

Topologie Générale

Notes de Cours

L2–L3 — 2025–2026

Yaë Ulrich Gaba

*« La géométrie est l'art de raisonner juste
sur des figures fausses. » — Henri Poincaré*

Table des matières

Préface	6
Notations	7
1 Espaces topologiques — Définitions et axiomes	8
Introduction	8
1.1 Définition d'un espace topologique	8
1.2 Exemples fondamentaux	9
1.3 Comparaison de topologies	10
1.4 Voisinages	11
1.5 Illustrations	12
1.6 Contre-exemple : intersection infinie d'ouverts	13
1.7 Exemples travaillés	13
1.8 Exercices	14
Résumé du chapitre	15
2 Ouverts, fermés, intérieur, adhérence, frontière	16
Introduction	16
2.1 Ensembles fermés	16
2.2 Intérieur	17
2.3 Adhérence	18
2.4 Frontière	19
2.5 Ensemble dérivé, points isolés, ensembles denses	20
2.6 Axiomes de fermeture de Kuratowski	21
2.7 Théorème des 14 ensembles de Kuratowski	21
2.8 Illustrations	23
2.9 Contre-exemples	23
2.10 Exemples travaillés	24
2.11 Exercices	25
Résumé du chapitre	26
3 Bases et sous-bases, topologies engendrées	28
Introduction	28
3.1 Bases d'une topologie	29
3.1.1 Définition et premières propriétés	29
3.1.2 Conditions nécessaires et suffisantes	29
3.2 Sous-bases et topologies engendrées	30

3.2.1	Sous-base	30
3.2.2	Topologie engendrée comme intersection	30
3.3	Exemples de bases	31
3.4	Axiomes de dénombrabilité	32
3.4.1	Espaces premier et second dénombrable	32
3.4.2	Espaces séparables	32
3.4.3	Théorème de Lindelöf	32
3.5	Espaces métriques et dénombrabilité	33
3.6	Contre-exemples	33
3.7	Exemples résolus	34
3.8	Exercices	35
	Résumé du chapitre	35
4	Continuité, homéomorphismes, invariants topologiques	37
	Introduction	37
4.1	Applications continues	38
4.1.1	Définition par image réciproque d'ouverts	38
4.1.2	Caractérisations équivalentes	38
4.1.3	Composition	39
4.2	Homéomorphismes	39
4.2.1	Définition	39
4.2.2	Applications ouvertes et fermées	40
4.3	Le théorème compact-Hausdorff	40
4.4	Exemples d'homéomorphismes	41
4.5	Plongements topologiques	41
4.6	Lemme de recollement	42
4.7	Contre-exemples	42
4.8	Invariance du domaine	43
4.9	Exemples résolus	43
4.10	Exercices	43
	Résumé du chapitre	44
5	Axiomes de séparation	45
	Introduction	45
5.1	L'axiome T_0 (Kolmogorov)	45
5.2	L'axiome T_1	46
5.3	L'axiome T_2 (Hausdorff)	46
5.4	Espaces réguliers et axiome T_3	48
5.5	Espaces normaux et axiome T_4	48
5.6	Implications entre axiomes de séparation	48
5.7	Contre-exemples	49
5.8	Exemples résolus	50
5.9	Exercices	50
	Résumé du chapitre	51

6	Compacité et théorème de Tychonoff	52
	Introduction	52
6.1	Définition et premières propriétés	52
6.2	Propriété de l'intersection finie	53
6.3	Compacité et opérations topologiques	53
6.4	Compacité séquentielle et compacité par point d'accumulation	54
6.5	Théorème de la sous-base d'Alexander	55
6.6	Théorème de Tychonoff	56
6.7	Compactification	57
6.8	Contre-exemples	59
6.9	Exemples résolus	60
6.10	Exercices	60
	Résumé du chapitre	61
7	Connexité et connexité par arcs	63
7.1	Espaces connexes	63
7.2	Image continue d'un connexe	64
7.3	Composantes connexes	65
7.4	Connexité par arcs	66
7.5	Contre-exemple : la courbe du topologiste	66
7.6	Connexité locale	67
7.7	Produit d'espaces connexes	68
7.8	Exemples et illustrations	69
7.9	Exercices	69
	Résumé du chapitre 7	70
8	Espaces produits et topologie quotient	71
8.1	Topologie produit : produits finis	71
8.2	Topologie produit : cas général	71
8.3	Propriété universelle de la topologie produit	72
8.4	Projections et lemme du tube	73
8.5	Topologie quotient	73
8.6	Propriété universelle de la topologie quotient	74
8.7	Composition d'applications quotient	74
8.8	Exemples classiques de quotients	75
8.9	La topologie boîte et ses défauts	76
8.10	Topologie somme (coproduit)	77
8.11	Exemples résolus	77
8.12	Exercices	78
	Résumé du chapitre 8	79
9	Lemme d'Urysohn et théorème d'extension de Tietze	80
9.1	Espaces complètement réguliers	80
9.2	Lemme d'Urysohn	81
9.3	Théorème d'extension de Tietze	83
9.4	Partitions de l'unité	84
9.5	Théorème de métrisation d'Urysohn	84

9.6	Un contre-exemple fondamental	85
9.7	Exemples développés	85
9.8	Exercices	86
	Résumé du chapitre 9	86
10	Aperçu sur la topologie algébrique	88
10.1	Homotopie de applications	88
10.2	Le groupe fondamental	89
10.3	Groupe fondamental du cercle	89
10.4	Espaces de revêtement	90
10.5	Théorème du point fixe de Brouwer en dimension 2	90
10.6	Groupes d'homotopie supérieurs et homologie	91
10.7	Notes historiques	92
10.8	Exercices	92
	Résumé du chapitre 10	92
A	Répertoire de contre-exemples	96
A.1	Droite de Sorgenfrey	96
A.2	Plan de Sorgenfrey	96
A.3	Topologie cofinie	97
A.4	Topologie codénombrable	97
A.5	Espace de Sierpiński	97
A.6	Ensemble de Cantor	98
A.7	Courbe du topologiste (<i>topologist's sine curve</i>)	98
A.8	Longue droite	98
A.9	Droite à double origine (<i>bug-eyed line</i>)	99
A.10	Topologie du point particulier	99
A.11	Espace de Moore (plan de Niemytzki)	100
A.12	Planche de Tychonoff	100

Préface

L'étude de la topologie générale constitue un passage essentiel dans la formation mathématique. En analyse, l'étudiant rencontre d'abord la topologie de $\mathbb{R}$ puis celle de $\mathbb{R}^n$, à travers les notions de suites convergentes, d'ouverts et de fermés définis au moyen de la distance euclidienne. Rapidement, il s'aperçoit que nombre de raisonnements — continuité, compacité, connexité — ne reposent pas sur la structure métrique elle-même, mais sur la seule donnée des ouverts. C'est cette observation qui motive le passage à l'abstraction.

La topologie générale propose un cadre unifié dans lequel les espaces métriques ne sont qu'un cas particulier. Ce cadre permet de traiter sur un pied d'égalité des espaces aussi différents que les espaces de fonctions munis de topologies faibles, les espaces de Zariski en géométrie algébrique, ou les espaces de Stone–Čech en analyse fonctionnelle. La généralité du formalisme, loin d'être un exercice d'abstraction gratuite, se révèle indispensable dès que l'on souhaite donner des démonstrations véritablement intrinsèques.

Ces notes s'inscrivent dans la tradition initiée par Nicolas Bourbaki dans les *Éléments de mathématique*, dont le chapitre consacré à la topologie générale demeure une référence incontournable. Nous adoptons les conventions de Bourbaki : les définitions sont précises, les démonstrations complètes, et les notations systématiques. Cependant, nous avons fait le choix d'accompagner la théorie de nombreux exemples, contre-exemples et exercices, afin de rendre le texte accessible à un public de Licence L2–L3.

Le plan du cours suit une progression classique. Nous partons de la définition d'un espace topologique et de ses premières conséquences (ouverts, fermés, intérieur, adhérence), pour construire progressivement les outils fondamentaux : bases et sous-bases, continuité, topologie produit, séparation, compacité, connexité, et enfin espaces complets et théorèmes de Baire. Chaque chapitre se termine par un résumé et une série d'exercices classés par difficulté.

Le lecteur est supposé maîtriser la théorie des ensembles (relations, applications, cardinalité) ainsi que les bases de l'analyse réelle (suites, séries, continuité dans $\mathbb{R}$). Aucune connaissance préalable de topologie abstraite n'est requise.

L'auteur

Notations

Nous rassemblons ici les notations utilisées tout au long de ce cours.

Notation	Signification
(X, τ)	Espace topologique
τ ou $\mathcal{O}_X$	Topologie (ensemble des ouverts) de X
$\overset{\circ}{A}$ ou A°	Intérieur de A
$\overline{A}$	Adhérence (fermeture) de A
∂A	Frontière de A
A'	Ensemble dérivé de A
$\mathcal{V}(x)$	Système de voisinages de x
$B(x, r)$	Boule ouverte de centre x et de rayon r
$\overline{B}(x, r)$	Boule fermée de centre x et de rayon r
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	Ensembles de nombres usuels
$\mathcal{P}(X)$	Ensemble des parties de X
A^c ou $X \setminus A$	Complémentaire de A dans X
$\tau_1 \subset \tau_2$	τ_1 est moins fine que τ_2
τ_d	Topologie discrète
τ_i	Topologie indiscrete (grossière)
τ_{cof}	Topologie cofinie
τ_{cod}	Topologie codénombrable

Chapitre 1

Espaces topologiques — Définitions et axiomes

Introduction

Dans un cours d'analyse, on définit les ouverts de $\mathbb{R}^n$ à l'aide de la distance euclidienne d : une partie $U \subset \mathbb{R}^n$ est ouverte si, pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < r\}$$

soit contenue dans U . On vérifie alors que la famille τ_d de tous les ouverts satisfait trois propriétés remarquables :

- (i) $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ appartiennent à τ_d ;
- (ii) toute réunion (même infinie) d'éléments de τ_d appartient à τ_d ;
- (iii) toute intersection *finie* d'éléments de τ_d appartient à τ_d .

Ce sont ces trois propriétés, et elles seules, qui sous-tendent la plupart des raisonnements topologiques. L'idée fondatrice de la topologie générale est de prendre ces propriétés comme *axiomes*, en oubliant la distance qui leur a donné naissance. On obtient ainsi un cadre beaucoup plus souple, applicable à des situations où aucune distance naturelle n'est disponible.

1.1 Définition d'un espace topologique

Définition 1.1 (Topologie). Soit X un ensemble. On appelle **topologie** sur X une famille $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ vérifiant les trois axiomes suivants :

(O1) $\emptyset \in \tau$ et $X \in \tau$.

(O2) Si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque d'éléments de τ , alors $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

(O3) Si $U_1, U_2, \dots, U_n \in \tau$ (famille finie), alors $\bigcap_{k=1}^n U_k \in \tau$.

Le couple (X, τ) est appelé **espace topologique**. Les éléments de τ sont appelés les

ouverts de (X, τ) .

Remarque 1.1. L'axiome **(O2)** autorise des réunions indexées par un ensemble I quelconque, éventuellement non dénombrable, voire vide (auquel cas la réunion vaut $\emptyset$). En revanche, l'axiome **(O3)** ne porte que sur des intersections *finies*. Cette dissymétrie est essentielle : nous verrons (exemple 1.15) que l'intersection dénombrable d'ouverts n'est pas nécessairement ouverte.

1.2 Exemples fondamentaux

Exemple 1.2 (Topologie discrète). Soit X un ensemble quelconque. La famille $\tau_d = \mathcal{P}(X)$ (toutes les parties de X) est une topologie sur X , appelée **topologie discrète**. En effet, les trois axiomes sont trivialement satisfaits puisque toute partie est ouverte.

Dans cette topologie, tout singleton $\{x\}$ est ouvert, et donc toute partie de X est à la fois ouverte et fermée.

Exemple 1.3 (Topologie indiscrete). La famille $\tau_i = \{\emptyset, X\}$ est une topologie sur X , appelée **topologie indiscrete** (ou **grossière**). C'est la topologie la plus pauvre possible : les seuls ouverts sont l'ensemble vide et X tout entier.

Exemple 1.4 (Topologie cofinie). Soit X un ensemble. On pose

$$\tau_{\text{cof}} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : X \setminus U \text{ est fini}\}.$$

Vérifions que τ_{cof} est une topologie.

Démonstration. **(O1)** : $\emptyset \in \tau_{\text{cof}}$ par définition, et $X \in \tau_{\text{cof}}$ car $X \setminus X = \emptyset$ est fini.

(O2) : Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de τ_{cof} . Si tous les U_i sont vides, leur réunion est $\emptyset \in \tau_{\text{cof}}$. Sinon, il existe $i_0 \in I$ tel que $U_{i_0} \neq \emptyset$, et alors $X \setminus U_{i_0}$ est fini. Or

$$X \setminus \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus U_i) \subset X \setminus U_{i_0},$$

donc $X \setminus \bigcup_{i \in I} U_i$ est fini, et la réunion est dans τ_{cof} .

(O3) : Soient $U_1, \dots, U_n \in \tau_{\text{cof}}$. Si l'un des U_k est vide, l'intersection est vide, donc dans τ_{cof} . Sinon, chaque $X \setminus U_k$ est fini, et

$$X \setminus \bigcap_{k=1}^n U_k = \bigcup_{k=1}^n (X \setminus U_k)$$

est une réunion finie d'ensembles finis, donc finie. Ainsi $\bigcap_{k=1}^n U_k \in \tau_{\text{cof}}$. □

Lorsque X est infini, cette topologie n'est pas métrisable. Lorsque X est fini, $\tau_{\text{cof}} = \mathcal{P}(X) = \tau_d$ coïncide avec la topologie discrète.

Exemple 1.5 (Topologie codénombrable). Sur un ensemble X non dénombrable, on peut définir

$$\tau_{\text{cod}} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : X \setminus U \text{ est dénombrable}\}.$$

La vérification des axiomes est analogue à celle de la topologie cofinie. Si $X = \mathbb{R}$, cette topologie est strictement plus fine que τ_{cof} et strictement moins fine que τ_d .

Exemple 1.6 (Topologie métrique). Soit (X, d) un espace métrique. La topologie τ_d engendrée par les boules ouvertes

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}, \quad x \in X, r > 0,$$

est définie par : $U \in \tau_d$ si et seulement si pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$. On vérifie les trois axiomes :

Démonstration. **(O1)** : $\emptyset$ satisfait la condition vacuement. Pour X , tout point x admet $B(x, 1) \subset X$.

(O2) : Si chaque U_i est ouvert et $x \in \bigcup_i U_i$, alors $x \in U_{i_0}$ pour un certain i_0 , et il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_i U_i$.

(O3) : Si $x \in U_1 \cap \dots \cap U_n$, pour chaque k il existe $r_k > 0$ tel que $B(x, r_k) \subset U_k$. En posant $r = \min(r_1, \dots, r_n) > 0$, on a $B(x, r) \subset U_1 \cap \dots \cap U_n$. $\square$

La topologie usuelle de $\mathbb{R}^n$ est la topologie métrique associée à la distance euclidienne.

Exemple 1.7 (Topologie de Zariski sur $\mathbb{R}$). Sur $\mathbb{R}$ (ou plus généralement sur un corps k), on définit la **topologie de Zariski** en déclarant fermés les ensembles de zéros de familles de polynômes. Dans le cas de $\mathbb{R}$ (vu comme droite affine), les fermés de Zariski sont les ensembles finis et $\mathbb{R}$ lui-même. Ainsi, la topologie de Zariski sur $\mathbb{R}$ coïncide avec la topologie cofinie.

En dimension supérieure, sur k^n avec $n \geq 2$, la topologie de Zariski ne coïncide plus avec la topologie cofinie. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, l'ensemble $\{(x, y) : y = 0\}$ est un fermé de Zariski (zéros du polynôme y) qui n'est pas fini.

1.3 Comparaison de topologies

Définition 1.2 (Topologies comparables). Soient τ_1 et τ_2 deux topologies sur un même ensemble X . On dit que τ_1 est **moins fine** (ou **plus grossière**) que τ_2 , et on note $\tau_1 \subset \tau_2$, si tout ouvert de τ_1 est aussi un ouvert de τ_2 . On dit alors aussi que τ_2 est **plus fine** que τ_1 .

Lorsque $\tau_1 \subset \tau_2$ ou $\tau_2 \subset \tau_1$, on dit que τ_1 et τ_2 sont **comparables**.

Remarque 1.8. La relation $\subset$ définit un ordre partiel sur l'ensemble de toutes les topologies sur X . La topologie indiscrete τ_i est le plus petit élément, et la topologie discrete τ_d est le plus grand élément. On a donc, pour toute topologie τ sur X :

$$\tau_i \subset \tau \subset \tau_d.$$

Exemple 1.9. Sur $\mathbb{R}$, on a la chaîne d'inclusions strictes suivante :

$$\tau_i \subsetneq \tau_{\text{cof}} \subsetneq \tau_{\text{cod}} \subsetneq \tau_{\text{us}} \subsetneq \tau_d,$$

où τ_{us} désigne la topologie usuelle (métrique euclidienne).

Proposition 1.10. Soit $(\tau_j)_{j \in J}$ une famille de topologies sur un ensemble X . Alors

$$\tau = \bigcap_{j \in J} \tau_j$$

est une topologie sur X .

Démonstration. Vérifions les trois axiomes.

(O1) : Pour tout $j \in J$, $\emptyset \in \tau_j$ et $X \in \tau_j$, donc $\emptyset \in \tau$ et $X \in \tau$.

(O2) : Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de τ . Pour chaque $j \in J$ et chaque $i \in I$, on a $U_i \in \tau_j$. Comme τ_j est une topologie, $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau_j$. Ceci valant pour tout j , on a $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

(O3) : Le raisonnement est identique pour les intersections finies. $\square$

Remarque 1.11. En revanche, la réunion de deux topologies n'est en général pas une topologie (voir exercice 1.4).

La proposition 1.10 montre que l'ensemble des topologies sur X , ordonné par inclusion, est un treillis complet. L'infimum d'une famille de topologies est leur intersection. Le supremum est la topologie la moins fine contenant leur réunion.

1.4 Voisinsages

Définition 1.3 (Voisinage). Soit (X, τ) un espace topologique et $x \in X$. On appelle **voisinage** de x toute partie $V \subset X$ telle qu'il existe un ouvert $U \in \tau$ vérifiant $x \in U \subset V$.

L'ensemble de tous les voisinages de x est noté $\mathcal{V}(x)$ et s'appelle le **système de voisinages** de x .

Proposition 1.12. Soit (X, τ) un espace topologique et $x \in X$. Le système de voisinages $\mathcal{V}(x)$ possède les propriétés suivantes :

(V1) $\mathcal{V}(x) \neq \emptyset$, et pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, $x \in V$.

(V2) Si $V \in \mathcal{V}(x)$ et $V \subset W$, alors $W \in \mathcal{V}(x)$.

(V3) Si $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x)$, alors $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x)$.

(V4) Pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, il existe $W \in \mathcal{V}(x)$ tel que $W \subset V$ et $V \in \mathcal{V}(y)$ pour tout $y \in W$.

Démonstration. (V1) : X est un ouvert contenant x , donc $X \in \mathcal{V}(x)$. De plus, si $V \in \mathcal{V}(x)$, il existe un ouvert U avec $x \in U \subset V$, d'où $x \in V$.

(V2) : Si $V \in \mathcal{V}(x)$, il existe $U \in \tau$ avec $x \in U \subset V$. Si $V \subset W$, alors $x \in U \subset W$, donc $W \in \mathcal{V}(x)$.

(V3) : Soient $U_1, U_2 \in \tau$ avec $x \in U_k \subset V_k$ pour $k = 1, 2$. Alors $U_1 \cap U_2 \in \tau$ (intersection finie d'ouverts) et $x \in U_1 \cap U_2 \subset V_1 \cap V_2$.

(V4) : Si $V \in \mathcal{V}(x)$, soit $U \in \tau$ avec $x \in U \subset V$. Posons $W = U$. Pour tout $y \in W = U$, comme U est ouvert et $U \subset V$, on a $V \in \mathcal{V}(y)$. De plus $W \subset V$ et $W \in \mathcal{V}(x)$. $\square$

Remarque 1.13. La propriété **(V4)** est subtile. Elle exprime que tout voisinage contient un voisinage « ouvert », c'est-à-dire un voisinage de chacun de ses points. Réciproquement, étant donné pour chaque $x \in X$ un filtre $\mathcal{V}(x)$ satisfaisant **(V1)–(V4)**, il existe une unique topologie sur X dont les systèmes de voisinages sont exactement les $\mathcal{V}(x)$. Cette approche dite « par les voisinages » est celle adoptée par Bourbaki.

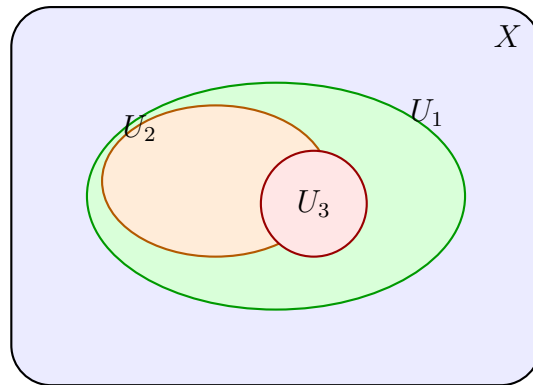
Proposition 1.14. Soit (X, τ) un espace topologique. Une partie $U \subset X$ est ouverte si et seulement si U est voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire :

$$U \in \tau \iff \forall x \in U, U \in \mathcal{V}(x).$$

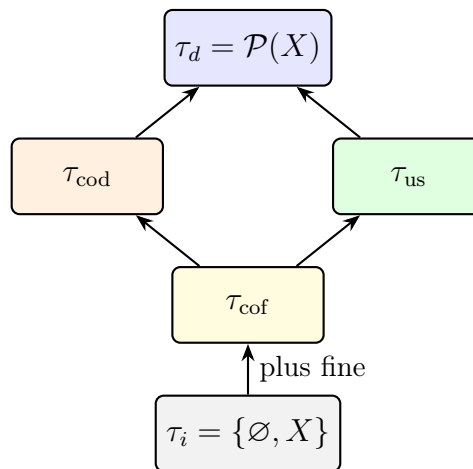
Démonstration. Si $U \in \tau$ et $x \in U$, alors $x \in U \subset U$ avec U ouvert, donc $U \in \mathcal{V}(x)$.

Réciproquement, supposons que pour tout $x \in U$, $U \in \mathcal{V}(x)$. Pour chaque $x \in U$, il existe $U_x \in \tau$ avec $x \in U_x \subset U$. Alors $U = \bigcup_{x \in U} U_x$ est une réunion d'ouverts, donc $U \in \tau$. $\square$

1.5 Illustrations



Ouverts emboîtés : $U_3 \subset U_2 \cap U_1 \subset U_1 \subset X$



Treillis des topologies sur $\mathbb{R}$ (diagramme partiel)

1.6 Contre-exemple : intersection infinie d'ouverts

Exemple 1.15. Dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, considérons la famille d'ouverts

$$U_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \quad n \geq 1.$$

Chaque U_n est ouvert. Cependant,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{0\},$$

qui est un singleton, donc un fermé non ouvert de $\mathbb{R}$. Cet exemple montre que l'axiome **(O3)** ne peut pas être étendu aux intersections infinies.

Démonstration. Soit $x \in \bigcap_{n \geq 1} U_n$. Pour tout $n \geq 1$, $|x| < 1/n$, donc $|x| \leq 0$, d'où $x = 0$. Réciproquement, $0 \in U_n$ pour tout n . Ainsi $\bigcap_{n \geq 1} U_n = \{0\}$.

Le singleton $\{0\}$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$: pour tout $r > 0$, l'intervalle $(-r, r)$ n'est pas contenu dans $\{0\}$. $\square$

1.7 Exemples travaillés

Exemple 1.16 (Topologie sur un ensemble à trois éléments). Soit $X = \{a, b, c\}$. Considérons $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$. Vérifions que τ est une topologie.

(O1) : $\emptyset \in \tau$ et $X \in \tau$. ✓

(O2) : Vérifions toutes les réunions possibles : $\{a\} \cup \{a, b\} = \{a, b\} \in \tau$, $\{a\} \cup X = X \in \tau$, $\{a, b\} \cup X = X \in \tau$, $\{a\} \cup \{a, b\} \cup X = X \in \tau$. ✓

(O3) : Vérifions les intersections finies : $\{a\} \cap \{a, b\} = \{a\} \in \tau$, $\{a\} \cap X = \{a\} \in \tau$, $\{a, b\} \cap X = \{a, b\} \in \tau$. ✓

Ainsi τ est bien une topologie. On constate que $\{b\}$ n'est pas ouvert et que $\{a, c\}$ n'est pas ouvert.

Exemple 1.17 (Voisinages dans la topologie cofinie). Soit X un ensemble infini muni de la topologie cofinie τ_{cof} . Soit $x \in X$. Les voisinages de x sont les parties V de X telles qu'il existe un ouvert U avec $x \in U \subset V$, c'est-à-dire les parties V contenant un ouvert non vide passant par x .

Un ouvert non vide U de τ_{cof} est un ensemble dont le complémentaire est fini. Ainsi, $V \in \mathcal{V}(x)$ si et seulement si V contient une partie U de complémentaire fini avec $x \in U$. En particulier, V est voisinage de x si et seulement si $X \setminus V$ est fini ou, de façon équivalente, V est cofinement contenu dans X .

Plus précisément, $V \in \mathcal{V}(x)$ si et seulement si $x \in V$ et $X \setminus V$ est fini. Cela revient à dire que chaque voisinage de x ne diffère de X que par un nombre fini de points.

Exemple 1.18 (Deux distances, même topologie). Sur $\mathbb{R}^n$, considérons les trois distances suivantes :

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \quad d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}, \quad d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

Ces trois distances sont équivalentes au sens où il existe des constantes $c, C > 0$ telles que

$$c d_\infty(x, y) \leq d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq C d_\infty(x, y)$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$. Plus précisément, $d_\infty \leq d_2 \leq d_1 \leq n d_\infty$ et $d_2 \leq \sqrt{n} d_\infty$.

En conséquence, les trois distances engendrent la même topologie sur $\mathbb{R}^n$: toute boule ouverte pour l'une contient une boule ouverte pour l'autre, et réciproquement.

1.8 Exercices

Exercice 1.1 (★). Soit $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Parmi les familles suivantes, lesquelles sont des topologies sur X ?

- (a) $\tau_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, X\}$
- (b) $\tau_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, X\}$
- (c) $\tau_3 = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, X\}$
- (d) $\tau_4 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, X\}$

Exercice 1.2 (★). Montrer que la topologie cofinie sur un ensemble X est T_1 , c'est-à-dire que pour tous $x \neq y$ dans X , il existe un ouvert contenant x mais pas y .

Exercice 1.3 (★). Montrer que si X est infini, la topologie cofinie sur X n'est pas séparée (non T_2 , non Hausdorff) : deux ouverts non vides quelconques ont une intersection non vide.

Exercice 1.4 (★★). Donner un exemple de deux topologies τ_1 et τ_2 sur un ensemble X telles que $\tau_1 \cup \tau_2$ ne soit pas une topologie.

Exercice 1.5 (★★). Déterminer le nombre de topologies distinctes sur un ensemble à 2 éléments, puis sur un ensemble à 3 éléments.

Exercice 1.6 (★★). Soit X un ensemble et $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$. On définit la *topologie engendrée par $\mathcal{S}$* comme la plus petite topologie contenant $\mathcal{S}$. Montrer que cette topologie existe et la décrire explicitement à l'aide d'intersections finies et de réunions quelconques d'éléments de $\mathcal{S}$.

Exercice 1.7 (★★). Montrer que la topologie codénombrable sur $\mathbb{R}$ n'est pas métrisable. *Indication : montrer que dans cette topologie, la seule suite convergente est la suite stationnaire.*

Exercice 1.8 (★★★). Soient τ_1 et τ_2 deux topologies sur X . On note $\tau_1 \vee \tau_2$ la borne supérieure de τ_1 et τ_2 dans le treillis des topologies sur X . Montrer que $\tau_1 \vee \tau_2$ est la topologie engendrée par $\tau_1 \cup \tau_2$ et décrire ses ouverts.

