est avant tout une affaire de *voisinages*, pas de métriques.

**Définition 1.1** (Espace topologique). Un *espace topologique* est un couple  $(X, \tau)$  où  $X$  est un ensemble et  $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$  vérifie :

1.  $\emptyset \in \tau$  et  $X \in \tau$  ;
2.  $\tau$  est stable par réunion quelconque : si  $(U_i)_{i \in I} \subseteq \tau$ , alors  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$  ;

3.  $\tau$  est stable par intersection finie : si  $U_1, \dots, U_n \in \tau$ , alors  $U_1 \cap \dots \cap U_n \in \tau$ .

Les éléments de  $\tau$  sont appelés *ouverts*. Les complémentaires des ouverts sont les *fermés*.

L'asymétrie entre réunions (quelconques) et intersections (finies) n'est pas un défaut de la définition : elle reflète une réalité profonde. Si l'on autorisait les intersections infinies d'ouverts, la topologie s'effondrerait sur elle-même : dans  $\mathbb{R}$ , l'intersection de tous les intervalles  $(-1/n, 1/n)$  n'est que le singleton  $\{0\}$ , qui n'est pas ouvert. Comprendre pourquoi cette asymétrie est nécessaire, c'est déjà comprendre la topologie.

Pour se faire la main, considérons les cas extrêmes.

**Exemple 1.2** (Topologies extrémales). Sur tout ensemble  $X$  :

- La *topologie discrète*  $\tau = \mathcal{P}(X)$  rend tout sous-ensemble ouvert.
- La *topologie grossière* (ou indiscrete)  $\tau = \{\emptyset, X\}$  ne possède que les ouverts triviaux.

Entre ces deux extrêmes, il existe un espace minuscule mais remarquablement riche, qui reviendra sans cesse dans ce cours.

**Exemple 1.3** (Espace de Sierpiński). L'espace de Sierpiński est  $\mathbb{S} = \{0, 1\}$  muni de  $\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\}$ . C'est un espace  $T_0$  non  $T_1$ . Il joue un rôle fondamental : le singleton  $\{0\}$  est fermé mais non ouvert, et  $\{1\}$  est ouvert mais non fermé.

Cet espace de deux points est en réalité le « classifieur des ouverts » : nous verrons dans les exercices que les ouverts d'un espace  $X$  sont en bijection avec les applications continues de  $X$  vers  $\mathbb{S}$ . C'est la première manifestation d'un thème récurrent : les petits espaces non séparés encodent de l'information.

**Exemple 1.4** (Topologie cofinie). Sur un ensemble infini  $X$ , la *topologie cofinie* est  $\tau = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ est fini}\}$ . C'est un espace  $T_1$  non  $T_2$ .

## 1.2 Applications continues et homéomorphismes

En topologie, la notion de distance est absente, mais celle de « proximité » persiste à travers les ouverts. La continuité, qui en analyse se formule avec des  $\varepsilon$  et des  $\delta$ , prend ici une forme plus épurée : une application est continue si elle respecte la structure des ouverts, c'est-à-dire si l'image réciproque de tout ouvert est ouvert.

**Définition 1.5** (Application continue). Soient  $(X, \tau_X)$  et  $(Y, \tau_Y)$  deux espaces topologiques. Une application  $f: X \rightarrow Y$  est *continue* si pour tout  $V \in \tau_Y$ , on a  $f^{-1}(V) \in \tau_X$ .

Cette définition, d'une élégance laconique, admet plusieurs reformulations équivalentes qui sont chacune utiles dans des contextes différents.

**Proposition 1.6** (Caractérisations de la continuité). Soit  $f: X \rightarrow Y$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est continue.
2. Pour tout fermé  $F$  de  $Y$ ,  $f^{-1}(F)$  est fermé dans  $X$ .
3. Pour tout  $A \subseteq X$ ,  $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ .

4. Pour tout  $x \in X$  et tout voisinage  $V$  de  $f(x)$ ,  $f^{-1}(V)$  est un voisinage de  $x$ .

*Démonstration.* (1)  $\Leftrightarrow$  (2) : immédiat par passage au complémentaire.

(1)  $\Rightarrow$  (3) : Soit  $A \subseteq X$  et  $x \in \overline{A}$ . Soit  $V$  un ouvert de  $Y$  contenant  $f(x)$ . Alors  $f^{-1}(V)$  est un ouvert contenant  $x$ , donc  $f^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset$ , d'où  $V \cap f(A) \neq \emptyset$ . Ainsi  $f(x) \in \overline{f(A)}$ .

(3)  $\Rightarrow$  (2) : Si  $F$  est fermé dans  $Y$  et  $A = f^{-1}(F)$ , alors  $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{F} = F$ , donc  $\overline{A} \subseteq f^{-1}(F) = A$ , ce qui montre que  $A$  est fermé.

(1)  $\Leftrightarrow$  (4) : exercice. □

Quand deux espaces partagent la même « forme topologique », on dit qu'ils sont homéomorphes. C'est la notion d'équivalence en topologie : l'analogue de l'isométrie en géométrie métrique, ou de l'isomorphisme en algèbre.

**Définition 1.7** (Homéomorphisme). Une application  $f: X \rightarrow Y$  est un *homéomorphisme* si  $f$  est bijective et si  $f$  et  $f^{-1}$  sont continues. On dit alors que  $X$  et  $Y$  sont *homéomorphes*, noté  $X \cong Y$ .

## 1.3 Axiomes de séparation

Voici l'un des thèmes centraux de ce cours. Les axiomes de séparation classent les espaces topologiques selon leur capacité à « distinguer » les points. Dans un cours classique, on se concentre sur les espaces de Hausdorff ( $T_2$ ) et on traite les axiomes inférieurs comme des curiosités. Mais dans ce cours, les espaces  $T_0$  non  $T_1$  seront nos compagnons quotidiens — car ce sont précisément ceux qui apparaissent en théorie des domaines, en géométrie algébrique, et dans l'étude des espaces spectraux.

**Définition 1.8** (Axiomes  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ ). Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique.

- $X$  est  $T_0$  (ou de Kolmogorov) si pour tous  $x \neq y$  dans  $X$ , il existe un ouvert contenant l'un mais pas l'autre.
- $X$  est  $T_1$  si pour tous  $x \neq y$ , il existe un ouvert contenant  $x$  mais pas  $y$  (et par symétrie, un ouvert contenant  $y$  mais pas  $x$ ).
- $X$  est  $T_2$  (ou de Hausdorff) si pour tous  $x \neq y$ , il existe des ouverts disjoints  $U \ni x$  et  $V \ni y$ .

**Proposition 1.9.** On a les implications :  $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$ , et aucune implication inverse ne tient en général.

La différence entre  $T_0$  et  $T_1$  est subtile mais fondamentale. Dans un espace  $T_0$ , on peut « distinguer » deux points, mais de manière asymétrique : l'un voit un ouvert que l'autre ne voit pas, mais pas forcément l'inverse. L'espace de Sierpiński en est l'exemple type.

*Remarque 1.10.* Un espace est  $T_1$  si et seulement si tout singleton est fermé. Cette caractérisation ne s'étend pas aux espaces  $T_0$  : dans l'espace de Sierpiński,  $\{0\}$  est fermé mais  $\{1\}$  ne l'est pas.

Au-delà de  $T_2$ , la hiérarchie se poursuit avec les axiomes de régularité et de normalité, qui portent sur la séparation des fermés.

**Définition 1.11** (Axiomes supérieurs). •  $X$  est *régulier* si pour tout fermé  $F$  et tout  $x \notin F$ , il existe des ouverts disjoints séparant  $x$  et  $F$ .  $X$  est  $T_3$  s'il est régulier et  $T_1$ .

- $X$  est *normal* si pour tous fermés disjoints  $F_1, F_2$ , il existe des ouverts disjoints les séparant.  $X$  est  $T_4$  s'il est normal et  $T_1$ .

## 1.4 Constructions topologiques de base

Comment fabriquer de nouveaux espaces à partir d'espaces existants ? Trois constructions fondamentales — le produit, le quotient, et le sous-espace — permettent de bâtir tout l'édifice de la topologie. Ce qui est remarquable, c'est que chacune de ces constructions se caractérise par une *propriété universelle*, un thème que nous développerons pleinement dans la section catégorielle.

**Définition 1.12** (Topologie produit). Soit  $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$  une famille d'espaces topologiques. La *topologie produit* sur  $\prod_{i \in I} X_i$  est la topologie la moins fine rendant continues toutes les projections  $\pi_j: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$ . Une base de cette topologie est formée des ensembles  $\prod_{i \in I} U_i$  où  $U_i \in \tau_i$  et  $U_i = X_i$  sauf pour un nombre fini d'indices.

**Définition 1.13** (Topologie quotient). Soit  $f: X \rightarrow Y$  une surjection, où  $X$  est un espace topologique. La *topologie quotient* sur  $Y$  est  $\tau_Y = \{V \subseteq Y : f^{-1}(V) \in \tau_X\}$ . C'est la topologie la plus fine rendant  $f$  continue.

**Définition 1.14** (Sous-espace). Si  $(X, \tau)$  est un espace topologique et  $A \subseteq X$ , la *topologie induite* (ou trace) sur  $A$  est  $\tau_A = \{U \cap A : U \in \tau\}$ .

## 1.5 Le langage catégoriel

Nous arrivons maintenant à l'outil qui va transformer notre manière de penser la topologie. La théorie des catégories, née en 1945 sous la plume de Samuel Eilenberg et Saunders Mac Lane, est souvent décrite comme « les mathématiques des mathématiques » : elle fournit un langage pour parler des structures mathématiques et des relations entre elles, en s'abstrayant de la nature des objets étudiés.

Pourquoi introduire ce formalisme dans un cours de topologie ? Parce que les constructions topologiques que nous venons de voir — produits, quotients, sous-espaces — sont des cas particuliers de *limites* et *colimites* catégorielles. En les formulant ainsi, on comprend pourquoi ces constructions fonctionnent, et surtout pourquoi certaines autres ne fonctionnent pas.

**Définition 1.15** (Catégorie). Une *catégorie*  $\mathcal{C}$  consiste en :

- une classe  $\text{Ob}(\mathcal{C})$  d'*objets* ;
- pour chaque paire d'objets  $A, B$ , un ensemble  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  de *morphismes* ;
- une loi de composition associative  $\circ: \text{Hom}(B, C) \times \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(A, C)$  ;
- pour chaque objet  $A$ , un morphisme identité  $\text{id}_A \in \text{Hom}(A, A)$ , neutre pour la composition.

Voici les catégories que nous utiliserons tout au long de ce cours.

**Exemple 1.16** (Catégories topologiques fondamentales). • **Set** : ensembles et fonctions.

- **Top** : espaces topologiques et applications continues.
- **Top<sub>0</sub>** : sous-catégorie pleine de **Top** formée des espaces  $T_0$ .

- **Pos** : ensembles partiellement ordonnés et fonctions croissantes.
- **Lat** : treillis et morphismes de treillis.

Pour relier les catégories entre elles, on utilise des *foncteurs* : des « traducteurs » qui préservent la structure catégorielle.

**Définition 1.17** (Foncteur). Un *foncteur*  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  entre deux catégories associe :

- à chaque objet  $A$  de  $\mathcal{C}$ , un objet  $F(A)$  de  $\mathcal{D}$  ;
- à chaque morphisme  $f: A \rightarrow B$ , un morphisme  $F(f): F(A) \rightarrow F(B)$  ;

de sorte que  $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$  et  $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ . Un foncteur est *contravariant* s'il renverse le sens des flèches.

Et pour comparer deux foncteurs entre eux, on utilise des *transformations naturelles* — l'une des idées les plus profondes d'Eilenberg et Mac Lane, qui disaient d'ailleurs avoir inventé les catégories pour pouvoir définir les transformations naturelles.

**Définition 1.18** (Transformation naturelle). Soient  $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  deux foncteurs. Une *transformation naturelle*  $\eta: F \Rightarrow G$  est une famille de morphismes  $(\eta_A: F(A) \rightarrow G(A))_{A \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$  telle que pour tout morphisme  $f: A \rightarrow B$  dans  $\mathcal{C}$ , le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\eta_A} & G(A) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(B) & \xrightarrow{\eta_B} & G(B) \end{array}$$

Le concept le plus important pour ce cours est celui d'*adjonction*, qui capture la dualité entre « construire librement » et « oublier la structure ».

**Définition 1.19** (Adjonction). Soient  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  et  $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  deux foncteurs. On dit que  $F$  est *adjoint à gauche* de  $G$  (noté  $F \dashv G$ ) s'il existe une bijection naturelle

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), B) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G(B))$$

pour tous objets  $A$  de  $\mathcal{C}$  et  $B$  de  $\mathcal{D}$ .

Les adjonctions sont partout en topologie. Chaque fois que nous rencontrerons une construction topologique, nous pourrons la comprendre comme un adjoint à gauche ou à droite de quelque chose. Voici pourquoi c'est si utile.

**Théorème 1.20** (Propriété universelle de l'adjonction). *Si  $F \dashv G$ , alors :*

1.  $F$  préserve les colimites.
2.  $G$  préserve les limites.
3. Il existe des transformations naturelles  $\eta: \text{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$  (*unité*) et  $\varepsilon: FG \Rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$  (*co-unité*) satisfaisant les identités triangulaires.

*Démonstration.* C'est un résultat classique de théorie des catégories. L'unité  $\eta_A$  correspond à l'image de  $\text{id}_{F(A)}$  par la bijection  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(A)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, GF(A))$ . La co-unité  $\varepsilon_B$  correspond à l'image de  $\text{id}_{G(B)}$ . La préservation des (co)limites découle du fait qu'un adjoint à gauche (resp. droite) commute aux colimites (resp. limites), car les Hom-foncteurs transforment les colimites en limites.  $\square$

## 1.6 Top comme catégorie : propriétés fondamentales

Munis de ce langage, que pouvons-nous dire de la catégorie **Top** elle-même ? La bonne nouvelle est qu'elle est très riche : elle admet toutes les limites et colimites imaginables. La mauvaise nouvelle — et c'est là que les ennuis commencent — est qu'elle n'est pas cartésienne fermée.

**Théorème 1.21** (**Top** est complète et cocomplète). *La catégorie **Top** admet toutes les petites limites et toutes les petites colimites. En particulier :*

- Les produits existent (topologie produit).
- Les égalisateurs existent (topologie induite).
- Les coproduits existent (somme topologique disjointe).
- Les coégalisateurs existent (topologie quotient).

Le foncteur d'oubli  $U: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$  — qui « oublie » la topologie et ne garde que l'ensemble sous-jacent — est remarquablement bien doté : il possède à la fois un adjoint à gauche et un adjoint à droite, ce qui est relativement rare.

**Proposition 1.22** (Le foncteur d'oubli). Le foncteur d'oubli  $U: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$  qui associe à un espace son ensemble sous-jacent possède un adjoint à gauche (topologie discrète) et un adjoint à droite (topologie grossière). En notant  $D$  et  $I$  ces adjoints :

$$D \dashv U \dashv I.$$

*Démonstration.* Pour tout espace  $Y$  et tout ensemble  $S$ , une fonction  $f: S \rightarrow U(Y)$  est automatiquement continue lorsqu'on munit  $S$  de la topologie discrète, car tout sous-ensemble de  $S$  est ouvert. Ainsi  $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(D(S), Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(S, U(Y))$ , d'où  $D \dashv U$ .

De même, toute fonction  $g: U(X) \rightarrow S$  est continue lorsqu'on munit  $S$  de la topologie grossière, car les seules préimages à vérifier sont  $\emptyset$  et  $S$ . D'où  $U \dashv I$ .  $\square$

Mais voici le problème qui va motiver une grande partie de ce cours : **Top** échoue à être cartésienne fermée.

**Théorème 1.23** (**Top** est cartésienne fermée ?). *La catégorie **Top** n'est pas cartésienne fermée. Plus précisément, la topologie compacte-ouverte sur  $\mathrm{Hom}(X, Y)$  ne donne pas en général un foncteur exponentiel adjoint au produit. Cependant, la restriction aux espaces localement compacts de Hausdorff donne une sous-catégorie cartésienne fermée.*

### Attention

Le fait que **Top** ne soit pas cartésienne fermée est une limitation fondamentale qui motive la recherche de catégories topologiques plus agréables, comme les espaces de convergence (Chapitre 7) ou les espaces compactement engendrés.



## 1.7 Le foncteur $\mathcal{O}$ et le treillis des ouverts

Changeons de point de vue. Au lieu d'étudier un espace à travers ses *points*, étudions-le à travers ses *ouverts*. Cette idée, qui paraît anodine, va nous mener vers la théorie des locales (Chapitre 3) et constitue l'un des ponts les plus profonds entre topologie et logique.

L'ensemble des ouverts d'un espace topologique forme un treillis avec une structure très particulière : c'est un *cadre* (*frame*).

**Définition 1.24** (Treillis des ouverts). Pour un espace topologique  $X$ , le *treillis des ouverts*  $\mathcal{O}(X)$  est l'ensemble des ouverts de  $X$ , ordonné par l'inclusion, muni des opérations :

- $\bigvee_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} U_i$  (sup quelconque) ;
- $U \wedge V = U \cap V$  (inf fini) ;
- $\perp = \emptyset, \top = X$ .

C'est un *cadre* (*frame*), c'est-à-dire un treillis complet satisfaisant la loi de distributivité infinie :

$$U \cap \bigcup_{i \in I} V_i = \bigcup_{i \in I} (U \cap V_i).$$

Ce qui rend cette construction catégoriquement intéressante, c'est qu'elle est fonctorielle : les applications continues induisent des morphismes de cadres, mais en sens inverse.

**Proposition 1.25** (Fonctorialité de  $\mathcal{O}$ ). L'assignation  $X \mapsto \mathcal{O}(X)$  s'étend en un foncteur contravariant  $\mathcal{O}: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Frm}^{\text{op}}$ , où  $\mathbf{Frm}$  est la catégorie des cadres. Pour  $f: X \rightarrow Y$  continue,  $\mathcal{O}(f) = f^{-1}: \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$  est un morphisme de cadres.

*Démonstration.* La préimage  $f^{-1}$  préserve les réunions quelconques et les intersections finies, donc c'est bien un morphisme de cadres. La fonctorialité découle de  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ .  $\square$

*Remarque 1.26.* Ce foncteur est au cœur de la théorie des locales (Chapitre 3), où l'on renverse la perspective : au lieu d'étudier un espace via ses points, on l'étudie via son treillis d'ouverts.

## 1.8 Topologie initiale et topologie finale

Pour construire de nouvelles topologies, deux stratégies s'opposent. La topologie *initiale* est la plus petite topologie qui rend certaines applications continues : c'est ainsi que l'on construit les produits et les sous-espaces. La topologie *finale* est la plus grande : c'est le mécanisme derrière les quotients et les sommes disjointes. Ces deux constructions sont duales, et leurs propriétés universelles encapsulent tout ce qu'il faut savoir pour les manipuler.

**Définition 1.27** (Topologie initiale). Soit  $X$  un ensemble et  $(f_i: X \rightarrow (Y_i, \tau_i))_{i \in I}$  une famille d'applications. La *topologie initiale* sur  $X$  est la topologie la moins fine rendant toutes les  $f_i$  continues. Elle est engendrée par la sous-base  $\{f_i^{-1}(U) : i \in I, U \in \tau_i\}$ .

**Définition 1.28** (Topologie finale). Soit  $Y$  un ensemble et  $(f_i: (X_i, \tau_i) \rightarrow Y)_{i \in I}$  une famille d'applications. La *topologie finale* sur  $Y$  est la topologie la plus fine rendant toutes les  $f_i$  continues :  $\tau_Y = \{V \subseteq Y : f_i^{-1}(V) \in \tau_i \text{ pour tout } i\}$ .