Exercice 1.9 (★★★). Soit p un nombre premier. Sur $\mathbb{Z}$, on définit $U \subset \mathbb{Z}$ comme ouvert si pour tout $n \in U$, il existe $k \geq 0$ tel que $n + p^k \mathbb{Z} \subset U$ (c'est-à-dire la classe de n modulo p^k est contenue dans U). Montrer que cela définit une topologie sur $\mathbb{Z}$ (topologie p -adique). Décrire les ouverts de cette topologie.

Résumé du chapitre

- Un **espace topologique** (X, τ) est un ensemble X muni d'une famille τ de parties (les ouverts) stable par réunion quelconque et intersection finie, et contenant $\emptyset$ et X .
- Exemples fondamentaux : topologie discrète, indiscrete, cofinie, codénombrable, métrique, de Zariski.
- Les topologies sur X forment un **treillis complet** pour l'inclusion, avec la topologie indiscrete comme minimum et la discrète comme maximum.
- L'intersection d'une famille de topologies est une topologie ; la réunion ne l'est pas en général.
- Un **voisinage** de x est une partie contenant un ouvert passant par x . Le système de voisinages satisfait les axiomes **(V1)**–**(V4)** et caractérise la topologie.
- L'axiome d'intersection finie ne s'étend pas aux intersections infinies.

Chapitre 2

Ouverts, fermés, intérieur, adhérence, frontière

Introduction

Dans un espace métrique (X, d) , un ensemble F est fermé lorsque son complémentaire $X \setminus F$ est ouvert, ou de manière équivalente, lorsque F contient toutes les limites de suites d'éléments de F . L'intérieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A , l'adhérence de A le plus petit fermé contenant A , et la frontière est la « pellicule » qui les sépare.

En topologie générale, ces notions se définissent de manière purement ensembliste, sans recours à une distance ni aux suites. Ce chapitre développe systématiquement ces concepts et établit leurs propriétés fondamentales. Nous verrons en particulier que la caractérisation séquentielle de l'adhérence, valable dans les espaces métriques, échoue dans le cadre général.

2.1 Ensembles fermés

Définition 2.1 (Ensemble fermé). Soit (X, τ) un espace topologique. Une partie $F \subset X$ est dite **fermée** si son complémentaire $X \setminus F$ est ouvert, c'est-à-dire $X \setminus F \in \tau$.

Proposition 2.1. Soit (X, τ) un espace topologique. La famille $\mathcal{F}$ des fermés de X vérifie :

(F1) $\emptyset \in \mathcal{F}$ et $X \in \mathcal{F}$.

(F2) Toute intersection (même infinie) d'éléments de $\mathcal{F}$ appartient à $\mathcal{F}$.

(F3) Toute réunion finie d'éléments de $\mathcal{F}$ appartient à $\mathcal{F}$.

Démonstration. **(F1)** : $X \setminus \emptyset = X \in \tau$ et $X \setminus X = \emptyset \in \tau$, donc $\emptyset$ et X sont fermés.

(F2) : Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés. Par les lois de De Morgan,

$$X \setminus \bigcap_{i \in I} F_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus F_i).$$

Chaque $X \setminus F_i$ est ouvert, donc leur réunion est ouverte par **(O2)**. Ainsi $\bigcap_{i \in I} F_i$ est fermé.

(F3) : De même, si $F_1, \dots, F_n$ sont fermés,

$$X \setminus \bigcup_{k=1}^n F_k = \bigcap_{k=1}^n (X \setminus F_k)$$

est une intersection finie d'ouverts, donc un ouvert par **(O3)**. $\square$

Remarque 2.2. La dualité ouverts/fermés par passage au complémentaire permet de définir une topologie de manière équivalente par la donnée des fermés satisfaisant **(F1)**–**(F3)**. Les rôles des réunions et intersections sont échangés : les fermés sont stables par intersection quelconque mais seulement par réunion finie.

Exemple 2.3. Dans la topologie cofinie sur un ensemble infini X , les fermés sont X et les parties finies de X . En effet, F est fermé si et seulement si $X \setminus F$ est ouvert, c'est-à-dire $X \setminus F = \emptyset$ (donc $F = X$) ou $X \setminus (X \setminus F) = F$ est fini.

Exemple 2.4. Dans tout espace topologique (X, τ) , les ensembles $\emptyset$ et X sont à la fois ouverts et fermés. Un ensemble qui est simultanément ouvert et fermé est parfois dit **clopen** (de l'anglais *closed-open*). Dans la topologie discrète, toute partie est clopen.

2.2 Intérieur

Définition 2.2 (Intérieur). Soit (X, τ) un espace topologique et $A \subset X$. L'**intérieur** de A , noté $\overset{\circ}{A}$ ou A° , est la réunion de tous les ouverts contenus dans A :

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{\substack{U \in \tau \\ U \subset A}} U.$$

Théorème 2.5. Soit (X, τ) un espace topologique. Pour toutes parties $A, B \subset X$:

- (i) $\overset{\circ}{A}$ est ouvert (c'est le plus grand ouvert contenu dans A).
- (ii) $\overset{\circ}{A} \subset A$.
- (iii) $\overset{\circ}{A} = A$ si et seulement si A est ouvert.
- (iv) $(\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}}) = \overset{\circ}{A}$ (idempotence).
- (v) Si $A \subset B$, alors $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ (monotonie).
- (vi) $(A \cap B)^\circ = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.
- (vii) $x \in \overset{\circ}{A}$ si et seulement si $A \in \mathcal{V}(x)$.

Démonstration. (i) : $\overset{\circ}{A}$ est une réunion d'ouverts, donc un ouvert par **(O2)**. Par construction, tout ouvert $U \subset A$ vérifie $U \subset \overset{\circ}{A}$, donc $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A .

(ii) : Chaque ouvert U dans la réunion satisfait $U \subset A$, donc $\overset{\circ}{A} \subset A$.

(iii) : Si A est ouvert, alors A apparaît dans la réunion, donc $A \subset \overset{\circ}{A}$, et avec (ii), $\overset{\circ}{A} = A$. Réciproquement, si $\overset{\circ}{A} = A$, alors $A = \overset{\circ}{A}$ est ouvert par (i).

(iv) : $\overset{\circ}{A}$ est ouvert par (i), donc $(\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}}) = \overset{\circ}{A}$ par (iii).

(v) : Si $A \subset B$, tout ouvert contenu dans A est contenu dans B , donc $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

(vi) : Comme $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$, on a $(A \cap B) \subset \overset{\circ}{A}$ et $(A \cap B) \subset \overset{\circ}{B}$, d'où $(A \cap B) \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$. Réciproquement, $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ est ouvert (intersection finie d'ouverts) et $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset A \cap B$, donc $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset (A \cap B)$.

(vii) : $x \in \overset{\circ}{A}$ si et seulement s'il existe un ouvert U avec $x \in U \subset A$, ce qui est exactement la définition de $A \in \mathcal{V}(x)$. $\square$

Remarque 2.6. En général, $(A \cup B)^\circ \neq \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$. On a seulement l'inclusion $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset (A \cup B)^\circ$. Par exemple, dans $\mathbb{R}$ usuel, si $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{B} = \emptyset$, mais $(A \cup B)^\circ = \overset{\circ}{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$.

2.3 Adhérence

Définition 2.3 (Adhérence). Soit (X, τ) un espace topologique et $A \subset X$. L'**adhérence** (ou **fermeture**) de A , notée $\overline{A}$, est l'intersection de tous les fermés contenant A :

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ fermé} \\ A \subset F}} F.$$

Théorème 2.7. Soit (X, τ) un espace topologique. Pour toutes parties $A, B \subset X$:

(i) $\overline{A}$ est fermé (c'est le plus petit fermé contenant A).

(ii) $A \subset \overline{A}$.

(iii) $\overline{A} = A$ si et seulement si A est fermé.

(iv) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ (idempotence).

(v) Si $A \subset B$, alors $\overline{A} \subset \overline{B}$ (monotonie).

(vi) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(vii) $x \in \overline{A}$ si et seulement si tout voisinage de x rencontre A :

$$x \in \overline{A} \iff \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset.$$

Démonstration. (i) : $\overline{A}$ est une intersection de fermés, donc fermée par (F2). Tout fermé F contenant A vérifie $\overline{A} \subset F$, donc $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A .

(ii) : A est contenu dans chaque fermé $F \supset A$, donc $A \subset \overline{A}$.

(iii) : Si A est fermé, A apparaît dans l'intersection, donc $\overline{A} \subset A$, et avec (ii), $\overline{A} = A$. Réciproquement, si $\overline{A} = A$, alors A est fermé par (i).

(iv) : $\overline{A}$ est fermé, donc $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ par (iii).

(v) : Si $A \subset B$, tout fermé contenant B contient A , donc $\overline{A} \subset \overline{B}$.

(vi) : Comme $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, on a $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ et $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, d'où $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Réciproquement, $\overline{A \cup B}$ est fermé (réunion finie de fermés) et contient $A \cup B$, donc $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

(vii) : Supposons $x \notin \overline{A}$. Alors $U = X \setminus \overline{A}$ est un ouvert contenant x , et $U \cap A = \emptyset$ car $A \subset \overline{A}$. Donc $U \in \mathcal{V}(x)$ et $U \cap A = \emptyset$. Réciproquement, s'il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ avec $V \cap A = \emptyset$, soit $U \in \tau$ avec $x \in U \subset V$. Alors $U \cap A = \emptyset$, donc $A \subset X \setminus U$. Comme $X \setminus U$ est fermé, $\overline{A} \subset X \setminus U$, d'où $x \notin \overline{A}$. $\square$

Proposition 2.8 (Dualité intérieur-adhérence). *Pour toute partie A d'un espace topologique (X, τ) :*

$$X \setminus \mathring{A} = \overline{X \setminus A} \quad \text{et} \quad X \setminus \overline{A} = X \setminus \mathring{A}.$$

Démonstration. Montrons la première égalité. On a :

$$X \setminus \mathring{A} = X \setminus \bigcup_{\substack{U \in \tau \\ U \subset A}} U = \bigcap_{\substack{U \in \tau \\ U \subset A}} (X \setminus U) = \bigcap_{\substack{F \text{ fermé} \\ X \setminus A \subset F}} F = \overline{X \setminus A}.$$

La deuxième égalité s'obtient en appliquant la première à $X \setminus A$ puis en prenant le complémentaire. $\square$

Remarque 2.9 (Caractérisation séquentielle). Dans un espace métrique (X, d) , on a $x \in \overline{A}$ si et seulement s'il existe une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de A telle que $a_n \rightarrow x$. Cette caractérisation est **fausse en général** dans un espace topologique non premier-dénombrable. Par exemple, dans un espace non dénombrable X muni de la topologie codénombrable τ_{cod} , un sous-ensemble dénombrable infini A a pour adhérence $\overline{A} = X$, mais les seules suites convergentes sont les suites stationnaires (voir exercice 2.7).

2.4 Frontière

Définition 2.4 (Frontière). Soit (X, τ) un espace topologique et $A \subset X$. La **frontière** de A , notée ∂A , est définie par

$$\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}.$$

Proposition 2.10. *Pour toute partie A d'un espace topologique (X, τ) :*

- (i) ∂A est fermé.
- (ii) $\partial A = \partial(X \setminus A)$.
- (iii) A est ouvert si et seulement si $A \cap \partial A = \emptyset$.
- (iv) A est fermé si et seulement si $\partial A \subset A$.
- (v) A est ouvert et fermé si et seulement si $\partial A = \emptyset$.
- (vi) $X = \mathring{A} \sqcup \partial A \sqcup (X \setminus \overline{A})$ (partition).

Démonstration. (i) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ est l'intersection de deux fermés.

(ii) $\partial(X \setminus A) = \overline{X \setminus A} \cap \overline{X \setminus (X \setminus A)} = \overline{X \setminus A} \cap \overline{A} = \partial A$.

(iii) A est ouvert $\Leftrightarrow \mathring{A} = A \Leftrightarrow \partial A = \overline{A} \setminus A \subset \overline{A} \setminus A$. Si A est ouvert, $\mathring{A} = A$, donc $\partial A = \overline{A} \setminus A$ et $A \cap \partial A = A \cap (\overline{A} \setminus A) = \emptyset$. Réciproquement, si $A \cap \partial A = \emptyset$, alors $A \cap (\overline{A} \setminus A) = \emptyset$. Comme $A \subset \overline{A}$, cela donne $A \setminus \mathring{A} = \emptyset$, donc $A \subset \mathring{A}$, et ainsi $A = \mathring{A}$ est ouvert.

(iv) A est fermé $\Leftrightarrow \overline{A} = A \Leftrightarrow \partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} \subset A$.

(v) Conséquence immédiate de (iii) et (iv).

(vi) Les trois ensembles $\mathring{A}$, ∂A et $(X \setminus \overline{A})$ sont deux à deux disjoints. De plus, par la proposition 2.8, $X \setminus \mathring{A} = \overline{X \setminus A}$ et $X \setminus (X \setminus \mathring{A}) = \mathring{A}$, d'où

$$\mathring{A} \cup \partial A \cup (X \setminus \overline{A}) = \mathring{A} \cup (\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}) \cup (X \setminus \overline{A}).$$

Tout point $x \in X$ est soit dans $\overset{\circ}{A}$ (voisinage contenu dans A), soit dans $(X \setminus \overset{\circ}{A})$ (voisinage disjoint de A), soit dans aucun des deux, auquel cas tout voisinage de x rencontre à la fois A et $X \setminus A$, donc $x \in \overline{A} \cap X \setminus \overset{\circ}{A} = \partial A$. $\square$

2.5 Ensemble dérivé, points isolés, ensembles denses

Définition 2.5 (Point d'accumulation et ensemble dérivé). Soit (X, τ) un espace topologique et $A \subset X$. Un point $x \in X$ est dit **point d'accumulation** (ou **point limite**) de A si tout voisinage de x contient au moins un point de A distinct de x :

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), \quad (V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

L'**ensemble dérivé** de A , noté A' , est l'ensemble des points d'accumulation de A .

Proposition 2.11. *Pour toute partie A d'un espace topologique :*

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

Démonstration. Soit $x \in \overline{A}$. Si $x \in A$, c'est fini. Si $x \notin A$, alors pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap A \neq \emptyset$ (car $x \in \overline{A}$), et comme $x \notin A$, on a $(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$, donc $x \in A'$.

Réciproquement, si $x \in A$, alors $x \in \overline{A}$ car $A \subset \overline{A}$. Si $x \in A'$, alors tout voisinage de x rencontre A (même en un point différent de x), donc $x \in \overline{A}$. $\square$

Définition 2.6 (Point isolé). Un point $x \in A$ est dit **isolé dans A** s'il existe un voisinage V de x tel que $V \cap A = \{x\}$, autrement dit si $x \in A \setminus A'$.

Définition 2.7 (Ensemble dense). Une partie A d'un espace topologique (X, τ) est dite **dense** dans X si $\overline{A} = X$, c'est-à-dire si tout ouvert non vide de X rencontre A :

$$\forall U \in \tau, U \neq \emptyset \implies U \cap A \neq \emptyset.$$

Exemple 2.12. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ pour la topologie usuelle. En effet, pour tout ouvert non vide U de $\mathbb{R}$, U contient un intervalle ouvert (a, b) avec $a < b$, et la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (propriété archimédienne) assure l'existence d'un rationnel dans (a, b) .

De même, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (les irrationnels) est dense dans $\mathbb{R}$.

Définition 2.8 (Ensemble nulle part dense). Une partie A d'un espace topologique (X, τ) est dite **nulle part dense** (ou **rare**) si l'intérieur de son adhérence est vide :

$$\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset.$$

Exemple 2.13. $\mathbb{Z}$ est nulle part dense dans $\mathbb{R}$ pour la topologie usuelle. En effet, $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ (car $\mathbb{Z}$ est fermé), et $\overset{\circ}{\mathbb{Z}} = \emptyset$ (car $\mathbb{Z}$ ne contient aucun intervalle ouvert).

De même, l'ensemble de Cantor est nulle part dense dans $[0, 1]$.

2.6 Axiomes de fermeture de Kuratowski

Les propriétés de l'adhérence établies au théorème 2.7 permettent de caractériser axiomatiquement une topologie par son opérateur d'adhérence.

Théorème 2.14 (Axiomes de Kuratowski). *Soit X un ensemble et $\varphi : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ une application satisfaisant les quatre axiomes suivants :*

(K1) $\varphi(\emptyset) = \emptyset$.

(K2) $A \subset \varphi(A)$ pour tout $A \subset X$.

(K3) $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cup \varphi(B)$ pour tous $A, B \subset X$.

(K4) $\varphi(\varphi(A)) = \varphi(A)$ pour tout $A \subset X$ (idempotence).

Alors il existe une unique topologie τ sur X telle que $\varphi(A) = \overline{A}$ pour tout $A \subset X$. Cette topologie est définie par

$$\tau = \{U \subset X : \varphi(X \setminus U) = X \setminus U\}.$$

Démonstration. Posons $\mathcal{F} = \{F \subset X : \varphi(F) = F\}$. Montrons que $\mathcal{F}$ satisfait les axiomes des fermés.

(F1) : $\varphi(\emptyset) = \emptyset$ par (K1), donc $\emptyset \in \mathcal{F}$. Par (K2), $X \subset \varphi(X) \subset X$, donc $\varphi(X) = X$ et $X \in \mathcal{F}$.

(F2) : Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{F}$. Posons $F = \bigcap_{i \in I} F_i$. Pour tout i , $F \subset F_i$, donc par (K2) et (K3), et la monotonie (qui découle de (K2) et (K3) : si $A \subset B$, alors $\varphi(B) = \varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cup \varphi(B) \supset \varphi(A)$), on a $\varphi(F) \subset \varphi(F_i) = F_i$ pour tout i . Donc $\varphi(F) \subset \bigcap_{i \in I} F_i = F$. Avec (K2), $\varphi(F) = F$.

(F3) : Si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, alors $\varphi(F_1 \cup F_2) = \varphi(F_1) \cup \varphi(F_2) = F_1 \cup F_2$ par (K3), donc $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$. Par récurrence, toute réunion finie d'éléments de $\mathcal{F}$ est dans $\mathcal{F}$.

Ainsi $\tau = \{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$ est une topologie. Montrons que $\varphi(A) = \overline{A}$ pour tout A . On a $\varphi(A) \in \mathcal{F}$ par (K4), et $A \subset \varphi(A)$ par (K2), donc $\varphi(A)$ est un fermé contenant A . Si $F \in \mathcal{F}$ avec $A \subset F$, alors $\varphi(A) \subset \varphi(F) = F$ par monotonie. Donc $\varphi(A)$ est le plus petit fermé contenant A , c'est-à-dire $\overline{A}$.

L'unicité découle du fait que la topologie est déterminée par ses fermés, qui sont eux-mêmes déterminés par φ . $\square$

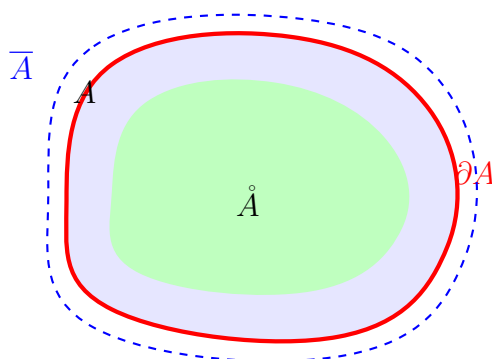
2.7 Théorème des 14 ensembles de Kuratowski

Théorème 2.15 (Kuratowski, 1922). *Soit (X, τ) un espace topologique et $A \subset X$. En appliquant itérativement les opérations de fermeture $A \mapsto \overline{A}$ et de complémentation $A \mapsto X \setminus A$ à partir de A , on obtient au plus 14 ensembles distincts. De plus, cette borne est atteinte.*

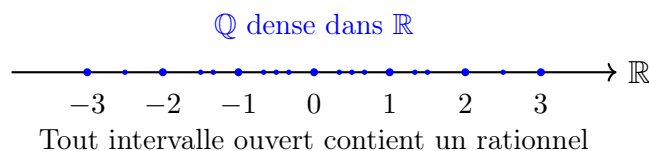
Démonstration (esquisse). Notons $c(A) = X \setminus A$ la complémentation et $k(A) = \overline{A}$ la fermeture. On remarque que :

- c est une involution : $c \circ c = \text{id}$.
- k est idempotente : $k \circ k = k$.
- L'intérieur s'écrit $i = c \circ k \circ c$ (par la proposition 2.8).

2.8 Illustrations



Intérieur, adhérence et frontière d'un ensemble A



2.9 Contre-exemples

Exemple 2.16 (Adhérence et suites : le cas non premier-dénombrable). Soit X un ensemble non dénombrable muni de la topologie codénombrable τ_{cod} . Soit $A \subset X$ un sous-ensemble dénombrable infini.

Adhérence de A . Soit $x \in X$ et $U \in \tau_{\text{cod}}$ avec $x \in U$. Alors $X \setminus U$ est dénombrable, donc U est non dénombrable (car X l'est). En particulier, $A \not\subset X \setminus U$ (car A est infini et U manque seulement un ensemble dénombrable, mais il faut vérifier que U rencontre A). Plus précisément, $A \cap U = A \setminus (X \setminus U)$: comme A est infini et $X \setminus U$ est dénombrable, si $A \subset X \setminus U$ cela est possible. Prenons plutôt A infini avec $\overline{A} = X$ directement : le seul fermé contenant A et distinct de X aurait son complémentaire ouvert non vide, donc de complémentaire dénombrable, mais ce complémentaire contiendrait A . Ainsi, si F est fermé avec $A \subset F$ et $F \neq X$, alors $X \setminus F \neq \emptyset$ est ouvert, donc $X \setminus (X \setminus F) = F$ est dénombrable. Comme $A \subset F$ et A est infini, cela est possible. Corrigeons : les fermés de τ_{cod} sont X et les ensembles dénombrables. Comme A est dénombrable, A lui-même est fermé ! Donc $\overline{A} = A \neq X$.

Prenons plutôt A non dénombrable avec $X \setminus A$ non dénombrable. Alors A n'est ni ouvert (car $X \setminus A$ n'est pas dénombrable) ni fermé (car A n'est pas dénombrable et $A \neq X$). L'adhérence de A est $\overline{A} = X$ (le seul fermé non dénombrable est X). Or, les suites convergentes pour τ_{cod} sont les suites stationnaires : si (x_n) converge vers ℓ et n'est pas stationnaire, le complémentaire $\{x_n : x_n \neq \ell\}$ est dénombrable, donc son complémentaire est cocountable, donc ouvert, et contient ℓ mais pas les $x_n \neq \ell$, contradiction. Ainsi aucun point de $X \setminus A$ n'est limite d'une suite d'éléments de A .

Exemple 2.17 (La droite de Sorgenfrey). La **droite de Sorgenfrey** est l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la topologie τ_S engendrée par les intervalles semi-ouverts à droite $[a, b)$ avec

$a < b$. Vérifions que ces intervalles forment une base de topologie (ce fait sera formalisé au chapitre suivant, mais l'idée est claire) :

- $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1)$.
- $[a, b) \cap [c, d) = [\max(a, c), \min(b, d))$ (qui est vide si $\max(a, c) \geq \min(b, d)$, ou un intervalle semi-ouvert sinon).

Propriétés.

- (a) τ_S est strictement plus fine que la topologie usuelle τ_{us} . En effet, tout ouvert (a, b) de τ_{us} s'écrit $\bigcup_{n \geq 1} [a + 1/n, b)$, donc $(a, b) \in \tau_S$. Mais $[0, 1) \in \tau_S \setminus \tau_{us}$.
- (b) L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $(\mathbb{R}, \tau_S)$. En effet, tout intervalle $[a, b)$ non vide contient un rationnel (par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ usuel).
- (c) Les fermés de τ_S incluent les intervalles de la forme $(-\infty, a)$ et $(b, +\infty]$: le complémentaire de $(-\infty, a)$ est $[a, +\infty) = \bigcup_{n \geq 0} [a + n, a + n + 1)$, qui est ouvert dans τ_S .
- (d) L'adhérence de $(0, 1)$ dans τ_S est $[0, 1)$. En effet, $[0, 1)$ est fermé dans τ_S (car $\mathbb{R} \setminus [0, 1) = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$ est ouvert). De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, $[0, \varepsilon) \cap (0, 1) \neq \emptyset$, donc $0 \in \overline{(0, 1)}$.

2.10 Exemples travaillés

Exemple 2.18 (Intérieur et adhérence de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$). Dans $(\mathbb{R}, \tau_{us})$:

- $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$. En effet, tout intervalle ouvert (a, b) contient un irrationnel, donc $(a, b) \not\subset \mathbb{Q}$. Aucun ouvert non vide n'est contenu dans $\mathbb{Q}$.
- $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Tout intervalle ouvert (a, b) non vide contient un rationnel, donc tout ouvert non vide rencontre $\mathbb{Q}$.
- $\partial \mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$.

De même, $(\mathbb{R} \setminus \overset{\circ}{\mathbb{Q}}) = \emptyset$, $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, et $\partial(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

Exemple 2.19 (Intérieur et adhérence dans la topologie cofinie). Soit $X = \mathbb{R}$ muni de la topologie cofinie τ_{cof} . Soit $A = [0, 1]$.

- $\overset{\circ}{A}$: un ouvert non vide de τ_{cof} a un complémentaire fini, donc contient tous les réels sauf un nombre fini. Ainsi, aucun ouvert non vide n'est contenu dans $[0, 1]$ (car $[0, 1]^c$ est infini). Donc $\overset{\circ}{A} = \emptyset$.
- $\overline{A}$: les fermés de τ_{cof} sont $\mathbb{R}$ et les ensembles finis. Comme $A = [0, 1]$ est infini, le seul fermé le contenant est $\mathbb{R}$. Donc $\overline{A} = \mathbb{R}$.
- $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$.

Plus généralement, dans $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$, toute partie infinie a un intérieur vide et une adhérence égale à $\mathbb{R}$.

Exemple 2.20 (Les 14 ensembles de Kuratowski). Prenons $X = \mathbb{R}$ avec la topologie usuelle et

$$A = (0, 1) \cup (1, 2) \cup \{3\} \cup ([4, 5] \cap \mathbb{Q}).$$

Calculons les 14 ensembles. Notons $k = \bar{\cdot}$ et $c = X \setminus (\cdot)$.

1. $A = (0, 1) \cup (1, 2) \cup \{3\} \cup ([4, 5] \cap \mathbb{Q})$.
2. $kA = [0, 2] \cup \{3\} \cup [4, 5]$.
3. $ckA = (-\infty, 0) \cup (2, 3) \cup (3, 4) \cup (5, +\infty)$.
4. $kckA = (-\infty, 0] \cup [2, 4] \cup [5, +\infty)$.
5. $ckckA = (0, 2) \cup (4, 5)$.
6. $kckckA = [0, 2] \cup [4, 5]$.
7. $ckckckA = (-\infty, 0) \cup (2, 4) \cup (5, +\infty)$.
8. $cA = (-\infty, 0] \cup \{1\} \cup [2, 3) \cup (3, 4) \cup ([4, 5] \setminus \mathbb{Q}) \cup (5, +\infty)$.
9. $k cA = (-\infty, 0] \cup \{1\} \cup [2, +\infty)$.
10. $ckcA = (0, 1) \cup (1, 2)$.
11. $kckcA = [0, 2]$.
12. $ckckcA = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.
13. $kckckcA = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$.
14. $ckckckcA = (0, 2)$.

On vérifie que ces 14 ensembles sont tous distincts, et que toute application supplémentaire de k ou c redonne un ensemble déjà obtenu.

2.11 Exercices

Exercice 2.1 ($\star$). Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts, fermés, les deux, ou ni l'un ni l'autre, dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle :

- (a) $[0, 1)$
- (b) $\mathbb{Z}$
- (c) $\{1/n : n \geq 1\}$
- (d) $\{1/n : n \geq 1\} \cup \{0\}$
- (e) $(0, 1) \cup (2, 3)$

Exercice 2.2 ($\star$). Calculer l'intérieur, l'adhérence et la frontière des ensembles suivants dans $(\mathbb{R}, \tau_{\text{us}})$:

- (a) $A = (0, 1]$
- (b) $B = \mathbb{Z}$
- (c) $C = \{1/n : n \geq 1\}$
- (d) $D = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$

Exercice 2.3 ($\star$). Montrer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $(\mathbb{R}, \tau_{\text{us}})$.

Exercice 2.4 ($\star\star$). Soit A une partie d'un espace topologique (X, τ) . Montrer que $\partial(\partial A) \subset \partial A$. Donner un exemple où l'inclusion est stricte.

Exercice 2.5 ($\star\star$). Soit (X, τ) un espace topologique et $A, B \subset X$. Montrer :

- (a) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ (l'égalité est-elle vraie en général?)
- (b) $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset (\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B})$ (l'égalité est-elle vraie en général?)

Donner des contre-exemples pour les égalités.

Exercice 2.6 (**). Soit (X, τ) un espace topologique et $A, B \subset X$. Montrer :

- (a) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.
- (b) $A' \subset \overline{A}$.
- (c) Si $A \subset B$, alors $A' \subset B'$.

Exercice 2.7 (**). Soit X un ensemble non dénombrable muni de la topologie codénombrable τ_{cod} .

- (a) Montrer que les seules suites convergentes dans (X, τ_{cod}) sont les suites stationnaires à partir d'un certain rang.
- (b) En déduire qu'il existe une partie A de X et un point $x \in \overline{A}$ tels qu'aucune suite d'éléments de A ne converge vers x .

Exercice 2.8 (**). Dans la droite de Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \tau_S)$:

- (a) Calculer $(0, 1]^\circ$, $\overline{(0, 1]}$, $\partial[0, 1)$.
- (b) Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense.
- (c) Montrer que $[a, b)$ est à la fois ouvert et fermé.

Exercice 2.9 (***). (a) Montrer que A est nulle part dense si et seulement si pour tout ouvert non vide U , il existe un ouvert non vide $V \subset U$ tel que $V \cap A = \emptyset$.

- (b) Montrer qu'une réunion finie d'ensembles nulle part denses est nulle part dense.
- (c) Montrer qu'une réunion dénombrable d'ensembles nulle part denses n'est pas nécessairement nulle part dense. *Indication : considérer $\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$.*

Exercice 2.10 (***). Vérifier que l'ensemble $A = (0, 1) \cup (1, 2) \cup \{3\} \cup ([4, 5] \cap \mathbb{Q})$ de $\mathbb{R}$ engendre bien 14 ensembles distincts par les opérations de fermeture et de complémentation.

Résumé du chapitre

- Un ensemble est **fermé** si son complémentaire est ouvert. Les fermés sont stables par intersection quelconque et réunion finie.
- L'**intérieur** $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A ; l'**adhérence** $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A . Ces opérateurs sont liés par dualité : $\overline{A} = X \setminus (X \setminus \overset{\circ}{A})$.
- La **frontière** $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ est un fermé. Elle est vide si et seulement si A est clopen.
- L'**ensemble dérivé** A' est l'ensemble des points d'accumulation. On a $\overline{A} = A \cup A'$.
- A est **dense** si $\overline{A} = X$; A est **nulle part dense** si $\overline{A}^\circ = \emptyset$.
- Les **axiomes de Kuratowski** (K1)–(K4) donnent une axiomatisation alternative de la topologie via l'opérateur d'adhérence.

- Le **théorème des 14 ensembles** de Kuratowski affirme que les opérations de fermeture et complémentation engendrent au plus 14 ensembles distincts à partir d'une partie donnée.
- La caractérisation séquentielle de l'adhérence, valable dans les espaces métriques, **échoue** dans les espaces non premier-dénombrables (par exemple, la topologie codénombrable).
- La **droite de Sorgenfrey** fournit un riche réservoir de contre-exemples ; elle est plus fine que la topologie usuelle.

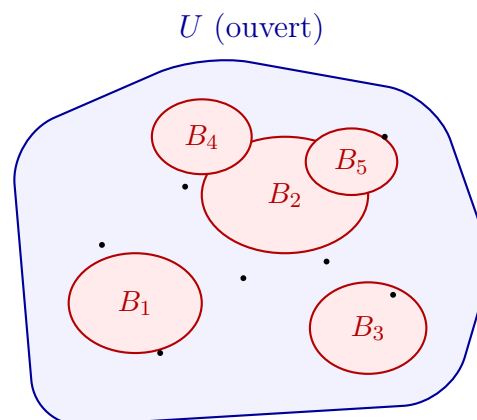
Chapitre 3

Bases et sous-bases, topologies engendrées

Introduction

Dans un espace métrique (X, d) , la topologie est entièrement déterminée par les boules ouvertes : un sous-ensemble $U \subseteq X$ est ouvert si et seulement si, pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq U$. Autrement dit, la collection des boules ouvertes « engendre » la topologie. Cette observation conduit à une question naturelle : dans un espace topologique quelconque, peut-on trouver une collection plus maniable d'ouverts à partir de laquelle on reconstruit toute la topologie ?

La réponse est affirmative et fait l'objet de ce chapitre. Nous introduisons les notions de *base* et de *sous-base* d'une topologie, puis nous étudions les topologies *engendrées* par une collection arbitraire de sous-ensembles. Ces outils sont fondamentaux : ils permettent de construire efficacement de nouvelles topologies et de vérifier des propriétés en ne travaillant que sur une collection restreinte d'ouverts. Nous examinons ensuite les axiomes de dénombrabilité — espaces à base dénombrable, premier dénombrable, séparables — et leurs relations.



Tout ouvert U est réunion d'éléments de base B_i .

FIGURE 3.1 – Éléments de base engendrant un ouvert.

3.1 Bases d'une topologie

3.1.1 Définition et premières propriétés

Définition 3.1 (Base d'une topologie). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Une collection $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ est une *base* de la topologie $\mathcal{T}$ si tout ouvert non vide $U \in \mathcal{T}$ est réunion d'éléments de $\mathcal{B}$:

$$\forall U \in \mathcal{T}, \quad U = \bigcup_{\substack{B \in \mathcal{B} \\ B \subseteq U}} B.$$

De manière équivalente, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}$ si, pour tout $U \in \mathcal{T}$ et tout $x \in U$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subseteq U$.

Exemple 3.1. Dans l'espace métrique $(\mathbb{R}^n, d_2)$, la collection des boules ouvertes $\{B(x, r) : x \in \mathbb{R}^n, r > 0\}$ est une base de la topologie usuelle. On peut même se restreindre aux boules de centres rationnels et de rayons rationnels : $\{B(q, r) : q \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}_{>0}\}$, qui forme une base *dénombrable*.

Proposition 3.2 (Caractérisation d'une base). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}$.
- (ii) Pour tout $U \in \mathcal{T}$ et tout $x \in U$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subseteq U$.
- (iii) $\mathcal{T} = \left\{ \bigcup_{i \in I} B_i : B_i \in \mathcal{B}, I \text{ ensemble d'indices} \right\} \cup \{\emptyset\}$.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) : Si $U = \bigcup_{j \in J} B_j$ avec $B_j \in \mathcal{B}$, alors pour tout $x \in U$, il existe $j \in J$ avec $x \in B_j$ et $B_j \subseteq U$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Pour tout $U \in \mathcal{T}$, on a $U = \bigcup_{x \in U} B_x$ où $B_x \in \mathcal{B}$ satisfait $x \in B_x \subseteq U$. Donc U est réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : Immédiat par définition. □

3.1.2 Conditions nécessaires et suffisantes

Le théorème suivant caractérise les collections de sous-ensembles qui sont des bases d'une topologie, sans référence préalable à une topologie.

Théorème 3.3 (Critère de base). Soit X un ensemble et $\mathcal{B}$ une collection de sous-ensembles de X . Alors $\mathcal{B}$ est la base d'une topologie sur X si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(B1) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B.$

(B2) Pour tous $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ et tout $x \in B_1 \cap B_2$, il existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Dans ce cas, la topologie engendrée est

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \left\{ \bigcup_{i \in I} B_i : B_i \in \mathcal{B}, I \text{ ensemble d'indices} \right\}.$$

Démonstration. Nécessité. Supposons que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}$. Puisque $X \in \mathcal{T}$, on a $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}, B \subseteq X} B$, d'où (B1). Pour (B2), soient $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ et $x \in B_1 \cap B_2$. Comme $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}$ (intersection finie d'ouverts), il existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Suffisance. Posons $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \{\bigcup_{i \in I} B_i : B_i \in \mathcal{B}\} \cup \{\emptyset\}$. Vérifions que $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ est une topologie.

- $\emptyset \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ par convention (réunion vide) et $X \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ par (B1).
- $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ est stable par réunion quelconque : une réunion de réunions d'éléments de $\mathcal{B}$ est encore une réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.
- Montrons la stabilité par intersection finie. Il suffit de traiter le cas de deux éléments. Soient $U = \bigcup_{i \in I} B_i$ et $V = \bigcup_{j \in J} B_j$. Alors $U \cap V = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (B_i \cap B_j)$. Pour tout $x \in B_i \cap B_j$, la condition (B2) fournit $B_x \in \mathcal{B}$ avec $x \in B_x \subseteq B_i \cap B_j$. Donc $B_i \cap B_j = \bigcup_{x \in B_i \cap B_j} B_x$, et $U \cap V \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

Par construction, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. □

Remarque 3.4. La condition (B2) exprime que l'intersection de deux éléments de base, bien qu'elle ne soit pas nécessairement dans $\mathcal{B}$, peut être « raffinée » par des éléments de $\mathcal{B}$. C'est l'analogie topologique de la propriété de filtre-base.

3.2 Sous-bases et topologies engendrées

3.2.1 Sous-base

Définition 3.2 (Sous-base d'une topologie). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Une collection $\S \subseteq \mathcal{T}$ est une *sous-base* de $\mathcal{T}$ si la collection des intersections finies d'éléments de $\S$:

$$\mathcal{B}_{\S} = \left\{ S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n : n \in \mathbb{N}^*, S_1, \dots, S_n \in \S \right\} \cup \{X\},$$

est une base de $\mathcal{T}$.

Théorème 3.5 (Topologie engendrée par une sous-base). Soit X un ensemble et $\S$ une collection de sous-ensembles de X telle que $\bigcup_{S \in \S} S = X$. Alors la collection $\mathcal{B}_{\S}$ des intersections finies d'éléments de $\S$ satisfait les conditions (B1)–(B2) du efthm :critere-base et engendre donc une topologie $\mathcal{T}(\S)$ sur X , appelée topologie engendrée par $\S$.

Démonstration. (B1) est satisfaite par hypothèse. Pour (B2), soient $B_1 = \bigcap_{i=1}^m S_i$ et $B_2 = \bigcap_{j=1}^n T_j$ deux éléments de $\mathcal{B}_{\S}$. Alors $B_1 \cap B_2 = \left(\bigcap_{i=1}^m S_i \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^n T_j \right)$ est une intersection finie d'éléments de $\S$, donc $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}_{\S}$. Il suffit alors de prendre $B_3 = B_1 \cap B_2$. □

3.2.2 Topologie engendrée comme intersection

Théorème 3.6 (Topologie engendrée par une collection). Soit X un ensemble et $\mathcal{C}$ une collection de sous-ensembles de X . L'intersection

$$\mathcal{T}(\mathcal{C}) = \bigcap \{ \mathcal{T} : \mathcal{T} \text{ est une topologie sur } X \text{ et } \mathcal{C} \subseteq \mathcal{T} \}$$

est une topologie sur X , appelée topologie engendrée par $\mathcal{C}$. C'est la plus petite topologie (au sens de l'inclusion) contenant $\mathcal{C}$.

Démonstration. L'intersection est bien définie car la topologie discrète $\mathcal{P}(X)$ contient $\mathcal{C}$. Vérifions les axiomes.

- $\emptyset$ et X appartiennent à toute topologie contenant $\mathcal{C}$, donc à l'intersection.
- Si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{T}(\mathcal{C})$, alors pour toute topologie $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{C}$, chaque $U_i \in \mathcal{T}$, donc $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$. Ceci étant vrai pour toute telle $\mathcal{T}$, on a $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}(\mathcal{C})$.
- Le raisonnement est identique pour les intersections finies.

Si $\mathcal{T}'$ est une topologie contenant $\mathcal{C}$, alors $\mathcal{T}'$ fait partie de la famille dont on prend l'intersection, donc $\mathcal{T}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{T}'$. $\square$

Proposition 3.7 (Lien entre les deux constructions). *Si $\mathfrak{s}$ est une collection de sous-ensembles de X avec $\bigcup_{S \in \mathfrak{s}} S = X$, alors la topologie engendrée par $\mathfrak{s}$ au sens du efthm :topo-sousbase coïncide avec la topologie engendrée par $\mathfrak{s}$ au sens du efthm :topo-engendree.*

Démonstration. Notons $\mathcal{T}_1$ la topologie du efthm :topo-sousbase et $\mathcal{T}_2$ celle du efthm :topo-engendree. Puisque $\mathfrak{s} \subseteq \mathcal{T}_1$ et que $\mathcal{T}_2$ est la plus petite topologie contenant $\mathfrak{s}$, on a $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$. Réciproquement, tout élément de $\mathcal{B}_{\mathfrak{s}}$ (intersection finie d'éléments de $\mathfrak{s}$) appartient à $\mathcal{T}_2$, et toute réunion d'éléments de $\mathcal{B}_{\mathfrak{s}}$ appartient donc à $\mathcal{T}_2$. Ainsi $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. $\square$

3.3 Exemples de bases

Exemple 3.8. Base de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$. La collection $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ des intervalles ouverts bornés est une base de la topologie usuelle. On peut la réduire à $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$, qui est dénombrable.

Exemple 3.9. Droite de Sorgenfrey. Sur $\mathbb{R}$, considérons la collection $\mathcal{B}_{\ell} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Vérifions (B1)–(B2) du efthm :critere-base :

- (B1) : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x \in [x, x+1) \in \mathcal{B}_{\ell}$.
- (B2) : Soient $[a_1, b_1)$ et $[a_2, b_2)$ dans $\mathcal{B}_{\ell}$. Alors $[a_1, b_1) \cap [a_2, b_2) = [\max(a_1, a_2), \min(b_1, b_2))$, qui est soit vide, soit un élément de $\mathcal{B}_{\ell}$.

La topologie engendrée $\mathcal{T}_{\ell}$ est la *topologie de Sorgenfrey*. Elle est strictement plus fine que la topologie usuelle : tout intervalle ouvert (a, b) est réunion $\bigcup_{n \geq 1} [a + 1/n, b)$, mais $[0, 1)$ n'est pas ouvert pour la topologie usuelle.

Exemple 3.10. Topologie de l'ordre. Soit $(X, \leq)$ un ensemble totalement ordonné. La collection des intervalles ouverts $\{(a, b) : a < b\}$, des rayons $\{[a_0, b) : b \in X\}$ (si X admet un plus petit élément a_0) et $\{(a, b_0] : a \in X\}$ (si X admet un plus grand élément b_0) forme une base de la *topologie de l'ordre* sur X .

3.4 Axiomes de dénombrabilité

3.4.1 Espaces premier et second dénombrable

Définition 3.3 (Espace second dénombrable). Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit *à base dénombrable* ou *second dénombrable* (on dit aussi qu'il satisfait le *deuxième axiome de dénombrabilité*) s'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{T}$ qui est dénombrable.

Définition 3.4 (Espace premier dénombrable). Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit *premier dénombrable* (ou satisfait le *premier axiome de dénombrabilité*) si tout point $x \in X$ possède une base de voisinages dénombrable : il existe une suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de voisinages de x telle que, pour tout voisinage V de x , il existe $n \in \mathbb{N}$ avec $V_n \subseteq V$.

Proposition 3.11 (Second dénombrable implique premier dénombrable). *Tout espace second dénombrable est premier dénombrable.*

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ une base dénombrable de $\mathcal{T}$. Pour $x \in X$, posons $\mathcal{B}_x = \{B_n \in \mathcal{B} : x \in B_n\}$. C'est une partie dénombrable de $\mathcal{B}$. Pour tout voisinage V de x , il existe un ouvert U avec $x \in U \subseteq V$, puis $B_n \in \mathcal{B}$ avec $x \in B_n \subseteq U \subseteq V$. Donc $B_n \in \mathcal{B}_x$ et $\mathcal{B}_x$ est une base de voisinages dénombrable de x . $\square$

3.4.2 Espaces séparables

Définition 3.5 (Espace séparable). Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit *séparable* s'il contient un sous-ensemble dense dénombrable : il existe $D \subseteq X$ dénombrable tel que $\overline{D} = X$.

Proposition 3.12 (Second dénombrable implique séparable). *Tout espace second dénombrable est séparable.*

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ une base dénombrable de $\mathcal{T}$. Pour chaque $B_n \neq \emptyset$, choisissons $x_n \in B_n$ (axiome du choix dénombrable). L'ensemble $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}, B_n \neq \emptyset\}$ est dénombrable. Montrons que $\overline{D} = X$. Soit $x \in X$ et U un ouvert contenant x . Il existe $B_n \in \mathcal{B}$ avec $x \in B_n \subseteq U$. Alors $x_n \in B_n \subseteq U$, donc $U \cap D \neq \emptyset$. Ainsi $x \in \overline{D}$. $\square$

3.4.3 Théorème de Lindelöf

Définition 3.6 (Espace de Lindelöf). Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est un *espace de Lindelöf* si tout recouvrement ouvert de X admet un sous-recouvrement dénombrable.

Théorème 3.13 (Théorème de Lindelöf). *Tout espace topologique second dénombrable est un espace de Lindelöf.*

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ une base dénombrable et soit $\{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X . Pour tout $x \in X$, il existe $i_x \in I$ avec $x \in U_{i_x}$, puis $n_x \in \mathbb{N}$ avec $x \in B_{n_x} \subseteq U_{i_x}$.

Posons $J = \{n_x : x \in X\} \subseteq \mathbb{N}$, qui est dénombrable. Pour chaque $n \in J$, choisissons $i(n) \in I$ tel que $B_n \subseteq U_{i(n)}$. La famille $\{U_{i(n)}\}_{n \in J}$ est dénombrable. Elle recouvre X : pour tout $x \in X$, on a $x \in B_{n_x} \subseteq U_{i(n_x)}$. $\square$

Corollaire 3.14. *L'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie usuelle est un espace de Lindelöf.*

Démonstration. $\mathbb{R}^n$ est second dénombrable (base de boules ouvertes à centres et rayons rationnels), donc de Lindelöf par le efthm :lindelof. $\square$

3.5 Espaces métriques et dénombrabilité

Proposition 3.15 (Espaces métriques et premier dénombrabilité). *Tout espace métrique (X, d) est premier dénombrable.*

Démonstration. Pour tout $x \in X$, la famille $\{B(x, 1/n)\}_{n \geq 1}$ est une base de voisinages dénombrable de x . En effet, pour tout voisinage V de x , il existe $\varepsilon > 0$ avec $B(x, \varepsilon) \subseteq V$. Choisissons $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $1/n < \varepsilon$; alors $B(x, 1/n) \subseteq B(x, \varepsilon) \subseteq V$. $\square$

Proposition 3.16 (Caractérisation de la séparabilité dans les espaces métriques). *Pour un espace métrique (X, d) , les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) X est second dénombrable.
- (ii) X est séparable.
- (iii) X est de Lindelöf.

Démonstration. Les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) et (i) $\Rightarrow$ (iii) sont déjà établies. Montrons (ii) $\Rightarrow$ (i). Soit $D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ un sous-ensemble dense dénombrable. La collection $\mathcal{B} = \{B(d_n, 1/k) : n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^*\}$ est dénombrable. Montrons que c'est une base. Soit U ouvert et $x \in U$. Il existe $\varepsilon > 0$ avec $B(x, \varepsilon) \subseteq U$. Puisque D est dense, il existe $d_n \in D$ avec $d(x, d_n) < \varepsilon/2$. Choisissons $k \in \mathbb{N}^*$ avec $1/k < \varepsilon/2$. Alors $x \in B(d_n, 1/k)$. De plus, pour tout $y \in B(d_n, 1/k)$, $d(x, y) \leq d(x, d_n) + d(d_n, y) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, donc $B(d_n, 1/k) \subseteq B(x, \varepsilon) \subseteq U$.

Montrons (iii) $\Rightarrow$ (ii). Pour chaque $n \geq 1$, le recouvrement $\{B(x, 1/n) : x \in X\}$ admet un sous-recouvrement dénombrable : il existe $D_n \subseteq X$ dénombrable tel que $X = \bigcup_{x \in D_n} B(x, 1/n)$. Posons $D = \bigcup_{n \geq 1} D_n$, qui est dénombrable. Pour tout $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, choisissons n tel que $1/n < \varepsilon$. Il existe $y \in D_n$ avec $x \in B(y, 1/n)$, donc $d(x, y) < 1/n < \varepsilon$ et $y \in D \cap B(x, \varepsilon)$. Ainsi D est dense. $\square$

3.6 Contre-exemples

Proposition 3.17 (Propriétés de la droite de Sorgenfrey). *La droite de Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_\ell)$ est :*

- (i) *premier dénombrable,*

(ii) *séparable*,

(iii) *non second dénombrable*.

Démonstration. (i) : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la famille $\{[x, x + 1/n) : n \geq 1\}$ est une base de voisinages dénombrable.

(ii) : Montrons que $\mathbb{Q}$ est dense dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_\ell)$. Soit $[a, b)$ un ouvert de base. L'intervalle $[a, b)$ contient un rationnel (densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ pour la topologie usuelle), donc $[a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

(iii) : Supposons par l'absurde que $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ soit une base dénombrable de $\mathcal{T}_\ell$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'ouvert $[x, x + 1)$ contient un B_{n_x} avec $x \in B_{n_x}$. Puisque B_{n_x} est ouvert dans $\mathcal{T}_\ell$ et $x \in B_{n_x}$, on a $\inf B_{n_x} = x$ (car B_{n_x} contient x et est contenu dans $[x, x + 1)$, donc ne contient aucun point strictement inférieur à x). L'application $x \mapsto n_x$ est donc injective (si $n_x = n_y$, alors $x = \inf B_{n_x} = \inf B_{n_y} = y$). Mais $\mathbb{R}$ est non dénombrable et $\mathbb{N}$ est dénombrable : contradiction. $\square$

Remarque 3.18. La droite de Sorgenfrey montre que « séparable » n'implique pas « second dénombrable » en dehors du cadre métrique. La

efprop :metrique-separable ne se généralise donc pas aux espaces topologiques arbitraires.

3.7 Exemples résolus

Exemple 3.19. Base de la topologie produit. Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques avec des bases $\mathcal{B}_X$ et $\mathcal{B}_Y$ respectivement. Montrons que $\mathcal{B} = \{B_X \times B_Y : B_X \in \mathcal{B}_X, B_Y \in \mathcal{B}_Y\}$ est une base de la topologie produit sur $X \times Y$.

Solution. Vérifions les conditions du efthm :critere-base. (B1) : Pour $(x, y) \in X \times Y$, il existe $B_X \in \mathcal{B}_X$ avec $x \in B_X$ et $B_Y \in \mathcal{B}_Y$ avec $y \in B_Y$, donc $(x, y) \in B_X \times B_Y$. (B2) : Soient $B_1 \times C_1, B_2 \times C_2 \in \mathcal{B}$ et $(x, y) \in (B_1 \times C_1) \cap (B_2 \times C_2) = (B_1 \cap B_2) \times (C_1 \cap C_2)$. Alors $x \in B_1 \cap B_2$, donc il existe $B_3 \in \mathcal{B}_X$ avec $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. De même, il existe $C_3 \in \mathcal{B}_Y$ avec $y \in C_3 \subseteq C_1 \cap C_2$. Alors $(x, y) \in B_3 \times C_3 \subseteq (B_1 \cap B_2) \times (C_1 \cap C_2)$.

La topologie engendrée par $\mathcal{B}$ coïncide avec la topologie produit $\mathcal{T}_X \times \mathcal{T}_Y$.

Exemple 3.20. Topologie engendrée par les demi-droites. Soit $\mathcal{S} = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(b, +\infty) : b \in \mathbb{R}\}$. Montrons que $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ est la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

Solution. Les intersections finies d'éléments de $\mathcal{S}$ sont de la forme $(-\infty, a) \cap (b, +\infty) = (b, a)$ lorsque $b < a$, ou $\mathbb{R}$, ou $\emptyset$ (si $b \geq a$), ou les demi-droites elles-mêmes. Les intervalles ouverts (b, a) forment une base de la topologie usuelle. Réciproquement, toute demi-droite est ouverte pour la topologie usuelle. Donc $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ est exactement la topologie usuelle.

Exemple 3.21. Sous-base de la topologie cofinie. Soit X un ensemble infini. Pour chaque $x \in X$, posons $S_x = X \setminus \{x\}$. La collection $\mathcal{S} = \{S_x : x \in X\}$ est une sous-base de la topologie cofinie sur X .

Solution. Une intersection finie $S_{x_1} \cap \dots \cap S_{x_n} = X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ est le complémentaire d'un ensemble fini, donc un ouvert cofini. Les réunions de tels ensembles donnent tous les ouverts cofinis (et $\emptyset$).

3.8 Exercices

Exercice 3.1 (★). Soit (X, d) un espace métrique et $E \subseteq X$ un sous-ensemble dense. Montrer que $\{B(e, r) : e \in E, r \in \mathbb{Q}_{>0}\}$ est une base de la topologie induite par d .

Exercice 3.2 (★). Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de topologies $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sur un même ensemble X . Montrer que $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ si et seulement si, pour tout $B_1 \in \mathcal{B}_1$ et tout $x \in B_1$, il existe $B_2 \in \mathcal{B}_2$ tel que $x \in B_2 \subseteq B_1$.

Exercice 3.3 (★). Montrer que la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ admet $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ comme base dénombrable. En déduire que $\mathbb{R}$ est second dénombrable.

Exercice 3.4 (★★). Soit $\S = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$. Décrire la topologie $\mathcal{T}(\S)$ engendrée par $\S$ sur $\mathbb{R}$. Cette topologie est-elle séparée ? Est-elle première dénombrable ?

Exercice 3.5 (★★). Soit $\mathbb{R}_\ell$ la droite de Sorgenfrey. Montrer que $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$ n'est pas un espace de Lindelöf. *Indication* : considérer l'anti-diagonale $\{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ et le recouvrement par des ouverts de la forme $[x, x + \varepsilon) \times [-x, -x + \varepsilon)$.

Exercice 3.6 (★★). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique séparable. Montrer que toute collection d'ouverts deux à deux disjoints est dénombrable.

Exercice 3.7 (★★). Soit X un ensemble non dénombrable et $\mathcal{T}_{\text{coc}}$ la topologie co-dénombrable (les ouverts sont $\emptyset$ et les complémentaires d'ensembles dénombrables). Montrer que $(X, \mathcal{T}_{\text{coc}})$ n'est pas premier dénombrable.

Exercice 3.8 (★★★). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace de Lindelöf et $f : X \rightarrow Y$ une application continue et surjective. Montrer que Y est un espace de Lindelöf.

Exercice 3.9 (★★★). Montrer que tout sous-espace fermé d'un espace de Lindelöf est de Lindelöf. Donner un exemple de sous-espace ouvert d'un espace de Lindelöf qui n'est pas de Lindelöf. *Indication* : pour le contre-exemple, utiliser le plan de Sorgenfrey $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$.

Résumé du chapitre

- Une **base** $\mathcal{B}$ d'une topologie $\mathcal{T}$ est une sous-collection de $\mathcal{T}$ telle que tout ouvert est réunion d'éléments de $\mathcal{B}$. Les conditions (B1)–(B2) caractérisent les collections qui sont des bases.
- Une **sous-base** $\S$ engendre une topologie dont une base est formée des intersections finies d'éléments de $\S$.
- La **topologie engendrée** par une collection $\mathcal{C}$ est la plus petite topologie contenant $\mathcal{C}$.
- Un espace est **second dénombrable** s'il admet une base dénombrable ; **premier dénombrable** si chaque point admet une base de voisinages dénombrable ; **séparable** s'il admet un sous-ensemble dense dénombrable.
- On a les implications : second dénombrable $\Rightarrow$ premier dénombrable, et second dénombrable $\Rightarrow$ séparable + Lindelöf. Dans les espaces métriques, les trois propriétés (second dénombrable, séparable, Lindelöf) sont équivalentes.