La puissance de ces constructions réside dans leurs propriétés universelles, qui réduisent la vérification de la continuité à un test composante par composante.

**Théorème 1.29** (Propriété universelle). 1. Topologie initiale :  $g: Z \rightarrow X$  est continue si et seulement si  $f_i \circ g$  est continue pour tout  $i$ .

2. Topologie finale :  $g: Y \rightarrow Z$  est continue si et seulement si  $g \circ f_i$  est continue pour tout  $i$ .

*Démonstration.* (1) Si  $g$  est continue, les  $f_i \circ g$  le sont comme composées de fonctions continues. Réciproquement, pour tout  $U \in \tau_i$ ,  $(f_i \circ g)^{-1}(U) = g^{-1}(f_i^{-1}(U))$  est ouvert dans  $Z$ . Comme les  $f_i^{-1}(U)$  forment une sous-base de la topologie initiale,  $g$  est continue.

(2) Si  $g$  est continue, les  $g \circ f_i$  le sont. Réciproquement, soit  $V$  ouvert dans  $Z$ . Alors pour tout  $i$ ,  $f_i^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f_i)^{-1}(V)$  est ouvert dans  $X_i$ , donc  $g^{-1}(V)$  est ouvert dans la topologie finale.  $\square$

## 1.9 Espaces de Kolmogorov et quotient $T_0$

Revenons aux axiomes de séparation pour une construction qui illustre magnifiquement la pensée catégorielle. Étant donné un espace topologique quelconque, peut-on le « rendre »  $T_0$  de la manière la plus économique possible ? La réponse est le *quotient de Kolmogorov*, et c'est un exemple d'*adjonction* en action.

**Définition 1.30** (Quotient de Kolmogorov). Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique. On définit la relation d'équivalence :  $x \sim y$  si et seulement si  $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ . Le *quotient de Kolmogorov* est  $X_0 = X/\sim$  muni de la topologie quotient.

L'idée est simple : on identifie les points que la topologie ne peut pas distinguer. Le résultat est un espace  $T_0$ , et cette construction est « la meilleure possible » au sens précis suivant.

**Théorème 1.31** (Réflexion  $T_0$ ). Le quotient de Kolmogorov  $X_0$  est un espace  $T_0$ , et l'application quotient  $q: X \rightarrow X_0$  est universelle : pour toute application continue  $f: X \rightarrow Y$  avec  $Y$  un espace  $T_0$ , il existe une unique application continue  $\tilde{f}: X_0 \rightarrow Y$  telle que  $f = \tilde{f} \circ q$ . Catégoriquement, le foncteur d'inclusion  $\mathbf{Top}_0 \hookrightarrow \mathbf{Top}$  possède un adjoint à gauche.

*Démonstration.* Montrons que  $X_0$  est  $T_0$ . Soient  $[x] \neq [y]$  dans  $X_0$ . Alors  $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ , donc il existe un ouvert  $U$  de  $X$  contenant l'un mais pas l'autre. Comme  $U$  est saturé pour  $\sim$  (car si  $z \in U$  et  $\overline{\{z\}} = \overline{\{z'\}}$ , alors  $z' \in U$ ),  $q(U)$  est ouvert dans  $X_0$  et sépare  $[x]$  de  $[y]$ .

L'universalité : si  $f: X \rightarrow Y$  est continue et  $Y$  est  $T_0$ , alors  $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$  implique  $\overline{\{f(x)\}} = \overline{\{f(y)\}}$  (car  $f$  est continue), donc  $f(x) = f(y)$  car  $Y$  est  $T_0$ . Ainsi  $f$  passe au quotient.  $\square$

## 1.10 Compacité et variantes

Terminons ce chapitre de rappels par une mise au point terminologique cruciale. La notion de compacité, qui est si centrale en topologie, fait l'objet d'un désaccord de convention entre les traditions française et anglo-saxonne qui peut engendrer de sérieuses confusions.

**Définition 1.32** (Compacité). Un espace  $X$  est *compact* si de tout recouvrement ouvert de  $X$ , on peut extraire un sous-recouvrement fini.

### Attention

Contrairement à la convention de Bourbaki, nous ne supposons *pas* qu'un espace compact est séparé. Cette convention, standard en théorie des domaines et en topologie algébrique, est essentielle pour ce cours. Lorsque nous voudrions un espace compact et séparé, nous dirons explicitement « compact de Hausdorff ».

**Définition 1.33** (Quasi-compacité). Certains auteurs (suivant Bourbaki) appellent *quasi-compact* ce que nous appelons compact, et réservent « compact » pour « compact de Hausdorff ». Dans ce cours, **compact** = **quasi-compact au sens de Bourbaki**.

## 1.11 Exercices

**Exercice 1.1.** Montrer que l'espace de Sierpiński  $\mathbb{S}$  est le classifieur des ouverts : pour tout espace  $X$ , il y a une bijection entre  $\mathcal{O}(X)$  et l'ensemble des applications continues  $X \rightarrow \mathbb{S}$ .

**Exercice 1.2.** Montrer que dans la catégorie **Top**, l'égalisateur de  $f, g: X \rightrightarrows Y$  est le sous-espace  $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$  muni de la topologie induite.

**Exercice 1.3.** Vérifier que le foncteur  $\mathcal{O}: \mathbf{Top}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Frm}$  est fidèle si et seulement si on se restreint aux espaces  $T_0$ . Montrer un contre-exemple dans le cas non  $T_0$ .

**Exercice 1.4.** Soit  $X$  un ensemble ordonné fini. Montrer que la topologie d'Alexandrov sur  $X$  (dont les ouverts sont les parties hautes  $U$  telles que  $x \in U$  et  $x \leq y$  impliquent  $y \in U$ ) est la plus fine topologie dont l'ordre de spécialisation est l'ordre donné.

**Exercice 1.5.** Montrer que le foncteur d'oubli  $U: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$  ne préserve ni les coproduits ni les coégalisateurs. Donner des exemples explicites.

**Exercice 1.6** (Limites dans  $\mathbf{Top}_0$ ). Montrer que  $\mathbf{Top}_0$  est une sous-catégorie réflexive de **Top** et en déduire qu'elle admet toutes les limites et colimites. Préciser : les limites dans  $\mathbf{Top}_0$  coïncident-elles avec celles de **Top** ?



# Chapitre 2

## Espaces $T_0$ et Ordre de Spécialisation

L'une des découvertes les plus fécondes de la topologie du XX<sup>e</sup> siècle est que derrière chaque espace topologique se cache un *ordre*. Cet ordre, dit « de spécialisation », relie la topologie à la théorie des ordres partiels de manière profonde et inattendue. Dans le monde des espaces  $T_0$ , cette correspondance devient une équivalence : la topologie *est* l'ordre, et l'ordre *est* la topologie. C'est cette dualité qui fait des espaces  $T_0$  les objets centraux de ce cours.

### Intuition

L'ordre de spécialisation est le pont fondamental entre topologie et théorie de l'ordre. Dans un espace  $T_0$ , chaque point possède une « position » dans un ordre partiel déterminé par la topologie. Ce chapitre explore systématiquement cette correspondance et ses conséquences.

### 2.1 L'ordre de spécialisation

**Définition 2.1** (Ordre de spécialisation). Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique. L'*ordre de spécialisation* est la relation  $\leq$  sur  $X$  définie par :

$$x \leq y \iff x \in \overline{\{y\}} \iff \text{tout ouvert contenant } x \text{ contient aussi } y.$$

**Proposition 2.2** (Propriétés de base). Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique et  $\leq$  son ordre de spécialisation.

1.  $\leq$  est un préordre (réflexif et transitif).
2.  $\leq$  est un ordre partiel (antisymétrique) si et seulement si  $X$  est  $T_0$ .
3.  $x \leq y$  si et seulement si  $\overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{x\}}$  (attention à l'inversion!).
4. Tout ouvert  $U$  est une partie haute : si  $x \in U$  et  $x \leq y$ , alors  $y \in U$ .
5. Tout fermé  $F$  est une partie basse : si  $y \in F$  et  $x \leq y$ , alors  $x \in F$ .

*Démonstration.* (1) Réflexivité :  $x \in \overline{\{x\}}$  toujours. Transitivité : si  $x \leq y$  et  $y \leq z$ , alors pour tout ouvert  $U \ni x$ , on a  $y \in U$  (car  $x \leq y$ ), puis  $z \in U$  (car  $y \leq z$ ), donc  $x \leq z$ .

(2) Antisymétrie :  $x \leq y$  et  $y \leq x$  signifient  $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ , c'est-à-dire que  $x$  et  $y$  sont topologiquement indistinguables. C'est équivalent à  $x = y$  ssi  $X$  est  $T_0$ .

(3)  $x \leq y$  signifie  $x \in \overline{\{y\}}$ , donc  $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}}$ ... non, attention!  $x \leq y$  signifie que  $y$  spécialise  $x$ , i.e.  $x \in \overline{\{y\}}$ . L'adhérence de  $\{y\}$  est  $\downarrow y$  (les points spécialisés par  $y$ ).

(4) Soit  $U$  ouvert,  $x \in U$ ,  $x \leq y$ . Tout ouvert contenant  $x$  contient  $y$ , en particulier  $U$ , donc  $y \in U$ .

(5) Analogie par passage au complémentaire.  $\square$

### Attention

La convention d'ordre varie selon les auteurs. Nous suivons la convention où  $x \leq y$  signifie «  $x$  se spécialise en  $y$  », c'est-à-dire  $x \in \overline{\{y\}}$ , ou encore  $y$  est « plus générique » que  $x$ . Certains auteurs utilisent la convention opposée. Dans notre convention, les ouverts sont des parties *hautes*.

## 2.2 Topologie d'Alexandrov

**Définition 2.3** (Topologie d'Alexandrov). Soit  $(P, \leq)$  un ensemble préordonné. La *topologie d'Alexandrov* sur  $P$  est la topologie dont les ouverts sont exactement les parties hautes (*upward-closed*) :

$$U \in \tau_{\text{Alex}} \iff (x \in U \text{ et } x \leq y \Rightarrow y \in U).$$

**Théorème 2.4** (Caractérisation de la topologie d'Alexandrov). *Un espace topologique  $(X, \tau)$  porte la topologie d'Alexandrov de son ordre de spécialisation si et seulement si  $\tau$  est stable par intersections quelconques.*

*Démonstration.*  $(\Rightarrow)$  Les parties hautes d'un préordre sont stables par intersections quelconques.

$(\Leftarrow)$  Si  $\tau$  est stable par intersections quelconques, alors pour tout  $x$ , l'intersection  $\bigcap \{U \in \tau : x \in U\}$  est un ouvert, noté  $U_x$ . C'est le plus petit ouvert contenant  $x$ . On a  $y \in U_x$  si et seulement si tout ouvert contenant  $x$  contient  $y$ , c'est-à-dire  $x \leq y$ . Ainsi  $U_x = \uparrow x$  et tout ouvert est une réunion de tels ensembles, donc une partie haute.  $\square$

**Proposition 2.5** (Équivalence de catégories). Le foncteur qui associe à un ensemble préordonné  $(P, \leq)$  l'espace d'Alexandrov  $(P, \tau_{\text{Alex}})$  établit une équivalence de catégories entre **Preord** (préordres et fonctions croissantes) et la sous-catégorie pleine de **Top** formée des espaces d'Alexandrov. La restriction aux ordres partiels donne une équivalence avec les espaces d'Alexandrov  $T_0$ .

*Démonstration.* Une application  $f: P \rightarrow Q$  est croissante si et seulement si la préimage de toute partie haute est haute, ce qui équivaut à la continuité pour les topologies d'Alexandrov. Le foncteur inverse associe à un espace d'Alexandrov son ordre de spécialisation.  $\square$

## 2.3 Adhérence et ordre

**Proposition 2.6** (Adhérence et parties basses). Dans tout espace topologique  $(X, \tau)$  :

1.  $\overline{\{x\}} = \downarrow x$  (pour l'ordre de spécialisation).
2. Pour tout  $A \subseteq X$ ,  $\overline{A} = \downarrow A$  si et seulement si  $X$  porte la topologie d'Alexandrov.

3. En général,  $\downarrow A \subseteq \overline{A}$ , avec égalité pour les singletons.

*Démonstration.* (1) Par définition,  $y \in \overline{\{x\}}$  si et seulement si tout ouvert contenant  $y$  contient  $x$ , c'est-à-dire  $y \leq x$ , soit  $y \in \downarrow x$ .

(3) Si  $a \in A$  et  $y \leq a$ , alors  $y \in \overline{\{a\}} \subseteq \overline{A}$ , donc  $\downarrow A \subseteq \overline{A}$ .  $\square$

**Définition 2.7** (Point générique). Soit  $F$  un fermé irréductible de  $X$  (c'est-à-dire  $F \neq \emptyset$  et si  $F = F_1 \cup F_2$  avec  $\overline{F_1}, \overline{F_2}$  fermés, alors  $F = F_1$  ou  $F = F_2$ ). Un point  $x \in F$  est un *point générique* de  $F$  si  $\overline{\{x\}} = F$ .

*Remarque 2.8.* L'existence et l'unicité de points génériques pour les fermés irréductibles sont au cœur de la notion d'espace sobre (Chapitre 3).

## 2.4 Continuité et monotonie

**Théorème 2.9** (Continuité implique monotonie). Si  $f: X \rightarrow Y$  est continue, alors  $f$  est croissante pour les ordres de spécialisation :  $x \leq_X y \Rightarrow f(x) \leq_Y f(y)$ .

*Démonstration.* Soit  $V$  un ouvert de  $Y$  contenant  $f(x)$ . Alors  $f^{-1}(V)$  est un ouvert de  $X$  contenant  $x$ . Comme  $x \leq y$ , on a  $y \in f^{-1}(V)$ , donc  $f(y) \in V$ . Ainsi  $f(x) \leq_Y f(y)$ .  $\square$

### Attention

La réciproque est fautive en général : une fonction croissante entre espaces  $T_0$  n'est pas nécessairement continue. La continuité est une condition *plus forte* que la monotonie. Cependant, pour les topologies d'Alexandrov, les deux notions coïncident.

**Exemple 2.10.** Soit  $X = \{0, 1\}$  avec la topologie discrète et  $Y = \mathbb{S}$  l'espace de Sierpiński. L'ordre de spécialisation de  $X$  est l'égalité, celui de  $Y$  est  $1 \leq 0$ . La fonction  $f(0) = 1, f(1) = 0$  est croissante (trivialement, car l'ordre sur  $X$  est discret) mais elle est continue. La fonction constante  $g \equiv 0$  est également croissante et continue. Par contre, considérons  $X = \{a, b\}$  avec  $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$  (donc  $b \leq a$ ) et  $Y = \{c, d\}$  avec  $\tau' = \{\emptyset, \{c\}, \{c, d\}\}$  (donc  $d \leq c$ ). La fonction  $f(a) = d, f(b) = c$  est croissante ( $b \leq a$  donne  $f(b) = c \geq d = f(a)$ )... non,  $d \leq c$  donc  $f(a) \leq f(b)$ , et elle n'est pas continue car  $f^{-1}(\{c\}) = \{b\}$  n'est pas ouvert.

## 2.5 Le foncteur de spécialisation

**Définition 2.11** (Foncteur de spécialisation). Le *foncteur de spécialisation*  $\Sigma: \mathbf{Top}_0 \rightarrow \mathbf{Pos}$  associe à chaque espace  $T_0$  son ensemble sous-jacent muni de l'ordre de spécialisation, et à chaque application continue la même fonction (qui est croissante par le théorème précédent).

**Théorème 2.12** (Adjoint à gauche du foncteur de spécialisation). Le *foncteur d'Alexandrov*  $\text{Alex}: \mathbf{Pos} \rightarrow \mathbf{Top}_0$  est adjoint à gauche du foncteur de spécialisation  $\Sigma$  :

$$\text{Alex} \dashv \Sigma.$$

Autrement dit, pour tout poset  $P$  et tout espace  $T_0$   $X$  :

$$\text{Hom}_{\mathbf{Top}_0}(\text{Alex}(P), X) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Pos}}(P, \Sigma(X)).$$

*Démonstration.* Un morphisme  $\text{Alex}(P) \rightarrow X$  dans  $\mathbf{Top}_0$  est une application continue, donc en particulier croissante de  $(P, \leq)$  vers  $(\Sigma(X), \leq_X)$ . Réciproquement, une application croissante  $f: P \rightarrow \Sigma(X)$  est continue  $\text{Alex}(P) \rightarrow X$  car la préimage d'un ouvert  $U$  de  $X$  (partie haute pour  $\leq_X$ ) est une partie haute de  $P$  (car  $f$  est croissante), donc un ouvert d'Alexandrov.  $\square$

## 2.6 Espaces $T_0$ et $d$ -espaces

**Définition 2.13** ( $d$ -espace). Un espace topologique  $X$  est un  $d$ -espace (ou espace monotiquement convergent) si pour tout ensemble dirigé  $D$  dans  $(X, \leq)$  (pour l'ordre de spécialisation) ayant un supremum  $\bigvee D$  dans  $(X, \leq)$ , les ouverts contenant  $\bigvee D$  contiennent un élément de  $D$ . Équivalamment, si  $D$  est un sous-ensemble dirigé et  $\overline{D}$  est irréductible, alors  $\overline{D}$  a un point générique qui est le supremum de  $D$ .

**Théorème 2.14.** *Tout espace sobre est un  $d$ -espace. Tout espace  $T_1$  est un  $d$ -espace (trivialement, car les ensembles dirigés pour l'ordre discret sont les singletons).*

*Démonstration.* Soit  $X$  sobre et  $D$  un ensemble dirigé ayant un supremum  $s = \bigvee D$ . L'adhérence  $\overline{D}$  est un fermé, et  $\overline{D} = \downarrow \overline{D}$  (tout fermé est une partie basse). Montrons que  $\overline{D}$  est irréductible. Si  $\overline{D} = F_1 \cup F_2$  avec  $F_1, F_2$  fermés, alors  $D \subseteq F_1 \cup F_2$ . Comme  $D$  est dirigé et les  $F_i$  sont fermés (donc parties basses), si  $D \not\subseteq F_1$  et  $D \not\subseteq F_2$ , il existe  $d_1 \in D \setminus F_1$  et  $d_2 \in D \setminus F_2$ . Par directivité, il existe  $d \geq d_1, d_2$  dans  $D$ . Alors  $d \in F_1 \cup F_2$ , disons  $d \in F_1$ . Comme  $F_1$  est une partie basse et  $d_1 \leq d$ , on a  $d_1 \in F_1$ , contradiction. Donc  $\overline{D}$  est irréductible. Par sobriété,  $\overline{D}$  a un point générique, qui est nécessairement  $s$ .  $\square$

## 2.7 Espaces d'Alexandrov et treillis finis

**Exemple 2.15** (Topologie d'Alexandrov sur un treillis fini). Soit  $L$  un treillis fini. La topologie d'Alexandrov a pour ouverts les parties hautes. L'ordre de spécialisation coïncide avec l'ordre de  $L$ . Les fermés irréductibles sont les ensembles  $\downarrow p$  pour  $p$  élément irréductible de rencontre (*meet-irreducible*).

**Exercice 2.1.** Soit  $P = \{a, b, c\}$  avec  $a \leq b$ ,  $a \leq c$ , et  $b, c$  incomparables. Décrire la topologie d'Alexandrov, les fermés, les fermés irréductibles, et vérifier que l'espace est  $T_0$  mais ni  $T_1$  ni sobre.