- La **droite de Sorgenfrey** est un contre-exemple fondamental : séparable et premier dénombrable, mais non second dénombrable.

Chapitre 4

Continuité, homéomorphismes, invariants topologiques

Introduction

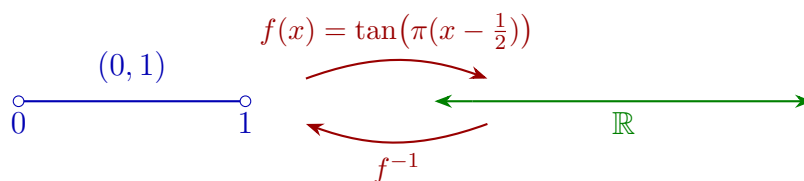
En analyse réelle, la continuité d'une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en un point a est définie par la condition classique en ε - δ :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Cette formulation fait appel à la métrique. Comment généraliser cette notion à des espaces topologiques quelconques, où l'on ne dispose pas nécessairement d'une distance ?

La réponse réside dans la reformulation suivante : f est continue si et seulement si l'*image réciproque* de tout ouvert est un ouvert. Cette caractérisation, purement topologique, ne fait intervenir ni ε ni δ , mais seulement la structure des ouverts. Elle constitue le point de départ de ce chapitre.

Nous étudions ensuite les *homéomorphismes*, qui sont les isomorphismes de la catégorie des espaces topologiques : des bijections continues dont la réciproque est aussi continue. Deux espaces homéomorphes sont *topologiquement indistinguables* : toute propriété exprimable en termes d'ouverts est préservée. Ces propriétés sont les *invariants topologiques*.



Homéomorphisme entre $(0, 1)$ et $\mathbb{R}$ via la tangente.

FIGURE 4.1 – L'intervalle $(0, 1)$ est homéomorphe à $\mathbb{R}$.

4.1 Applications continues

4.1.1 Définition par image réciproque d'ouverts

Définition 4.1 (Application continue). Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques. Une application $f: X \rightarrow Y$ est dite *continue* si l'image réciproque de tout ouvert de Y est un ouvert de X :

$$\forall V \in \mathcal{T}_Y, \quad f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X.$$

Remarque 4.1. Si (X, d_X) et (Y, d_Y) sont des espaces métriques, on retrouve la continuité usuelle : f est continue au sens de la définition ci-dessus si et seulement si elle est continue en tout point au sens ε - δ .

4.1.2 Caractérisations équivalentes

Théorème 4.2 (Caractérisations de la continuité). Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques et $f: X \rightarrow Y$ une application. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est continue (l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert).
- (ii) L'image réciproque de tout fermé de Y est un fermé de X .
- (iii) Pour tout $A \subseteq X$, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.
- (iv) Pour tout $B \subseteq Y$, $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subseteq (f^{-1}(B))^{\circ}$.
- (v) Pour tout $x \in X$ et tout voisinage V de $f(x)$ dans Y , l'ensemble $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x dans X .
- (vi) Il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{T}_Y$ telle que $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$ pour tout $B \in \mathcal{B}$.
- (vii) Il existe une sous-base $\mathcal{S}$ de $\mathcal{T}_Y$ telle que $f^{-1}(S) \in \mathcal{T}_X$ pour tout $S \in \mathcal{S}$.

Démonstration. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) : Pour tout fermé F de Y , on a $f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$. Donc $f^{-1}(F)$ est fermé si et seulement si $f^{-1}(Y \setminus F)$ est ouvert. Comme les fermés de Y sont exactement les complémentaires des ouverts, l'équivalence suit.

(i) $\Rightarrow$ (iii) : Soit $A \subseteq X$. L'ensemble $\overline{f(A)}$ est fermé dans Y , donc $f^{-1}(\overline{f(A)})$ est fermé dans X par (ii). Puisque $A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$, on a $\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$, d'où $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) : Soit F fermé dans Y et $A = f^{-1}(F)$. Alors $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{F} = F$, donc $\overline{A} \subseteq f^{-1}(F) = A$. Comme $A \subseteq \overline{A}$ toujours, on a $\overline{A} = A$, c'est-à-dire $f^{-1}(F)$ est fermé.

(i) $\Rightarrow$ (iv) : Soit $B \subseteq Y$. L'ensemble $\overset{\circ}{B}$ est ouvert dans Y , donc $f^{-1}(\overset{\circ}{B})$ est ouvert dans X . Puisque $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subseteq f^{-1}(B)$ et $f^{-1}(\overset{\circ}{B})$ est ouvert, on a $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subseteq (f^{-1}(B))^{\circ}$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) : Soit $V \in \mathcal{T}_Y$. Alors $V = \overset{\circ}{V}$, donc $f^{-1}(V) = f^{-1}(\overset{\circ}{V}) \subseteq (f^{-1}(V))^{\circ} \subseteq f^{-1}(V)$. Ainsi $f^{-1}(V) = (f^{-1}(V))^{\circ}$, c'est-à-dire $f^{-1}(V)$ est ouvert.

(i) $\Rightarrow$ (v) : Soit V un voisinage de $f(x)$. Il existe $U \in \mathcal{T}_Y$ avec $f(x) \in U \subseteq V$. Alors $x \in f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(V)$ et $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$, donc $f^{-1}(V)$ est voisinage de x .

(v) $\Rightarrow$ (i) : Soit $V \in \mathcal{T}_Y$. Pour tout $x \in f^{-1}(V)$, l'ensemble V est un voisinage ouvert de $f(x)$, donc $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x . Ainsi $f^{-1}(V)$ est voisinage de chacun de ses points, donc est ouvert.

(i) $\Rightarrow$ (vi) : Trivial (prendre $\mathcal{B} = \mathcal{T}_Y$).

(vi) $\Rightarrow$ (i) : Soit $V \in \mathcal{T}_Y$. Alors $V = \bigcup_{i \in I} B_i$ avec $B_i \in \mathcal{B}$. Donc $f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$, qui est réunion d'ouverts de $\mathcal{T}_X$, donc est ouvert.

(vi) $\Rightarrow$ (vii) : Trivial (toute base est une sous-base).

(vii) $\Rightarrow$ (vi) : Soit $\mathcal{B}$ la sous-base donnée et $\mathcal{B}_{\mathcal{B}}$ la base associée (intersections finies d'éléments de $\mathcal{B}$). Pour $B = S_1 \cap \dots \cap S_n \in \mathcal{B}_{\mathcal{B}}$, on a $f^{-1}(B) = f^{-1}(S_1) \cap \dots \cap f^{-1}(S_n)$, qui est une intersection finie d'ouverts, donc un ouvert. On conclut par (vi) $\Rightarrow$ (i). $\square$

4.1.3 Composition

Théorème 4.3 (Composition d'applications continues). *Soient $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$, $(Z, \mathcal{T}_Z)$ trois espaces topologiques. Si $f: X \rightarrow Y$ et $g: Y \rightarrow Z$ sont continues, alors $g \circ f: X \rightarrow Z$ est continue.*

Démonstration. Soit $W \in \mathcal{T}_Z$. Alors $g^{-1}(W) \in \mathcal{T}_Y$ par continuité de g , puis $f^{-1}(g^{-1}(W)) \in \mathcal{T}_X$ par continuité de f . Puisque $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$, le résultat suit. $\square$

Corollaire 4.4. *L'identité $\text{id}_X: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ est continue. L'identité $\text{id}_X: (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ est continue si et seulement si $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$ (i.e. $\mathcal{T}_1$ est plus fine que $\mathcal{T}_2$).*

Démonstration. Pour la première assertion, $\text{id}_X^{-1}(U) = U \in \mathcal{T}$ pour tout $U \in \mathcal{T}$. Pour la seconde, $\text{id}_X^{-1}(U) = U$ est dans $\mathcal{T}_1$ pour tout $U \in \mathcal{T}_2$ si et seulement si $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$. $\square$

4.2 Homéomorphismes

4.2.1 Définition

Définition 4.2 (Homéomorphisme). Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques. Un *homéomorphisme* de X sur Y est une bijection $f: X \rightarrow Y$ telle que f et f^{-1} soient toutes deux continues. On dit alors que X et Y sont *homéomorphes* et on note $X \cong Y$.

Remarque 4.5. La relation « être homéomorphe » est une relation d'équivalence sur la classe des espaces topologiques : réflexivité (via id), symétrie (si f est un homéomorphisme, f^{-1} aussi), transitivité (composition de deux homéomorphismes, par le `efthm` : composition-continue).

Définition 4.3 (Invariant topologique). Une propriété $\mathcal{P}$ des espaces topologiques est un *invariant topologique* si, chaque fois qu'un espace $(X, \mathcal{T}_X)$ satisfait $\mathcal{P}$ et qu'un espace $(Y, \mathcal{T}_Y)$ est homéomorphe à X , l'espace Y satisfait aussi $\mathcal{P}$.

Exemple 4.6. La séparabilité, la compacité, la connexité, les axiomes de séparation, les axiomes de dénombrabilité sont des invariants topologiques. Le diamètre d'un espace métrique ou le caractère borné ne sont *pas* des invariants topologiques ($(0, 1) \cong \mathbb{R}$, mais $(0, 1)$ est borné et $\mathbb{R}$ ne l'est pas).

4.2.2 Applications ouvertes et fermées

Définition 4.4 (Application ouverte, application fermée). Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques et $f: X \rightarrow Y$ une application.

- f est *ouverte* si l'image de tout ouvert de X est un ouvert de Y : $\forall U \in \mathcal{T}_X, f(U) \in \mathcal{T}_Y$.
- f est *fermée* si l'image de tout fermé de X est un fermé de Y .

Remarque 4.7. Une application continue n'est en général ni ouverte ni fermée, et réciproquement. Par exemple, l'application $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ est continue mais pas ouverte ($f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$ qui est bien ouvert... mais f n'est pas injective, ce qui crée des subtilités). L'inclusion $\iota: (0, 1) \hookrightarrow \mathbb{R}$ est continue et ouverte (dans la topologie induite), mais l'image de l'ensemble fermé $(0, 1)$ (fermé dans $(0, 1)$) est $(0, 1)$, qui n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$.

Proposition 4.8 (Caractérisation d'un homéomorphisme). *Soit $f: X \rightarrow Y$ une bijection. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) f est un homéomorphisme.
- (ii) f est continue et ouverte.
- (iii) f est continue et fermée.

Démonstration. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) : Si f est un homéomorphisme, alors f^{-1} est continue, c'est-à-dire, pour tout $U \in \mathcal{T}_X, (f^{-1})^{-1}(U) = f(U) \in \mathcal{T}_Y$: f est ouverte. Réciproquement, si f est bijective, continue et ouverte, alors pour tout $U \in \mathcal{T}_X, f(U) \in \mathcal{T}_Y$, i.e. $(f^{-1})^{-1}(U) \in \mathcal{T}_Y$, donc f^{-1} est continue.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) : Analogie, en remplaçant « ouvert » par « fermé » et en utilisant la caractérisation (ii) du efthm :carac-continue. $\square$

4.3 Le théorème compact-Hausdorff

Théorème 4.9 (Bijection continue d'un compact vers un Hausdorff). *Soit $f: X \rightarrow Y$ une bijection continue. Si X est compact et Y est séparé (Hausdorff), alors f est un homéomorphisme.*

Démonstration. D'après la efprop :carac-homeo, il suffit de montrer que f est fermée. Soit $F \subseteq X$ un fermé. Puisque X est compact, F est compact (fermé dans un compact). L'image $f(F)$ est compacte (image continue d'un compact). Puisque Y est séparé, tout compact de Y est fermé. Donc $f(F)$ est fermé dans Y . $\square$

Remarque 4.10. Ce théorème est extrêmement utile en pratique : il suffit de construire une bijection continue d'un espace compact vers un espace séparé pour obtenir un homéomorphisme. On l'applique fréquemment en théorie des quotients.

4.4 Exemples d'homéomorphismes

Exemple 4.11. $(0, 1) \cong \mathbb{R}$. L'application $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \tan(\pi(x - \frac{1}{2}))$ est un homéomorphisme. En effet :

- f est la composée $\tan \circ g$ où $g(x) = \pi(x - 1/2)$ envoie $(0, 1)$ sur $(-\pi/2, \pi/2)$. La fonction g est un homéomorphisme (bijection affine continue à réciproque continue). La tangente est un homéomorphisme de $(-\pi/2, \pi/2)$ sur $\mathbb{R}$ (bijection continue de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec réciproque arctan continue).
- Par composition (efthm :composition-continue), f est un homéomorphisme.

Ceci montre que le caractère « borné » n'est pas un invariant topologique.

Exemple 4.12. $\mathbb{S}^1 \cong [0, 1]/\sim$. Considérons l'espace quotient $[0, 1]/\sim$ où $0 \sim 1$ (les extrémités sont identifiées). L'application $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ définie par $f(t) = e^{2\pi it}$ est continue et surjective, et passe au quotient en une bijection continue $\bar{f}: [0, 1]/\sim \rightarrow \mathbb{S}^1$. L'espace $[0, 1]$ est compact, donc $[0, 1]/\sim$ est compact (image continue d'un compact). Le cercle $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ est séparé (sous-espace d'un Hausdorff). Par le efthm :compact-hausdorff, $\bar{f}$ est un homéomorphisme.

Exemple 4.13. $\mathbb{R}^n \cong B(0, 1)$ (**boule ouverte unité**). L'application $f: B(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $f(x) = \frac{x}{1-\|x\|}$ est un homéomorphisme. Sa réciproque est $f^{-1}(y) = \frac{y}{1+\|y\|}$. Les deux applications sont continues (compositions d'opérations continues), et l'on vérifie directement que $f \circ f^{-1} = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ et $f^{-1} \circ f = \text{id}_{B(0,1)}$.

4.5 Plongements topologiques

Définition 4.5 (Plongement topologique). Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques. Un *plongement* (ou *embedding*) est une application $f: X \rightarrow Y$ qui est un homéomorphisme de X sur $f(X)$ muni de la topologie induite par Y .

Proposition 4.14 (Caractérisation d'un plongement). *Une application $f: X \rightarrow Y$ est un plongement si et seulement si f est injective, continue, et pour tout ouvert U de X , il existe un ouvert V de Y tel que $f(U) = V \cap f(X)$.*

Démonstration. C'est la reformulation de la définition : f est un homéomorphisme sur son image si et seulement si f est une bijection continue de X sur $f(X)$ dont la réciproque $f^{-1}: f(X) \rightarrow X$ est continue. La continuité de f^{-1} signifie que pour tout ouvert U de X , $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ est ouvert dans la topologie induite sur $f(X)$, c'est-à-dire $f(U) = V \cap f(X)$ pour un certain $V \in \mathcal{T}_Y$. $\square$

Définition 4.6 (Propriété topologique). Une *propriété topologique* est une propriété des espaces topologiques qui est préservée par homéomorphisme. C'est un synonyme d'invariant topologique (efdef :invariant-topologique).

4.6 Lemme de recollement

Théorème 4.15 (Lemme de recollement (Pasting lemma)). *Soit $X = A \cup B$ où A et B sont deux fermés de X . Soient $f: A \rightarrow Y$ et $g: B \rightarrow Y$ deux applications continues telles que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in A \cap B$. Alors l'application $h: X \rightarrow Y$ définie par*

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A, \\ g(x) & \text{si } x \in B, \end{cases}$$

est continue.

Démonstration. Nous utilisons la caractérisation (ii) du efthm :carac-continue. Soit F un fermé de Y . Alors

$$h^{-1}(F) = \{x \in X : h(x) \in F\} = \{x \in A : f(x) \in F\} \cup \{x \in B : g(x) \in F\} = f^{-1}(F) \cup g^{-1}(F).$$

Par continuité de f , l'ensemble $f^{-1}(F)$ est fermé dans A pour la topologie induite. Puisque A est fermé dans X , un fermé de A pour la topologie induite est fermé dans X (intersection d'un fermé de X avec A , qui est fermé). Donc $f^{-1}(F)$ est fermé dans X . De même, $g^{-1}(F)$ est fermé dans X . Ainsi $h^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cup g^{-1}(F)$ est réunion finie de fermés, donc fermé dans X . $\square$

Remarque 4.16. L'hypothèse que A et B soient fermés est essentielle. Si l'on remplace « fermés » par « ouverts », le résultat reste vrai (la preuve est analogue, en utilisant la caractérisation par les ouverts). En revanche, si l'un est ouvert et l'autre fermé, le lemme peut être en défaut.

Corollaire 4.17 (Recollement sur un recouvrement ouvert). *Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X . Si $f_i: U_i \rightarrow Y$ sont des applications continues telles que $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ pour tous $i, j \in I$, alors l'application $f: X \rightarrow Y$ définie par $f(x) = f_i(x)$ pour $x \in U_i$ est bien définie et continue.*

Démonstration. La bonne définition résulte de la condition de compatibilité. Pour la continuité, soit $V \in \mathcal{T}_Y$. Alors $f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(V)$. Chaque $f_i^{-1}(V)$ est ouvert dans U_i (par continuité de f_i), donc ouvert dans X (car U_i est ouvert). Ainsi $f^{-1}(V)$ est réunion d'ouverts, donc ouvert. $\square$

4.7 Contre-exemples

Exemple 4.18. Bijection continue qui n'est pas un homéomorphisme. Considérons $X = [0, 2\pi)$ muni de la topologie induite par $\mathbb{R}$ et $Y = \mathbb{S}^1$ le cercle unité dans $\mathbb{R}^2$. L'application $f: X \rightarrow Y$ définie par $f(t) = (\cos t, \sin t)$ est continue (composantes continues), bijective (chaque point du cercle a un unique antécédent dans $[0, 2\pi)$), mais f^{-1} n'est pas continue.

En effet, considérons la suite (y_n) dans $\mathbb{S}^1$ définie par $y_n = (\cos(2\pi - 1/n), \sin(2\pi - 1/n))$ pour $n \geq 1$. On a $y_n \rightarrow (1, 0)$ dans $\mathbb{S}^1$. Si f^{-1} était continue, on aurait $f^{-1}(y_n) = 2\pi - 1/n \rightarrow f^{-1}(1, 0) = 0$. Mais $2\pi - 1/n \rightarrow 2\pi \neq 0$. Donc f^{-1} n'est pas continue.

Cet exemple n'est pas en contradiction avec le efthm :compact-hausdorff : $X = [0, 2\pi)$ n'est pas compact.

Remarque 4.19. Si l'on considère le quotient $[0, 2\pi]/\sim$ (où $0 \sim 2\pi$), l'application induite est un homéomorphisme sur $\mathbb{S}^1$, car le quotient d'un compact est compact. C'est l'efex :homeo-S1-quotient.

4.8 Invariance du domaine

Nous énonçons sans démonstration le théorème suivant, dont la preuve fait appel à l'homologie singulière.

Théorème 4.20 (Invariance du domaine (Brouwer)). *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue et injective. Alors $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f est un homéomorphisme de U sur $f(U)$.*

Remarque 4.21. Ce théorème a des conséquences profondes : il implique par exemple que $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ ne sont homéomorphes que si $m = n$, c'est-à-dire que la *dimension topologique* de $\mathbb{R}^n$ est un invariant topologique.

4.9 Exemples résolus

Exemple 4.22. Continuité des projections. Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques et $\pi_X: X \times Y \rightarrow X$ la projection sur le premier facteur, où $X \times Y$ est muni de la topologie produit. Montrons que π_X est continue et ouverte.

Solution. Pour la continuité, soit $U \in \mathcal{T}_X$. Alors $\pi_X^{-1}(U) = U \times Y$, qui est ouvert dans la topologie produit (c'est un ouvert de base).

Pour le caractère ouvert, il suffit de vérifier sur une base. Un ouvert de base de la topologie produit est de la forme $U \times V$ avec $U \in \mathcal{T}_X$, $V \in \mathcal{T}_Y$. On a $\pi_X(U \times V) = U$ si $V \neq \emptyset$, et $\pi_X(\emptyset) = \emptyset$. Dans les deux cas, l'image est ouverte. Puisque tout ouvert est réunion d'ouverts de base, et que l'image préserve les réunions, π_X est ouverte.

Exemple 4.23. $[a, b] \cong [c, d]$ **pour tous $a < b$ et $c < d$.** L'application $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ définie par $f(x) = c + \frac{(d-c)(x-a)}{b-a}$ est une bijection affine continue (restriction d'une fonction affine $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$). Sa réciproque $f^{-1}(y) = a + \frac{(b-a)(y-c)}{d-c}$ est aussi affine et continue. Donc f est un homéomorphisme.

On peut aussi invoquer le efthm :compact-hausdorff : $[a, b]$ est compact, $[c, d]$ est séparé, et f est bijective et continue.

Exemple 4.24. $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ **est un homéomorphisme.** L'exponentielle $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ est continue, bijective, et sa réciproque $\ln: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue. C'est donc un homéomorphisme.

En revanche, $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (vue comme application dans $\mathbb{R}$ entier) n'est pas surjective, donc n'est pas un homéomorphisme. C'est un plongement topologique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

4.10 Exercices

Exercice 4.1 (★). Montrer qu'une application constante $f: X \rightarrow Y$ est continue pour toutes topologies sur X et Y .

Exercice 4.2 (★). Soit $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ continue et soit $A \subseteq X$. Montrer que la restriction $f|_A: A \rightarrow Y$ est continue lorsque A est muni de la topologie induite.

Exercice 4.3 (★). Montrer que l'application $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$ est un homéomorphisme.

Exercice 4.4 (★★). Soit $f: X \rightarrow Y$ une application. Montrer que f est continue si et seulement si, pour tout $A \subseteq X$, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. Montrer que f est fermée si et seulement si, pour tout $A \subseteq X$, $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$.

Exercice 4.5 (★★). Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue et Y un espace séparé. Montrer que le graphe $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$ est fermé dans $X \times Y$.

Exercice 4.6 (★★). Soient X et Y deux espaces topologiques, $f: X \rightarrow Y$ continue, et $\mathcal{B}$ une base de la topologie de Y . Montrer que $\{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ est une sous-base de la topologie $\{f^{-1}(V) : V \in \mathcal{T}_Y\}$ sur X (topologie initiale induite par f).

Exercice 4.7 (★★★). Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes. *Indication :* si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un homéomorphisme, considérer la restriction de f à $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et utiliser la connexité.

Exercice 4.8 (★★★). Soit $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une application continue. Montrer que f admet un point fixe (théorème de point fixe de Brouwer en dimension 1). *Indication :* considérer $g(x) = f(x) - x$ et appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 4.9 (★★★). Soit X un espace compact et Y un espace de Hausdorff. Montrer que toute application continue $f: X \rightarrow Y$ est fermée. En déduire le
efthm :compact-hausdorff directement.

Résumé du chapitre

- Une application $f: X \rightarrow Y$ est **continue** si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert. Les caractérisations équivalentes (fermés, adhérence, intérieur, voisinages, base, sous-base) sont résumées dans le efthm :carac-continue.
- La **composition** de deux applications continues est continue.
- Un **homéomorphisme** est une bijection continue dont la réciproque est continue. C'est équivalent à une bijection continue et ouverte, ou continue et fermée.
- Les **invariants topologiques** sont les propriétés préservées par homéomorphisme. Le caractère borné n'en est pas un : $(0, 1) \cong \mathbb{R}$.
- Le **théorème compact-Hausdorff** : une bijection continue d'un compact dans un séparé est un homéomorphisme.
- Le **lemme de recollement** : si $X = A \cup B$ avec A, B fermés (ou ouverts), et si des applications continues coïncident sur $A \cap B$, l'application recollée est continue.
- Une bijection continue qui n'est pas un homéomorphisme existe dès que la source n'est pas compacte : l'exemple $[0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{S}^1$.
- L'**invariance du domaine** (Brouwer) : une injection continue d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est un plongement ouvert.

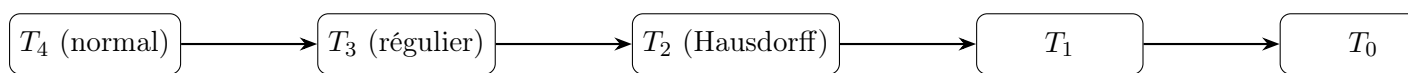
Chapitre 5

Axiomes de séparation

Introduction

Les espaces métriques jouissent de propriétés remarquables : les points distincts peuvent toujours être séparés par des ouverts disjoints, les singletons sont fermés, les limites de suites convergentes sont uniques. Ces propriétés ne sont pas automatiques dans un espace topologique quelconque. Les *axiomes de séparation* constituent une hiérarchie de conditions qui permettent de retrouver, dans un cadre purement topologique, les comportements « raisonnables » auxquels l'intuition métrique nous habitue.

La terminologie classique, due à Alexandroff et Hopf, utilise les notations T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 (du mot allemand *Trennungsaxiom*, axiome de séparation). Chaque axiome impose une capacité de séparation croissante. Ce chapitre définit ces axiomes, étudie leurs implications mutuelles, et construit des contre-exemples montrant qu'aucune implication ne se renverse.



Aucune implication ne se renverse.

FIGURE 5.1 – Hiérarchie des axiomes de séparation.

5.1 L'axiome T_0 (Kolmogorov)

Définition 5.1 (Espace T_0). Un espace topologique (X, τ) est dit T_0 (ou espace de Kolmogorov) si, pour tout couple de points distincts $x, y \in X$, il existe un ouvert $U \in \tau$ contenant l'un des deux points mais pas l'autre :

$$\forall x \neq y \in X, \quad \exists U \in \tau, \quad (x \in U, y \notin U) \text{ ou } (y \in U, x \notin U).$$

Remarque 5.1 (Interprétation). L'axiome T_0 signifie que la topologie distingue topologiquement tout couple de points : deux points distincts ne peuvent pas avoir exactement les mêmes voisinages ouverts.

Exemple 5.2 (Exemples d'espaces T_0). 1. Tout espace métrique est T_0 .

2. La *topologie de Sierpiński* sur $\{0, 1\}$, dont les ouverts sont $\emptyset$, $\{0\}$ et $\{0, 1\}$, est T_0 mais pas T_1 .

3. L'espace $(X, \{\emptyset, X\})$ muni de la topologie grossière n'est pas T_0 dès que $|X| \geq 2$.

5.2 L'axiome T_1

Définition 5.2 (Espace T_1). Un espace topologique (X, τ) est dit T_1 si, pour tout couple de points distincts $x, y \in X$, il existe un ouvert contenant x mais pas y :

$$\forall x \neq y \in X, \quad \exists U \in \tau, \quad x \in U, \quad y \notin U.$$

Remarque 5.3 (Différence avec T_0). Dans un espace T_0 , on peut séparer *l'un des deux* points de l'autre ; dans un espace T_1 , chaque point peut être séparé de l'autre par un ouvert qui lui est propre. Tout espace T_1 est T_0 , mais la réciproque est fausse (l'espace de Sierpiński est T_0 mais pas T_1).

Théorème 5.4 (Caractérisation des espaces T_1). *Un espace topologique (X, τ) est T_1 si et seulement si tout singleton $\{x\}$ est un fermé de X .*

Démonstration. ($\Rightarrow$) Soit $x \in X$. Pour tout $y \neq x$, il existe un ouvert $U_y \in \tau$ tel que $y \in U_y$ et $x \notin U_y$. Alors

$$X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \neq x} U_y$$

est une réunion d'ouverts, donc un ouvert. Ainsi $\{x\}$ est fermé.

($\Leftarrow$) Soient $x \neq y$. Comme $\{y\}$ est fermé, $U = X \setminus \{y\}$ est un ouvert contenant x mais pas y . □

Exemple 5.5 (Topologie cofinie). Soit X un ensemble infini. La *topologie cofinie* sur X est

$$\tau_{\text{cof}} = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ est fini}\}.$$

Les singletons $\{x\}$ sont fermés (leur complémentaire $X \setminus \{x\}$ est cofini donc ouvert). Par le théorème 5.4, (X, τ_{cof}) est T_1 .