## 2.8 Topologie supérieure d'un ordre

**Définition 2.16** (Topologie supérieure). Soit  $(P, \leq)$  un ensemble ordonné. La *topologie supérieure* (ou *upper topology*) est la topologie engendrée par les complémentaires des parties basses principales :

$$\tau_{\text{up}} = \langle P \setminus \downarrow x : x \in P \rangle.$$

C'est en général plus grossière que la topologie d'Alexandrov.

**Proposition 2.17.** La topologie supérieure a le même ordre de spécialisation que la topologie d'Alexandrov, à savoir l'ordre  $\leq$  donné. C'est la topologie la moins fine ayant cet ordre de spécialisation.



*Démonstration.* Les ouverts de  $\tau_{\text{up}}$  sont des parties hautes, donc l'ordre de spécialisation raffine  $\leq$ . Réciproquement, si  $x \leq y$ , alors tout ouvert  $P \setminus \downarrow z$  contenant  $x$  (i.e.,  $x \not\leq z$ ) satisfait  $y \not\leq z$  (sinon  $x \leq y \leq z$ , contradiction), donc  $y$  est dans cet ouvert. Ainsi l'ordre de spécialisation est exactement  $\leq$ .  $\square$

## 2.9 Ensembles saturés

**Définition 2.18** (Ensemble saturé). Un sous-ensemble  $A$  d'un espace topologique est *saturé* s'il est égal à l'intersection de tous les ouverts le contenant :  $A = \bigcap \{U \in \tau : A \subseteq U\}$ .

**Proposition 2.19.** Dans tout espace topologique :

1. Un sous-ensemble est saturé si et seulement s'il est une partie haute pour l'ordre de spécialisation.
2. Tout ouvert est saturé.
3. Le saturé d'un ensemble  $A$  est  $\uparrow A$ .
4. Un compact saturé est l'analogue correct d'un compact dans le cadre non-Hausdorff.

*Démonstration.* (1) L'intersection de tous les ouverts contenant  $A$  est l'ensemble des points  $y$  tels que tout ouvert contenant  $A$  contient  $y$ . Or  $y$  est dans tout ouvert contenant  $x \in A$  si et seulement si  $x \leq y$ . Donc cette intersection est  $\uparrow A$ .  $\square$

## 2.10 Stably compact spaces (aperçu)

**Définition 2.20** (Espace stablement compact). Un espace  $T_0$  est *stablement compact* s'il est :

1. compact,
2. localement compact (tout point a une base de voisinages compacts saturés),
3. sobre,
4. *coherent* : l'intersection de deux compacts saturés est compacte saturée.

*Remarque 2.21.* Les espaces stablement compacts jouent un rôle central dans la théorie, car ils sont exactement les espaces  $T_0$  compacts dont le treillis des ouverts est un *treillis continu*. Nous y reviendrons au Chapitre 8.

## 2.11 Exercices

**Exercice 2.2.** Montrer qu'un espace est  $T_1$  si et seulement si son ordre de spécialisation est l'égalité.

**Exercice 2.3.** Soit  $X = \text{Spec}(A)$  le spectre d'un anneau commutatif avec la topologie de Zariski. Décrire l'ordre de spécialisation. Montrer que le point générique de  $X$  (s'il existe) correspond à l'idéal premier minimal.

**Exercice 2.4.** Montrer que dans un espace  $T_0$ , l'adhérence d'un singleton  $\overline{\{x\}}$  est toujours un fermé irréductible.

**Exercice 2.5.** Construire un espace  $T_0$  dans lequel il existe un fermé irréductible qui n'est l'adhérence d'aucun singleton. (Indication : considérer un ensemble ordonné sans plus grand élément, muni de la topologie supérieure.)

**Exercice 2.6.** Soit  $f: X \rightarrow Y$  une application continue ouverte entre espaces  $T_0$ . Montrer que  $f$  est croissante et que  $f^{-1}(\uparrow y) = \uparrow f^{-1}(y)$  pour tout  $y \in Y$ .

**Exercice 2.7** (Topologie d'Alexandrov et limites directes). Soit  $(P_i, f_{ij})_{i \leq j}$  un système direct de posets finis avec fonctions croissantes. Montrer que la limite directe dans **Top** des espaces d'Alexandrov correspondants est un espace dont l'ordre de spécialisation est la limite directe des ordres.

# Chapitre 3

## Espaces Sobres et Locales

Et si l'on pouvait faire de la topologie sans jamais parler de points ? L'idée semble absurde : depuis Cantor et Hausdorff, un espace topologique est un ensemble de *points* muni d'une collection d'ouverts. Pourtant, à partir des années 1960, une tradition issue de la logique et de l'informatique théorique — portée par des mathématiciens comme John Isbell et les théoriciens des catégories — a montré que les ouverts eux-mêmes contiennent toute l'information. Le treillis des ouverts, vu comme structure algébrique, suffit à reconstruire la topologie. Les espaces où cette reconstruction est fidèle sont les espaces *sobres* ; la structure algébrique abstraite est une *locale*.

Ce chapitre explore ce passage fascinant du concret (les points) à l'abstrait (les ouverts comme entités autonomes), un voyage qui révèle des connexions profondes entre topologie, théorie de l'ordre et logique.

### Intuition

Les espaces sobres constituent la classe d'espaces  $T_0$  la plus naturelle : ce sont ceux où la topologie détermine complètement la structure ponctuelle, via la correspondance entre points et fermés irréductibles. Les locales formalisent l'idée d'une « topologie sans points » et fournissent un cadre algébrique pour la topologie.

### 3.1 Fermés irréductibles

**Définition 3.1** (Fermé irréductible). Un fermé  $F$  d'un espace topologique  $X$  est *irréductible* si :

1.  $F \neq \emptyset$  ;
2. si  $F = F_1 \cup F_2$  avec  $F_1, F_2$  fermés dans  $F$ , alors  $F = F_1$  ou  $F = F_2$ .

De manière équivalente,  $F$  est irréductible si et seulement si pour tous ouverts  $U_1, U_2$  de  $X$  tels que  $F \cap U_1 \neq \emptyset$  et  $F \cap U_2 \neq \emptyset$ , on a  $F \cap U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ .

**Proposition 3.2** (Propriétés des fermés irréductibles). 1. L'adhérence d'un singleton  $\overline{\{x\}}$  est toujours irréductible.

2. L'image continue d'un irréductible est irréductible.
3. L'adhérence d'un irréductible est irréductible.

4. Si  $F$  est irréductible et  $F \cap G \neq \emptyset$  avec  $G$  ouvert, alors  $F \cap G$  est irréductible dans  $G$ .

*Démonstration.* (1) Si  $\overline{\{x\}} = F_1 \cup F_2$  avec  $F_i$  fermés, alors  $x \in F_1$  ou  $x \in F_2$ , disons  $x \in F_1$ . Alors  $\overline{\{x\}} \subseteq F_1$ , donc  $F_1 = \overline{\{x\}}$ .

(2) Soit  $f: X \rightarrow Y$  continue et  $F$  irréductible dans  $X$ . Si  $f(F) \subseteq G_1 \cup G_2$  avec  $G_i$  fermés, alors  $F \subseteq f^{-1}(G_1) \cup f^{-1}(G_2)$  avec  $f^{-1}(G_i)$  fermés, donc  $F \subseteq f^{-1}(G_i)$  pour un  $i$ , d'où  $f(F) \subseteq G_i$ . L'image  $f(F)$  est irréductible, et  $\overline{f(F)}$  l'est aussi par (3).

(3) Si  $\overline{F} = G_1 \cup G_2$ , alors  $F \subseteq G_1 \cup G_2$ , donc  $F = (F \cap G_1) \cup (F \cap G_2)$ . Par irréductibilité,  $F \subseteq G_i$  pour un  $i$ , d'où  $\overline{F} \subseteq G_i$ .  $\square$

## 3.2 Espaces sobres

**Définition 3.3** (Espace sobre). Un espace topologique  $X$  est *sobre* si tout fermé irréductible possède un unique point générique : pour tout fermé irréductible  $F$ , il existe un unique  $x \in X$  tel que  $\overline{\{x\}} = F$ .

**Théorème 3.4** (Caractérisation des espaces sobres). *Un espace  $X$  est sobre si et seulement si :*

1.  $X$  est  $T_0$ , et
2. tout fermé irréductible a un point générique.

*Démonstration.* ( $\Rightarrow$ ) L'unicité du point générique implique  $T_0$  : si  $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ , alors  $x$  et  $y$  sont tous deux points génériques du même fermé irréductible, donc  $x = y$ .

( $\Leftarrow$ ) Il suffit de montrer l'unicité. Si  $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}} = F$ , alors comme  $X$  est  $T_0$ ,  $x = y$ .  $\square$

**Exemple 3.5** (Exemples d'espaces sobres). 1. Tout espace de Hausdorff est sobre (les fermés irréductibles sont les singletons, car dans un espace  $T_2$ , tout fermé irréductible est un singleton).

2. Le spectre  $\text{Spec}(A)$  d'un anneau commutatif est sobre (théorème classique de géométrie algébrique).

3. L'espace de Sierpiński  $\mathbb{S}$  est sobre.

4. Tout treillis complet avec la topologie de Scott est sobre.

**Exemple 3.6** (Espace  $T_0$  non sobre). Soit  $X = \mathbb{N}$  muni de la topologie dont les ouverts sont  $\emptyset$  et les ensembles cofinaux  $\{n, n+1, n+2, \dots\}$ . L'ordre de spécialisation est l'ordre usuel sur  $\mathbb{N}$ . Le fermé  $X$  lui-même est irréductible (car tout ouvert non vide est cofinal et deux ouverts non vides s'intersectent toujours). Mais  $X = \overline{\{n\}}$  n'est possible pour aucun  $n$ , car  $\overline{\{n\}} = \{0, 1, \dots, n\}$ . Donc  $X$  n'est pas sobre.

## 3.3 La sobrification

**Définition 3.7** (Sobrification). Soit  $X$  un espace topologique. L'espace des *fermés irréductibles* de  $X$ , noté  $X^s$  (ou  $\text{Sob}(X)$ ), est l'ensemble des fermés irréductibles de  $X$ , muni de la topologie dont les ouverts sont :

$$\tilde{U} = \{F \in X^s : F \cap U \neq \emptyset\}, \quad U \in \mathcal{O}(X).$$

L'application  $\eta_X: X \rightarrow X^s$  définie par  $\eta_X(x) = \overline{\{x\}}$  est continue.

**Théorème 3.8** (Propriétés de la sobrification). 1.  $X^s$  est sobre.

2. L'application  $U \mapsto \tilde{U}$  est un isomorphisme de cadres  $\mathcal{O}(X) \cong \mathcal{O}(X^s)$ .

3.  $\eta_X$  est universelle : pour toute application continue  $f: X \rightarrow Y$  avec  $Y$  sobre, il existe une unique application continue  $\tilde{f}: X^s \rightarrow Y$  telle que  $f = \tilde{f} \circ \eta_X$ .

4. Le foncteur de sobrification  $\text{Sob}: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Sob}$  est adjoint à gauche de l'inclusion  $\mathbf{Sob} \hookrightarrow \mathbf{Top}$ .

*Démonstration.* (1) Montrons que  $X^s$  est  $T_0$ . Si  $F_1 \neq F_2$  sont deux fermés irréductibles, alors il existe un ouvert  $U$  tel que, disons,  $F_1 \cap U \neq \emptyset$  et  $F_2 \cap U = \emptyset$ . Alors  $F_1 \in \tilde{U}$  et  $F_2 \notin \tilde{U}$ .

Montrons que tout fermé irréductible de  $X^s$  a un point générique. Soit  $\mathcal{F}$  un fermé irréductible de  $X^s$ . Posons  $F_0 = \overline{\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F}$  dans  $X$ . On vérifie que  $F_0$  est un fermé irréductible de  $X$ , et que  $\overline{\{F_0\}}^{X^s} = \mathcal{F}$ .

(2) L'application  $U \mapsto \tilde{U}$  préserve les réunions quelconques et les intersections finies par construction, et elle est bijective car  $\tilde{U}_1 = \tilde{U}_2$  implique, pour tout fermé irréductible  $F$ , que  $F \cap U_1 \neq \emptyset \Leftrightarrow F \cap U_2 \neq \emptyset$ . Comme les singletons  $\{x\}$  sont des fermés irréductibles, on obtient  $U_1 = U_2$ .

(3) Si  $f: X \rightarrow Y$  est continue et  $Y$  sobre, on définit  $\tilde{f}(F) =$  l'unique point générique de  $\overline{f(F)}$  dans  $Y$  (qui existe car  $f(F)$  est irréductible par la proposition précédente, et  $Y$  est sobre). On vérifie que  $\tilde{f}$  est continue et unique.  $\square$

## 3.4 Cadres et locales

**Définition 3.9** (Cadre (*Frame*)). Un *cadre* est un treillis complet  $L$  satisfaisant la loi de distributivité infinie :

$$a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i)$$

pour tout  $a \in L$  et toute famille  $(b_i)_{i \in I}$  dans  $L$ . Un *morphisme de cadres*  $h: L \rightarrow M$  préserve les sups quelconques et les infs finis (y compris  $\top$  et  $\perp$ ).

**Définition 3.10** (Locale). La catégorie **Loc** des *locales* est la catégorie opposée de la catégorie des cadres :

$$\mathbf{Loc} = \mathbf{Frm}^{\text{op}}.$$

Un objet de **Loc** est un cadre vu comme « espace sans points », et un morphisme de locales  $f: L \rightarrow M$  est un morphisme de cadres  $f^*: M \rightarrow L$ .

*Remarque 3.11.* Le renversement des flèches est motivé par l'analogie avec les espaces topologiques : une application continue  $f: X \rightarrow Y$  induit  $f^{-1}: \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$ , qui va dans le sens opposé.

## 3.5 Le foncteur $\text{pt}$ et l'adjonction $\mathcal{O} \dashv \text{pt}$

**Définition 3.12** (Points d'une locale). Soit  $L$  une locale (c'est-à-dire un cadre). Un *point* de  $L$  est un morphisme de cadres  $p: L \rightarrow \{0, 1\}$  (où  $\{0, 1\}$  est le cadre à deux éléments), ou de façon équivalente, un élément complètement premier  $q \in L$  ( $q \neq \top$  et  $a \wedge b \leq q \Rightarrow a \leq q$  ou  $b \leq q$ ).

L'espace des points  $\text{pt}(L)$  est l'ensemble des points de  $L$  muni de la topologie dont les ouverts sont les  $\Sigma_a = \{p : p(a) = 1\}$  pour  $a \in L$ .

**Théorème 3.13** (Adjonction  $\mathcal{O} \dashv \text{pt}$ ). *Les foncteurs  $\mathcal{O} : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Loc}$  et  $\text{pt} : \mathbf{Loc} \rightarrow \mathbf{Top}$  forment une adjonction :*

$$\mathcal{O} \dashv \text{pt}.$$

L'unité  $\eta_X : X \rightarrow \text{pt}(\mathcal{O}(X))$  envoie  $x$  sur le point  $\eta_X(x)(U) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in U \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

*Démonstration.* Pour un espace  $X$  et une locale  $L$ , on doit établir :

$$\text{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, \text{pt}(L)) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Loc}}(\mathcal{O}(X), L).$$

Le membre droit est  $\text{Hom}_{\mathbf{Frm}}(L, \mathcal{O}(X))$ . Une application continue  $f : X \rightarrow \text{pt}(L)$  induit un morphisme de cadres  $L \rightarrow \mathcal{O}(X)$  envoyant  $a \mapsto f^{-1}(\Sigma_a)$ . Réciproquement, un morphisme de cadres  $h : L \rightarrow \mathcal{O}(X)$  induit une application continue  $X \rightarrow \text{pt}(L)$  envoyant  $x$  sur le point  $a \mapsto [x \in h(a)]$ .  $\square$

**Théorème 3.14** (Caractérisation des espaces sobres via l'adjonction). *Un espace  $X$  est sobre si et seulement si l'unité  $\eta_X : X \rightarrow \text{pt}(\mathcal{O}(X))$  est un homéomorphisme.*

*Démonstration.* L'application  $\eta_X$  est injective si et seulement si  $X$  est  $T_0$  (deux points distincts donnent des "points" différents du cadre). Elle est surjective si et seulement si tout point du cadre  $\mathcal{O}(X)$  provient d'un point de  $X$ , ce qui équivaut à l'existence d'un point générique pour chaque fermé irréductible. Enfin,  $\eta_X$  est toujours un plongement topologique.  $\square$

## 3.6 Locales spatiales et cadres spatiaux

**Définition 3.15** (Locale spatiale). Une locale  $L$  est *spatiale* si le morphisme canonique de cadres  $L \rightarrow \mathcal{O}(\text{pt}(L))$  est un isomorphisme, c'est-à-dire si  $L$  a « assez de points ».

**Théorème 3.16.** *Les restrictions de l'adjonction  $\mathcal{O} \dashv \text{pt}$  induisent une équivalence de catégories entre la catégorie des espaces sobres et la catégorie des locales spatiales.*

**Proposition 3.17** (Exemples de locales non spatiales). Il existe des cadres sans aucun point : par exemple, le cadre des ouverts réguliers de  $\mathbb{R}$  modulo un certain idéal est un cadre non trivial sans point.

## 3.7 Sous-locales et noyaux

**Définition 3.18** (Noyau). Soit  $L$  un cadre. Un *noyau* (*nucleus*) sur  $L$  est une application  $j : L \rightarrow L$  telle que :

1.  $a \leq j(a)$  (inflation) ;
2.  $j(j(a)) = j(a)$  (idempotence) ;
3.  $j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$  (préservation des infis finis).

**Théorème 3.19** (Sous-locales via les noyaux). *Les sous-locales d'une locale  $L$  correspondent bijectivement aux noyaux sur  $L$ . Si  $j$  est un noyau, l'image  $j(L) = \{a \in L : j(a) = a\}$  est un cadre (avec les mêmes infs que  $L$  et les sups modifiés  $\bigvee^j a_i = j(\bigvee a_i)$ ), et le morphisme de cadres  $L \rightarrow j(L)$ ,  $a \mapsto j(a)$ , définit un plongement de locales  $j(L) \hookrightarrow L$ .*

*Démonstration.* Vérifions que  $j(L)$  est un cadre. Il est clairement ordonné par l'ordre hérité de  $L$ . Pour les infs : si  $a, b \in j(L)$ , alors  $j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b) = a \wedge b$ , donc  $a \wedge b \in j(L)$ . Pour les sups :  $j(\bigvee a_i)$  est bien dans  $j(L)$  et c'est le plus petit élément de  $j(L)$  au-dessus de tous les  $a_i$ . La distributivité se vérifie en utilisant celle de  $L$ .  $\square$

## 3.8 Dualité de Stone

**Définition 3.20** (Treillis distributif borné). Un *treillis distributif borné* est un treillis  $D$  possédant un plus petit élément 0 et un plus grand élément 1, et satisfaisant  $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ .

**Définition 3.21** (Espace spectral). Un espace topologique  $X$  est *spectral* s'il est :

1.  $T_0$  et sobre ;
2. compact ;
3. l'ensemble des ouverts compacts est stable par intersection finie et forme une base de la topologie.

**Théorème 3.22** (Dualité de Stone pour les treillis distributifs). *Il y a une équivalence de catégories entre la catégorie des treillis distributifs bornés et la catégorie des espaces spectraux (avec applications continues spectrales). Le foncteur dans un sens associe à un treillis  $D$  l'espace de ses filtres premiers, et dans l'autre, à un espace spectral  $X$  le treillis de ses ouverts compacts.*

## 3.9 Exercices

**Exercice 3.1.** Montrer que l'espace de Sierpiński  $\mathbb{S}$  est sobre et décrire ses fermés irréductibles.

**Exercice 3.2.** Montrer qu'un espace est sobre si et seulement s'il est un  $d$ -espace et tout fermé irréductible a un point générique.