Cependant, cet espace n'est *pas* T_2 : si U et V sont deux ouverts non vides, alors $X \setminus U$ et $X \setminus V$ sont finis, donc $X \setminus (U \cap V) = (X \setminus U) \cup (X \setminus V)$ est fini, ce qui implique $U \cap V \neq \emptyset$. Il est donc impossible de trouver deux ouverts disjoints non vides.

5.3 L'axiome T_2 (Hausdorff)

Définition 5.3 (Espace de Hausdorff). Un espace topologique (X, τ) est dit T_2 ou *séparé* (ou espace de *Hausdorff*) si, pour tout couple de points distincts $x, y \in X$, il

existe des ouverts disjoints $U, V \in \tau$ tels que $x \in U$ et $y \in V$:

$$\forall x \neq y \in X, \quad \exists U, V \in \tau, \quad x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset.$$

Théorème 5.6 (Unicité des limites dans les espaces de Hausdorff). *Dans un espace de Hausdorff, les limites de suites (plus généralement de filtres ou de filets) sont uniques.*

Démonstration. Soit (X, τ) un espace de Hausdorff et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite admettant deux limites ℓ_1 et ℓ_2 avec $\ell_1 \neq \ell_2$. Par l'axiome T_2 , il existe des ouverts disjoints U et V tels que $\ell_1 \in U$ et $\ell_2 \in V$. Par définition de la convergence, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in U$ pour tout $n \geq N_1$, et $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in V$ pour tout $n \geq N_2$. Pour $n \geq \max(N_1, N_2)$, on aurait $x_n \in U \cap V = \emptyset$, ce qui est absurde.

Le même argument s'adapte aux filtres : si un filtre $\mathcal{F}$ converge vers ℓ_1 et ℓ_2 , alors $U \in \mathcal{F}$ et $V \in \mathcal{F}$, donc $U \cap V \in \mathcal{F}$, mais $U \cap V = \emptyset \notin \mathcal{F}$, contradiction. $\square$

Proposition 5.7 (Caractérisation par la diagonale). *Un espace topologique (X, τ) est de Hausdorff si et seulement si la diagonale*

$$\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\}$$

est un fermé de $X \times X$ muni de la topologie produit.

Démonstration. $(\Rightarrow)$ Montrons que $(X \times X) \setminus \Delta_X$ est ouvert. Soit $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta_X$, c'est-à-dire $x \neq y$. Par l'axiome T_2 , il existe U, V ouverts disjoints avec $x \in U, y \in V$. Alors $U \times V$ est un ouvert de $X \times X$ contenant (x, y) et $(U \times V) \cap \Delta_X = \emptyset$ car si $(z, z) \in U \times V$ alors $z \in U \cap V = \emptyset$, contradiction.

$(\Leftarrow)$ Si Δ_X est fermé, son complémentaire est ouvert. Pour $x \neq y$, le point $(x, y) \notin \Delta_X$ admet un voisinage ouvert de base $U \times V$ disjoint de Δ_X , ce qui impose $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Théorème 5.8 (Compacts dans un espace de Hausdorff). *Tout sous-ensemble compact d'un espace de Hausdorff est fermé.*

Démonstration. Soit K un compact de l'espace de Hausdorff (X, τ) . Montrons que $X \setminus K$ est ouvert. Soit $x \in X \setminus K$. Pour tout $y \in K$, il existe des ouverts disjoints U_y et V_y tels que $x \in U_y$ et $y \in V_y$. La famille $(V_y)_{y \in K}$ est un recouvrement ouvert de K ; par compacité, on en extrait un sous-recouvrement fini $V_{y_1}, \dots, V_{y_n}$. Posons

$$U = U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}.$$

Alors U est un ouvert contenant x . De plus, $U \cap K = \emptyset$: en effet, si $z \in U \cap K$, alors $z \in V_{y_i}$ pour un certain i , d'où $z \in U_{y_i} \cap V_{y_i} = \emptyset$, contradiction. Ainsi $U \subseteq X \setminus K$, ce qui prouve que $X \setminus K$ est ouvert. $\square$

5.4 Espaces réguliers et axiome T_3

Définition 5.4 (Espace régulier). Un espace topologique (X, τ) est dit *régulier* si, pour tout fermé $F \subseteq X$ et tout point $x \notin F$, il existe des ouverts disjoints U et V tels que $x \in U$ et $F \subseteq V$:

$$\forall F \text{ fermé}, \forall x \notin F, \quad \exists U, V \in \tau, \quad x \in U, F \subseteq V, U \cap V = \emptyset.$$

Un espace est dit T_3 s'il est régulier et T_1 .

Remarque 5.9 (Régulier vs. T_3). La convention peut varier selon les auteurs. Nous suivons la convention de Bourbaki : un espace T_3 est régulier et T_1 . La régularité seule n'implique pas T_1 (un espace à un point muni de la topologie grossière est régulier mais cela est trivial).

Proposition 5.10 (Caractérisation de la régularité). *Un espace T_1 est régulier (donc T_3) si et seulement si, pour tout point $x \in X$ et tout ouvert U contenant x , il existe un ouvert V tel que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

Démonstration. $(\Rightarrow)$ Soit $x \in U$ avec U ouvert. Le complémentaire $F = X \setminus U$ est fermé et $x \notin F$. Par régularité, il existe des ouverts disjoints $V \ni x$ et $W \supseteq F$. Comme $V \cap W = \emptyset$, on a $V \subseteq X \setminus W$. Or $X \setminus W$ est fermé et contenu dans $X \setminus F = U$, donc $\overline{V} \subseteq X \setminus W \subseteq U$.

$(\Leftarrow)$ Soient F fermé et $x \notin F$. Alors $U = X \setminus F$ est un ouvert contenant x . Par hypothèse, il existe un ouvert V tel que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Posons $W = X \setminus \overline{V}$. Alors W est ouvert, $F \subseteq W$ (car $F \subseteq X \setminus U \subseteq X \setminus \overline{V} = W$), et $V \cap W = \emptyset$. $\square$

5.5 Espaces normaux et axiome T_4

Définition 5.5 (Espace normal). Un espace topologique (X, τ) est dit *normal* si, pour tous fermés disjoints $F_1, F_2 \subseteq X$, il existe des ouverts disjoints U_1 et U_2 tels que $F_1 \subseteq U_1$ et $F_2 \subseteq U_2$:

$$\forall F_1, F_2 \text{ fermés}, F_1 \cap F_2 = \emptyset, \quad \exists U_1, U_2 \in \tau, \quad F_1 \subseteq U_1, F_2 \subseteq U_2, U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

Un espace est dit T_4 s'il est normal et T_1 .

5.6 Implications entre axiomes de séparation

Théorème 5.11 (Chaîne d'implications). *Pour un espace topologique, on a :*

$$T_4 \implies T_3 \implies T_2 \implies T_1 \implies T_0.$$

Aucune de ces implications ne se renverse.

Démonstration. $T_4 \Rightarrow T_3$: Soit (X, τ) un espace T_4 (normal et T_1). Soient F un fermé et $x \notin F$. Comme l'espace est T_1 , le singleton $\{x\}$ est fermé. Les fermés $\{x\}$ et F sont

disjoints ; par normalité, il existe des ouverts disjoints $U \ni x$ et $V \supseteq F$. Donc l'espace est régulier, et comme il est T_1 , il est T_3 .

$T_3 \Rightarrow T_2$: Soit (X, τ) un espace T_3 (régulier et T_1). Soient $x \neq y$. Comme l'espace est T_1 , $\{y\}$ est fermé et $x \notin \{y\}$. Par régularité, il existe des ouverts disjoints $U \ni x$ et $V \ni y$.

$T_2 \Rightarrow T_1$: Évident : si x et y sont séparés par des ouverts disjoints $U \ni x$ et $V \ni y$, alors en particulier U est un ouvert contenant x mais pas y .

$T_1 \Rightarrow T_0$: Évident. □

Théorème 5.12 (Tout espace compact et Hausdorff est normal). *Si (X, τ) est compact et T_2 , alors il est T_4 .*

Démonstration. L'espace est T_1 car il est T_2 . Montrons la normalité.

Étape 1 : compact et point peuvent être séparés (régularité). Soient K un compact (donc fermé par le théorème 5.8) et $x \notin K$. Pour tout $y \in K$, il existe des ouverts disjoints $U_y \ni x$ et $V_y \ni y$. Par compacité de K , on extrait un sous-recouvrement fini $V_{y_1}, \dots, V_{y_n}$. Alors $U = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$ et $V = \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$ sont des ouverts disjoints séparant x et K .

Étape 2 : deux fermés disjoints peuvent être séparés. Soient F_1, F_2 deux fermés disjoints. Comme X est compact et les F_i sont fermés, les F_i sont compacts. Pour chaque $x \in F_1$, l'étape 1 fournit des ouverts disjoints $U_x \ni x$ et $V_x \supseteq F_2$. Par compacité de F_1 , on extrait $U_{x_1}, \dots, U_{x_m}$ couvrant F_1 . Posons $U = \bigcup_{j=1}^m U_{x_j}$ et $V = \bigcap_{j=1}^m V_{x_j}$. Alors $F_1 \subseteq U$, $F_2 \subseteq V$ et $U \cap V = \emptyset$. □

5.7 Contre-exemples

La construction de contre-exemples est essentielle pour vérifier qu'aucune implication de la chaîne $T_4 \Rightarrow \dots \Rightarrow T_0$ ne se renverse.

Exemple 5.13 (T_1 mais pas T_2 : topologie cofinie). Soit X un ensemble infini muni de la topologie cofinie τ_{cof} . Comme montré dans l'exemple 5.5, cet espace est T_1 mais pas T_2 : deux ouverts non vides s'intersectent toujours.

Exemple 5.14 (T_0 mais pas T_1 : topologie du point particulier). Soit X un ensemble de cardinal ≥ 2 et soit $p \in X$ un point fixé. La *topologie du point particulier* est

$$\tau_p = \{U \subseteq X : p \in U\} \cup \{\emptyset\}.$$

Cet espace est T_0 : pour $x \neq y$, si $x = p$ alors $\{p\}$ est ouvert et contient x mais peut ne pas contenir y ; si ni x ni y n'est p , l'ouvert $\{p, x\}$ contient x mais pas y . Cependant, il n'est pas T_1 : le singleton $\{p\}$ n'est pas fermé si $|X| \geq 2$, car $X \setminus \{p\}$ ne contient pas p et n'est donc pas ouvert.

Exemple 5.15 (T_2 mais pas T_3 : la droite à « double origine »). Considérons $X = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \{0^+, 0^-\}$ où 0^+ et 0^- sont deux copies distinctes de l'origine. La topologie est engendrée par les ouverts de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et les ensembles de la forme $((-\varepsilon, 0) \cup \{0^+\} \cup (0, \varepsilon))$ et $((-\varepsilon, 0) \cup \{0^-\} \cup (0, \varepsilon))$ pour $\varepsilon > 0$.

Cet espace est T_2 : les deux origines sont séparées par des ouverts disjoints (par exemple en choisissant des ε suffisamment petits, avec des voisinages alternés). Mais il n'est pas régulier : le fermé $\{0^-\}$ et le point 0^+ ne peuvent pas être séparés par des ouverts disjoints, car tout voisinage de 0^+ et tout voisinage de 0^- contiennent un intervalle $(-\varepsilon, 0) \cup (0, \varepsilon)$ en commun.

Exemple 5.16 (T_3 mais pas T_4 : le plan de Sorgenfrey). La *droite de Sorgenfrey* $\mathbb{R}_\ell$ est $\mathbb{R}$ muni de la topologie engendrée par les intervalles semi-ouverts $[a, b)$. Elle est T_3 (régulière et T_1). Le *plan de Sorgenfrey* $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$ est également T_3 , mais il n'est pas normal : l'antidiagonale

$$D = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$$

est un sous-espace fermé discret, et l'on peut montrer (par un argument de cardinalité utilisant le lemme de Jones) que deux fermés disjoints non dénombrables de D ne peuvent pas être séparés par des ouverts disjoints dans $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$.

5.8 Exemples résolus

Exemple 5.17 (Tout espace métrique est T_4). Soit (X, d) un espace métrique. Montrons qu'il est normal. Soient F_1 et F_2 deux fermés disjoints. Pour tout $x \in X$, posons $d(x, F_i) = \inf\{d(x, y) : y \in F_i\}$. Comme $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ et les F_i sont fermés, pour $x \in F_1$ on a $d(x, F_2) > 0$, et réciproquement. Posons

$$U_1 = \{x \in X : d(x, F_1) < d(x, F_2)\}, \quad U_2 = \{x \in X : d(x, F_2) < d(x, F_1)\}.$$

Les fonctions $x \mapsto d(x, F_i)$ sont continues (même 1-lipschitziennes), donc U_1 et U_2 sont ouverts. De plus $F_1 \subseteq U_1$, $F_2 \subseteq U_2$ et $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. L'espace est T_1 car les singletons sont fermés dans un espace métrique. Donc (X, d) est T_4 .

Exemple 5.18 (Produit d'espaces de Hausdorff). Soit $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces de Hausdorff. Alors $X = \prod_{i \in I} X_i$ muni de la topologie produit est de Hausdorff.

En effet, soient $x = (x_i)_{i \in I}$ et $y = (y_i)_{i \in I}$ deux points distincts de X . Il existe $j \in I$ tel que $x_j \neq y_j$. Par l'axiome T_2 dans X_j , il existe des ouverts disjoints $U_j \ni x_j$ et $V_j \ni y_j$. Alors $\pi_j^{-1}(U_j)$ et $\pi_j^{-1}(V_j)$ sont des ouverts disjoints de X séparant x et y .

Exemple 5.19 (Sous-espace d'un espace régulier). Tout sous-espace d'un espace T_3 est T_3 .

Soit (X, τ) un espace T_3 et $A \subseteq X$. L'espace A est T_1 car la propriété T_1 est héréditaire. Montrons la régularité. Soient $x \in A$ et F un fermé relatif de A , avec $x \notin F$. On a $F = A \cap G$ pour un fermé G de X , et $x \notin G$. Par régularité de X , il existe des ouverts disjoints $U \ni x$ et $V \supseteq G$ dans X . Alors $U \cap A$ et $V \cap A$ sont des ouverts disjoints de A avec $x \in U \cap A$ et $F \subseteq V \cap A$.

5.9 Exercices

Exercice 5.1 (Topologie grossière et T_0). ★ Montrer qu'un espace muni de la topologie grossière n'est T_0 que s'il contient au plus un point.

Exercice 5.2 (Hausdorff et graphe fermé). ★ Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue, où Y est de Hausdorff. Montrer que le graphe $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ est un fermé de $X \times Y$.

Exercice 5.3 (Topologie discrète). ★ Montrer que tout espace muni de la topologie discrète est T_4 .

Exercice 5.4 (Limite de suites en T_1). ★★ Soit (X, τ) un espace T_1 . Montrer que si une suite (x_n) converge vers ℓ et si $x_n = c$ pour une infinité d'indices, alors $c = \ell$.

Indication : utiliser le fait que les singletons sont fermés.

Exercice 5.5 (Image continue et séparation). ★★

1. Montrer que si $f: X \rightarrow Y$ est continue et injective, et si Y est T_i ($i = 0, 1, 2$), alors X est T_i .
2. En déduire que la propriété d'être T_2 est un invariant topologique.

Exercice 5.6 (Régularité et bases de voisinages fermés). ★★ Montrer qu'un espace T_1 est régulier si et seulement si tout point admet une base de voisinages formée de fermés.

Exercice 5.7 (Normalité et lemme d'Urysohn (aperçu)). ★★★ Soit (X, τ) un espace T_4 . Soient F_0, F_1 deux fermés disjoints. En utilisant la normalité de manière itérée, construire pour tout rationnel dyadique $r = k/2^n$ ($0 \leq r \leq 1$) un ouvert U_r tel que :

$$F_0 \subseteq U_r, \quad \overline{U_r} \cap F_1 = \emptyset, \quad r < s \implies \overline{U_r} \subseteq U_s.$$

Puis définir $f(x) = \inf\{r : x \in U_r\}$ et montrer que $f: X \rightarrow [0, 1]$ est continue avec $f|_{F_0} = 0$ et $f|_{F_1} = 1$.

Exercice 5.8 (Compact et Hausdorff : bijectivité continue). ★★★ Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue et bijective, où X est compact et Y est de Hausdorff. Montrer que f est un homéomorphisme.

Indication : montrer que f est fermée en utilisant le théorème 5.8.

Résumé du chapitre

- Les axiomes T_0 à T_4 forment une hiérarchie croissante de capacités de séparation : $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.
- Un espace est T_1 si et seulement si ses singletons sont fermés.
- Un espace de Hausdorff (T_2) garantit l'unicité des limites et la fermeture des compacts.
- T_2 est équivalent à la fermeture de la diagonale dans le produit.
- Tout espace compact et Hausdorff est normal (T_4).
- Tout espace métrique est T_4 .
- Les propriétés T_0 , T_1 , T_2 et T_3 sont héréditaires et stables par produit. La normalité n'est pas héréditaire en général (le plan de Sorgenfrey en est un contre-exemple).

Chapitre 6

Compacité et théorème de Tychonoff

Introduction

Le théorème de Heine-Borel affirme qu'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est compact si et seulement s'il est fermé et borné. Ce résultat, pilier de l'analyse classique, repose sur la structure euclidienne. En topologie générale, la notion de compacité se formule intrinsèquement à l'aide de recouvrements ouverts, sans référence à une distance ni à un bornage.

La compacité est, avec la connexité, l'une des propriétés topologiques les plus fondamentales. Elle permet d'extraire des informations finies à partir de données infinies : convergence de sous-suites, atteinte des bornes d'une fonction continue, passage de propriétés locales à des propriétés globales.

Le résultat culminant de ce chapitre est le *théorème de Tychonoff* : un produit arbitraire d'espaces compacts est compact. Ce théorème, dont la démonstration utilise de manière essentielle le théorème de la sous-base d'Alexander, est l'un des résultats les plus importants de la topologie générale. Nous terminons par la *compactification d'Alexandroff*, qui montre comment « rendre compact » un espace qui ne l'est pas.

6.1 Définition et premières propriétés

Définition 6.1 (Espace compact). Un espace topologique (X, τ) est dit *compact* si tout recouvrement ouvert de X admet un sous-recouvrement fini : pour toute famille $(U_i)_{i \in I}$ d'ouverts telle que $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, il existe une partie finie $J \subseteq I$ telle que $X = \bigcup_{j \in J} U_j$.

Remarque 6.1 (Convention). Contrairement à certains auteurs (notamment Bourbaki), nous ne supposons *pas* qu'un espace compact est nécessairement séparé. Lorsque nous voudrions un espace à la fois compact et de Hausdorff, nous le préciserons explicitement.

Définition 6.2 (Sous-ensemble compact). Un sous-ensemble K d'un espace topologique (X, τ) est dit *compact* si le sous-espace $(K, \tau|_K)$ est compact, c'est-à-dire si tout recouvrement de K par des ouverts de X admet un sous-recouvrement fini.

6.2 Propriété de l'intersection finie

Définition 6.3 (Propriété de l'intersection finie). Une famille $(F_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles d'un ensemble X vérifie la *propriété de l'intersection finie* (FIP, de l'anglais *finite intersection property*) si, pour toute partie finie $J \subseteq I$, on a $\bigcap_{j \in J} F_j \neq \emptyset$.

Théorème 6.2 (Caractérisation de la compacité par la FIP). *Un espace topologique (X, τ) est compact si et seulement si toute famille de fermés vérifiant la FIP a une intersection non vide :*

$$\text{pour toute famille } (F_i)_{i \in I} \text{ de fermés avec la FIP, } \bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset.$$

Démonstration. Il s'agit d'une reformulation par passage au complémentaire.

($\Rightarrow$) Supposons X compact et soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés avec la FIP telle que $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$. Alors $(X \setminus F_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de X . Par compacité, il existe $J \subseteq I$ fini tel que $X = \bigcup_{j \in J} (X \setminus F_j) = X \setminus \bigcap_{j \in J} F_j$, d'où $\bigcap_{j \in J} F_j = \emptyset$, contredisant la FIP.

($\Leftarrow$) Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X sans sous-recouvrement fini. Alors les fermés $F_i = X \setminus U_i$ vérifient la FIP (car aucune sous-famille finie des U_i ne recouvre X), mais $\bigcap_{i \in I} F_i = X \setminus \bigcup_{i \in I} U_i = \emptyset$, contradiction. $\square$

6.3 Compacité et opérations topologiques

Théorème 6.3 (Fermé d'un compact). *Tout sous-ensemble fermé d'un espace compact est compact.*

Démonstration. Soit (X, τ) compact et $F \subseteq X$ fermé. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de F par des ouverts de X . Alors $(U_i)_{i \in I} \cup \{X \setminus F\}$ est un recouvrement ouvert de X . Par compacité, on en extrait un sous-recouvrement fini :

$$X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n} \cup (X \setminus F).$$

En particulier, $F \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$. $\square$

Théorème 6.4 (Compact dans un espace de Hausdorff). *Tout sous-ensemble compact d'un espace de Hausdorff est fermé.*

Démonstration. C'est exactement le théorème 5.8 du chapitre 5, dont nous rappelons la preuve. Soit K compact dans l'espace de Hausdorff X . Pour $x \in X \setminus K$, on construit pour chaque $y \in K$ des ouverts disjoints $U_y \ni x$ et $V_y \ni y$. Par compacité de K , on extrait un sous-recouvrement fini $V_{y_1}, \dots, V_{y_n}$. L'ouvert $U = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$ contient x et est disjoint de K . Ainsi $X \setminus K$ est ouvert. $\square$

Théorème 6.5 (Image continue d'un compact). *Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue. Si X est compact, alors $f(X)$ est compact.*

Démonstration. Soit $(V_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $f(X)$. Alors $(f^{-1}(V_i))_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de X (par continuité de f). Par compacité de X , il existe $J \subseteq I$ fini tel que $X = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(V_j)$. Donc $f(X) \subseteq \bigcup_{j \in J} V_j$. $\square$

Corollaire 6.6 (Théorème des bornes atteintes). *Soit $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue, où X est un espace compact non vide. Alors f est bornée et atteint ses bornes : il existe $a, b \in X$ tels que*

$$f(a) = \inf_{x \in X} f(x), \quad f(b) = \sup_{x \in X} f(x).$$

Démonstration. Par le théorème 6.5, $f(X)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{R}$ est de Hausdorff, $f(X)$ est fermé (théorème 6.4). Comme $f(X)$ est compact dans $\mathbb{R}$, il est borné (tout recouvrement par des intervalles ouverts admet un sous-recouvrement fini). Donc $f(X)$ est un fermé borné de $\mathbb{R}$, ce qui implique $\sup f(X) \in f(X)$ et $\inf f(X) \in f(X)$. $\square$

6.4 Compacité séquentielle et compacité par point d'accumulation

Définition 6.4 (Compacité séquentielle). Un espace topologique (X, τ) est dit *séquentiellement compact* si toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X admet une sous-suite convergente.

Définition 6.5 (Compacité par point d'accumulation). Un espace topologique (X, τ) est dit *compact par point d'accumulation* (ou possède la *propriété de Bolzano-Weierstrass*) si tout sous-ensemble infini de X admet un point d'accumulation.

Proposition 6.7 (Relations entre les notions de compacité). *Pour un espace topologique quelconque :*

$$\text{compact} \implies \text{compact par point d'accumulation}.$$

De plus, dans un espace T_1 :

$$\text{séquentiellement compact} \implies \text{compact par point d'accumulation}.$$

En général, aucune de ces implications ne se renverse.

Démonstration. $\text{Compact} \implies \text{compact par point d'accumulation}$. Supposons X compact et soit $A \subseteq X$ infini sans point d'accumulation. Alors A est fermé (car $A' \subseteq A$ est vide, où A' désigne l'ensemble des points d'accumulation). Pour tout $x \in X$, il existe un ouvert U_x contenant x tel que $U_x \cap A$ est fini (au plus $\{x\}$ si $x \in A$, vide sinon). La famille $(U_x)_{x \in X}$ recouvre X ; par compacité, on extrait un sous-recouvrement fini $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$. Alors $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n (U_{x_i} \cap A)$ est une réunion finie d'ensembles finis, donc fini, contradiction.

$\text{Séquentiellement compact} \implies \text{compact par point d'accumulation}$ (dans un T_1). Soit $A \subseteq X$ infini. On peut extraire une suite (x_n) d'éléments deux à deux distincts de A . Par compacité séquentielle, il existe une sous-suite (x_{n_k}) convergeant vers un point $\ell \in X$. Montrons que ℓ est un point d'accumulation de A . Soit U un ouvert contenant ℓ . Il

existe K tel que $x_{n_k} \in U$ pour tout $k \geq K$. Comme les x_{n_k} sont deux à deux distincts, $(U \setminus \{\ell\}) \cap A \neq \emptyset$ (car au plus un des x_{n_k} peut être égal à ℓ , puisque l'espace est T_1 et les x_{n_k} sont distincts). $\square$

Théorème 6.8 (Équivalence dans les espaces métriques). *Pour un espace métrique (X, d) , les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. X est compact.
2. X est séquentiellement compact.
3. X est complet et totalement borné.

Démonstration. $1 \Rightarrow 2$: Soit (x_n) une suite dans X compact. L'ensemble $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ est, s'il est infini, doté d'un point d'accumulation ℓ (par la proposition précédente). On construit alors par récurrence une sous-suite convergeant vers ℓ : ayant choisi $x_{n_k} \in B(\ell, 1/k)$, on choisit $n_{k+1} > n_k$ tel que $x_{n_{k+1}} \in B(\ell, 1/(k+1))$, ce qui est possible car tout voisinage de ℓ contient une infinité de termes de la suite. Si A est fini, une valeur est prise une infinité de fois et fournit une sous-suite constante.

$2 \Rightarrow 3$:

Complétude. Soit (x_n) une suite de Cauchy. Par compacité séquentielle, elle admet une sous-suite (x_{n_k}) convergeant vers $\ell \in X$. Une suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente converge elle-même (vers ℓ).

Totale bornitude. Supposons que X n'est pas totalement borné : il existe $\varepsilon > 0$ tel qu'aucun ensemble fini de boules ouvertes de rayon ε ne recouvre X . On construit par récurrence une suite (x_n) : $x_0 \in X$ arbitraire, et $x_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{i=0}^n B(x_i, \varepsilon)$. Alors $d(x_m, x_n) \geq \varepsilon$ pour $m \neq n$, donc aucune sous-suite n'est de Cauchy, a fortiori aucune n'est convergente, contredisant la compacité séquentielle.

$3 \Rightarrow 1$: Supposons X complet et totalement borné. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert sans sous-recouvrement fini. On construit une suite de Cauchy sans sous-suite convergente, contradiction.

Pour $\varepsilon = 1$, la totale bornitude fournit un recouvrement fini par des boules $B(a_1^{(0)}, 1), \dots, B(a_{k_0}^{(0)}, 1)$. L'une d'elles, disons $B_0 = B(a^{(0)}, 1)$, ne peut être recouverte par un nombre fini des U_i . On itère : $B_0 \cap X$ est totalement borné (car sous-ensemble d'un espace totalement borné), et on le recouvre par des boules de rayon $1/2$. L'une d'elles, B_1 , n'est pas recouvrable par un nombre fini des U_i . Par récurrence, on obtient des boules B_n de rayon $1/2^n$ avec $\overline{B_{n+1}} \subseteq \overline{B_n}$, et les centres forment une suite de Cauchy. Par complétude, cette suite converge vers $\ell \in X$. Alors $\ell \in U_{i_0}$ pour un certain i_0 , et il existe N tel que $B_N \subseteq U_{i_0}$, ce qui contredit le fait que B_N ne peut être recouvert par un nombre fini des U_i . $\square$

6.5 Théorème de la sous-base d'Alexander

Définition 6.6 (Sous-base). Soit (X, τ) un espace topologique. Une famille $\mathcal{S} \subseteq \tau$ est une *sous-base* de τ si les intersections finies d'éléments de $\mathcal{S}$ forment une base de τ .

Théorème 6.9 (Théorème de la sous-base d'Alexander). *Un espace topologique (X, τ) est compact si et seulement si tout recouvrement de X par des éléments d'une sous-base $\mathcal{S}$ de τ admet un sous-recouvrement fini.*

Démonstration. Le sens direct est évident (un recouvrement par des éléments de $\mathcal{S}$ est un cas particulier de recouvrement ouvert).

Pour la réciproque, supposons que X n'est pas compact. Parmi tous les recouvrements ouverts de X sans sous-recouvrement fini, considérons l'ensemble Σ de tels recouvrements, ordonné par inclusion. Nous allons appliquer le lemme de Zorn pour obtenir un recouvrement maximal.

Soit $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$ une chaîne dans Σ . La réunion $\mathcal{U} = \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha$ est un recouvrement ouvert (car chaque $\mathcal{U}_\alpha$ recouvre X) qui n'a pas de sous-recouvrement fini (sinon, par finitude, ce sous-recouvrement serait contenu dans un $\mathcal{U}_\alpha$, contradiction). Donc $\mathcal{U} \in \Sigma$, et par le lemme de Zorn, Σ admet un élément maximal $\mathcal{U}_0$.

Propriétés de $\mathcal{U}_0$:

1. $\mathcal{U}_0$ recouvre X et n'admet pas de sous-recouvrement fini.
2. Par maximalité, pour tout ouvert $W \notin \mathcal{U}_0$, $\mathcal{U}_0 \cup \{W\}$ admet un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire qu'il existe $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}_0$ tels que $X = W \cup U_1 \cup \dots \cup U_n$.

Montrons que $\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{S}$ recouvre X , ce qui fournira la contradiction souhaitée (car $\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{S}$ serait un recouvrement par des éléments de $\mathcal{S}$ sans sous-recouvrement fini).

Soit $x \in X$. Il existe $U \in \mathcal{U}_0$ avec $x \in U$. Comme $\mathcal{S}$ est une sous-base, il existe $S_1, \dots, S_m \in \mathcal{S}$ tels que $x \in S_1 \cap \dots \cap S_m \subseteq U$. Affirmons qu'au moins un S_k appartient à $\mathcal{U}_0$. Sinon, pour chaque k , $S_k \notin \mathcal{U}_0$, et par maximalité, il existe des $U_1^{(k)}, \dots, U_{n_k}^{(k)} \in \mathcal{U}_0$ tels que $X = S_k \cup U_1^{(k)} \cup \dots \cup U_{n_k}^{(k)}$. Alors

$$X \setminus (S_1 \cap \dots \cap S_m) = (X \setminus S_1) \cup \dots \cup (X \setminus S_m) \subseteq \bigcup_{k=1}^m \bigcup_{j=1}^{n_k} U_j^{(k)}.$$

Donc $X \subseteq (S_1 \cap \dots \cap S_m) \cup \bigcup_{k,j} U_j^{(k)} \subseteq U \cup \bigcup_{k,j} U_j^{(k)}$, fournissant un sous-recouvrement fini de $\mathcal{U}_0$ (car $U \in \mathcal{U}_0$ et les $U_j^{(k)} \in \mathcal{U}_0$), contradiction.

Donc il existe $S_k \in \mathcal{U}_0 \cap \mathcal{S}$ avec $x \in S_k$, prouvant que $\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{S}$ recouvre X . $\square$

6.6 Théorème de Tychonoff

Théorème 6.10 (Théorème de Tychonoff). *Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. Le produit $X = \prod_{i \in I} X_i$, muni de la topologie produit, est compact si et seulement si chaque X_i est compact.*

Démonstration. Sens direct ($\Rightarrow$). Si X est compact, alors chaque projection $\pi_i : X \rightarrow X_i$ est continue et surjective (car les X_i sont non vides), donc $X_i = \pi_i(X)$ est compact comme image continue d'un compact (théorème 6.5).

Sens réciproque ($\Leftarrow$). Supposons chaque X_i compact. Rappelons que la topologie produit est engendrée par la sous-base

$$\mathcal{S} = \{\pi_i^{-1}(U_i) : i \in I, U_i \in \tau_i\}.$$

Par le théorème d'Alexander (6.9), il suffit de montrer que tout recouvrement de X par des éléments de $\mathcal{S}$ admet un sous-recouvrement fini.

Soit $(\pi_{i_\alpha}^{-1}(U_{i_\alpha}))_{\alpha \in A}$ un recouvrement de X par des éléments de $\mathcal{S}$. Supposons par l'absurde qu'il n'admet pas de sous-recouvrement fini. Nous allons montrer que le recouvrement n'est pas surjectif, i.e., qu'il ne recouvre pas X .

Pour chaque $i \in I$, considérons l'ensemble

$$A_i = \{\alpha \in A : i_\alpha = i\}.$$

La famille $(U_{i_\alpha})_{\alpha \in A_i}$ est une famille d'ouverts de X_i . Affirmons que pour au moins un indice i , cette famille ne recouvre pas X_i . En effet, si pour tout i , $(U_{i_\alpha})_{\alpha \in A_i}$ recouvrait X_i , alors par compacité de X_i , on pourrait en extraire un sous-recouvrement fini, et la réunion de ces sous-recouvrements finis (portant sur un nombre fini d'indices i effectivement utilisés dans le recouvrement) fournirait un sous-recouvrement fini de X , contradiction.

Plus précisément, notons $I_0 = \{i \in I : \exists \alpha \in A, i_\alpha = i\}$ l'ensemble des indices effectivement utilisés. Si pour tout $i \in I_0$, les $(U_{i_\alpha})_{\alpha \in A_i}$ recouvraient X_i , par compacité on extrairait des sous-recouvrements finis. La réunion de ces sous-recouvrements finis (un pour chaque $i \in I_0$) donnerait un recouvrement fini de X par des éléments de $\mathcal{S}$... mais I_0 pourrait être infini.

Reformulons l'argument. Supposons que pour tout $i \in I$, la famille $(U_{i_\alpha})_{\alpha \in A_i}$ recouvre X_i . Si $A_i = \emptyset$, cela est vacuement vrai (ce cas ne pose pas de problème car $\pi_i^{-1}(X_i) = X$ n'intervient pas). Considérons $i \in I$ fixé. Si $(U_{i_\alpha})_{\alpha \in A_i}$ recouvre X_i et X_i est compact, il existe un sous-ensemble fini $B_i \subseteq A_i$ tel que $X_i = \bigcup_{\alpha \in B_i} U_{i_\alpha}$. Alors $X = \pi_i^{-1}(X_i) = \bigcup_{\alpha \in B_i} \pi_i^{-1}(U_{i_\alpha})$, ce qui est un sous-recouvrement fini, contradiction.

Donc il existe $i_0 \in I$ tel que $(U_{i_\alpha})_{\alpha \in A_{i_0}}$ ne recouvre pas X_{i_0} . Si $A_{i_0} = \emptyset$, c'est immédiat. Sinon, il existe $y_{i_0} \in X_{i_0} \setminus \bigcup_{\alpha \in A_{i_0}} U_{i_\alpha}$. Par l'axiome du choix, pour $i \neq i_0$, choisissons $y_i \in X_i$ quelconque. Le point $y = (y_i)_{i \in I} \in X$ n'appartient à aucun $\pi_{i_\alpha}^{-1}(U_{i_\alpha})$ avec $i_\alpha = i_0$ (car $y_{i_0} \notin U_{i_\alpha}$).

Mais y pourrait appartenir à un $\pi_{i_\alpha}^{-1}(U_{i_\alpha})$ avec $i_\alpha \neq i_0$. Nous devons raffiner : il faut choisir les y_i de manière à éviter *tous* les éléments du recouvrement.

Reprenons. Pour tout $i \in I_0$, si $(U_{i_\alpha})_{\alpha \in A_i}$ recouvre X_i , on obtient un sous-recouvrement fini de X , contradiction. Donc pour tout $i \in I_0$, il existe $y_i \in X_i \setminus \bigcup_{\alpha \in A_i} U_{i_\alpha}$. Pour $i \notin I_0$, choisissons $y_i \in X_i$ arbitraire. Le point $y = (y_i)_{i \in I}$ satisfait : pour tout $\alpha \in A$, on a $i_\alpha \in I_0$ et $y_{i_\alpha} \notin U_{i_\alpha}$, donc $y \notin \pi_{i_\alpha}^{-1}(U_{i_\alpha})$. Ainsi y n'est recouvert par aucun élément, contredisant le fait que la famille est un recouvrement. Cette contradiction achève la preuve. $\square$

Remarque 6.11 (Rôle de l'axiome du choix). La preuve ci-dessus utilise le lemme de Zorn (dans le théorème d'Alexander) et l'axiome du choix (pour construire le point y). En fait, le théorème de Tychonoff est *équivalent* à l'axiome du choix dans la théorie des ensembles ZF.

6.7 Compactification

Définition 6.7 (Compactification). Une *compactification* d'un espace topologique (X, τ) est un couple (Y, φ) où Y est un espace compact et $\varphi: X \rightarrow Y$ est un plongement (homéomorphisme sur son image) tel que $\varphi(X)$ est dense dans Y .

Définition 6.8 (Compactification d’Alexandroff). Soit (X, τ) un espace topologique non compact. La *compactification d’Alexandroff* (ou *compactification par un point*) est l’espace $X^* = X \cup \{\infty\}$, où $\infty \notin X$, muni de la topologie

$$\tau^* = \tau \cup \{(X \setminus K) \cup \{\infty\} : K \subseteq X \text{ compact et fermé}\}.$$

Les ouverts de X^* sont les ouverts de X et les ensembles de la forme $(X \setminus K) \cup \{\infty\}$ où K est un sous-ensemble compact fermé de X .

Théorème 6.12 (Propriétés de la compactification d’Alexandroff). *Soit (X, τ) un espace topologique.*

1. τ^* est bien une topologie sur X^* .
2. X^* est compact.
3. X est un sous-espace ouvert dense de X^* .
4. X^* est de Hausdorff si et seulement si X est localement compact et de Hausdorff.

Démonstration. **1** : Vérifions les axiomes d’une topologie. $\emptyset \in \tau \subseteq \tau^*$ et $X^* = (X \setminus \emptyset) \cup \{\infty\} \in \tau^*$ (car $\emptyset$ est compact et fermé).

Stabilité par intersection finie : L’intersection de deux ouverts de τ est dans τ . L’intersection d’un ouvert $U \in \tau$ et d’un ouvert $(X \setminus K) \cup \{\infty\}$ est $U \cap (X \setminus K) \in \tau$ si $\infty \notin U$ (ce qui est le cas). L’intersection de $(X \setminus K_1) \cup \{\infty\}$ et $(X \setminus K_2) \cup \{\infty\}$ est $(X \setminus (K_1 \cup K_2)) \cup \{\infty\} \in \tau^*$ (car $K_1 \cup K_2$ est compact et fermé).

Stabilité par réunion quelconque : analogue.

2 : Soit $(W_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert de X^* . Il existe α_0 tel que $\infty \in W_{\alpha_0}$, donc $W_{\alpha_0} = (X \setminus K) \cup \{\infty\}$ pour un compact fermé K . La famille $(W_\alpha \cap X)_{\alpha \neq \alpha_0}$ est un recouvrement ouvert de K . Par compacité de K , on en extrait un sous-recouvrement fini $W_{\alpha_1} \cap X, \dots, W_{\alpha_n} \cap X$. Alors $W_{\alpha_0}, W_{\alpha_1}, \dots, W_{\alpha_n}$ recouvrent X^* .

3 : La topologie induite sur X par τ^* coïncide avec τ . De plus, X est dense : tout ouvert non vide de X^* contenant ∞ est de la forme $(X \setminus K) \cup \{\infty\}$ avec K compact fermé et $K \neq X$ (car X n’est pas compact), donc rencontre X .

4 : $(\Rightarrow)$ Si X^* est T_2 , alors X , comme sous-espace d’un Hausdorff, est T_2 . Pour la compacité locale, soit $x \in X$. Comme X^* est T_2 , il existe des ouverts disjoints $U \ni x$ et $V \ni \infty$ dans X^* . On a $V = (X \setminus K) \cup \{\infty\}$ pour un compact fermé K , et $U \cap V = \emptyset$ implique $U \subseteq K$. Comme K est compact et $\overline{U}^X \subseteq K$, le point x admet un voisinage compact $\overline{U}^X$.

$(\Leftarrow)$ Si X est localement compact et T_2 , la séparation de deux points de X est assurée par T_2 . Pour séparer $x \in X$ de ∞ : par compacité locale, il existe un ouvert U et un compact K tels que $x \in U \subseteq K$. Comme X est T_2 , K est fermé. Alors U et $(X \setminus K) \cup \{\infty\}$ sont des ouverts disjoints séparant x et ∞ . $\square$

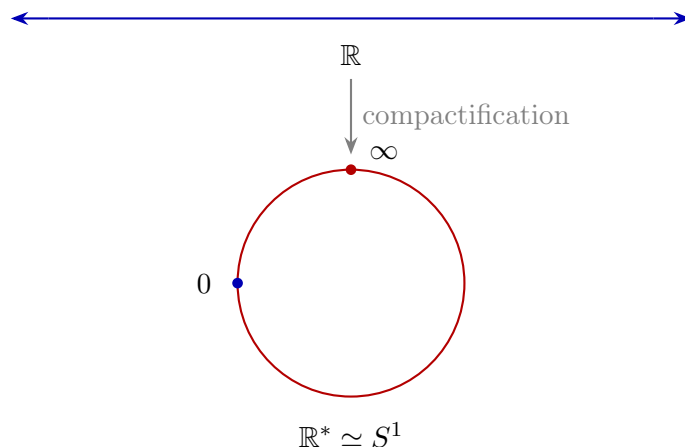


FIGURE 6.1 – La compactification d’Alexandroff de $\mathbb{R}$ est homéomorphe au cercle S^1 .

Exemple 6.13 (Compactification d’Alexandroff de $\mathbb{R}^n$). La compactification d’Alexandroff de $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à la sphère S^n . En particulier, $\mathbb{R}^* \simeq S^1$ et $(\mathbb{R}^2)^* \simeq S^2$.

Exemple 6.14 (Compactification de $\mathbb{N}$). Considérons $\mathbb{N}$ muni de la topologie discrète. Sa compactification d’Alexandroff est $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, où les ouverts contenant ∞ sont les complémentaires d’ensembles finis. Cet espace est homéomorphe au sous-espace $\{0\} \cup \{1/n : n \geq 1\}$ de $\mathbb{R}$ (avec la topologie induite).

6.8 Contre-exemples

Exemple 6.15 ($[0, 1)$ n’est pas compact). L’intervalle $[0, 1)$ n’est pas compact : le recouvrement $([0, 1 - 1/n))_{n \geq 2}$ est un recouvrement ouvert sans sous-recouvrement fini, car toute sous-famille finie a pour réunion $[0, 1 - 1/N)$ pour un certain N , qui ne contient pas les points de $[1 - 1/N, 1)$.

Exemple 6.16 ($\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ n’est pas compact). Le sous-espace $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ de $\mathbb{R}$ n’est pas compact. En effet, choisissons un irrationnel $\alpha \in (0, 1)$ (par exemple $\alpha = 1/\sqrt{2}$) et considérons le recouvrement

$$\{[0, \alpha - 1/n) \cap \mathbb{Q} : n \geq 1\} \cup \{(\alpha + 1/n, 1] \cap \mathbb{Q} : n \geq 1\}.$$

Ce recouvrement ouvert (dans la topologie induite) n’admet pas de sous-recouvrement fini, car toute sous-famille finie laisse non couvert un voisinage rationnel de α .

Exemple 6.17 (Produit $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ est compact). L’espace $\{0, 1\}$ muni de la topologie discrète est compact (il est fini). Par le théorème de Tychonoff, le produit $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ est compact. Cet espace est homéomorphe à l’ensemble de Cantor $C \subseteq [0, 1]$, fournissant un compact métrisable non dénombrable totalement discontinu.

6.9 Exemples résolus

Exemple 6.18 (Compacité de $[0, 1]$). Montrons directement que $[0, 1]$ est compact. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $[0, 1]$. Posons

$$s = \sup\{t \in [0, 1] : [0, t] \text{ est recouvert par un nombre fini des } U_i\}.$$

Comme 0 appartient à un certain U_{i_0} , on a $s > 0$. Montrons que $s = 1$ et que $[0, s]$ est finiment recouvert.

Il existe $j \in I$ tel que $s \in U_j$. Comme U_j est ouvert, il contient un intervalle $(s - \varepsilon, s + \varepsilon) \cap [0, 1]$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure, il existe $t \in (s - \varepsilon, s)$ tel que $[0, t]$ est recouvert par $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$. Alors $[0, \min(s + \varepsilon, 1)]$ est recouvert par $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}, U_j$. Si $s < 1$, cela contredit la définition de s (car $\min(s + \varepsilon, 1) > s$). Donc $s = 1$ et $[0, 1]$ est finiment recouvert.

Exemple 6.19 (Application du théorème de Tychonoff : le cube de Hilbert). Le *cube de Hilbert* est l'espace $[0, 1]^{\mathbb{N}} = \prod_{n=0}^{\infty} [0, 1]$ muni de la topologie produit. Chaque facteur $[0, 1]$ étant compact, le théorème de Tychonoff assure que $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ est compact. Cet espace est métrisable (par la distance $d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n - y_n|/2^n$) et a la propriété remarquable d'être un *espace universel* : tout espace métrique séparable se plonge dans $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.

Exemple 6.20 (Compacité et suites de fonctions). Soit K un espace compact et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions continues $f_n : K \rightarrow \mathbb{R}$ convergeant simplement vers 0. Montrons que la convergence est uniforme (*théorème de Dini*).

Soit $\varepsilon > 0$. Pour chaque n , posons $U_n = \{x \in K : f_n(x) < \varepsilon\}$. Par continuité, U_n est ouvert. Comme (f_n) est décroissante, $U_n \subseteq U_{n+1}$. Comme $f_n \rightarrow 0$ simplement, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = K$. Par compacité de K , il existe N tel que $K = U_N$, c'est-à-dire $f_N(x) < \varepsilon$ pour tout $x \in K$. Comme (f_n) est décroissante et positive, $f_n(x) < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$ et tout $x \in K$.

Exemple 6.21 (Recouvrement ouvert et nombre de Lebesgue). Soit (X, d) un espace métrique compact et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert. Il existe $\delta > 0$ (*nombre de Lebesgue du recouvrement*) tel que tout sous-ensemble de diamètre $< \delta$ est contenu dans un U_i .

Supposons le contraire : pour tout $n \geq 1$, il existe un ensemble A_n de diamètre $< 1/n$ non contenu dans aucun U_i . Choisissons $x_n \in A_n$. Par compacité séquentielle, (x_n) admet une sous-suite (x_{n_k}) convergeant vers $\ell \in X$. Il existe $i_0 \in I$ et $r > 0$ tels que $B(\ell, r) \subseteq U_{i_0}$. Pour k assez grand, $x_{n_k} \in B(\ell, r/2)$ et $\text{diam}(A_{n_k}) < r/2$, donc $A_{n_k} \subseteq B(\ell, r) \subseteq U_{i_0}$, contradiction.

6.10 Exercices

Exercice 6.1 (Ensembles compacts de $\mathbb{R}$). ★ Montrer que les sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}$ (muni de la topologie usuelle) sont exactement les fermés bornés.

Exercice 6.2 (Image réciproque et compacité). ★ Soit $f : X \rightarrow Y$ continue, avec Y compact. L'image réciproque $f^{-1}(K)$ d'un compact $K \subseteq Y$ est-elle nécessairement compacte ? Justifier.

Exercice 6.3 (Union et intersection de compacts). ★ Soit (X, τ) un espace topologique.

1. Montrer que la réunion finie de sous-ensembles compacts est compacte.
2. Si X est de Hausdorff, montrer que l'intersection quelconque de sous-ensembles compacts est compacte.
3. Donner un exemple montrant que l'intersection de compacts n'est pas nécessairement compacte si X n'est pas de Hausdorff.

Exercice 6.4 (Compacité et topologie cofinie). ★ Montrer que tout espace muni de la topologie cofinie est compact.

Exercice 6.5 (Tube lemma). ★★ Soient X, Y des espaces topologiques avec Y compact. Soient $x_0 \in X$ et W un ouvert de $X \times Y$ contenant $\{x_0\} \times Y$. Montrer qu'il existe un ouvert U de X contenant x_0 tel que $U \times Y \subseteq W$.

Exercice 6.6 (Compacité du spectre d'un anneau). ★★ Soit A un anneau commutatif unitaire. Le spectre $\text{Spec}(A)$ est l'ensemble des idéaux premiers de A , muni de la topologie de Zariski. Montrer que $\text{Spec}(A)$ est compact (quasi-compact dans la terminologie de certains auteurs).

Indication : utiliser la caractérisation par la FIP.

Exercice 6.7 (Tychonoff et ultrafiltres). ★★★ Donner une preuve alternative du théorème de Tychonoff en utilisant les ultrafiltres.

Indication : montrer qu'un espace est compact si et seulement si tout ultrafiltre converge. Puis, pour un produit, montrer que l'image d'un ultrafiltre par chaque projection converge.

Exercice 6.8 (Compactification de Čech-Stone (aperçu)). ★★★ Soit X un espace complètement régulier ($T_{3\frac{1}{2}}$). Notons $C_b(X)$ l'ensemble des fonctions continues bornées $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Pour chaque $f \in C_b(X)$, notons $I_f = [\inf f, \sup f]$. Considérons le plongement

$$e: X \rightarrow \prod_{f \in C_b(X)} I_f, \quad e(x) = (f(x))_{f \in C_b(X)}.$$

1. Montrer que e est un plongement (injectif, continu, et ouvert sur son image).
2. Le produit $\prod_f I_f$ est compact par Tychonoff. La compactification de Čech-Stone est $\beta X = \overline{e(X)}$. Montrer que βX est un espace compact de Hausdorff.
3. Montrer que toute fonction continue bornée $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ admet un prolongement continu $\bar{g}: \beta X \rightarrow \mathbb{R}$.

Exercice 6.9 (Compacité locale et prolongement). ★★ Soit X un espace localement compact et de Hausdorff, et soit X^* sa compactification d'Alexandroff. Montrer que toute application continue $f: X \rightarrow Y$, où Y est de Hausdorff, telle que pour tout compact $K \subseteq Y$, $f^{-1}(K)$ est compact, se prolonge en une application continue $f^*: X^* \rightarrow Y^*$ (compactification d'Alexandroff de Y).

Résumé du chapitre

- Un espace est *compact* si tout recouvrement ouvert admet un sous-recouvrement fini, de manière équivalente si toute famille de fermés avec la FIP a une intersection non

vide.

- Tout fermé d'un compact est compact ; tout compact d'un Hausdorff est fermé.
- L'image continue d'un compact est compacte, d'où le théorème des bornes atteintes.
- Dans un espace métrique : compact $\Leftrightarrow$ séquentiellement compact $\Leftrightarrow$ complet et totalement borné.
- Le *théorème d'Alexander* : la compacité se teste sur une sous-base.
- Le *théorème de Tychonoff* : un produit (arbitraire) d'espaces compacts est compact. Ce résultat est équivalent à l'axiome du choix.
- La *compactification d'Alexandroff* ajoute un point à un espace non compact pour le rendre compact. Elle est de Hausdorff si et seulement si l'espace de départ est localement compact et de Hausdorff.
- La compacité est le cadre naturel de nombreux résultats fondamentaux : théorème de Dini, lemme du tube, existence d'un nombre de Lebesgue, etc.

Chapitre 7

Connexité et connexité par arcs

Les sous-ensembles connexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles : c'est un résultat fondamental de l'analyse réelle qui repose sur la propriété de la borne supérieure. Comment étendre cette notion aux espaces topologiques généraux ? La connexité traduit l'idée intuitive qu'un espace est formé « d'un seul morceau » ; la connexité par arcs en donne un renforcement naturel, en exigeant que deux points quelconques puissent être joints par un chemin continu. Ce chapitre développe ces deux notions, établit leurs relations, et fournit les contre-exemples classiques qui en délimitent les frontières.

7.1 Espaces connexes

Définition 7.1 (Espace connexe). Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit *connexe* s'il n'existe pas de partition de X en deux ouverts non vides disjoints, c'est-à-dire s'il n'existe pas $U, V \in \mathcal{T}$ tels que

$$U \neq \emptyset, \quad V \neq \emptyset, \quad U \cap V = \emptyset, \quad U \cup V = X.$$

Une partie $A \subset X$ est *connexe* si le sous-espace $(A, \mathcal{T}_A)$ est connexe.

Proposition 7.1 (Caractérisations équivalentes de la connexité). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) X est connexe.
- (ii) Les seules parties de X qui sont à la fois ouvertes et fermées (dites *ouvertes-fermées* ou *clopen*) sont $\emptyset$ et X .
- (iii) Toute application continue $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ (muni de la topologie discrète) est constante.
- (iv) Pour toute partition $X = A \cup B$ avec $A \cap \overline{B} = \emptyset$ et $\overline{A} \cap B = \emptyset$, on a $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

Démonstration. (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Si $A \subset X$ est ouvert-fermé avec $A \neq \emptyset$ et $A \neq X$, alors $U = A$ et $V = X \setminus A$ forment une partition en deux ouverts non vides, donc X n'est pas connexe. Réciproquement, si $X = U \cup V$ est une partition en ouverts non vides disjoints, alors U est ouvert et fermé (car $U = X \setminus V$), avec $U \neq \emptyset$ et $U \neq X$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Soit $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ continue. Alors $f^{-1}(\{0\})$ est ouvert-fermé dans X . Par (ii), $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ ou $f^{-1}(\{0\}) = X$, donc f est constante. Réciproquement, si A est ouvert-fermé non trivial, la fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ est continue non constante vers $\{0, 1\}$.
 (i) $\Leftrightarrow$ (iv). Si $X = A \cup B$ est une partition avec $A \cap \overline{B} = \emptyset$ et $\overline{A} \cap B = \emptyset$, alors A est ouvert (car $A = X \setminus \overline{B}$ n'est possible que si $\overline{B} \subset B$, d'où B fermé, donc A ouvert) et de même B est ouvert. On se ramène à (i). La réciproque est immédiate puisque des ouverts disjoints vérifient les conditions de séparation. $\square$

Remarque 7.2. Par convention, l'espace vide $\emptyset$ n'est pas connexe dans la tradition de Bourbaki, bien que certains auteurs l'admettent. Nous adoptons ici la convention que les espaces connexes sont non vides.

7.2 Image continue d'un connexe

Théorème 7.3 (Image continue d'un connexe). *Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue entre espaces topologiques. Si X est connexe, alors $f(X)$ est connexe dans Y .*

Démonstration. Supposons par l'absurde que $f(X)$ ne soit pas connexe. Il existe alors U, V ouverts dans $f(X)$ (pour la topologie induite) tels que

$$U \neq \emptyset, \quad V \neq \emptyset, \quad U \cap V = \emptyset, \quad U \cup V = f(X).$$

Par continuité de f , les ensembles $f^{-1}(U)$ et $f^{-1}(V)$ sont ouverts dans X . De plus :

- $f^{-1}(U) \neq \emptyset$ et $f^{-1}(V) \neq \emptyset$ (car $U \cap f(X) \neq \emptyset$ et $V \cap f(X) \neq \emptyset$);
- $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$;
- $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(f(X)) = X$.