**Exercice 3.3.** Soit  $L$  un cadre. Montrer que  $\text{pt}(L)$  est toujours un espace sobre.

**Exercice 3.4.** Vérifier que le cadre  $\mathcal{O}(\mathbb{R})$  est spatial (c'est-à-dire que  $\mathbb{R}$  avec la topologie usuelle donne une locale spatiale).

**Exercice 3.5** (Sous-locales ouvertes et fermées). Soit  $L$  un cadre et  $a \in L$ . Montrer que :

1. Le noyau  $j_a(x) = a \vee x$  définit une sous-locale fermée.
2. Le noyau  $j^a(x) = a \Rightarrow x$  (où  $\Rightarrow$  est l'implication de Heyting) définit une sous-locale ouverte.

**Exercice 3.6.** Montrer que la sobrification de  $\mathbb{N}$  (avec la topologie des ouverts cofinaux) est homéomorphe à  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$  avec la topologie d'Alexandrov de l'ordre usuel.

**Exercice 3.7** (Algèbre de Heyting). Montrer que tout cadre est une algèbre de Heyting : pour tous  $a, b$ , il existe un plus grand élément  $c$  tel que  $a \wedge c \leq b$ , noté  $a \Rightarrow b$ . Montrer que  $a \Rightarrow b = \bigvee \{c : a \wedge c \leq b\}$ .



# Chapitre 4

## Quasi-métriques et Topologie Asymétrique

Depuis Fréchet (1906), la distance vérifie trois axiomes : positivité, symétrie, inégalité triangulaire. Mais de nombreuses situations réelles sont intrinsèquement asymétriques : le temps de trajet en montée diffère de celui en descente, le coût de calcul d'une approximation dépend du sens du raffinement, et en informatique théorique, la distance de Smyth entre programmes mesure un rapprochement qui n'est pas réciproque. Abandonner l'axiome de symétrie conduit aux *quasi-métriques*, un cadre développé notamment par Hans-Peter Künzi à partir des années 1980, qui révèle une topologie riche et surprenante : chaque quasi-métrique engendre *deux* topologies, une vers l'avant et une vers l'arrière.

### Intuition

Les quasi-métriques généralisent les métriques en abandonnant l'axiome de symétrie : la « distance » de  $x$  à  $y$  peut différer de celle de  $y$  à  $x$ . Cette asymétrie, loin d'être une pathologie, capture naturellement des notions de coût orienté, de raffinement, et de complexité en informatique.

### 4.1 Définitions fondamentales

**Définition 4.1** (Quasi-métrique). Une *quasi-métrique* sur un ensemble  $X$  est une fonction  $d: X \times X \rightarrow [0, +\infty]$  satisfaisant :

1.  $d(x, x) = 0$  pour tout  $x \in X$  ;
2.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  pour tous  $x, y, z \in X$  (inégalité triangulaire).

Si de plus  $d(x, y) = 0 = d(y, x) \Rightarrow x = y$ , on dit que  $d$  est  $T_0$ -séparée. Le couple  $(X, d)$  est un *espace quasi-métrique*.

*Remarque 4.2.* Nous autorisons  $d$  à prendre la valeur  $+\infty$ , ce qui est essentiel pour certaines constructions (produits infinis, domaines de complexité).

**Définition 4.3** (Quasi-métrique conjuguée et symétrisée). Soit  $(X, d)$  un espace quasi-métrique.

- La *conjuguée* de  $d$  est  $d^{-1}(x, y) = d(y, x)$ .

- La *symétrisée* de  $d$  est  $d^s(x, y) = \max(d(x, y), d^{-1}(x, y))$ .
- La *somme symétrisée* est  $\hat{d}(x, y) = d(x, y) + d^{-1}(x, y)$ .

La symétrisée  $d^s$  est une métrique (éventuellement à valeurs dans  $[0, +\infty]$ ) dès que  $d$  est  $T_0$ -séparée.

## 4.2 Topologie associée à une quasi-métrique

**Définition 4.4** (Boules ouvertes). Pour  $(X, d)$  quasi-métrique,  $x \in X$  et  $\varepsilon > 0$  :

$$B_d(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$$

est la *boule ouverte avant* (ou *boule directe*). La *topologie directe*  $\tau_d$  est la topologie engendrée par ces boules.

**Proposition 4.5.** Les boules ouvertes  $B_d(x, \varepsilon)$  forment une base de la topologie  $\tau_d$ . L'espace  $(X, \tau_d)$  est  $T_0$  si et seulement si  $d$  est  $T_0$ -séparée.

*Démonstration.* Soient  $y \in B_d(x_1, \varepsilon_1) \cap B_d(x_2, \varepsilon_2)$ . Posons  $\delta = \min(\varepsilon_1 - d(x_1, y), \varepsilon_2 - d(x_2, y)) > 0$ . Pour tout  $z \in B_d(y, \delta)$ , on a  $d(x_i, z) \leq d(x_i, y) + d(y, z) < d(x_i, y) + \delta \leq \varepsilon_i$ . Donc  $B_d(y, \delta) \subseteq B_d(x_1, \varepsilon_1) \cap B_d(x_2, \varepsilon_2)$ , ce qui montre que les boules forment une base.

Pour la séparation  $T_0$  : si  $\tau_d$  est  $T_0$ , alors pour  $x \neq y$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que, disons,  $y \notin B_d(x, \varepsilon)$ , d'où  $d(x, y) \geq \varepsilon > 0$ . Comme l'un des deux ( $d(x, y)$  ou  $d(y, x)$ ) est non nul,  $d$  est  $T_0$ -séparée.  $\square$

**Définition 4.6** (Ordre de spécialisation quasi-métrique). L'ordre de spécialisation de  $\tau_d$  est :

$$x \leq_d y \iff d(x, y) = 0.$$

**Proposition 4.7.** L'ordre  $\leq_d$  est un préordre (ordre partiel si  $d$  est  $T_0$ -séparée), et pour  $d$   $T_0$ -séparée,  $d(x, y) = 0$  équivaut à «  $y$  est dans tout ouvert contenant  $x$  ».

## 4.3 Exemples fondamentaux

**Exemple 4.8** (Quasi-métrique de Sorgenfrey). Sur  $\mathbb{R}$ , posons :

$$d_S(x, y) = \begin{cases} y - x & \text{si } y \geq x, \\ 1 & \text{si } y < x. \end{cases}$$

Alors  $\tau_{d_S}$  est la topologie de Sorgenfrey (base de semi-intervalles  $[a, b)$ ).

**Exemple 4.9** (Quasi-métrique de Baire). Sur  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  (suites infinies de naturels), définissons :

$$d(f, g) = \begin{cases} 0 & \text{si } f = g, \\ 2^{-\min\{n: f(n) \neq g(n)\}} & \text{si } f \neq g \text{ et } f \sqsubseteq g, \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $f \sqsubseteq g$  signifie que  $f$  est un préfixe de  $g$  (au sens où  $f(k) \leq g(k)$  pour les premiers indices). Cette quasi-métrique capture l'idée d'approximation :  $d(f, g)$  est petit si  $g$  étend  $f$  sur un long préfixe.

**Exemple 4.10** (Quasi-métrique de complexité). Soit  $\Sigma^*$  l'ensemble des mots sur un alphabet  $\Sigma$ . Définissons :

$$d(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \text{ est préfixe de } v, \\ 2^{-|u \wedge v|} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $|u \wedge v|$  est la longueur du plus long préfixe commun. C'est une quasi-métrique  $T_0$ -séparée dont la topologie directe est la topologie de Scott sur les mots (partiels).

## 4.4 Quasi-uniformités

**Définition 4.11** (Quasi-uniformité). Une *quasi-uniformité* sur  $X$  est un filtre  $\mathcal{U}$  de sous-ensembles de  $X \times X$  tel que :

1. Pour tout  $U \in \mathcal{U}$ , la diagonale  $\Delta_X \subseteq U$ .
2. Pour tout  $U \in \mathcal{U}$ , il existe  $V \in \mathcal{U}$  tel que  $V \circ V \subseteq U$  (où  $V \circ V = \{(x, z) : \exists y, (x, y) \in V, (y, z) \in V\}$ ).

(On ne demande pas que  $U \in \mathcal{U} \Rightarrow U^{-1} \in \mathcal{U}$ .)

**Proposition 4.12.** Toute quasi-métrique  $d$  engendre une quasi-uniformité dont les entourages de base sont les  $U_\varepsilon = \{(x, y) : d(x, y) < \varepsilon\}$ .

**Définition 4.13** (Quasi-uniformité de Pervin). Pour tout espace topologique  $(X, \tau)$ , la *quasi-uniformité de Pervin* est engendrée par les entourages :

$$S_U = (U \times U) \cup (U^c \times X), \quad U \in \tau.$$

Sa topologie associée est  $\tau$ .

**Théorème 4.14** (Quasi-uniformisabilité). *Tout espace topologique est quasi-uniformisable (par la quasi-uniformité de Pervin, par exemple). La catégorie des espaces quasi-uniformes est équivalente, en un sens précis, à une extension de la topologie générale.*

## 4.5 Complétion de quasi-espaces métriques

**Définition 4.15** (Suite de Cauchy directe). Dans un espace quasi-métrique  $(X, d)$ , une suite  $(x_n)$  est une *suite de Cauchy directe* (ou *forward-Cauchy*) si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N$  tel que pour tous  $N \leq m \leq n$ ,  $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ .

**Définition 4.16** ( $y$ -limite). On dit que  $(x_n)$  *d-converge* vers  $\ell$  (ou est *Yoneda-convergente*) si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $d(\ell, x_n) < \varepsilon$  et pour tout  $y \in X$  tel que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} d(y, x_n) \leq r$ , on a  $d(y, \ell) \leq r$ .

**Définition 4.17** (Complétion de Yoneda). Un espace quasi-métrique est *Yoneda-complet* si toute suite de Cauchy directe a une  $y$ -limite. La *complétion de Yoneda* de  $(X, d)$  est le plus petit espace quasi-métrique Yoneda-complet contenant  $(X, d)$  comme sous-espace dense.

**Théorème 4.18** (Complétion et domaines). *Soit  $(X, d)$  un espace quasi-métrique  $T_0$ -séparé. Si  $d$  est à valeurs dans  $[0, +\infty)$  et vérifie  $d(x, y) = 0 \Rightarrow x \leq y$ , alors la complétion de Yoneda de  $(X, d)$  est un dcpo muni d'une quasi-métrique compatible avec la topologie de Scott.*

## 4.6 Continuité et quasi-métriques

**Définition 4.19** (Application non-expansive). Une application  $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  est *non-expansive* si  $d_Y(f(x), f(y)) \leq d_X(x, y)$  pour tous  $x, y$ .

**Proposition 4.20.** Toute application non-expansive est continue pour les topologies directes. La réciproque est fausse.

**Théorème 4.21** (Catégorie des espaces quasi-métriques). *La catégorie  $\mathbf{QMet}$  des espaces quasi-métriques  $T_0$ -séparés et applications non-expansives est complète et cocomplète. Le foncteur d'oubli  $\mathbf{QMet} \rightarrow \mathbf{Top}_0$  préserve les limites.*

## 4.7 Quasi-métriques et réseaux de Petri (aperçu)

*Remarque 4.22.* Les quasi-métriques apparaissent naturellement dans l'étude des réseaux de Petri et des systèmes de transitions étiquetés, où la « distance » de l'état  $s$  à l'état  $t$  mesure le coût minimal pour passer de  $s$  à  $t$ . Cette distance est généralement non symétrique.

## 4.8 Topologie co-directe et paire conjuguée

**Définition 4.23** (Topologie co-directe). La *topologie co-directe* (ou topologie conjuguée) est  $\tau_{d^{-1}}$ , la topologie engendrée par les boules de la quasi-métrique conjuguée  $d^{-1}$ .

**Proposition 4.24.** Les topologies  $\tau_d$  et  $\tau_{d^{-1}}$  déterminent un espace bitopologique  $(X, \tau_d, \tau_{d^{-1}})$ . La topologie jointe  $\tau_d \vee \tau_{d^{-1}}$  coïncide avec la topologie de la symétrisée  $\tau_{d^s}$ .

*Démonstration.* La topologie jointe est engendrée par les boules ouvertes de  $d$  et de  $d^{-1}$ . Une boule ouverte de  $d^s$  est  $B_{d^s}(x, \varepsilon) = B_d(x, \varepsilon) \cap B_{d^{-1}}(x, \varepsilon)$ , ce qui engendre la même topologie.  $\square$

## 4.9 Exercices

**Exercice 4.1.** Montrer que l'ordre de spécialisation de la topologie associée à une quasi-métrique  $d$  est donné par  $x \leq y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$ .

**Exercice 4.2.** Soit  $(X, d)$  un espace quasi-métrique. Montrer que  $d$  est une métrique si et seulement si  $\tau_d$  est  $T_1$ .

**Exercice 4.3.** Construire une quasi-métrique sur  $\{0, 1\}$  dont la topologie directe est celle de Sierpiński.

**Exercice 4.4.** Montrer que la quasi-uniformité de Pervin d'un espace  $T_0$  est la plus petite quasi-uniformité compatible avec la topologie.

**Exercice 4.5** (Complétion de  $\mathbb{Q}$ ). Soit  $d(x, y) = \max(y - x, 0)$  sur  $\mathbb{Q}$ . Décrire la topologie directe, l'ordre de spécialisation, et la complétion de Yoneda de  $(\mathbb{Q}, d)$ .

**Exercice 4.6.** Montrer que pour un espace quasi-métrique  $(X, d)$  à valeurs finies, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $(X, d)$  est Yoneda-complet.
2. Tout filtre de Cauchy directe converge.
3. Toute suite de Cauchy directe a une  $y$ -limite.

**Exercice 4.7.** Soit  $D$  un dcpo avec la topologie de Scott. Construire une quasi-métrique  $d$  sur  $D$  telle que  $\tau_d$  soit la topologie de Scott et  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \sqsubseteq y$ . (Indication : utiliser une famille de fonctions Scott-continues à valeurs dans  $[0, +\infty)$ .)



# Chapitre 5

## Espaces Bitopologiques

En 1963, John C. Kelly propose une idée audacieuse : munir un même ensemble de *deux* topologies distinctes et étudier leur interaction. L'idée n'est pas gratuite — elle émerge naturellement des quasi-métriques, où la topologie « avant » et la topologie « arrière » cohabitent, et de la théorie de l'ordre, où les topologies haute et basse sur un ensemble ordonné capturent des aspects complémentaires. La dualité de Nachbin entre espaces ordonnés compacts et espaces stablement compacts montre que cette structure bitopologique n'est pas un artefact, mais un phénomène profond.

### Intuition

Un espace bitopologique porte *deux* topologies sur le même ensemble, capturant une dualité naturelle. Cette structure apparaît naturellement via les quasi-métriques (topologie directe et conjuguée), en théorie de l'ordre (topologies haute et basse), et dans la dualité de Nachbin entre espaces ordonnés compacts et espaces stablement compacts.

### 5.1 Définitions fondamentales

**Définition 5.1** (Espace bitopologique). Un *espace bitopologique* est un triplet  $(X, \tau_1, \tau_2)$  où  $X$  est un ensemble et  $\tau_1, \tau_2$  sont deux topologies sur  $X$ . On appelle  $\tau_1$  la topologie *primaire* et  $\tau_2$  la topologie *secondaire* (ou *duale*).

**Définition 5.2** (Application bicontinue). Soient  $(X, \tau_1, \tau_2)$  et  $(Y, \sigma_1, \sigma_2)$  deux espaces bitopologiques. Une application  $f: X \rightarrow Y$  est *bicontinue* si  $f$  est continue de  $(X, \tau_1)$  vers  $(Y, \sigma_1)$  et de  $(X, \tau_2)$  vers  $(Y, \sigma_2)$ .

**Définition 5.3** (Catégorie **BiTop**). La catégorie **BiTop** a pour objets les espaces bitopologiques et pour morphismes les applications bicontinues. Un *bi-homéomorphisme* est un isomorphisme dans **BiTop**.

### 5.2 Exemples fondamentaux

**Exemple 5.4** (Espace bitopologique d'une quasi-métrique). Soit  $(X, d)$  un espace quasi-métrique. L'espace bitopologique associé est  $(X, \tau_d, \tau_{d^{-1}})$ , où  $\tau_d$  est la topologie directe et  $\tau_{d^{-1}}$  la topologie de la conjuguée.

**Exemple 5.5** (Espaces ordonnés). Soit  $(X, \leq)$  un ensemble ordonné. L'espace bitopologique d'Alexandrov est  $(X, \tau_{\text{up}}, \tau_{\text{down}})$ , où  $\tau_{\text{up}}$  est la topologie d'Alexandrov (ouverts = parties hautes) et  $\tau_{\text{down}}$  la topologie duale (ouverts = parties basses).

**Exemple 5.6** (Droite réelle ordonnée). Sur  $\mathbb{R}$ , la topologie des ouverts à droite  $\{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$  et la topologie des ouverts à gauche  $\{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$  définissent un espace bitopologique. Leur supremum est la topologie usuelle de  $\mathbb{R}$ .

### 5.3 Axiomes de séparation bitopologiques

**Définition 5.7** (Séparation de Kelly). Un espace bitopologique  $(X, \tau_1, \tau_2)$  est :

- *Pairwise  $T_0$*  si pour tous  $x \neq y$ , il existe un ouvert de  $\tau_1$  ou de  $\tau_2$  contenant l'un mais pas l'autre.
- *Pairwise  $T_1$*  si pour tous  $x \neq y$ , il existe un  $\tau_1$ -ouvert contenant  $x$  mais pas  $y$ , et un  $\tau_2$ -ouvert contenant  $y$  mais pas  $x$  (ou inversement).
- *Pairwise  $T_2$*  (ou *pairwise Hausdorff*) si pour tous  $x \neq y$ , il existe un  $\tau_1$ -ouvert  $U \ni x$  et un  $\tau_2$ -ouvert  $V \ni y$  avec  $U \cap V = \emptyset$ .

**Théorème 5.8** (Pairwise  $T_2$  et quasi-métriques). Si  $(X, d)$  est une quasi-métrique  $T_0$ -séparée, alors  $(X, \tau_d, \tau_{d^{-1}})$  est pairwise  $T_2$ .

*Démonstration.* Soient  $x \neq y$ . Alors  $d(x, y) > 0$  ou  $d(y, x) > 0$ . Supposons  $d(x, y) > 0$  et posons  $\varepsilon = d(x, y)/2 > 0$ . Alors  $U = B_d(x, \varepsilon)$  est un  $\tau_d$ -ouvert contenant  $x$  et  $V = B_{d^{-1}}(y, \varepsilon)$  est un  $\tau_{d^{-1}}$ -ouvert contenant  $y$ . Si  $z \in U \cap V$ , alors  $d(x, z) < \varepsilon$  et  $d^{-1}(y, z) = d(z, y) < \varepsilon$ , donc  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < 2\varepsilon = d(x, y)$ , contradiction. Donc  $U \cap V = \emptyset$ .  $\square$

### 5.4 Normalité bitopologique

**Définition 5.9** (Normalité pairwise). Un espace bitopologique  $(X, \tau_1, \tau_2)$  est *pairwise normal* si pour tout  $\tau_1$ -fermé  $F_1$  et tout  $\tau_2$ -fermé  $F_2$  avec  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ , il existe un  $\tau_2$ -ouvert  $U_2 \supseteq F_1$  et un  $\tau_1$ -ouvert  $U_1 \supseteq F_2$  avec  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ .

**Théorème 5.10** (Lemme d'Urysohn bitopologique). Si  $(X, \tau_1, \tau_2)$  est pairwise normal et pairwise  $T_1$ , alors pour tout  $\tau_1$ -fermé  $F_1$  et tout  $\tau_2$ -fermé  $F_2$  disjoints, il existe une fonction  $f : X \rightarrow [0, 1]$  telle que :

- $f \equiv 0$  sur  $F_1$  et  $f \equiv 1$  sur  $F_2$  ;
- $f$  est semi-continue inférieurement pour  $\tau_1$  et semi-continue supérieurement pour  $\tau_2$ .

*Démonstration.* La preuve suit le schéma classique du lemme d'Urysohn. On construit par récurrence sur les dyadiques  $r \in [0, 1] \cap \mathbb{Z}[1/2]$  une famille d'ensembles  $(A_r)$  tels que :

- $F_1 \subseteq A_0$  et  $A_1 = X \setminus F_2$  ;
- $A_r$  est  $\tau_2$ -ouvert pour  $r < 1$  ;
- $r < s \Rightarrow \overline{A_r}^{\tau_1} \subseteq A_s$ .

L'existence de ces ensembles découle de la normalité pairwise. On définit  $f(x) = \inf\{r : x \in A_r\}$  et on vérifie les propriétés de semi-continuité.  $\square$



## 5.5 Compacité bitopologique

**Définition 5.11** (Compacité jointe). Un espace bitopologique  $(X, \tau_1, \tau_2)$  est *jointly compact* (ou *conjointement compact*) si l'espace  $(X, \tau_1 \vee \tau_2)$  est compact.

**Définition 5.12** (Compacité pairwise). Un espace bitopologique est *pairwise compact* si tout recouvrement formé d'ouverts de  $\tau_1$  et de  $\tau_2$  admet un sous-recouvrement fini.

**Proposition 5.13.** La compacité pairwise implique la compacité jointe. La réciproque est vraie si  $\tau_1$  et  $\tau_2$  forment une « paire compatible ».

## 5.6 La dualité de Nachbin

**Définition 5.14** (Espace ordonné compact). Un *espace ordonné compact* (au sens de Nachbin) est un triplet  $(X, \tau, \leq)$  où :

1.  $(X, \tau)$  est un espace compact de Hausdorff;
2.  $\leq$  est un ordre partiel fermé dans  $X \times X$  (pour la topologie produit).

**Théorème 5.15** (Dualité de Nachbin). *Il y a une équivalence de catégories entre :*

1. la catégorie des espaces ordonnés compacts (avec applications continues croissantes) ;
2. la catégorie des espaces bitopologiques pairwise compact pairwise  $T_2$  jointly  $T_1$  (avec applications bicontinues).

*Idée de la preuve.*  $(\Rightarrow)$  Soit  $(X, \tau, \leq)$  un espace ordonné compact. On définit :

- $\tau_1$  = la topologie des ouverts hauts (topologie supérieure associée à  $\leq$  dans  $\tau$ ) ;
- $\tau_2$  = la topologie des ouverts bas.

Plus précisément,  $\tau_1$  est engendrée par les ouverts  $U \in \tau$  tels que  $U = \uparrow U$  et  $\tau_2$  par les ouverts  $V \in \tau$  tels que  $V = \downarrow V$ . On a  $\tau_1 \vee \tau_2 = \tau$  par le théorème de Nachbin.

$(\Leftarrow)$  Étant donné un espace bitopologique  $(X, \tau_1, \tau_2)$  de la catégorie décrite, on pose  $\tau = \tau_1 \vee \tau_2$  et l'ordre est  $x \leq y \Leftrightarrow x \in \overline{\{y\}}^{\tau_1}$ .  $\square$

## 5.7 Lien avec les espaces stablement compacts

**Théorème 5.16** (Espaces stablement compacts et bitopologiques). *Soit  $X$  un espace stablement compact. Alors :*

1. La topologie co-compacte  $\tau^d$  (engendrée par les complémentaires des compacts saturés) détermine un espace bitopologique  $(X, \tau, \tau^d)$ .
2. Le triplet  $(X, \tau \vee \tau^d, \leq)$  est un espace ordonné compact.
3. Cette construction établit une équivalence entre la catégorie des espaces stablement compacts et une sous-catégorie des espaces ordonnés compacts.

*Remarque 5.17.* C'est l'un des résultats les plus profonds de la topologie asymétrique : les espaces stablement compacts, les espaces ordonnés compacts et certains espaces bitopologiques sont trois facettes d'un même phénomène.

## 5.8 Foncteurs entre **BiTop** et **Top**

**Proposition 5.18** (Foncteurs d'oubli et de symétrisation). On dispose des foncteurs suivants :

1.  $U_1, U_2: \mathbf{BiTop} \rightarrow \mathbf{Top}$ , projection sur chaque topologie.
2.  $J: \mathbf{BiTop} \rightarrow \mathbf{Top}$ , envoyant  $(X, \tau_1, \tau_2)$  sur  $(X, \tau_1 \vee \tau_2)$  (topologie jointe).
3.  $\Delta: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{BiTop}$ , envoyant  $(X, \tau)$  sur  $(X, \tau, \tau)$  (doublement diagonal).

Le foncteur  $\Delta$  est adjoint à gauche et à droite de  $J$  dans certaines sous-catégories.

## 5.9 Espaces bitopologiques et treillis

**Définition 5.19** (Biframe). Un *biframe* est un triplet  $(L, L_1, L_2)$  où  $L$  est un cadre et  $L_1, L_2$  sont des sous-cadres de  $L$  qui engendrent  $L$  : chaque élément de  $L$  est un sup d'infis finis d'éléments de  $L_1 \cup L_2$ .

*Remarque 5.20.* Les biframes sont l'analogue « sans points » des espaces bitopologiques, de même que les cadres sont l'analogue des espaces topologiques. La théorie des bilocales développée par Banaschewski, Brümmer et Hardie fournit un cadre algébrique riche pour la bitopologie.

## 5.10 Exercices

**Exercice 5.1.** Montrer que pour toute quasi-métrique  $d$ , l'espace bitopologique  $(X, \tau_d, \tau_{d^{-1}})$  est pairwise  $T_0$  si et seulement si  $d$  est  $T_0$ -séparée.

**Exercice 5.2.** Soit  $(X, \tau_1, \tau_2)$  un espace bitopologique pairwise  $T_2$ . Montrer que la topologie jointe  $\tau_1 \vee \tau_2$  est de Hausdorff.

**Exercice 5.3.** Montrer que tout espace ordonné compact est pairwise normal.

**Exercice 5.4.** Soit  $X = [0, 1]$  avec l'ordre usuel. Décrire explicitement les topologies  $\tau_{\text{up}}$ ,  $\tau_{\text{down}}$ , la topologie jointe, et vérifier que  $(X, \tau_{\text{up}} \vee \tau_{\text{down}}, \leq)$  est un espace ordonné compact.

**Exercice 5.5.** Montrer que la catégorie **BiTop** est complète et cocomplète. Décrire les produits et coproduits.

**Exercice 5.6** (Dualité de Priestley). Soit  $D$  un treillis distributif borné et  $X$  l'espace de Priestley associé (espace ordonné compact totalement séparé par l'ordre). Décrire l'espace bitopologique correspondant via la dualité de Nachbin et montrer qu'on retrouve l'espace spectral de la dualité de Stone.

# Chapitre 6

## Domaines de Scott et Topologie de Scott

En 1970, Dana Scott cherche un modèle mathématique pour le lambda-calcul non typé — un système formel où une fonction peut se prendre elle-même comme argument. Les espaces topologiques classiques ne conviennent pas : il faut un espace qui soit isomorphe à son propre espace de fonctions continues. Scott découvre que certains ordres partiels complets, munis d’une topologie bien choisie — la *topologie de Scott* — possèdent exactement cette propriété. Les *domaines de Scott* sont ainsi devenus le socle de la sémantique dénotationnelle des langages de programmation, révélant un lien profond entre topologie, logique et informatique.

### Intuition

La topologie de Scott est la topologie naturelle sur un ensemble ordonné dirigé-complet (dcpo) qui capture la notion de « convergence vers le haut ». C’est la topologie fondamentale en sémantique dénotationnelle, où les programmes sont modélisés comme des éléments de domaines et la dénotation d’un programme récursif est le supremum d’une chaîne d’approximations.

### 6.1 Ensembles dirigés complets

**Définition 6.1** (Ensemble dirigé). Soit  $(P, \leq)$  un ensemble ordonné. Un sous-ensemble  $D \subseteq P$  est *dirigé* si  $D \neq \emptyset$  et pour tous  $d_1, d_2 \in D$ , il existe  $d \in D$  tel que  $d_1 \leq d$  et  $d_2 \leq d$ .

**Définition 6.2** (Dcpo). Un *dcpo* (*directed-complete partial order*) est un ensemble ordonné  $(D, \leq)$  dans lequel tout ensemble dirigé possède un supremum. On note  $\bigsqcup S$  ou  $\bigvee S$  le supremum d’un ensemble dirigé  $S$ .

**Exemple 6.3** (Exemples de dcpo). 1. Tout treillis complet est un dcpo.

2.  $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$  est un dcpo (et un treillis complet).

3.  $([0, 1], \leq)$  est un dcpo.

4. L’ensemble  $\Sigma^{\leq \omega}$  des mots finis et infinis sur un alphabet  $\Sigma$ , ordonné par le préfixe, est un dcpo.



2.  $f$  préserve les sups dirigés : pour tout ensemble dirigé  $S$ ,  $f(\bigsqcup S) = \bigsqcup f(S)$ .

**Théorème 6.9** (Caractérisation de la Scott-continuité). *Pour une fonction  $f: D \rightarrow E$  entre dcpo, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1.  $f$  est continue pour les topologies de Scott.
2.  $f$  est croissante et préserve les sups dirigés.

*Démonstration.* (1)  $\Rightarrow$  (2) : La continuité implique la monotonie (car l'ordre de spécialisation est l'ordre original). Soit  $S$  dirigé dans  $D$ . Comme  $f$  est croissante,  $f(\bigsqcup S)$  est un majorant de  $f(S)$ . Soit  $e$  un majorant de  $f(S)$ . Pour tout Scott-ouvert  $V$  de  $E$  contenant  $f(\bigsqcup S)$ , la préimage  $f^{-1}(V)$  est Scott-ouverte et contient  $\bigsqcup S$ , donc il existe  $s \in S \cap f^{-1}(V)$ , d'où  $f(s) \in V$ . Cela montre que  $f(\bigsqcup S) \in \overline{f(S)}^\sigma$ . En fait, il faut montrer que  $f(\bigsqcup S) \leq e$  pour tout majorant  $e$  de  $f(S)$ , ce qui découle de la preuve directe via les ouverts.

(2)  $\Rightarrow$  (1) : Soit  $V$  un Scott-ouvert de  $E$ . Montrons que  $f^{-1}(V)$  est Scott-ouvert. C'est une partie haute car  $f$  est croissante. Si  $S$  est dirigé avec  $\bigsqcup S \in f^{-1}(V)$ , alors  $f(\bigsqcup S) = \bigsqcup f(S) \in V$ . Comme  $V$  est Scott-ouvert et  $f(S)$  est dirigé, il existe  $s \in S$  avec  $f(s) \in V$ , d'où  $s \in f^{-1}(V)$ .  $\square$

## 6.4 La catégorie **Dcpo**

**Théorème 6.10** (Propriétés de **Dcpo**). 1. *La catégorie **Dcpo** des dcpo et fonctions Scott-continues est cartésienne fermée.*

2. *Le produit de dcpo est le produit cartésien avec l'ordre produit.*
3. *L'exponentielle  $[D \rightarrow E]$  est l'ensemble des fonctions Scott-continues de  $D$  dans  $E$ , ordonné point à point.*
4.  *$[D \rightarrow E]$  est un dcpo, et la topologie de Scott sur  $[D \rightarrow E]$  est la topologie d'Isbell (qui coïncide avec la topologie compacte-ouverte pour les Scott-ouverts compacts).*

*Idée de la preuve.* Pour (3) : soit  $(f_i)_{i \in I}$  un ensemble dirigé dans  $[D \rightarrow E]$ . Pour tout  $d \in D$ ,  $(f_i(d))_{i \in I}$  est dirigé dans  $E$  (par monotonie point à point et directivité de  $(f_i)$ ). On définit  $(\bigsqcup f_i)(d) = \bigsqcup_i f_i(d)$ . Il faut vérifier que  $\bigsqcup f_i$  est Scott-continue, ce qui utilise le fait que les sups dirigés commutent dans un dcpo.  $\square$

## 6.5 Domaines continus

**Définition 6.11** (Relation de bien en dessous). Dans un dcpo  $D$ , on dit que  $x$  est *bien en dessous* de  $y$  (noté  $x \ll y$ ) si pour tout ensemble dirigé  $S$  avec  $y \leq \bigsqcup S$ , il existe  $s \in S$  tel que  $x \leq s$ .

**Définition 6.12** (Base d'un dcpo). Un sous-ensemble  $B \subseteq D$  est une *base* du dcpo  $D$  si pour tout  $x \in D$ , l'ensemble  $\{b \in B : b \ll x\}$  est dirigé et a pour supremum  $x$ .

**Définition 6.13** (Domaine continu). Un dcpo  $D$  est un *domaine continu* si pour tout  $x \in D$ , l'ensemble  $\Downarrow x = \{y \in D : y \ll x\}$  est dirigé et  $x = \bigsqcup(\Downarrow x)$ .

**Théorème 6.14** (Topologie de Scott d'un domaine continu). *Si  $D$  est un domaine continu, alors :*

1. Les ensembles  $\uparrow b = \{x \in D : b \ll x\}$  forment une base de la topologie de Scott.
2. La topologie de Scott est sobre.
3. Le treillis  $\sigma(D)$  est un treillis continu.
4.  $(D, \sigma(D))$  est localement compact.

*Démonstration.* (1) Soit  $U$  Scott-ouvert et  $x \in U$ . Comme  $x = \bigsqcup (\downarrow x)$  et  $U$  est inaccessible, il existe  $b \ll x$  avec  $b \in U$ . Alors  $x \in \uparrow b \subseteq U$  (car si  $b \ll z$  et  $b \in U$ , partie haute, alors  $z \in U$ ... non, ce n'est pas direct. En fait,  $\uparrow b \subseteq \uparrow b \subseteq U$  car  $b \in U$  et  $U$  est une partie haute).

(2) Soit  $F$  un fermé irréductible. L'ensemble  $F$  est une partie basse, fermée sous sups dirigés. On montre que  $F$  a un plus grand élément, qui est son point générique. Si  $b_1 \ll x_1 \in F$  et  $b_2 \ll x_2 \in F$ , alors  $\uparrow b_1$  et  $\uparrow b_2$  sont des ouverts rencontrant  $F$ , donc par irréductibilité,  $F \cap \uparrow b_1 \cap \uparrow b_2 \neq \emptyset$ , d'où il existe  $y \in F$  avec  $b_1 \ll y$  et  $b_2 \ll y$ . L'ensemble  $B_F = \{b : \exists x \in F, b \ll x\}$  est donc dirigé, et  $\bigsqcup B_F \in F$  (car  $F$  est Scott-fermé). C'est le point générique de  $F$ .  $\square$

## 6.6 Domaines algébriques

**Définition 6.15** (Élément compact). Un élément  $k \in D$  est *compact* (ou *fini*) si  $k \ll k$ . On note  $K(D)$  l'ensemble des éléments compacts de  $D$ .

**Définition 6.16** (Domaine algébrique). Un dcpo  $D$  est *algébrique* si pour tout  $x \in D$ , l'ensemble  $\{k \in K(D) : k \leq x\}$  est dirigé et  $x = \bigsqcup \{k \in K(D) : k \leq x\}$ .

**Proposition 6.17.** Tout domaine algébrique est un domaine continu. La réciproque est fausse.

**Exemple 6.18.**  $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$  est un domaine algébrique : les éléments compacts sont les parties finies.  $([0, 1], \leq)$  est un domaine continu non algébrique : les seuls éléments compacts sont les éléments de  $\{0\}$  (car  $r \ll r$  équivaut à : il n'existe pas de suite strictement croissante de limite  $r$ , ce qui n'est vrai que pour  $r = 0$  si  $r \in [0, 1]$ ... en fait pour  $[0, 1]$  tous les éléments sont compacts car  $[0, 1]$  est une chaîne complète et  $r \ll r$  pour tout  $r$  car tout ensemble dirigé dont le sup est  $\geq r$  contient un élément  $\geq r$  par complétude de la chaîne). Prenons plutôt l'exemple  $([0, 1]_\perp, \leq)$  avec un élément ajouté en dessous.

## 6.7 Théorème de représentation

**Théorème 6.19** (Domaines algébriques et idéaux). *Si  $D$  est un domaine algébrique, alors  $D$  est isomorphe (comme dcpo) à l'ensemble  $\text{Idl}(K(D))$  des idéaux de  $(K(D), \leq)$  (c'est-à-dire des sous-ensembles dirigés et bas de  $K(D)$ ), ordonné par l'inclusion.*

*Démonstration.* L'isomorphisme envoie  $x \in D$  sur  $\{k \in K(D) : k \leq x\}$ . C'est un idéal car c'est un ensemble dirigé (par hypothèse) et une partie basse (si  $k' \leq k \leq x$  et  $k$  compact, alors  $k'$  est compact aussi ? non, pas nécessairement). En fait, on prend l'ensemble bas engendré. Le point clé est que le sup d'un idéal dans  $\text{Idl}(K(D))$  est la réunion (dirigée), et l'application  $x \mapsto \downarrow x \cap K(D)$  est un isomorphisme de dcpo.  $\square$

## 6.8 Exercices

**Exercice 6.1.** Montrer que la topologie de Scott sur  $(\mathbb{R}, \leq)$  est la topologie formée de  $\emptyset$ ,  $\mathbb{R}$  et des intervalles  $(a, +\infty)$  pour  $a \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 6.2.** Montrer que la topologie de Scott sur  $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$  n'est pas métrisable.

**Exercice 6.3.** Montrer que le produit de deux dcpo (avec l'ordre produit) est un dcpo et que la topologie de Scott du produit est plus fine que le produit des topologies de Scott. Donner un exemple où l'inclusion est stricte.

**Exercice 6.4.** Soit  $D$  un dcpo pointé. Montrer que la fonction  $\text{fix}: [D \rightarrow D] \rightarrow D$  envoyant  $f$  sur son plus petit point fixe est Scott-continue.

**Exercice 6.5.** Soit  $D$  un domaine continu. Montrer que  $x \ll y$  si et seulement si  $y \in \text{Int}(\uparrow x)$  (intérieur de Scott).

**Exercice 6.6.** Montrer qu'un dcpo  $D$  est continu si et seulement si  $\sigma(D)$  est un treillis complètement distributif.

**Exercice 6.7** (Fonctions pas à pas). Soit  $D$  un domaine algébrique et  $E$  un dcpo. Montrer que toute fonction Scott-continue  $f: D \rightarrow E$  est le supremum dirigé de « fonctions étage » (fonctions définies sur les compacts de  $D$  et étendues par sups dirigés).





# Chapitre 7

## Espaces de Convergence et Filtres

Qu'est-ce que la convergence, au fond ? Dans un cours d'analyse classique, on apprend qu'une suite  $(x_n)$  converge vers  $\ell$  si, pour tout voisinage de  $\ell$ , la suite finit par y rester. Mais cette définition présuppose l'existence d'une topologie. Dans les années 1960, des mathématiciens comme Gustave Choquet, puis H. J. Kowalsky et C. H. Cook, se sont posé une question audacieuse : et si la convergence elle-même était la notion primitive ? Plutôt que de définir d'abord les ouverts pour en déduire la convergence, pourquoi ne pas spécifier directement quels filtres convergent vers quels points ? Cette inversion logique a ouvert la voie aux *espaces de convergence*, une généralisation des espaces topologiques qui résout élégamment le problème de la fermeture cartésienne — un défaut technique de la catégorie des espaces topologiques qui compliquait l'étude des espaces fonctionnels.

### Intuition

La notion de convergence dans un espace topologique est classiquement décrite par les filtres ou les réseaux (nets). Les espaces de convergence généralisent les espaces topologiques en spécifiant directement quels filtres convergent vers quels points, sans exiger que la structure de convergence provienne d'une topologie. Cette généralisation résout le problème de la fermeture cartésienne et est particulièrement adaptée aux espaces fonctionnels.

### 7.1 Filtres : rappels et compléments

**Définition 7.1** (Filtre). Un *filtre* sur un ensemble  $X$  est une famille  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$  telle que :

1.  $X \in \mathcal{F}$  et  $\emptyset \notin \mathcal{F}$  ;
2. si  $A, B \in \mathcal{F}$ , alors  $A \cap B \in \mathcal{F}$  ;
3. si  $A \in \mathcal{F}$  et  $A \subseteq B$ , alors  $B \in \mathcal{F}$ .

**Définition 7.2** (Base de filtre). Une *base de filtre* est une famille  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$  non vide, ne contenant pas  $\emptyset$ , et telle que pour tous  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ , il existe  $B_3 \in \mathcal{B}$  avec  $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ . Le filtre engendré est  $\mathcal{F} = \{A \subseteq X : \exists B \in \mathcal{B}, B \subseteq A\}$ .

**Définition 7.3** (Ultrafiltre). Un *ultrafiltre* est un filtre maximal (pour l'inclusion). De façon équivalente,  $\mathcal{U}$  est un ultrafiltre si pour tout  $A \subseteq X$ ,  $A \in \mathcal{U}$  ou  $X \setminus A \in \mathcal{U}$ .

**Théorème 7.4** (Existence d'ultrafiltres). *Tout filtre est contenu dans un ultrafiltre (par le lemme de Zorn).*

**Définition 7.5** (Filtre image). Si  $f: X \rightarrow Y$  et  $\mathcal{F}$  est un filtre sur  $X$ , le filtre image est  $f(\mathcal{F}) = \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$ .

## 7.2 Convergence dans les espaces topologiques

**Définition 7.6** (Filtre de voisinages). Pour  $x \in X$ , le *filtre de voisinages*  $\mathcal{V}(x)$  est l'ensemble des voisinages de  $x$  :  $\mathcal{V}(x) = \{V \subseteq X : \exists U \in \tau, x \in U \subseteq V\}$ .

**Définition 7.7** (Convergence d'un filtre). Un filtre  $\mathcal{F}$  sur un espace topologique  $X$  *converge* vers  $x$  (noté  $\mathcal{F} \rightarrow x$ ) si  $\mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{F}$ .

**Théorème 7.8** (Caractérisation de la topologie par les filtres). *Soit  $X$  un espace topologique. Alors :*

1.  $U$  est ouvert si et seulement si pour tout  $x \in U$  et tout filtre  $\mathcal{F} \rightarrow x$ , on a  $U \in \mathcal{F}$ .
2.  $f: X \rightarrow Y$  est continue si et seulement si pour tout filtre  $\mathcal{F} \rightarrow x$ ,  $f(\mathcal{F}) \rightarrow f(x)$ .
3.  $X$  est compact si et seulement si tout ultrafiltre converge.
4.  $X$  est Hausdorff si et seulement si tout filtre a au plus une limite.

*Démonstration.* (3) ( $\Rightarrow$ ) Soit  $\mathcal{U}$  un ultrafiltre. Pour chaque  $x \in X$ , si  $\mathcal{U} \not\rightarrow x$ , il existe  $U_x \in \mathcal{V}(x)$  avec  $U_x \notin \mathcal{U}$ , donc  $X \setminus U_x \in \mathcal{U}$ . Si aucun ultrafiltre ne converge, les  $U_x$  recouvrent  $X$ , d'où un sous-recouvrement fini  $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$ , et  $\bigcap_{i=1}^n (X \setminus U_{x_i}) = \emptyset \in \mathcal{U}$ , contradiction.

( $\Leftarrow$ ) Soit  $(U_i)$  un recouvrement ouvert sans sous-recouvrement fini. Les  $X \setminus U_i$  ont la propriété d'intersection finie non vide, donc engendrent un filtre, contenu dans un ultrafiltre  $\mathcal{U}$ . Par hypothèse,  $\mathcal{U} \rightarrow x$  pour un  $x$ , et  $x \in U_j$  pour un  $j$ , d'où  $U_j \in \mathcal{U}$  et  $X \setminus U_j \in \mathcal{U}$ , contradiction.  $\square$

## 7.3 Espaces de convergence

**Définition 7.9** (Espace de convergence). Un *espace de convergence* est un couple  $(X, \rightarrow)$  où  $X$  est un ensemble et  $\rightarrow$  est une relation entre filtres sur  $X$  et points de  $X$  (appelée *structure de convergence*) satisfaisant :

1. Pour tout  $x \in X$ , le filtre principal  $\dot{x} = \{A \subseteq X : x \in A\}$  converge vers  $x$  :  $\dot{x} \rightarrow x$ .
2. Si  $\mathcal{F} \rightarrow x$  et  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ , alors  $\mathcal{G} \rightarrow x$ .

**Définition 7.10** (Espace de convergence prétopologique). Un espace de convergence est *prétopologique* si de plus :

3. Si  $\mathcal{F} \rightarrow x$  et  $\mathcal{G} \rightarrow x$ , alors  $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \rightarrow x$ .

**Définition 7.11** (Espace de convergence topologique). Un espace de convergence est *topologique* si de plus le filtre de voisinages  $\mathcal{V}(x) = \bigcap \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \rightarrow x\}$  converge vers  $x$ .

**Théorème 7.12** (Hiérarchie). *On a les inclusions strictes de catégories :*

$$\mathbf{Top} \subsetneq \mathbf{PrTop} \subsetneq \mathbf{Conv}$$

où **Conv** est la catégorie des espaces de convergence et applications continues (préservant la convergence), **PrTop** celle des espaces prétopologiques.

## 7.4 Fermeture cartésienne

**Théorème 7.13** (**Conv** est cartésienne fermée). *La catégorie **Conv** est cartésienne fermée : pour tous espaces de convergence  $X$  et  $Y$ , l'espace  $[X, Y]$  des applications continues muni de la convergence continue est un espace de convergence, et on a :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Conv}}(X \times Y, Z) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Conv}}(X, [Y, Z]).$$

**Définition 7.14** (Convergence continue). Sur  $[X, Y]$ , un filtre  $\Phi$  converge continument vers  $f$  si pour tout  $x \in X$  et tout filtre  $\mathcal{F} \rightarrow x$  dans  $X$ , le filtre évaluation  $\Phi[\mathcal{F}]$  (engendré par les  $\{g(y) : g \in \phi, y \in F\}$  pour  $\phi \in \Phi, F \in \mathcal{F}$ ) converge vers  $f(x)$  dans  $Y$ .

*Remarque 7.15.* Le fait que **Conv** soit cartésienne fermée alors que **Top** ne l'est pas est l'une des motivations principales pour étudier les espaces de convergence. En sémantique dénotationnelle, cela permet de construire des espaces de fonctions sans sortir de la catégorie.

## 7.5 Réseaux (Nets) et convergence

**Définition 7.16** (Réseau). Un réseau (ou *net*) dans  $X$  est une fonction  $\varphi : I \rightarrow X$  où  $(I, \leq)$  est un ensemble dirigé. On écrit  $(x_i)_{i \in I}$ .

**Définition 7.17** (Convergence d'un réseau). Un réseau  $(x_i)_{i \in I}$  converge vers  $x$  dans un espace topologique si pour tout voisinage  $V$  de  $x$ , il existe  $i_0 \in I$  tel que pour tout  $i \geq i_0$ ,  $x_i \in V$ .

**Théorème 7.18** (Équivalence filtres-réseaux). *Dans un espace topologique, un ensemble  $F$  est fermé si et seulement si toute limite de réseau dans  $F$  est dans  $F$ . De même,  $f$  est continue si et seulement si elle préserve les limites de réseaux.*

### Attention

Dans les espaces non Hausdorff, un réseau (ou un filtre) peut converger vers plusieurs points à la fois. L'ensemble des limites d'un filtre  $\mathcal{F}$  dans un espace  $T_0$  est une partie basse pour l'ordre de spécialisation.

## 7.6 Filtres de Scott et convergence

**Définition 7.19** (Filtre de Scott). Soit  $D$  un dcpo. Un filtre  $\mathcal{F}$  sur  $D$  est un *filtre de Scott* s'il contient un ensemble dirigé  $S$  tel que  $\bigsqcup S$  existe et  $\mathcal{F}$  converge vers  $\bigsqcup S$  dans la topologie de Scott.

**Proposition 7.20.** Dans un dcpo  $D$  avec la topologie de Scott, un filtre  $\mathcal{F}$  converge vers  $x$  si et seulement si  $x$  est un minorant de l'ensemble des adhérences :  $x \leq \bigsqcup \{\inf F : F \in \mathcal{F}, F \neq \emptyset\}$  (lorsque les inf et sups existent). Plus précisément,  $\mathcal{F} \rightarrow x$  ssi tout ouvert de Scott contenant  $x$  est dans  $\mathcal{F}$ .

## 7.7 Espaces de Choquet

**Définition 7.21** (Espace de Choquet). Un espace topologique  $X$  est un *espace de Choquet* (ou espace à topologie favorable) si le joueur II a une stratégie gagnante dans le jeu de Choquet : les joueurs alternent en choisissant des ouverts non vides  $U_1 \supseteq V_1 \supseteq U_2 \supseteq V_2 \supseteq \dots$ , et le joueur II gagne si  $\bigcap_n V_n \neq \emptyset$ .

**Théorème 7.22.** *Tout espace métrique complet est un espace de Choquet. Tout dcpo continu avec la topologie de Scott est un espace de Choquet.*

## 7.8 Convergence et théorie des domaines

**Proposition 7.23** (Convergence Scott et approximation). Dans un domaine continu  $D$ , un filtre  $\mathcal{F}$  converge vers  $x$  dans la topologie de Scott si et seulement si pour tout  $b \ll x$ , l'ensemble  $\uparrow b \in \mathcal{F}$ . La convergence dans un domaine continu est donc déterminée par la relation  $\ll$ .

**Théorème 7.24** (Espaces de convergence et domaines). *La catégorie des domaines continus avec les fonctions Scott-continues est équivalente à une sous-catégorie pleine de **Conv** formée d'espaces de convergence satisfaisant des axiomes supplémentaires (convergence dirigée).*

## 7.9 Exercices

**Exercice 7.1.** Montrer qu'un espace topologique est  $T_0$  si et seulement si dans la structure de convergence associée, l'ensemble des limites de tout filtre est une partie basse (pour l'ordre de spécialisation) et deux points distincts n'ont pas les mêmes filtres convergents.

**Exercice 7.2.** Construire un espace de convergence qui n'est pas prétopologique.

**Exercice 7.3.** Montrer que la convergence continue sur  $[X, Y]$  coïncide avec la convergence compacte-ouverte lorsque  $X$  est localement compact de Hausdorff.

**Exercice 7.4.** Soit  $D$  un dcpo. Montrer que le filtre engendré par un ensemble dirigé  $S$  converge vers  $\bigsqcup S$  dans la topologie de Scott.

**Exercice 7.5.** Montrer que dans un espace  $T_0$ , si un filtre  $\mathcal{F}$  converge vers  $x$  et vers  $y$  avec  $x \leq y$ , alors  $\mathcal{F}$  converge également vers tout  $z$  avec  $x \leq z \leq y$ .

**Exercice 7.6** (Catégorie **Conv** et limites). Montrer que **Conv** est complète et cocomplète. Décrire la topologie initiale et finale en termes de convergence.

# Chapitre 8

## Compacité dans les Espaces Non-Hausdorff

La compacité est l'une des notions les plus rassurantes de la topologie classique : dans un espace de Hausdorff, un compact est fermé, borné (en métrique), et possède toutes les propriétés de finitude que l'on peut souhaiter. Mais que se passe-t-il quand on abandonne l'axiome de Hausdorff ? Les compacts cessent d'être fermés, les points limites ne sont plus uniques, et l'intuition géométrique vacille. Ce n'est pas un accident : en théorie des domaines, les espaces qui modélisent les calculs informatiques sont typiquement  $T_0$  mais pas  $T_1$ . La notion de *compact saturé* — un compact égal à l'intersection de ses voisinages ouverts — remplace alors celle de compact fermé, et la compactification de Smyth joue le rôle que l'Alexandroff jouait en Hausdorff. Ce chapitre développe cette théorie raffinée.

### Intuition

Dans les espaces de Hausdorff, la compacité est un concept bien compris : les compacts sont fermés, l'intersection de compacts est compacte, et la compactification d'Alexandroff produit un espace de Hausdorff si et seulement si l'espace de départ est localement compact et séparé. En revanche, dans les espaces non-Hausdorff, la compacité présente des subtilités fondamentales. Les compacts ne sont plus nécessairement fermés, et il faut recourir à la notion de *compact saturé* pour retrouver un comportement raisonnable. Ce chapitre développe la théorie de la compacité adaptée aux espaces  $T_0$ , avec des applications en théorie des domaines.

### 8.1 Compacts saturés

**Définition 8.1** (Ensemble saturé). Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique. Un sous-ensemble  $A \subseteq X$  est *saturé* s'il est égal à l'intersection de tous les ouverts qui le contiennent :

$$A = \bigcap \{U \in \tau : A \subseteq U\}.$$

De manière équivalente,  $A$  est saturé si et seulement si  $A$  est une partie haute pour l'ordre de spécialisation : si  $x \in A$  et  $x \leq y$  (c'est-à-dire  $x \in \overline{\{y\}}$ ), alors  $y \in A$ .

*Remarque 8.2.* Dans un espace  $T_1$ , tout sous-ensemble est saturé, car l'ordre de spécialisation est l'égalité. La notion de saturation n'est donc pertinente que dans les espaces non  $T_1$ .

**Proposition 8.3** (Saturation d'un ensemble). Pour tout sous-ensemble  $A$  d'un espace topologique  $X$ , la *saturation* de  $A$  est

$$\uparrow A = \{y \in X : \exists x \in A, x \leq y\}$$

où  $\leq$  désigne l'ordre de spécialisation. C'est le plus petit ensemble saturé contenant  $A$ .

**Définition 8.4** (Compact saturé). Un sous-ensemble  $Q$  d'un espace topologique est un *compact saturé* s'il est à la fois compact et saturé.

### Attention

Dans un espace non-Hausdorff, un compact n'est pas nécessairement fermé. Par exemple, dans l'espace de Sierpiński  $\mathbb{S} = \{0, 1\}$  avec  $\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\}$ , le singleton  $\{1\}$  est compact (fini) et ouvert, mais n'est pas fermé. En revanche, il est saturé.

**Théorème 8.5** (Compacts saturés et intersection). Soit  $X$  un espace topologique. L'intersection d'un compact saturé  $Q$  et d'un fermé compact  $K$  est compacte. Plus généralement, l'intersection finie de compacts saturés est un compact saturé.

*Démonstration.* Soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $Q_1 \cap Q_2$ , où  $Q_1$  et  $Q_2$  sont deux compacts saturés. Pour tout  $x \in Q_1 \setminus Q_2$ , comme  $Q_2$  est saturé, il existe un ouvert  $V_x$  contenant  $Q_2$  mais pas  $x$ . Alors  $(U_i)_{i \in I} \cup (X \setminus Q_2)$  recouvre  $Q_1$ , et par compacité de  $Q_1$ , on extrait un sous-recouvrement fini. Les ouverts de ce sous-recouvrement qui sont parmi les  $U_i$  recouvrent  $Q_1 \cap Q_2$ .  $\square$

**Exemple 8.6.** Considérons l'ensemble  $\mathbb{N}$  muni de la topologie d'Alexandrov associée à l'ordre usuel. Les ouverts sont les parties hautes  $\{n, n+1, n+2, \dots\}$  et  $\emptyset$ . Tout ensemble fini  $\{n\}$  est compact mais pas saturé (car  $\uparrow \{n\} = \{n, n+1, \dots\}$ ). Les compacts saturés sont les ensembles  $\{n, n+1, \dots\}$  qui sont finis ou égaux à  $\mathbb{N}$  tout entier — mais en fait  $\{n, n+1, \dots\}$  n'est pas compact. Ainsi le seul compact saturé non vide est  $\mathbb{N}$  lui-même.

## 8.2 Compactification d'Alexandroff pour les espaces non-Hausdorff

**Définition 8.7** (Compactification d'Alexandroff). Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique. La *compactification par un point* (ou d'Alexandroff) est l'espace  $X^* = X \cup \{\infty\}$  muni de la topologie

$$\tau^* = \tau \cup \{X^* \setminus K : K \subseteq X \text{ compact et saturé}\}.$$

**Théorème 8.8** (Propriétés de la compactification d'Alexandroff). Soit  $X$  un espace topologique.

1.  $X^*$  est compact.
2. L'inclusion  $X \hookrightarrow X^*$  est un plongement topologique (ouvert).
3. Si  $X$  est  $T_0$ , alors  $X^*$  est  $T_0$ .
4. Si  $X$  est sobre, alors  $X^*$  est sobre si et seulement si  $X$  est localement compact.

*Démonstration.* (1) Soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $X^*$ . L'un des  $U_i$  contient  $\infty$ , donc est de la forme  $X^* \setminus K$  pour un compact saturé  $K$ . Les ouverts restants recouvrent  $K$ , et par compacité de  $K$ , on en extrait un sous-recouvrement fini.

(2) Les ouverts de  $X$  dans  $X^*$  sont exactement les éléments de  $\tau$ , car  $U \cap X = U$  pour  $U \in \tau$ .

(3) Si  $X$  est  $T_0$  et  $x \in X$ , alors  $\{x\}$  et  $\{\infty\}$  sont séparés par l'ouvert  $X$  de  $X^*$ .

(4) Admis (voir la section suivante pour les espaces sobres localement compacts).  $\square$

*Remarque 8.9.* Contrairement au cas de Hausdorff, la compactification d'Alexandroff d'un espace non-Hausdorff n'est jamais de Hausdorff (sauf si l'espace de départ l'est déjà et est localement compact). Néanmoins, elle préserve la  $T_0$ -séparation, ce qui est le niveau de séparation naturel en théorie des domaines.

## 8.3 Espaces sobres localement compacts

**Définition 8.10** (Espace localement compact). Un espace topologique  $X$  est *localement compact* si pour tout  $x \in X$  et tout ouvert  $U$  contenant  $x$ , il existe un ouvert  $V$  et un compact saturé  $Q$  tels que  $x \in V \subseteq Q \subseteq U$ .

**Proposition 8.11.** Dans un espace sobre, la compacité locale est équivalente à la condition suivante : le treillis des ouverts  $\mathcal{O}(X)$  est un treillis continu.

**Définition 8.12** (Relation « bien en dessous »). Dans un treillis complet  $L$ , on dit que  $a$  est *bien en dessous* de  $b$ , noté  $a \ll b$ , si pour toute famille dirigée  $D$  telle que  $b \leq \bigvee D$ , il existe  $d \in D$  tel que  $a \leq d$ .