On obtient une partition de X en deux ouverts non vides, ce qui contredit la connexité de X . $\square$

Corollaire 7.4 (Théorème des valeurs intermédiaires). *Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Pour tout γ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \gamma$.*

Démonstration. L'intervalle $[a, b]$ est connexe dans $\mathbb{R}$ (car c'est un intervalle). Par le théorème 7.3, $f([a, b])$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$, donc un intervalle (les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles). Comme $f(a)$ et $f(b)$ appartiennent à $f([a, b])$ et que γ est compris entre eux, on a $\gamma \in f([a, b])$. $\square$

Proposition 7.5. *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes d'un espace topologique X telle que $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. Alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe.*

Démonstration. Soit $x_0 \in \bigcap_{i \in I} A_i$ et soit $f: \bigcup_{i \in I} A_i \rightarrow \{0, 1\}$ continue. Pour tout $i \in I$, la restriction $f|_{A_i}$ est continue sur le connexe A_i , donc constante (proposition 7.1). Comme $x_0 \in A_i$, on a $f|_{A_i} \equiv f(x_0)$ pour tout i , d'où f est constante sur $\bigcup_{i \in I} A_i$. $\square$

Proposition 7.6. *Si A est une partie connexe de X , alors $\overline{A}$ est connexe. Plus généralement, si $A \subset B \subset \overline{A}$, alors B est connexe.*

Démonstration. Soit $f: \overline{A} \rightarrow \{0, 1\}$ continue. Alors $f|_A$ est continue sur le connexe A , donc constante égale à une valeur $c \in \{0, 1\}$. Comme A est dense dans $\overline{A}$ et $\{c\}$ est fermé dans $\{0, 1\}$, on a $f^{-1}(\{c\}) \supset \overline{A}$, donc $f \equiv c$ sur $\overline{A}$. Le même raisonnement s'applique à toute partie B avec $A \subset B \subset \overline{A}$. $\square$

7.3 Composantes connexes

Définition 7.2 (Composante connexe). Soit X un espace topologique et $x \in X$. La *composante connexe* de x dans X est la plus grande partie connexe de X contenant x :

$$C(x) = \bigcup \{A \subset X : A \text{ connexe}, x \in A\}.$$

Proposition 7.7. *Les composantes connexes forment une partition de X en fermés connexes.*

Démonstration. Par la proposition 7.5, $C(x)$ est connexe (réunion de connexes ayant le point x en commun). Si $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$, alors $C(x) \cup C(y)$ est connexe, donc $C(x) \cup C(y) \subset C(x)$ par maximalité, d'où $C(x) = C(y)$. Les composantes forment donc une partition. Par la proposition 7.6, $\overline{C(x)}$ est connexe et contient x , donc $\overline{C(x)} \subset C(x)$ par maximalité : chaque composante est fermée. $\square$

Remarque 7.8. Les composantes connexes ne sont pas nécessairement ouvertes. Par exemple, dans $\mathbb{Q}$ muni de la topologie induite par $\mathbb{R}$, chaque composante connexe est un singleton $\{q\}$, qui n'est pas ouvert.

Définition 7.3 (Espace totalement discontinu). Un espace topologique X est dit *totalement discontinu* si ses composantes connexes sont réduites à des singletons, c'est-à-dire si les seules parties connexes de X sont les singletons et l'ensemble vide.

Exemple 7.9. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, muni de la topologie induite par $\mathbb{R}$, est totalement discontinu. En effet, si $A \subset \mathbb{Q}$ contient deux points distincts $p < q$, il existe un irrationnel $\alpha \in]p, q[$, et alors $A = (A \cap]-\infty, \alpha]) \cup (A \cap]\alpha, +\infty[)$ est une partition en deux ouverts non vides de A .

Exemple 7.10 (Ensemble de Cantor). L'ensemble triadique de Cantor $\mathcal{C} \subset [0, 1]$, défini comme l'ensemble des réels de $[0, 1]$ admettant un développement en base 3 sans le chiffre 1, est un compact totalement discontinu sans point isolé. C'est même un espace parfait : fermé et sans point isolé.

7.4 Connexité par arcs

Définition 7.4 (Chemin, espace connexe par arcs). Soit X un espace topologique.

- (i) Un *chemin* dans X d'origine a et d'extrémité b est une application continue $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.
- (ii) L'espace X est dit *connexe par arcs* si, pour tous $a, b \in X$, il existe un chemin de a à b dans X .

Théorème 7.11 (Connexe par arcs implique connexe). *Tout espace connexe par arcs est connexe.*

Démonstration. Soit X connexe par arcs et supposons par l'absurde que $X = U \cup V$ avec U, V ouverts non vides disjoints. Soient $a \in U$ et $b \in V$. Par hypothèse, il existe un chemin $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ avec $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. Alors

$$[0, 1] = \gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V)$$

est une partition de $[0, 1]$ en deux ouverts non vides ($0 \in \gamma^{-1}(U)$ et $1 \in \gamma^{-1}(V)$). Ceci contredit la connexité de $[0, 1]$. $\square$

Remarque 7.12. La réciproque est fausse : il existe des espaces connexes qui ne sont pas connexes par arcs. Le contre-exemple classique est la courbe du topologiste (exemple 7.13).

7.5 Contre-exemple : la courbe du topologiste

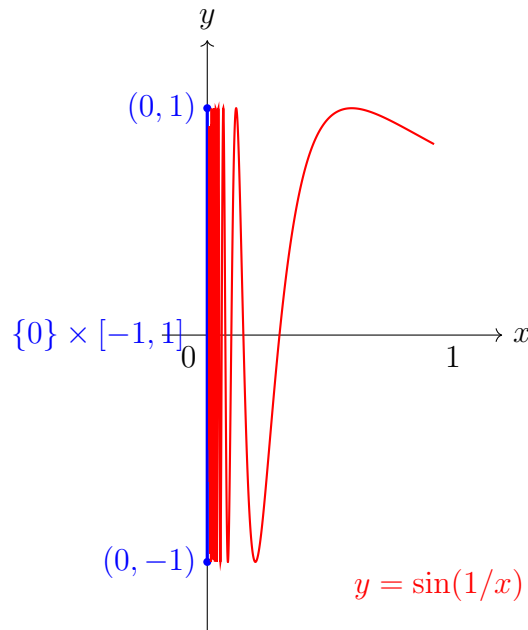
Exemple 7.13 (Courbe du topologiste). Considérons dans $\mathbb{R}^2$ l'ensemble

$$S = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) : x \in]0, 1] \right\}$$

et sa fermeture

$$\overline{S} = S \cup (\{0\} \times [-1, 1]).$$

L'ensemble $\overline{S}$ est la *courbe du topologiste* (ou *sinus du topologiste fermé*).



$\overline{S}$ est connexe. L'ensemble S est l'image de l'intervalle $]0, 1]$ par l'application continue $x \mapsto (x, \sin(1/x))$, donc S est connexe (théorème 7.3). Par la proposition 7.6, $\overline{S}$ est connexe. $\overline{S}$ n'est pas connexe par arcs. Montrons qu'il n'existe pas de chemin de $(0, 0)$ à $(1, \sin 1)$ dans $\overline{S}$. Supposons par l'absurde qu'un tel chemin $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2): [0, 1] \rightarrow \overline{S}$ existe, avec $\gamma(0) = (0, 0)$. Posons $t_0 = \sup\{t \in [0, 1] : \gamma_1(t) = 0\}$. Par continuité, $\gamma_1(t_0) = 0$. Pour $t > t_0$ proche de t_0 , on a $\gamma_1(t) > 0$, donc $\gamma_2(t) = \sin(1/\gamma_1(t))$. Or, lorsque $t \rightarrow t_0^+$, $\gamma_1(t) \rightarrow 0^+$ et $\sin(1/\gamma_1(t))$ oscille entre -1 et 1 sans converger, ce qui contredit la continuité de γ_2 en t_0 .

7.6 Connexité locale

Définition 7.5 (Localement connexe, localement connexe par arcs). Un espace topologique X est :

- (i) *localement connexe* si, pour tout $x \in X$ et tout ouvert U contenant x , il existe un ouvert connexe V tel que $x \in V \subset U$;
- (ii) *localement connexe par arcs* si, pour tout $x \in X$ et tout ouvert U contenant x , il existe un ouvert connexe par arcs V tel que $x \in V \subset U$.

Proposition 7.14. *Un espace X est localement connexe si et seulement si les composantes connexes de tout ouvert de X sont ouvertes.*

Démonstration. Condition suffisante. Soit $x \in X$ et U un ouvert contenant x . La composante connexe de x dans U est un ouvert connexe contenant x et contenu dans U .

Condition nécessaire. Soit U ouvert dans X et C une composante connexe de U . Pour tout $x \in C$, il existe un ouvert connexe V_x avec $x \in V_x \subset U$. Comme V_x est connexe et rencontre C (en x), on a $V_x \subset C$. Donc $C = \bigcup_{x \in C} V_x$ est ouvert. $\square$

Théorème 7.15 (Connexe + localement connexe par arcs $\Rightarrow$ connexe par arcs). *Soit X un espace topologique connexe et localement connexe par arcs. Alors X est connexe par*

arcs.

Démonstration. Fixons $x_0 \in X$ et posons

$$A = \{x \in X : \text{il existe un chemin de } x_0 \text{ à } x \text{ dans } X\}.$$

Montrons que A est ouvert-fermé non vide, ce qui entraînera $A = X$ par connexité.

A est non vide. Le chemin constant $\gamma(t) = x_0$ montre $x_0 \in A$.

A est ouvert. Soit $a \in A$. Comme X est localement connexe par arcs, il existe un ouvert connexe par arcs V contenant a . Pour tout $v \in V$, il existe un chemin de a à v dans V , et un chemin de x_0 à a dans X . En concaténant ces chemins, on obtient un chemin de x_0 à v , donc $v \in A$. Ainsi $V \subset A$.

A est fermé. Soit $b \in X \setminus A$. Il existe un ouvert connexe par arcs V contenant b . Si $V \cap A \neq \emptyset$, soit $a \in V \cap A$. Alors il existe un chemin de x_0 à a et un chemin de a à b dans V , d'où un chemin de x_0 à b : contradiction avec $b \notin A$. Donc $V \subset X \setminus A$, et $X \setminus A$ est ouvert.

Par connexité de X et le fait que A est ouvert-fermé non vide, $A = X$. $\square$

7.7 Produit d'espaces connexes

Théorème 7.16 (Produit fini de connexes). *Soit $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie d'espaces topologiques non vides. Alors $\prod_{i=1}^n X_i$ (muni de la topologie produit) est connexe si et seulement si chaque X_i est connexe.*

Démonstration. Condition nécessaire. Chaque projection $\pi_i : \prod_j X_j \rightarrow X_i$ est continue et surjective. Si le produit est connexe, son image X_i l'est par le théorème 7.3.

Condition suffisante. Il suffit de traiter le cas $n = 2$ et de procéder par récurrence. Soient X et Y connexes. Fixons un point $(a, b) \in X \times Y$. Pour tout $y \in Y$, l'ensemble $X \times \{y\}$ est homéomorphe à X , donc connexe, et passe par (a, y) . L'ensemble $\{a\} \times Y$ est homéomorphe à Y , donc connexe. Alors

$$C_y = (\{a\} \times Y) \cup (X \times \{y\})$$

est connexe (réunion de deux connexes ayant (a, y) en commun). Finalement,

$$X \times Y = \bigcup_{y \in Y} C_y$$

est connexe comme réunion de connexes ayant le point (a, b) en commun (car $(a, b) \in C_y$ pour tout y , puisque $(a, b) \in \{a\} \times Y \subset C_y$). $\square$

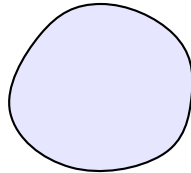
Théorème 7.17 (Produit arbitraire de connexes). *Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'espaces topologiques non vides. Alors $\prod_{i \in I} X_i$ (muni de la topologie produit) est connexe si et seulement si chaque X_i est connexe.*

Démonstration. La condition nécessaire découle des projections comme ci-dessus. Pour la condition suffisante, fixons $a = (a_i)_{i \in I} \in \prod X_i$. Pour toute partie finie $J \subset I$, l'ensemble

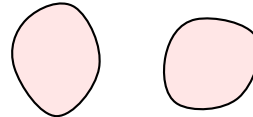
$$E_J = \left\{ x \in \prod_{i \in I} X_i : x_i = a_i \text{ pour } i \notin J \right\}$$

est homéomorphe à $\prod_{j \in J} X_j$, qui est connexe (cas fini). De plus, $a \in E_J$ pour tout J , donc $A = \bigcup_J E_J$ est connexe. Montrons que A est dense dans $\prod X_i$. Un ouvert de base est de la forme $\prod_{i \in I} U_i$ avec $U_i = X_i$ sauf pour un nombre fini d'indices J_0 . On peut choisir $x \in A$ avec $x_j \in U_j$ pour $j \in J_0$ et $x_i = a_i$ sinon, ce qui montre $A \cap \prod U_i \neq \emptyset$. Donc $\overline{A} = \prod X_i$ et le résultat découle de la proposition 7.6. $\square$

7.8 Exemples et illustrations



Connexe



Non connexe

Exemple 7.18. (a) Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles (y compris $\emptyset$, les singletons, et $\mathbb{R}$ entier).

(b) $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs pour tout $n \geq 1$: pour tous $a, b \in \mathbb{R}^n$, le segment $\gamma(t) = (1-t)a + tb$ est un chemin de a à b .

(c) La sphère $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ est connexe par arcs pour $n \geq 1$.

Exemple 7.19. Le groupe $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe pour $n \geq 1$: l'application $\det : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ est continue et surjective, et $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ n'est pas connexe. Les deux composantes connexes sont $GL_n^+(\mathbb{R})$ (matrices de déterminant positif) et $GL_n^-(\mathbb{R})$ (déterminant négatif).

Exemple 7.20. (a) Tout espace muni de la topologie grossière est connexe.

(b) Un espace discret à plus d'un point est totalement discontinu.

(c) L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}$ a quatre composantes connexes, correspondant aux quatre quadrants ouverts.

7.9 Exercices

Exercice 7.1 (*). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que le graphe $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ est connexe par arcs dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7.2 (*). Soit A une partie connexe d'un espace topologique X et B tel que $A \subset B \subset \overline{A}$. Montrer que B est connexe.

Exercice 7.3 (*). Donner un exemple de deux parties connexes A, B de $\mathbb{R}^2$ telles que $A \cap B$ ne soit pas connexe.

Exercice 7.4 (**). Soit X un espace topologique et C une composante connexe de X .

(a) Montrer que C est fermée.

(b) Donner un exemple où C n'est pas ouverte.

(c) Montrer que si X est localement connexe, alors C est ouverte.

Exercice 7.5 (★★). Montrer que $\mathbb{R}$ privé d'un point n'est pas connexe, mais que $\mathbb{R}^n$ privé d'un point est connexe pour $n \geq 2$.

Exercice 7.6 (★★). Soit X un espace connexe et $\sim$ une relation d'équivalence sur X . Montrer que $X/\sim$ est connexe.

Exercice 7.7 (★★). Montrer que l'ensemble de Cantor $\mathcal{C}$ est totalement discontinu. *Indication* : montrer que pour tous $x \neq y$ dans $\mathcal{C}$, il existe un ouvert-fermé de $\mathcal{C}$ contenant x mais pas y .

Exercice 7.8 (★★★). Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$. Montrer que U est connexe par arcs. *Indication* : $\mathbb{R}^n$ est localement connexe par arcs.

Exercice 7.9 (★★★). On considère le *peigne* $P \subset \mathbb{R}^2$ défini par

$$P = ([0, 1] \times \{0\}) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0, 1] \right) \cup (\{0\} \times [0, 1]).$$

(a) Montrer que P est connexe par arcs.

(b) Montrer que P n'est pas localement connexe en $(0, 1)$.

Exercice 7.10 (★★★). Soit $T = \{(x, \sin(1/x)) : x > 0\} \cup \{(0, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$.

(a) Montrer que T est connexe.

(b) Montrer que T n'est pas connexe par arcs.

(c) Comparer avec $\bar{S}$ de l'exemple 7.13.

Résumé du chapitre 7

- Un espace est **connexe** s'il ne peut être partitionné en deux ouverts non vides ; de manière équivalente, ses seuls ouverts-fermés sont $\emptyset$ et X .
- L'**image continue** d'un espace connexe est connexe, d'où le théorème des valeurs intermédiaires.
- Les **composantes connexes** partitionnent X en fermés connexes maximaux.
- Un espace est **connexe par arcs** si deux points quelconques sont reliés par un chemin continu. Connexe par arcs $\Rightarrow$ connexe, mais pas réciproquement (courbe du topologiste).
- **Connexe + localement connexe par arcs** $\Rightarrow$ connexe par arcs.
- Le **produit** (topologie produit) d'espaces connexes est connexe.
- $\mathbb{Q}$ et l'ensemble de Cantor sont **totalement discontinus**.

Chapitre 8

Espaces produits et topologie quotient

La construction de nouveaux espaces topologiques à partir d'espaces donnés est l'une des opérations fondamentales de la topologie. Ce chapitre présente deux constructions essentielles : la *topologie produit*, qui permet de munir un produit cartésien d'une topologie naturelle, et la *topologie quotient*, qui permet d'identifier des points pour obtenir de nouveaux espaces. Ces outils sont indispensables : le tore, la bouteille de Klein, l'espace projectif et bien d'autres surfaces classiques sont définis comme des espaces quotients.

8.1 Topologie produit : produits finis

Définition 8.1 (Topologie produit, cas fini). Soient $(X_1, \mathcal{T}_1), \dots, (X_n, \mathcal{T}_n)$ des espaces topologiques. La *topologie produit* sur $X = \prod_{i=1}^n X_i$ est la topologie engendrée par la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i=1}^n U_i : U_i \in \mathcal{T}_i \text{ pour tout } i \right\}.$$

On note $\pi_i : X \rightarrow X_i$ la *projection canonique* sur le i -ème facteur, définie par $\pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$.

Remarque 8.1. Pour un produit fini, la famille ci-dessus est bien une base de topologie (elle est stable par intersections finies). La topologie produit coïncide avec la topologie engendrée par les ensembles $\pi_i^{-1}(U_i)$ pour $U_i \in \mathcal{T}_i$: c'est la topologie initiale pour la famille $(\pi_i)_{1 \leq i \leq n}$.

8.2 Topologie produit : cas général

Définition 8.2 (Topologie produit, cas général). Soit $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. La *topologie produit* (ou *topologie de Tychonoff*) sur $X = \prod_{i \in I} X_i$ est la topologie engendrée par la sous-base

$$\mathcal{S} = \{ \pi_i^{-1}(U_i) : i \in I, U_i \in \mathcal{T}_i \}.$$

Les ouverts de base sont les ensembles de la forme $\prod_{i \in I} U_i$ où $U_i \in \mathcal{T}_i$ pour tout i et $U_i = X_i$ sauf pour un *nombre fini* d'indices.

Définition 8.3 (Topologie boîte). La *topologie boîte* sur $\prod_{i \in I} X_i$ est la topologie engendrée par la base

$$\mathcal{B}_{\text{box}} = \left\{ \prod_{i \in I} U_i : U_i \in \mathcal{T}_i \text{ pour tout } i \right\}$$

où *tous* les U_i sont des ouverts quelconques (sans restriction de finitude).

Remarque 8.2. Pour un produit fini, les topologies boîte et produit coïncident. Pour un produit infini, la topologie boîte est strictement plus fine que la topologie produit. Comme nous le verrons (section 8.9), la topologie boîte possède de mauvaises propriétés : c'est la topologie produit qui est la « bonne » topologie sur un produit infini.

8.3 Propriété universelle de la topologie produit

Théorème 8.3 (La topologie produit est la plus grossière rendant les projections continues). La topologie produit sur $\prod_{i \in I} X_i$ est la topologie la plus grossière sur $\prod_{i \in I} X_i$ rendant toutes les projections π_i continues.

Démonstration. Soit $\mathcal{T}$ une topologie sur $X = \prod_{i \in I} X_i$ rendant toutes les π_i continues. Alors pour tout $i \in I$ et tout $U_i \in \mathcal{T}_i$, on a $\pi_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}$. Comme la topologie produit $\mathcal{T}_{\text{prod}}$ est engendrée par ces ensembles, on a $\mathcal{T}_{\text{prod}} \subset \mathcal{T}$. Réciproquement, les projections sont continues pour $\mathcal{T}_{\text{prod}}$ par construction. $\square$

Théorème 8.4 (Propriété universelle du produit). Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques et $X = \prod_{i \in I} X_i$ muni de la topologie produit. Pour tout espace topologique Y et toute famille d'applications continues $(f_i : Y \rightarrow X_i)_{i \in I}$, il existe une unique application continue $f : Y \rightarrow X$ telle que $\pi_i \circ f = f_i$ pour tout $i \in I$.

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ f_i \swarrow & \downarrow \exists! f & \\ X_i & \xleftarrow{\pi_i} & X \end{array}$$

Démonstration. L'application f est nécessairement définie par $f(y) = (f_i(y))_{i \in I}$. Vérifions sa continuité. Il suffit de vérifier que $f^{-1}(\pi_i^{-1}(U_i))$ est ouvert dans Y pour tout $i \in I$ et tout U_i ouvert dans X_i . Or $f^{-1}(\pi_i^{-1}(U_i)) = (\pi_i \circ f)^{-1}(U_i) = f_i^{-1}(U_i)$, qui est ouvert car f_i est continue. $\square$

Corollaire 8.5. Une application $f : Y \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ est continue si et seulement si chaque composante $\pi_i \circ f : Y \rightarrow X_i$ est continue.

8.4 Projections et lemme du tube

Proposition 8.6 (Les projections sont ouvertes). *Les projections $\pi_i: \prod_{j \in I} X_j \rightarrow X_i$ sont des applications ouvertes.*

Démonstration. Il suffit de vérifier sur les ouverts de base. Si $U = \prod_{j \in I} U_j$ est un ouvert de base (avec $U_j = X_j$ sauf pour un nombre fini d'indices), alors $\pi_i(U) = U_i$ qui est ouvert dans X_i . $\square$

Remarque 8.7. Les projections ne sont pas nécessairement fermées. Par exemple, la projection $\pi_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ envoie l'hyperbole fermée $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, qui n'est pas fermé.

Lemme 8.8 (Lemme du tube). *Soient X et Y des espaces topologiques avec Y compact. Soit $x_0 \in X$ et N un ouvert de $X \times Y$ contenant la « tranche » $\{x_0\} \times Y$. Alors il existe un ouvert W de X contenant x_0 tel que $\{x_0\} \times Y \subset W \times Y \subset N$. (L'ouvert $W \times Y$ est appelé un tube autour de $\{x_0\} \times Y$.)*

Démonstration. Pour chaque $y \in Y$, le point $(x_0, y) \in N$. Comme N est ouvert, il existe des ouverts $U_y \subset X$ et $V_y \subset Y$ tels que $(x_0, y) \in U_y \times V_y \subset N$.

La famille $(V_y)_{y \in Y}$ est un recouvrement ouvert de Y . Comme Y est compact, il existe $y_1, \dots, y_m \in Y$ tels que $Y = V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_m}$.

Posons $W = U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_m}$, qui est un ouvert de X contenant x_0 . Montrons que $W \times Y \subset N$. Soit $(x, y) \in W \times Y$. Il existe $k \in \{1, \dots, m\}$ tel que $y \in V_{y_k}$. Comme $x \in W \subset U_{y_k}$, on a $(x, y) \in U_{y_k} \times V_{y_k} \subset N$. $\square$

8.5 Topologie quotient

Définition 8.4 (Topologie quotient). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, $\sim$ une relation d'équivalence sur X , et $p: X \rightarrow X/\sim$ la surjection canonique. La *topologie quotient* sur $X/\sim$ est

$$\mathcal{T}_{X/\sim} = \{U \subset X/\sim : p^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}.$$

L'application p est alors continue et surjective; elle est appelée *application quotient*.

Remarque 8.9. La topologie quotient est la topologie la plus fine sur $X/\sim$ rendant p continue.

Définition 8.5 (Application quotient). Plus généralement, une surjection continue $q: X \rightarrow Y$ est une *application quotient* si la topologie de Y est la topologie quotient induite par q , c'est-à-dire si

$$V \text{ ouvert dans } Y \iff q^{-1}(V) \text{ ouvert dans } X.$$

Définition 8.6 (Ensemble saturé). Soit $q: X \rightarrow Y$ une surjection. Une partie $A \subset X$ est dite *saturée* (par rapport à q) si $A = q^{-1}(q(A))$, c'est-à-dire si A est une réunion de fibres de q .

Proposition 8.10 (Conditions suffisantes pour être une application quotient). Soit $q: X \rightarrow Y$ une surjection continue. Chacune des conditions suivantes entraîne que q est une application quotient :

- (i) q est ouverte ;
- (ii) q est fermée ;
- (iii) X est compact et Y est séparé (Hausdorff).

Démonstration. (i). Soit $V \subset Y$ tel que $q^{-1}(V)$ est ouvert. Comme q est ouverte et surjective, $V = q(q^{-1}(V))$ est ouvert.

(ii). Soit $V \subset Y$ tel que $q^{-1}(V)$ est ouvert. Alors $q^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus q^{-1}(V)$ est fermé. Comme q est fermée, $q(q^{-1}(Y \setminus V)) = Y \setminus V$ est fermé, donc V est ouvert.

(iii). Découle de (ii), car une application continue d'un compact dans un séparé est fermée. $\square$

8.6 Propriété universelle de la topologie quotient

Théorème 8.11 (Propriété universelle du quotient). Soit $q: X \rightarrow Y$ une application quotient. Soit Z un espace topologique et $f: X \rightarrow Z$ une application continue constante sur les fibres de q (c'est-à-dire : $q(x) = q(x') \Rightarrow f(x) = f(x')$). Alors il existe une unique application continue $\bar{f}: Y \rightarrow Z$ telle que $f = \bar{f} \circ q$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{q} & Y \\ & \searrow f & \downarrow \exists! \bar{f} \\ & & Z \end{array}$$

Démonstration. L'application $\bar{f}$ est définie par $\bar{f}(q(x)) = f(x)$, ce qui est licite car f est constante sur les fibres. L'unicité est immédiate par surjectivité de q . Pour la continuité : si W est ouvert dans Z , alors $q^{-1}(\bar{f}^{-1}(W)) = f^{-1}(W)$ est ouvert dans X (par continuité de f). Par définition de la topologie quotient, $\bar{f}^{-1}(W)$ est ouvert dans Y . $\square$

8.7 Composition d'applications quotient

Théorème 8.12 (Composition d'applications quotient). Soient $q_1: X \rightarrow Y$ et $q_2: Y \rightarrow Z$ des applications quotient. Alors $q_2 \circ q_1: X \rightarrow Z$ est une application quotient.

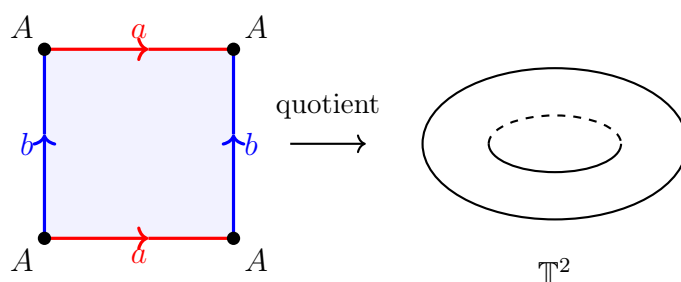
Démonstration. L'application $q_2 \circ q_1$ est continue et surjective. Soit $W \subset Z$ tel que $(q_2 \circ q_1)^{-1}(W) = q_1^{-1}(q_2^{-1}(W))$ est ouvert dans X . Comme q_1 est quotient, $q_2^{-1}(W)$ est ouvert dans Y . Comme q_2 est quotient, W est ouvert dans Z . $\square$

8.8 Exemples classiques de quotients

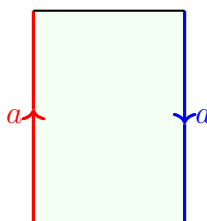
Exemple 8.13 (Le cercle S^1). Définissons sur $[0, 1]$ la relation $\sim$ par : $x \sim y$ si et seulement si $x = y$ ou $\{x, y\} = \{0, 1\}$. L'espace quotient $[0, 1]/\sim$ est homéomorphe au cercle $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

En effet, l'application $f: [0, 1] \rightarrow S^1$ définie par $f(t) = e^{2\pi it}$ est continue, surjective, constante sur les classes de $\sim$ ($f(0) = f(1) = 1$), et induit un homéomorphisme $\bar{f}: [0, 1]/\sim \rightarrow S^1$ (bijectif continu d'un compact vers un séparé, donc homéomorphisme).