**Théorème 8.13** (Caractérisation des espaces sobres localement compacts). *Pour un espace topologique  $X$ , les conditions suivantes sont équivalentes :*

1.  $X$  est sobre et localement compact.
2. Le treillis  $\mathcal{O}(X)$  est un treillis continu.
3.  $X$  est homéomorphe au spectre d'un treillis continu.

*Démonstration.* (1)  $\Rightarrow$  (2) : Si  $X$  est localement compact, pour tout ouvert  $U$  et tout  $x \in U$ , il existe  $V$  ouvert et  $Q$  compact saturé avec  $x \in V \subseteq Q \subseteq U$ . On vérifie que  $V \ll U$  dans  $\mathcal{O}(X)$  et donc  $U = \bigvee \{V : V \ll U\}$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3) : Par le théorème de représentation des treillis continus, le spectre de  $\mathcal{O}(X)$  est sobre et localement compact, et  $\mathcal{O}(X)$  est isomorphe à son treillis d'ouverts.

(3)  $\Rightarrow$  (1) : Le spectre d'un treillis continu est sobre par définition et localement compact car la relation  $\ll$  fournit les voisinages compacts saturés requis.  $\square$

## 8.4 Espaces stablement compacts

**Définition 8.14** (Espace stablement compact). Un espace topologique  $X$  est *stablement compact* s'il vérifie :

1.  $X$  est  $T_0$  ;
2.  $X$  est compact ;

3.  $X$  est localement compact ;
4.  $X$  est *cohérent* : l'intersection de deux compacts saturés est un compact saturé ;
5.  $X$  est sobre.

### Intuition

Les espaces stablement compacts sont les analogues non-Hausdorff des espaces compacts de Hausdorff. Ils apparaissent naturellement comme espaces de modèles en sémantique dénotationnelle (domaines de Scott) et en logique (espaces de Stone généralisés).

**Exemple 8.15** (Spectre d'un treillis distributif). Si  $L$  est un treillis distributif borné, son spectre (ensemble des idéaux premiers muni de la topologie de Hull-Kernel) est un espace stablement compact.

**Théorème 8.16** (Caractérisation par les cadres). *Un espace  $T_0$  est stablement compact si et seulement si son treillis d'ouverts  $\mathcal{O}(X)$  est un treillis continu et  $X$  est compact et cohérent.*

**Proposition 8.17** (Stabilité de la compacité stable). La classe des espaces stablement compacts est stable par :

1. produit fini ;
2. sous-espace fermé saturé ;
3. passage à la topologie patch.

## 8.5 La topologie patch

**Définition 8.18** (Topologie patch (ou de Lawson)). Soit  $X$  un espace topologique. La *topologie patch* sur  $X$  est la topologie engendrée par les ouverts de  $X$  et les complémentaires des compacts saturés de  $X$ . On note  $X^{\text{patch}}$  l'espace résultant.

**Théorème 8.19** (Patch d'un espace stablement compact). *Si  $X$  est stablement compact, alors :*

1.  $X^{\text{patch}}$  est compact de Hausdorff.
2. Les ouverts de  $X$  forment exactement les ouverts de  $X^{\text{patch}}$  qui sont des parties hautes pour l'ordre de spécialisation de  $X$ .
3. L'ordre de spécialisation de  $X$  est un ordre partiel fermé dans  $(X^{\text{patch}})^2$ .

*Démonstration.* (1) La topologie patch est plus fine que la topologie originale, donc séparée (puisque les compacts saturés permettent de séparer les points). La compacité découle du théorème d'Alexander appliqué à la sous-base formée des ouverts et des complémentaires de compacts saturés, en utilisant la cohérence de  $X$ .

(2) et (3) découlent de la construction de la topologie patch et des propriétés de l'ordre de spécialisation.  $\square$

**Exemple 8.20.** L'intervalle  $[0, 1]$  muni de la topologie de Scott (ouverts :  $\emptyset$  et les intervalles  $(a, 1]$  pour  $a \in [0, 1)$ , plus  $[0, 1]$ ) est stablement compact. Sa topologie patch est la topologie usuelle sur  $[0, 1]$ .



## 8.6 Dualité de de Groot

**Définition 8.21** (Topologie co-compacte (ou duale de de Groot)). Soit  $X$  un espace topologique. La *topologie duale de de Groot*  $\tau^d$  est la topologie engendrée par les complémentaires des compacts saturés de  $(X, \tau)$  :

$$\tau^d = \langle \{X \setminus Q : Q \text{ compact saturé de } (X, \tau)\} \rangle.$$

On note  $X^d = (X, \tau^d)$  l'espace dual.

**Théorème 8.22** (Dualité de de Groot pour les espaces stablement compacts). *Si  $X$  est stablement compact, alors :*

1.  $X^d$  est stablement compact.
2.  $(X^d)^d = X$  (la dualité est involutive).
3. L'ordre de spécialisation de  $X^d$  est l'ordre opposé de celui de  $X$ .
4. La topologie patch de  $X$  et celle de  $X^d$  coïncident.

*Démonstration.* (1) Les compacts saturés de  $X^d$  sont exactement les fermés de  $X$  qui sont des parties basses pour l'ordre de spécialisation, c'est-à-dire les compacts de la topologie originale qui sont des parties basses. On vérifie les cinq axiomes un par un.

(2) Découle du fait que la topologie patch détermine à la fois  $\tau$  et  $\tau^d$ .

(3) L'ordre de spécialisation de  $\tau^d$  est déterminé par :  $x \leq^d y$  ssi pour tout compact saturé  $Q$  de  $\tau$ ,  $y \in Q \Rightarrow x \in Q$ , ce qui correspond à  $y \leq x$  dans l'ordre de spécialisation de  $\tau$ .

(4) La topologie patch de  $X^d$  est engendrée par  $\tau^d$  et les complémentaires des compacts saturés de  $X^d$ , lesquels sont les ouverts de  $X$ . Donc elle coïncide avec la topologie patch de  $X$ .  $\square$

### Résumé : dualité de de Groot

|                 | Espace $X$            | Dual $X^d$                                         |
|-----------------|-----------------------|----------------------------------------------------|
| Ouverts         | $\tau$                | Engendrés par $X \setminus Q$ , $Q$ compact saturé |
| Ordre de spéc.  | $\leq$                | $\geq$                                             |
| Topologie patch | $\tau^{\text{patch}}$ | $(\tau^d)^{\text{patch}} = \tau^{\text{patch}}$    |

## 8.7 Applications en théorie des domaines

**Théorème 8.23** (Domaines comme espaces stablement compacts). *Soit  $D$  un domaine continu borné complet (c'est-à-dire un dcpo continu dans lequel tout sous-ensemble borné admet un supremum). Alors  $D$  muni de la topologie de Scott est stablement compact.*

**Corollaire 8.24.** *Le domaine des intervalles  $\mathbf{IR} = \{[a, b] : a \leq b, a, b \in \mathbb{R}\}$  ordonné par inclusion inverse est stablement compact pour la topologie de Scott.*

**Exercice 8.1.** Montrer que dans un espace  $T_0$ , un ensemble compact est saturé si et seulement s'il est une intersection d'ouverts.

**Exercice 8.2.** Soit  $X$  un espace sobre localement compact. Montrer que pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , l'ensemble  $U$  est la réunion des intérieurs de compacts saturés contenus dans  $U$ .

**Exercice 8.3.** Soit  $P$  un ensemble ordonné fini muni de la topologie d'Alexandrov. Déterminer les compacts saturés de  $P$ . En déduire la topologie patch et la topologie duale de de Groot.

**Exercice 8.4.** Montrer que si  $X$  est stablement compact et  $f: X \rightarrow Y$  est continue, surjective et ouverte, alors  $Y$  est stablement compact.

**Exercice 8.5** (Dualité de Stone généralisée). Soit  $L$  un treillis distributif borné et  $X = \text{Spec}(L)$  son spectre. Montrer que  $X$  est stablement compact et que  $L$  est isomorphe au treillis des compacts saturés ouverts de  $X$ .

**Exercice 8.6.** Soit  $X$  un espace stablement compact et  $Q_1, Q_2$  deux compacts saturés. Montrer que  $Q_1 \cup Q_2$  et  $Q_1 \cap Q_2$  sont des compacts saturés, et que l'ensemble des compacts saturés de  $X$  forme un treillis distributif.

# Chapitre 9

## Topologie Asymétrique en Informatique Théorique

En 1969, Dana Scott, confronté au problème de donner un sens mathématique au lambda-calcul de Church, cherche un espace  $D$  isomorphe à son propre espace de fonctions continues  $D \rightarrow D$ . Les espaces classiques de la topologie de Hausdorff ne conviennent pas — un tel isomorphisme y est impossible pour des raisons de cardinalité. Scott découvre que la solution réside dans les *treillis continus* munis de leur topologie de Scott, une topologie résolument non-Hausdorff où les ouverts représentent les propriétés « observables » d'un calcul. Cette découverte fonde la *sémantique dénotationnelle*, le pont entre la logique des programmes et les mathématiques continues. Ce chapitre montre comment la topologie asymétrique — les quasi-métriques, les espaces  $T_0$ , la topologie de Scott — constitue le langage naturel de l'informatique théorique.

### Intuition

La théorie des domaines, née des travaux de Dana Scott dans les années 1960–70, fournit un modèle mathématique pour la sémantique dénotationnelle des langages de programmation. L'idée centrale est que les éléments d'un domaine représentent des « niveaux d'information » partiels, et l'ordre reflète le raffinement de l'information. La topologie de Scott, qui est non-Hausdorff, capture exactement les propriétés d'observabilité dans un programme. Ce chapitre présente ces applications de la topologie non-Hausdorff en informatique théorique.

### 9.1 Domaines de Scott et sémantique dénotationnelle

**Définition 9.1** (Ensemble dirigé et dcpo). Un sous-ensemble  $D$  d'un ensemble ordonné  $(P, \leq)$  est *dirigé* s'il est non vide et si pour tous  $x, y \in D$ , il existe  $z \in D$  tel que  $x \leq z$  et  $y \leq z$ . Un *dcpo* (directed-complete partial order) est un ensemble ordonné dans lequel toute partie dirigée admet un supremum.

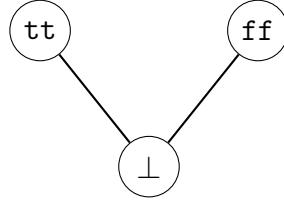
**Définition 9.2** (Topologie de Scott). Soit  $(P, \leq)$  un dcpo. Un sous-ensemble  $U \subseteq P$  est *Scott-ouvert* si :

1.  $U$  est une partie haute :  $x \in U$  et  $x \leq y$  impliquent  $y \in U$  ;
2.  $U$  est inaccessible par suprema dirigés : si  $D$  est dirigé et  $\bigvee D \in U$ , alors  $D \cap U \neq \emptyset$ .

**Proposition 9.3.** Les ouverts de Scott sur un dcpo  $P$  forment une topologie. Cette topologie est  $T_0$  et son ordre de spécialisation coïncide avec l'ordre  $\leq$  de  $P$ .

*Démonstration.* L'ensemble  $P$  et  $\emptyset$  sont Scott-ouverts. L'intersection finie de Scott-ouverts est Scott-ouverte : la condition de partie haute est préservée par intersection, et si  $\bigvee D \in U_1 \cap U_2$ , alors  $D \cap U_1$  est cofinal dans  $D$ , et  $D \cap U_1 \cap U_2$  est non vide. La réunion quelconque de Scott-ouverts est clairement Scott-ouverte.

Pour l'ordre de spécialisation :  $x \leq y$  dans l'ordre de  $P$  si et seulement si tout ouvert contenant  $x$  contient  $y$ , ce qui est exactement la définition de l'ordre de spécialisation.  $\square$



Domaine plat  $\mathbb{B}_\perp = \{\perp, \mathbf{tt}, \mathbf{ff}\}$

**Définition 9.4** (Fonction Scott-continue). Soient  $(P, \leq_P)$  et  $(Q, \leq_Q)$  deux dcpos. Une fonction  $f : P \rightarrow Q$  est *Scott-continue* si elle est croissante et préserve les suprema dirigés : pour toute partie dirigée  $D \subseteq P$ ,

$$f\left(\bigvee D\right) = \bigvee f(D).$$

**Proposition 9.5.** Une fonction entre dcpos est Scott-continue si et seulement si elle est continue pour les topologies de Scott.

**Théorème 9.6** (Catégorie des dcpos). La catégorie **DCPO** dont les objets sont les dcpos et les morphismes les fonctions Scott-continues est cartésienne fermée. L'espace des fonctions  $[P \rightarrow Q]$  est le dcpo des fonctions Scott-continues de  $P$  dans  $Q$ , ordonné point par point.

*Esquisse de preuve.* Le point clé est de montrer que  $[P \rightarrow Q]$ , muni de l'ordre point par point ( $f \leq g \iff \forall x, f(x) \leq g(x)$ ), est un dcpo. Si  $(f_i)_{i \in I}$  est une famille dirigée dans  $[P \rightarrow Q]$ , on définit  $f = \bigvee f_i$  par  $f(x) = \bigvee_i f_i(x)$ ; la Scott-continuité de  $f$  se vérifie en utilisant la commutation des suprema dirigés. Pour la fermeture cartésienne, on doit montrer que l'évaluation  $\text{ev} : [P \rightarrow Q] \times P \rightarrow Q$  est Scott-continue : si  $U$  est Scott-ouvert dans  $Q$ , alors  $\text{ev}^{-1}(U)$  est Scott-ouvert dans  $[P \rightarrow Q] \times P$ . Ceci découle du fait que l'image réciproque d'un Scott-ouvert par l'évaluation est une réunion de rectangles de la forme  $\{f : f(x) \in U\} \times V$ , chacun étant Scott-ouvert. Voir ABRAMSKY–JUNG, *Domain Theory*, Handbook of Logic in Computer Science, vol. 3, 1994.  $\square$

## 9.2 Domaines pour le lambda-calcul

**Définition 9.7** (Domaine continu). Un dcpo  $D$  est un *domaine continu* si pour tout  $x \in D$ ,

$$\Downarrow x = \{a \in D : a \ll x\}$$

est dirigé et  $x = \bigvee \Downarrow x$ , où  $a \ll x$  signifie que  $a$  est *bien en dessous* de  $x$  (compact relativement à  $x$ ).

**Théorème 9.8** (Modèle de Scott du lambda-calcul non typé). *Il existe un domaine continu  $D_\infty$  tel que*

$$D_\infty \cong [D_\infty \rightarrow D_\infty]$$

*dans la catégorie des domaines continus avec fonctions Scott-continues. Un tel domaine fournit un modèle de la sémantique dénotationnelle du lambda-calcul non typé.*

*Idée de la preuve.* On construit  $D_\infty$  comme limite projective d'une suite  $D_0 \leftarrow D_1 \leftarrow D_2 \leftarrow \dots$  où  $D_0 = \{\perp\}$  et  $D_{n+1} = [D_n \rightarrow D_n]$ , les flèches étant des rétractions (paires projection/section). La limite projective dans **DCPO** est un dcpo dont les éléments sont les suites cohérentes  $(x_0, x_1, \dots)$  où  $\pi_n(x_{n+1}) = x_n$ . L'isomorphisme  $D_\infty \cong [D_\infty \rightarrow D_\infty]$  découle de la continuité du foncteur  $[\cdot \rightarrow \cdot]$  sur les limites projectives.  $\square$

### Intuition

Le modèle de Scott résout un problème fondamental : en théorie naïve des ensembles, il n'existe pas d'ensemble  $D$  tel que  $D \cong D^D$  (par un argument de cardinalité, sauf si  $D$  est un singleton). En passant aux dcpos et aux fonctions continues, on échappe à cette contrainte car  $[D \rightarrow D]$  ne contient que les fonctions continues, pas toutes les fonctions.

**Définition 9.9** (Interprétation dénotationnelle). Dans un modèle de Scott  $D_\infty$ , chaque terme clos  $M$  du lambda-calcul reçoit une interprétation  $\llbracket M \rrbracket \in D_\infty$  :

- $\llbracket x \rrbracket_\rho = \rho(x)$  où  $\rho$  est un environnement ;
- $\llbracket \lambda x. M \rrbracket_\rho = d \mapsto \llbracket M \rrbracket_{\rho[x \mapsto d]}$  ;
- $\llbracket MN \rrbracket_\rho = \llbracket M \rrbracket_\rho(\llbracket N \rrbracket_\rho)$ .

## 9.3 Treillis continus et théorie des langages

**Définition 9.10** (Treillis continu). Un treillis complet  $L$  est *continu* s'il est un domaine continu, c'est-à-dire si pour tout  $x \in L$ ,  $x = \bigvee \{a \in L : a \ll x\}$ .

**Théorème 9.11** (Théorème de caractérisation de Lawson). *Un treillis complet  $L$  est continu si et seulement si la fonction  $x \mapsto \Downarrow x$  est un isomorphisme de  $L$  sur un sous-treillis du treillis des idéaux de la base de  $L$ .*

**Proposition 9.12** (Treillis continus et types). Dans la sémantique dénotationnelle :

- Les types de base (entiers, booléens) sont interprétés par des domaines algébriques plats (domaines avec élément  $\perp$  et éléments maximaux incomparables).
- Le type fonction  $A \rightarrow B$  est interprété par  $[D_A \rightarrow D_B]$ .
- Les types rékursifs  $T = F(T)$  sont interprétés par des solutions d'équations de domaines, obtenues comme limites projectives.

## 9.4 Powerdomaines

**Définition 9.13** (Powerdomaines). Soit  $D$  un domaine. Les *powerdomaines* étendent  $D$  pour modéliser le non-déterminisme. Il en existe trois variantes, correspondant à trois observations différentes :

**Définition 9.14** (Powerdomain de Hoare (inférieur)). Le *powerdomain de Hoare*  $\mathcal{H}(D)$  est le dcpo des fermés non vides de  $D$  (dans la topologie de Scott), ordonné par :

$$A \leq_H B \iff A \subseteq \downarrow B.$$

Intuitivement,  $A \leq_H B$  signifie que tout résultat possible de  $A$  est approximé par un résultat de  $B$ . Cela capture la « correction partielle » (sûreté).

**Définition 9.15** (Powerdomain de Smyth (supérieur)). Le *powerdomain de Smyth*  $\mathcal{S}(D)$  est l'ensemble des compacts saturés non vides de  $D$ , ordonné par inclusion inverse :

$$Q_1 \leq_S Q_2 \iff Q_2 \subseteq Q_1.$$

Cela capture la « terminaison » (vivacité) :  $Q_1 \leq_S Q_2$  signifie que l'ensemble des comportements possibles se rétrécit.

**Définition 9.16** (Powerdomain de Plotkin (convexe)). Le *powerdomain de Plotkin*  $\mathcal{P}\ell(D)$  combine les deux ordres :

$$A \leq_P B \iff A \leq_H B \text{ et } A \leq_S B.$$

C'est l'ordre d'Egli-Milner. Il capture à la fois la correction partielle et la terminaison.

**Théorème 9.17** (Propriétés des powerdomaines). Soit  $D$  un domaine continu.

1.  $\mathcal{H}(D)$  est un dcpo (sous des hypothèses légères).
2.  $\mathcal{S}(D)$  est un dcpo si  $D$  est cohérent (intersection de compacts saturés est compact saturé).
3. Si  $D$  est un domaine de Scott (domaine continu à base dénombrable), les trois powerdomaines sont des domaines continus.

**Exemple 9.18.** Considérons le domaine plat des booléens  $\mathbb{B}_\perp = \{\perp, \text{true}, \text{false}\}$ . Alors :

- $\mathcal{H}(\mathbb{B}_\perp)$  contient les fermés :  $\{\perp\}, \{\perp, \text{true}\}, \{\perp, \text{false}\}, \{\perp, \text{true}, \text{false}\}$ .
- $\mathcal{S}(\mathbb{B}_\perp)$  contient les compacts saturés :  $\mathbb{B}_\perp, \{\text{true}\}, \{\text{false}\}, \{\text{true}, \text{false}\}$ .

## 9.5 Modèles topologiques du calcul

**Définition 9.19** (Espace effectivement présenté). Un domaine  $D$  est *effectivement présenté* s'il possède une base dénombrable  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que les relations  $b_n \leq b_m$  et  $b_n \ll b_m$  soient décidables (semi-décidables pour  $\ll$ ).

**Théorème 9.20** (Équivalence calculabilité–continuité). Sur un domaine effectivement présenté  $D$ , les fonctions calculables  $D \rightarrow D$  (au sens de la théorie de la calculabilité de Type 2) coïncident avec les fonctions Scott-continues effectivement données.

**Proposition 9.21** (Espaces de noms et domaines). Le domaine de Böhm  $\mathcal{B}$  des arbres de Böhm du lambda-calcul est un domaine continu tel que :

- Les éléments finis sont les arbres de Böhm finis (avec  $\perp$  aux feuilles).
- L'ordre est le raffinement de l'information :  $t \leq s$  si  $s$  est obtenu en remplaçant certains  $\perp$  de  $t$  par des sous-arbres.
- La topologie de Scott capture exactement l'observation par contextes de tête.

**Théorème 9.22** (Adéquation et complétude). *Pour le lambda-calcul pur, la sémantique dénotationnelle dans un domaine de Scott continu est :*

1. Adéquate : si  $\llbracket M \rrbracket \leq \llbracket N \rrbracket$ , alors  $M$  est approché par  $N$  au sens opérationnel.
2. Complète pour les modèles filtrables : l'ordre dénotationnel coïncide avec le préordre opérationnel.

### Correspondance topologie–informatique

| Concept topologique | Concept informatique             |
|---------------------|----------------------------------|
| Ouvert de Scott     | Propriété semi-décidable         |
| Fermé de Scott      | Propriété vérifiable à la limite |
| Compact saturé      | Propriété co-semi-décidable      |
| Fonction continue   | Programme (fonction calculable)  |
| Topologie $T_0$     | Distinguabilité observationnelle |
| Point $\perp$       | Divergence / non-terminaison     |
| Supremum dirigé     | Limite d'approximations finies   |

## 9.6 Exercices

**Exercice 9.1.** Montrer que la topologie de Scott sur  $(\mathbb{N}, \leq)$  est la topologie cofinie sur  $\mathbb{N}$ .

**Exercice 9.2.** Soit  $D = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  muni de l'ordre usuel. Déterminer la topologie de Scott, vérifier qu'elle est sobre et localement compacte, et calculer les compacts saturés.

**Exercice 9.3.** Montrer que l'espace  $[D \rightarrow D]$  des fonctions Scott-continues d'un dcpo  $D$  dans lui-même, muni de l'ordre point par point, est un dcpo. En déduire que la catégorie **DCPO** est cartésienne fermée.

**Exercice 9.4.** Soit  $D$  le domaine plat des entiers  $\mathbb{N}_\perp$ . Décrire explicitement les éléments du powerdomain de Hoare  $\mathcal{H}(D)$  et du powerdomain de Smyth  $\mathcal{S}(D)$ .

**Exercice 9.5.** Soit  $f: D \rightarrow D$  une fonction Scott-continue sur un dcpo pointé  $D$  (avec  $\perp$ ). En utilisant le théorème de Kleene (Chapitre 10), montrer que la sémantique d'une boucle **while** peut être définie comme le plus petit point fixe d'un opérateur continu.

**Exercice 9.6** (Powerdomain et monade). Montrer que le powerdomain de Hoare  $\mathcal{H}$  définit un foncteur  $\mathcal{H}: \mathbf{DCPO} \rightarrow \mathbf{DCPO}$ . Vérifier que l'unité  $\eta_D: D \rightarrow \mathcal{H}(D)$  définie par  $\eta_D(d) = \downarrow d$  et la multiplication  $\mu_D: \mathcal{H}(\mathcal{H}(D)) \rightarrow \mathcal{H}(D)$  définie par  $\mu_D(\mathcal{A}) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$  font de  $\mathcal{H}$  une monade.





# Chapitre 10

## Théorie des Points Fixes en Topologie Avancée

Les théorèmes de points fixes prennent une saveur particulière dans le cadre de la topologie non-Hausdorff. Ici, pas de métrique, pas de contraction : les points fixes émergent de la structure d'ordre et de la complétude dirigée. Le théorème de Tarski (1955) affirme que toute application monotone sur un treillis complet possède un point fixe ; celui de Kleene le construit par itération dénombrable dans les  $\omega$ -cpo ; et le théorème de Pataia (1997), longtemps resté confidentiel dans la littérature géorgienne, étend ces résultats aux dcpo généraux. Ces théorèmes sont les fondations de la sémantique dénotationnelle : définir la signification d'un programme récursif, c'est précisément trouver un point fixe dans un domaine de Scott.

### Intuition

Les théorèmes de points fixes jouent un rôle central en informatique théorique et en théorie des domaines. Contrairement aux théorèmes classiques de Banach ou Brouwer, qui reposent sur des structures métriques ou topologiques classiques, les théorèmes présentés ici exploitent l'ordre et la complétude dirigée. Le théorème de Tarski garantit l'existence de points fixes dans les treillis complets, celui de Kleene les construit effectivement par itération, et le théorème de Pataia étend ces résultats aux dcpos sans hypothèse de dénombrabilité.

### 10.1 Théorème de Tarski pour les treillis complets

**Définition 10.1** (Treillis complet). Un ensemble ordonné  $(L, \leq)$  est un *treillis complet* si toute partie  $S \subseteq L$  admet un supremum  $\bigvee S$  et un infimum  $\bigwedge S$ . En particulier,  $L$  possède un plus petit élément  $\perp = \bigvee \emptyset$  et un plus grand élément  $\top = \bigwedge \emptyset$ .

**Théorème 10.2** (Knaster–Tarski). Soit  $(L, \leq)$  un treillis complet et  $f: L \rightarrow L$  une fonction croissante. Alors :

1.  $f$  possède un plus petit point fixe  $\text{lfp}(f) = \bigwedge \{x \in L : f(x) \leq x\}$ .
2.  $f$  possède un plus grand point fixe  $\text{gfp}(f) = \bigvee \{x \in L : x \leq f(x)\}$ .
3. L'ensemble des points fixes  $\text{Fix}(f)$  est un treillis complet.

*Démonstration.* (1) Posons  $P = \{x \in L : f(x) \leq x\}$  et  $a = \bigwedge P$ . Pour tout  $x \in P$ ,  $a \leq x$ , donc  $f(a) \leq f(x) \leq x$  par croissance. Ainsi  $f(a)$  est un minorant de  $P$ , d'où  $f(a) \leq a$ . Ceci montre que  $a \in P$ .

Par croissance,  $f(f(a)) \leq f(a)$ , donc  $f(a) \in P$ , d'où  $a \leq f(a)$ . Combiné avec  $f(a) \leq a$ , on obtient  $f(a) = a$ .

Si  $b$  est un autre point fixe,  $b \in P$  donc  $a \leq b$  :  $a$  est bien le plus petit point fixe.

(2) Dual de (1).

(3) Soit  $S \subseteq \text{Fix}(f)$ . L'ensemble  $\{x \in L : x \geq s \ \forall s \in S, f(x) \leq x\}$  est non vide (il contient  $\top$ ). Son infimum est un point fixe de  $f$  qui est le supremum de  $S$  dans  $\text{Fix}(f)$ .  $\square$

*Remarque 10.3.* Le théorème de Knaster–Tarski ne requiert aucune hypothèse de continuité : la seule monotonie suffit. En revanche, il ne fournit pas de méthode constructive pour calculer le point fixe.

**Exemple 10.4** (Application aux systèmes d'équations). Soit  $\Sigma$  un alphabet et  $\mathcal{P}(\Sigma^*)$  le treillis des langages sur  $\Sigma$ . Un système d'équations de langages  $X_i = f_i(X_1, \dots, X_n)$  où les  $f_i$  sont croissantes admet une plus petite solution, par le théorème de Tarski appliqué au treillis  $\mathcal{P}(\Sigma^*)^n$ .

## 10.2 Théorème de Kleene

**Définition 10.5** (dcpo pointé). Un *dcpo pointé* est un dcpo  $(D, \leq)$  possédant un plus petit élément  $\perp$ .

**Théorème 10.6** (Kleene). Soit  $(D, \leq)$  un dcpo pointé et  $f : D \rightarrow D$  une fonction Scott-continue. Alors  $f$  possède un plus petit point fixe, et celui-ci est donné par :

$$\text{lfp}(f) = \bigvee_{n \geq 0} f^n(\perp).$$

*Démonstration.* Montrons d'abord que la suite  $(f^n(\perp))_{n \geq 0}$  est croissante. On a  $\perp \leq f(\perp)$  car  $\perp$  est le plus petit élément. Par récurrence, si  $f^n(\perp) \leq f^{n+1}(\perp)$ , alors par croissance de  $f$ ,  $f^{n+1}(\perp) \leq f^{n+2}(\perp)$ .

L'ensemble  $\{f^n(\perp) : n \geq 0\}$  est dirigé (c'est une chaîne), donc son supremum  $a = \bigvee_n f^n(\perp)$  existe dans  $D$ .

Par Scott-continuité :

$$f(a) = f\left(\bigvee_{n \geq 0} f^n(\perp)\right) = \bigvee_{n \geq 0} f^{n+1}(\perp) = a.$$

Donc  $a$  est un point fixe.

Si  $b$  est un autre point fixe, alors  $\perp \leq b$  et par récurrence  $f^n(\perp) \leq b$  pour tout  $n$ , d'où  $a = \bigvee_n f^n(\perp) \leq b$ .  $\square$

### Attention

Le théorème de Kleene nécessite la Scott-continuité (pas seulement la croissance). Une fonction croissante sur un dcpo pointé peut ne pas avoir de plus petit point fixe obtenu par itération depuis  $\perp$ .

**Corollaire 10.7** (Itération transfinie). *Si  $f: L \rightarrow L$  est une fonction croissante sur un treillis complet, le plus petit point fixe est atteint par itération transfinie :*

$$f^\alpha(\perp) = \begin{cases} f(f^{\alpha-1}(\perp)) & \text{si } \alpha \text{ est successeur,} \\ \bigvee_{\beta < \alpha} f^\beta(\perp) & \text{si } \alpha \text{ est limite.} \end{cases}$$

*Il existe un ordinal  $\alpha_0$  tel que  $f^{\alpha_0}(\perp) = \text{lfp}(f)$ .*

**Exemple 10.8** (Sémantique des boucles). La sémantique d'une boucle **while** **b** **do** **c** est le plus petit point fixe de l'opérateur  $\Phi: [S \rightarrow S_\perp] \rightarrow [S \rightarrow S_\perp]$  défini par :

$$\Phi(g)(s) = \begin{cases} g(\llbracket c \rrbracket(s)) & \text{si } \llbracket b \rrbracket(s) = \text{true,} \\ s & \text{si } \llbracket b \rrbracket(s) = \text{false,} \\ \perp & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par le théorème de Kleene,  $\text{lfp}(\Phi) = \bigvee_n \Phi^n(\perp_{S \rightarrow S_\perp})$ .

## 10.3 Théorème de Patairaia

**Théorème 10.9** (Patairaia). *Soit  $(D, \leq)$  un dcpo pointé et  $f: D \rightarrow D$  une fonction croissante (pas nécessairement continue) telle que  $f(x) \geq x$  pour tout  $x$  (inflationnaire). Alors  $f$  possède un point fixe.*

*Démonstration.* Définissons l'ensemble  $A = \{x \in D : \perp \leq x \leq f(x) \text{ et } x \text{ est le supremum d'une chaîne}\}$ . Plus précisément, considérons l'ensemble  $I$  de tous les sous-ensembles  $S$  de  $D$  tels que :

1.  $\perp \in S$ ;
2.  $S$  est stable par  $f$ ;
3.  $S$  est stable par suprema dirigés (dans  $D$ ).

Soit  $C = \bigcap I$  le plus petit tel ensemble. On montre que  $C$  est une chaîne (en vérifiant que l'ensemble des éléments comparables à tous les éléments de  $C$  satisfait les trois conditions). Le supremum  $c = \bigvee C$  existe dans  $D$  et vérifie  $f(c) \leq c$  (car  $f(c) \in C$  par stabilité, d'où  $f(c) \leq c$ ). Comme  $f$  est inflationnaire,  $c \leq f(c)$ , d'où  $f(c) = c$ .  $\square$

*Remarque 10.10.* Le théorème de Patairaia généralise le théorème de Bourbaki–Witt (qui suppose que toute chaîne a un supremum). L'avantage du théorème de Patairaia est qu'il ne nécessite que la complétude dirigée, pas la complétude par chaînes.

**Corollaire 10.11.** *Tout dcpo pointé dans lequel toute fonction croissante inflationnaire a un point fixe est un treillis complet.*

## 10.4 Plus petit point fixe en théorie des domaines

**Théorème 10.12** (Existence du plus petit point fixe). *Soit  $D$  un domaine continu pointé et  $f: D \rightarrow D$  une fonction Scott-continue. Alors :*

1. *Le plus petit point fixe  $\text{lfp}(f)$  existe et est donné par la formule de Kleene  $\text{lfp}(f) = \bigvee_n f^n(\perp)$ .*

2. Si de plus  $D$  est un domaine algébrique effectivement présenté et  $f$  est effectivement donnée, alors  $\text{lfp}(f)$  est calculable.

3. L'opérateur  $\text{lfp}: [D \rightarrow D] \rightarrow D$  est lui-même Scott-continu.

*Démonstration.* (1) C'est le théorème de Kleene (Théorème 10.6).

(2) Les approximations finies  $f^n(\perp)$  sont calculables, et les éléments compacts en dessous de  $\text{lfp}(f)$  sont énumérables.

(3) Soit  $(f_i)_{i \in I}$  une famille dirigée dans  $[D \rightarrow D]$  et  $g = \bigvee_i f_i$ . Alors :

$$\text{lfp}(g) = \bigvee_n g^n(\perp) = \bigvee_n \left( \bigvee_i f_i \right)^n (\perp) = \bigvee_i \bigvee_n f_i^n(\perp) = \bigvee_i \text{lfp}(f_i).$$

L'échange des suprema est justifié par la Scott-continuité de la composition et de l'application.  $\square$

## 10.5 Applications aux définitions récursives

**Proposition 10.13** (Définitions récursives de fonctions). Soit  $D$  un dcpo pointé. Une définition récursive de la forme

$$f(x) = \Phi(f, x)$$

où  $\Phi: [D \rightarrow D] \times D \rightarrow D$  est Scott-continue, possède une plus petite solution  $f^* \in [D \rightarrow D]$ , donnée par  $f^* = \text{lfp}(\lambda g. \lambda x. \Phi(g, x))$ .

**Exemple 10.14** (Factorielle). La définition récursive

$$\text{fact}(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ n \cdot \text{fact}(n-1) & \text{sinon} \end{cases}$$

correspond à  $\text{fact} = \text{lfp}(\Phi)$  où  $\Phi(g)(n) =$  si  $n = 0$  alors 1 sinon  $n \cdot g(n-1)$ . L'opérateur  $\Phi$  est Scott-continu sur  $[\mathbb{N}_\perp \rightarrow \mathbb{N}_\perp]$ .

**Théorème 10.15** (Équations de domaines récursives). Si  $F$  est un foncteur continu localement continu sur la catégorie des domaines continus avec paires de rétraction, alors l'équation de domaine

$$D \cong F(D)$$

admet une solution, obtenue comme limite projective (et aussi colimite inductive) de la suite  $D_0 \leftarrow D_1 \leftarrow \dots$  où  $D_{n+1} = F(D_n)$ .

### Récapitulatif des théorèmes de points fixes

| Théorème       | Structure        | Hypothèse sur $f$  | Résultat                             |
|----------------|------------------|--------------------|--------------------------------------|
| Knaster–Tarski | Treillis complet | Croissante         | $\text{Fix}(f)$ treillis complet     |
| Kleene         | dcpo pointé      | Scott-continue     | $\text{lfp}(f) = \bigvee f^n(\perp)$ |
| Pataia         | dcpo pointé      | Croissante inflat. | Existence de point fixe              |
| Bourbaki–Witt  | Ordonné complet  | Inflationnaire     | Existence de point fixe              |

## 10.6 Exercices

**Exercice 10.1.** Soit  $L = \mathcal{P}(\mathbb{N})$  le treillis des parties de  $\mathbb{N}$ . Déterminer le plus petit et le plus grand point fixe de  $f(A) = \mathbb{N} \setminus A$ .

**Exercice 10.2.** Montrer que dans le théorème de Kleene, la suite  $(f^n(\perp))$  peut se stabiliser après un nombre fini d'étapes si et seulement si  $f$  est « finie » au sens où le plus petit point fixe est un élément compact du dcpo.

**Exercice 10.3.** Donner un exemple de dcpo pointé  $D$  et de fonction croissante  $f: D \rightarrow D$  telle que la suite  $(f^n(\perp))$  ne converge pas vers le plus petit point fixe de  $f$  (c'est-à-dire telle que  $\bigvee_n f^n(\perp) < \text{lfp}(f)$ ).

**Exercice 10.4.** Soit  $D$  un dcpo pointé et  $f, g: D \rightarrow D$  deux fonctions Scott-continues telles que  $f \leq g$  point par point. Montrer que  $\text{lfp}(f) \leq \text{lfp}(g)$ .

**Exercice 10.5** (Théorème de Bekic). Soient  $D, E$  deux dcpos pointés et  $f: D \times E \rightarrow D$ ,  $g: D \times E \rightarrow E$  des fonctions Scott-continues. Montrer que le plus petit point fixe de  $(f, g): D \times E \rightarrow D \times E$  est donné par  $(\text{lfp}(\hat{f}), \text{lfp}(\hat{g}))$  où  $\hat{f}$  et  $\hat{g}$  sont définies par substitution mutuelle.

**Exercice 10.6.** Soit  $\Sigma = \{a, b\}$  et  $\mathcal{P}(\Sigma^*)$  le treillis des langages. L'opérateur  $\Phi(X) = \{\varepsilon\} \cup \{a\} \cdot X \cdot \{b\}$  est croissant. Calculer  $\text{lfp}(\Phi)$  par le théorème de Kleene.

**Exercice 10.7.** Montrer que le théorème de Pataraia implique le théorème de Zorn : tout ensemble ordonné inductif (toute chaîne est bornée) admet un élément maximal.  
*Indication : considérer un dcpo pointé et une fonction de choix.*



# Bibliographie

- [1] Künzi, H.-P.A., *Nonsymmetric Distances and Their Associated Topologies*, 2001.
- [2] Kelly, J.C., *Bitopological Spaces*, Proc. London Math. Soc., 1963.
- [3] Gierz, G. et al., *Continuous Lattices and Domains*, Cambridge, 2003.
- [4] Goubault-Larrecq, J., *Non-Hausdorff Topology and Domain Theory*, Cambridge, 2013.
- [5] Johnstone, P.T., *Stone Spaces*, Cambridge, 1982.
- [6] Smyth, M.B., *Topology*, in Handbook of Logic in CS, Oxford, 1992.