Exemple 8.14 (Le tore $\mathbb{T}^2$). Sur le carré $[0, 1]^2$, on définit la relation d'équivalence engendrée par $(x, 0) \sim (x, 1)$ pour tout $x \in [0, 1]$ et $(0, y) \sim (1, y)$ pour tout $y \in [0, 1]$. L'espace quotient est le *tore* $\mathbb{T}^2$, homéomorphe à $S^1 \times S^1$.

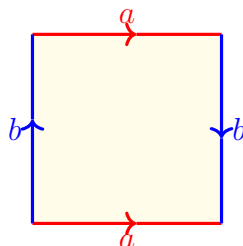


Exemple 8.15 (Le ruban de Möbius). Sur le rectangle $[0, 1] \times [-1, 1]$, on identifie $(0, y) \sim (1, -y)$ pour tout $y \in [-1, 1]$. Le quotient est le *ruban de Möbius*.



Ruban de Möbius

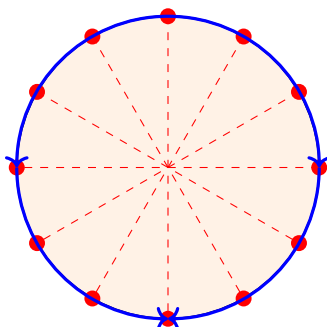
Exemple 8.16 (La bouteille de Klein). Sur $[0, 1]^2$, on identifie $(x, 0) \sim (x, 1)$ et $(0, y) \sim (1, 1 - y)$. Le quotient est la *bouteille de Klein*, surface non orientable qui ne peut se plonger dans $\mathbb{R}^3$.



Bouteille de Klein

Exemple 8.17 (L'espace projectif réel $\mathbb{R}P^2$). L'espace projectif réel $\mathbb{R}P^2$ peut être défini de plusieurs manières équivalentes :

- (a) Comme quotient de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ par la relation $x \sim \lambda x$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$: les points de $\mathbb{R}P^2$ sont les droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$.
- (b) Comme quotient de S^2 par la relation antipodale $x \sim -x$.
- (c) Comme quotient du disque D^2 en identifiant les points antipodaux du bord : $(x, y) \sim (-x, -y)$ pour $(x, y) \in S^1 = \partial D^2$.



$\mathbb{R}P^2$: points antipodaux identifiés

8.9 La topologie boîte et ses défauts

Nous justifions ici pourquoi la topologie produit, et non la topologie boîte, est la construction appropriée pour les produits infinis.

Exemple 8.18 (La topologie boîte n'est pas compacte). Considérons $X = \prod_{n=1}^{\infty} \{0, 1\}$ où chaque facteur $\{0, 1\}$ porte la topologie discrète. Pour la topologie produit, X est compact par le théorème de Tychonoff (produit de compacts). Pour la topologie boîte, X est discret (tout singleton $\{x\}$ est ouvert comme $\prod_n \{x_n\}$), donc non compact (puisque X est infini non dénombrable).

Exemple 8.19 (La topologie boîte n'est pas connexe). Posons $X = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}$ avec la topologie boîte. L'ensemble

$$U = \prod_{n=1}^{\infty}]-1/n, 1/n[$$

est ouvert dans la topologie boîte mais n'est pas ouvert dans la topologie produit. On peut montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie boîte n'est pas connexe, alors qu'il l'est pour la topologie produit (théorème 7.17).

Plus précisément, soit B l'ensemble des suites bornées et U l'ensemble des suites non bornées dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On peut vérifier que B et U sont tous deux ouverts pour la topologie boîte, donnant une déconnexion de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Remarque 8.20. La propriété universelle (théorème 8.4) échoue pour la topologie boîte : une application $f: Y \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ peut avoir toutes ses composantes $\pi_i \circ f$ continues sans être elle-même continue pour la topologie boîte. Par exemple, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $f(t) = (t, t, t, \dots)$ a des composantes continues (l'identité), mais f n'est pas continue pour la topologie boîte : l'image réciproque de $\prod_n]-1/n, 1/n[$ est $\{0\}$, qui n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$.

8.10 Topologie somme (coproduit)

Définition 8.7 (Somme topologique). Soit $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. La *somme topologique* (ou *réunion disjointe topologique*) est l'ensemble $\bigsqcup_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} X_i \times \{i\}$ muni de la topologie

$$\mathcal{T} = \left\{ U \subset \bigsqcup_{i \in I} X_i : U \cap (X_i \times \{i\}) \text{ est ouvert dans } X_i \times \{i\} \text{ pour tout } i \in I \right\}.$$

Les injections canoniques $\iota_i : X_i \rightarrow \bigsqcup X_i$, $x \mapsto (x, i)$, sont des homéomorphismes sur leur image, et chaque $\iota_i(X_i)$ est ouvert-fermé dans $\bigsqcup X_i$.

Théorème 8.21 (Propriété universelle du coproduit). Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques et $\bigsqcup_{i \in I} X_i$ leur somme topologique. Pour tout espace Y et toute famille d'applications continues $(f_i : X_i \rightarrow Y)_{i \in I}$, il existe une unique application continue $f : \bigsqcup X_i \rightarrow Y$ telle que $f \circ \iota_i = f_i$ pour tout i .

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{\iota_i} & \bigsqcup X_i \\ & \searrow f_i & \downarrow \exists! f \\ & & Y \end{array}$$

Démonstration. On définit $f(x, i) = f_i(x)$. Pour tout ouvert $V \subset Y$,

$$f^{-1}(V) \cap (X_i \times \{i\}) = \iota_i(f_i^{-1}(V))$$

est ouvert dans $X_i \times \{i\}$ car f_i est continue et ι_i est un homéomorphisme. Par définition de la topologie somme, $f^{-1}(V)$ est ouvert. $\square$

8.11 Exemples résolus

Exemple 8.22 (Convergence dans un produit). Soit $(x^{(n)})_{n \geq 1}$ une suite dans $\prod_{i \in I} X_i$ muni de la topologie produit, et $x \in \prod_{i \in I} X_i$. Montrons que $x^{(n)} \rightarrow x$ si et seulement si $\pi_i(x^{(n)}) \rightarrow \pi_i(x)$ pour tout $i \in I$.

Condition nécessaire. Chaque π_i est continue, donc $\pi_i(x^{(n)}) \rightarrow \pi_i(x)$.

Condition suffisante. Soit U un ouvert de base du produit contenant x . Alors $U = \bigcap_{k=1}^m \pi_{i_k}^{-1}(U_{i_k})$ pour des ouverts U_{i_k} avec $\pi_{i_k}(x) \in U_{i_k}$. Pour chaque k , il existe N_k tel que $\pi_{i_k}(x^{(n)}) \in U_{i_k}$ pour $n \geq N_k$. Pour $n \geq \max(N_1, \dots, N_m)$, on a $x^{(n)} \in U$.

Exemple 8.23 (Le cylindre comme quotient). Le cylindre $S^1 \times [0, 1]$ peut être obtenu comme quotient de $[0, 1]^2$ en identifiant seulement $(0, y) \sim (1, y)$ pour tout $y \in [0, 1]$ (sans identifier les bords horizontaux). C'est un cas intermédiaire entre le rectangle (pas d'identification) et le tore (identification des deux paires de côtés opposés).

Exemple 8.24 (Quotient par un sous-espace). Soit X un espace topologique et $A \subset X$ un sous-espace non vide. L'espace quotient X/A est obtenu en identifiant tous les points de A à un seul point, noté $[A]$. La relation est : $x \sim y$ si et seulement si $x = y$ ou $\{x, y\} \subset A$.

Par exemple :

- (a) $[0, 1]/\{0, 1\} \cong S^1$ (on identifie les extrémités).
- (b) $D^2/S^1 \cong S^2$ (on contracte le bord du disque en un point).
- (c) $S^n/S^{n-1} \cong S^n$ (en identifiant l'équateur, on obtient un bouquet de deux sphères, non S^n ; attention à la formulation exacte de l'identification).

8.12 Exercices

Exercice 8.1 (*). Montrer que $\prod_{i \in I} X_i$ est séparé (Hausdorff) si et seulement si chaque X_i est séparé.

Exercice 8.2 (*). Montrer que si $(X_n, d_n)_{n \geq 1}$ est une famille dénombrable d'espaces métriques, alors $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ muni de la topologie produit est métrisable. *Indication* : considérer la distance $d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(d_n(x_n, y_n), 1)$.

Exercice 8.3 (*). Trouver un fermé $F \subset \mathbb{R}^2$ dont la projection sur le premier axe n'est pas fermée.

Exercice 8.4 (**). Soient X un espace topologique et Y un espace compact. Montrer que la projection $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$ est une application fermée. *Indication* : utiliser le lemme du tube 8.8.

Exercice 8.5 (**). Soit $X = \mathbb{R}$ et la relation d'équivalence $x \sim y$ si et seulement si $x - y \in \mathbb{Q}$. Montrer que $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ n'est pas séparé. En fait, montrer que la seule topologie sur cet espace est la topologie grossière.

Exercice 8.6 (**). Montrer en détail que le tore $\mathbb{T}^2$ (exemple 8.14) est homéomorphe à $S^1 \times S^1$.

Exercice 8.7 (**). Soit G un groupe topologique et H un sous-groupe de G . On munit G/H (ensemble des classes à gauche gH) de la topologie quotient.

- (a) Montrer que la projection $\pi : G \rightarrow G/H$ est une application ouverte.
- (b) En déduire que G/H est séparé si et seulement si H est fermé dans G .

Exercice 8.8 (***). Montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie boîte ne satisfait pas le premier axiome de dénombrabilité. *Indication* : montrer que le point $0 = (0, 0, \dots)$ n'admet pas de base dénombrable de voisinages.

Exercice 8.9 (***). Le cône sur un espace topologique X est $CX = (X \times [0, 1])/(X \times \{1\})$.

- (a) Montrer que CX est contractile (c'est-à-dire a le type d'homotopie d'un point).
- (b) Montrer que $CS^{n-1} \cong D^n$ (le cône sur la sphère est homéomorphe au disque).

Exercice 8.10 (***). La *suspension* d'un espace X est $SX = (X \times [-1, 1])/\sim$, où $(x, -1) \sim (x', -1)$ et $(x, 1) \sim (x', 1)$ pour tous $x, x' \in X$.

- (a) Montrer que $SS^n \cong S^{n+1}$.
- (b) Montrer que si X est compact et connexe par arcs, alors SX est connexe par arcs.

Résumé du chapitre 8

- La **topologie produit** est la topologie la plus grossière rendant les projections continues. Les ouverts de base sont les produits d'ouverts, avec la contrainte que seul un nombre fini de facteurs diffèrent de l'espace total.
- La **propriété universelle** du produit : $f: Y \rightarrow \prod X_i$ est continue si et seulement si chaque $\pi_i \circ f$ est continue.
- La **topologie boîte** coïncide avec la topologie produit pour les produits finis, mais donne un espace aux propriétés indésirables pour les produits infinis (non compact, non connexe, perte de la propriété universelle).
- Le **lemme du tube** : si Y est compact et N est un ouvert contenant $\{x_0\} \times Y$, alors N contient un « tube » $W \times Y$.
- Les **projections** sont ouvertes mais pas nécessairement fermées ; elles deviennent fermées lorsque le facteur est compact.
- La **topologie quotient** sur $X/\sim$ est la topologie la plus fine rendant la surjection canonique continue. Sa propriété universelle caractérise les applications continues depuis le quotient.
- Les **espaces quotients classiques** : $S^1 = [0, 1]/\sim$, $\mathbb{T}^2 = [0, 1]^2/\sim$, ruban de Möbius, bouteille de Klein, $\mathbb{R}P^2$.
- La **somme topologique** (coproduit) est la réunion disjointe munie de la topologie la plus fine rendant les injections continues.

Chapitre 9

Lemme d'Urysohn et théorème d'extension de Tietze

Comment séparer deux fermés disjoints non seulement par des ouverts, mais par une fonction continue à valeurs réelles ? Le lemme d'Urysohn répond à cette question fondamentale pour les espaces normaux et ouvre la voie au théorème d'extension de Tietze, pierre angulaire de l'analyse sur les espaces topologiques. Ces résultats fournissent en outre le théorème de métrisation d'Urysohn, qui caractérise une large classe d'espaces métrisables.

9.1 Espaces complètement réguliers

Définition 9.1 (Espace complètement régulier). Un espace topologique X est dit *complètement régulier* (ou $T_{3\frac{1}{2}}$, ou *espace de Tychonoff*) s'il est T_1 et si, pour tout fermé $F \subset X$ et tout point $x \in X \setminus F$, il existe une application continue $f: X \rightarrow [0, 1]$ telle que $f(x) = 0$ et $f|_F \equiv 1$.

Remarque 9.1. On a les implications strictes :

$$T_4 \implies T_{3\frac{1}{2}} \implies T_3 \implies T_2 \implies T_1 \implies T_0.$$

La complète régularité est exactement la condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace T_1 admette un plongement dans un cube $[0, 1]^I$ (théorème de plongement de Tychonoff).

Proposition 9.2. *Tout sous-espace d'un espace complètement régulier est complètement régulier. Tout produit d'espaces complètement réguliers est complètement régulier.*

Démonstration. Soit $A \subset X$ un sous-espace d'un espace complètement régulier X . Soient F un fermé de A et $a \in A \setminus F$. Il existe un fermé G de X tel que $F = G \cap A$. Comme $a \notin G$, il existe $f: X \rightarrow [0, 1]$ continue avec $f(a) = 0$ et $f|_G \equiv 1$. La restriction $f|_A$ convient.

Pour le produit $X = \prod_{i \in I} X_i$, soient F fermé de X et $x \notin F$. Il existe un ouvert élémentaire $U = \bigcap_{k=1}^n \pi_{i_k}^{-1}(U_{i_k})$ contenant x et disjoint de F . Pour chaque k , le fermé $X_{i_k} \setminus U_{i_k}$ est séparé de $\pi_{i_k}(x)$ par une fonction continue $f_k: X_{i_k} \rightarrow [0, 1]$. La fonction $f = \max_k (f_k \circ \pi_{i_k})$ sépare x de F . $\square$

Exemple 9.3. Tout espace métrique (X, d) est complètement régulier. En effet, si F est fermé et $x \notin F$, la fonction $f(y) = \min(1, d(y, F)^{-1} d(y, x))$... plus simplement, $f(y) = \frac{d(y, F)}{d(y, F) + d(y, x)}$ est continue, vaut 0 sur F et 1 en x . En inversant les rôles : $g(y) = \min(1, d(y, F)/\delta)$ où $\delta = d(x, F) > 0$ donne $g(x) \geq 1$ et $g|_F \equiv 0$, que l'on renverse en $1 - g$ pour satisfaire la convention.

9.2 Lemme d'Urysohn

Théorème 9.4 (Lemme d'Urysohn, 1925). *Soit X un espace topologique normal (T_4) . Pour tous fermés disjoints $A, B \subset X$, il existe une application continue $f : X \rightarrow [0, 1]$ telle que $f|_A \equiv 0$ et $f|_B \equiv 1$.*

Démonstration. La démonstration procède en trois étapes.

Étape 1 : construction d'une famille d'ouverts indexée par les rationnels dyadiques.

Notons $D = \{k/2^n : k, n \in \mathbf{N}, 0 \leq k \leq 2^n\} \cap [0, 1]$ l'ensemble des rationnels dyadiques de $[0, 1]$. Nous allons construire, pour chaque $r \in D$, un ouvert U_r de X vérifiant :

- (i) $A \subset U_r$ pour tout $r \in D$;
- (ii) $U_0 \supset A$ et $X \setminus B \supset U_1$;
- (iii) si $r < s$ dans D , alors $\overline{U_r} \subset U_s$.

Initialisation. Puisque X est normal et $A \cap B = \emptyset$, A et B sont fermés, l'ouvert $V = X \setminus B$ contient A . Par normalité, il existe un ouvert U_1 tel que $A \subset U_1 \subset \overline{U_1} \subset V = X \setminus B$. Appliquons de nouveau la normalité au couple $(A, X \setminus U_1)$: il existe un ouvert U_0 tel que $A \subset U_0 \subset \overline{U_0} \subset U_1$.

Récurrence. Supposons les ouverts U_r construits pour tous les rationnels dyadiques de dénominateur $\leq 2^n$ et vérifiant la condition d'emboîtement. Pour chaque nouveau rationnel de la forme $r = \frac{2m+1}{2^{n+1}}$ avec $0 \leq m < 2^n$, posons $r^- = \frac{m}{2^n}$ et $r^+ = \frac{m+1}{2^n}$; on a $r^- < r < r^+$ et, par hypothèse de récurrence, $\overline{U_{r^-}} \subset U_{r^+}$. Comme $\overline{U_{r^-}}$ est fermé et U_{r^+} ouvert, la normalité fournit un ouvert U_r tel que

$$\overline{U_{r^-}} \subset U_r \subset \overline{U_r} \subset U_{r^+}.$$

Par récurrence, la famille $(U_r)_{r \in D}$ est construite et satisfait $r < s \Rightarrow \overline{U_r} \subset U_s$.

Étape 2 : définition de la fonction f .

Pour $x \in X$, posons

$$f(x) = \begin{cases} \inf \{r \in D : x \in U_r\} & \text{si } x \in U_1, \\ 1 & \text{si } x \notin U_1. \end{cases}$$

On a immédiatement $0 \leq f(x) \leq 1$ pour tout x .

- Si $x \in A$, alors $x \in U_r$ pour tout $r \in D$ (par (i)), donc $f(x) = \inf D \cap [0, 1] = 0$.
- Si $x \in B$, alors $x \notin U_1$ (car $\overline{U_1} \cap B = \emptyset$), donc $f(x) = 1$.

Ainsi $f|_A \equiv 0$ et $f|_B \equiv 1$.

Étape 3 : continuité de f .

Il suffit de montrer que $f^{-1}((-\infty, a))$ et $f^{-1}((a, +\infty))$ sont ouverts pour tout $a \in \mathbf{R}$, car les intervalles de cette forme engendrent la topologie de $\mathbf{R}$.

Cas 1 : $f^{-1}((-\infty, a)) = \{x \in X : f(x) < a\}$. Si $f(x) < a$, il existe $r \in D$ tel que $f(x) \leq r < a$ et $x \in U_r$. Donc

$$f^{-1}((-\infty, a)) = \bigcup_{\substack{r \in D \\ r < a}} U_r,$$

qui est ouvert comme réunion d'ouverts.

Cas 2 : $f^{-1}((a, +\infty)) = \{x \in X : f(x) > a\}$. Si $f(x) > a$, il existe $s \in D$ tel que $a < s \leq f(x)$ et $x \notin \overline{U_s}$ (car si $x \in \overline{U_s}$ pour tout $s > a$ dans D , alors $x \in U_t$ pour tout $t > s$ par l'emboîtement, ce qui donnerait $f(x) \leq s$). Ainsi $x \in X \setminus \overline{U_s}$ qui est ouvert. Plus précisément :

$$f^{-1}((a, +\infty)) = \bigcup_{\substack{s \in D \\ s > a}} (X \setminus \overline{U_s}),$$

qui est ouvert. En effet, si $f(x) > a$, choisissons $r, s \in D$ avec $a < r < s < f(x)$. Alors $x \notin U_r$ (sinon $f(x) \leq r$), donc $x \notin \overline{U_r}$ est impossible directement ; procédons autrement. Si $x \notin U_s$, alors en particulier $x \notin \overline{U_r}$ (car $\overline{U_r} \subset U_s$), d'où $x \in X \setminus \overline{U_r}$, ouvert contenu dans $\{f > a\}$ puisque pour tout $y \notin \overline{U_r}$, $y \notin U_r$, donc $f(y) \geq r > a$.

Ainsi f est continue, ce qui achève la démonstration. $\square$

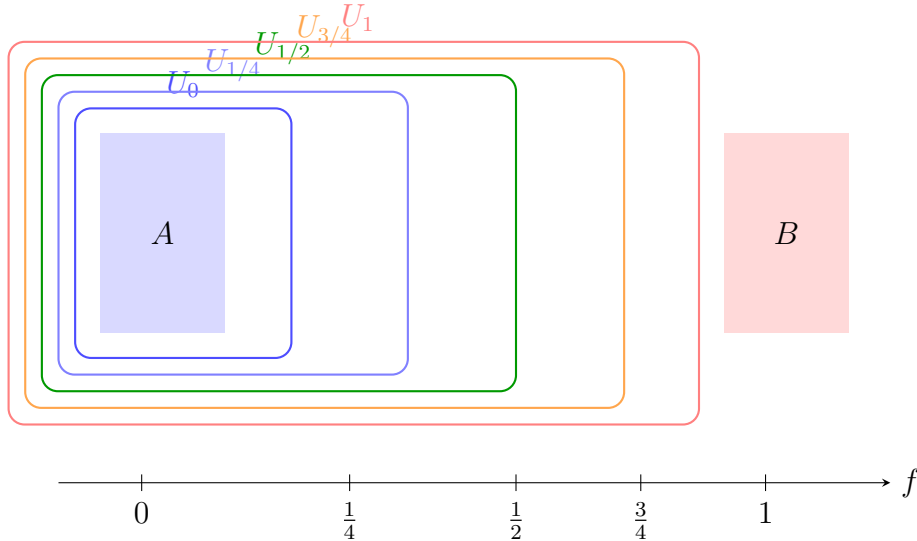


FIGURE 9.1 – Construction du lemme d’Urysohn : ouverts emboîtés $(U_r)_{r \in D}$ entre A (valeur 0) et B (valeur 1).

Corollaire 9.5. *Tout espace normal est complètement régulier.*

Démonstration. Soit X normal, F fermé, $x \notin F$. Comme X est T_1 , $\{x\}$ est fermé. Les fermés disjoints $\{x\}$ et F sont séparés par une fonction d’Urysohn $f : X \rightarrow [0, 1]$ avec $f(x) = 0$ et $f|_F \equiv 1$. $\square$

9.3 Théorème d'extension de Tietze

Théorème 9.6 (Tietze–Urysohn). *Soit X un espace topologique normal et $A \subset X$ un sous-ensemble fermé. Toute application continue $f: A \rightarrow [a, b]$ (resp. $f: A \rightarrow \mathbf{R}$) admet une extension continue $\tilde{f}: X \rightarrow [a, b]$ (resp. $\tilde{f}: X \rightarrow \mathbf{R}$).*

Démonstration. Il suffit de traiter le cas $f: A \rightarrow [-1, 1]$, le cas général $[a, b]$ s'en déduisant par transformation affine, et le cas non borné par composition avec un homéomorphisme $\mathbf{R} \xrightarrow{\sim} (-1, 1)$.

Étape 1 : lemme d'approximation.

Soit $g: A \rightarrow [-1, 1]$ continue. Posons

$$B^- = g^{-1}([-1, -\frac{1}{3}]), \quad B^+ = g^{-1}([\frac{1}{3}, 1]).$$

Ce sont deux fermés disjoints de A , donc de X (car A est fermé dans X). Par le lemme d'Urysohn (théorème 9.4), il existe $h: X \rightarrow [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ continue avec $h|_{B^-} \equiv -\frac{1}{3}$ et $h|_{B^+} \equiv \frac{1}{3}$. Alors pour tout $a \in A$:

$$|g(a) - h(a)| \leq \frac{2}{3}.$$

En effet, si $g(a) \in [-1, -\frac{1}{3}]$, alors $h(a) = -\frac{1}{3}$ et $|g(a) - h(a)| \leq 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$; si $g(a) \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, alors $|g(a) - h(a)| \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$; si $g(a) \in [\frac{1}{3}, 1]$, de même.

Étape 2 : construction par approximations successives.

Posons $g_0 = f$ et appliquons le lemme d'approximation : on obtient $h_0: X \rightarrow [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ telle que $\|g_0 - h_0|_A\|_\infty \leq \frac{2}{3}$.

Posons $g_1 = f - h_0|_A: A \rightarrow [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$. On normalise : $\frac{3}{2}g_1: A \rightarrow [-1, 1]$. Le lemme fournit $h'_1: X \rightarrow [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ approchant $\frac{3}{2}g_1$ à $\frac{2}{3}$ près. Posons $h_1 = \frac{2}{3}h'_1$; alors $h_1: X \rightarrow [-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}]$ et $\|g_1 - h_1|_A\|_\infty \leq (\frac{2}{3})^2$.

Par récurrence, on construit des fonctions continues $h_n: X \rightarrow \mathbf{R}$ telles que

$$\|h_n\|_\infty \leq \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad \left\|f - \sum_{k=0}^n h_k|_A\right\|_\infty \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}.$$

Étape 3 : convergence et conclusion.

La série $\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^\infty h_n(x)$ converge uniformément sur X , car

$$\sum_{n=0}^\infty \|h_n\|_\infty \leq \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1/3}{1 - 2/3} = 1.$$

Comme limite uniforme de fonctions continues, $\tilde{f}$ est continue. De plus, $\tilde{f}(x) \in [-1, 1]$ pour tout $x \in X$ (la somme de la série est majorée par 1 en valeur absolue). Enfin, pour $a \in A$:

$$\tilde{f}(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n h_k(a) = f(a),$$

car le reste tend vers 0. Donc $\tilde{f}|_A = f$.

Pour le cas $f: A \rightarrow \mathbf{R}$, on compose avec un homéomorphisme $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow (-1, 1)$ (par exemple $\varphi(t) = \frac{t}{1+|t|}$), on étend $\varphi \circ f: A \rightarrow (-1, 1) \subset [-1, 1]$ en $\varphi \circ f: X \rightarrow [-1, 1]$, puis

on pose $C = (\widetilde{\varphi \circ f})^{-1}(\{-1, 1\})$. Comme $C \cap A = \emptyset$ (car $\varphi \circ f$ ne prend pas les valeurs ± 1) et C est fermé, on peut ajuster par le lemme d'Urysohn pour éviter les valeurs ± 1 , ou directement considérer $\tilde{f} = \varphi^{-1} \circ \widetilde{\varphi \circ f}$ sur $X \setminus C$ et montrer que C peut être rendu vide par un choix convenable. On renvoie le lecteur à l'exercice 9.3 pour les détails de ce cas. $\square$

Remarque 9.7. La réciproque est vraie : si tout fermé d'un espace T_1 admet la propriété d'extension de Tietze, alors l'espace est normal. En effet, si A et B sont fermés disjoints, la fonction $f: A \cup B \rightarrow [0, 1]$ définie par $f|_A \equiv 0$, $f|_B \equiv 1$ est continue sur le fermé $A \cup B$; une extension $\tilde{f}$ fournit la fonction d'Urysohn.

9.4 Partitions de l'unité

Définition 9.2 (Partition de l'unité). Soit X un espace topologique et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X . Une *partition de l'unité subordonnée* à $(U_i)_{i \in I}$ est une famille $(\varphi_i)_{i \in I}$ de fonctions continues $\varphi_i: X \rightarrow [0, 1]$ telles que :

- (i) $\text{Supp}(\varphi_i) \subset U_i$ pour tout $i \in I$;
- (ii) la famille $(\text{Supp}(\varphi_i))_{i \in I}$ est localement finie;
- (iii) $\sum_{i \in I} \varphi_i(x) = 1$ pour tout $x \in X$.

Théorème 9.8. *Tout espace paracompact et de Hausdorff admet une partition de l'unité subordonnée à tout recouvrement ouvert.*

Esquisse de preuve. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X paracompact T_2 . Comme X est paracompact T_2 , il est normal. On extrait un raffinement localement fini $(V_j)_{j \in J}$ et, pour chaque j , un rétrécissement fermé $F_j \subset V_j$ (existence garantie par la normalité et le caractère localement fini). Le lemme d'Urysohn fournit $\psi_j: X \rightarrow [0, 1]$ avec $\psi_j|_{F_j} \equiv 1$ et $\text{Supp}(\psi_j) \subset V_j$. La somme $\Psi = \sum_j \psi_j$ est bien définie, continue et strictement positive. On pose $\varphi_j = \psi_j / \Psi$. $\square$

9.5 Théorème de métrisation d'Urysohn

Théorème 9.9 (Plongement dans $\mathbf{R}^\omega$). *Tout espace topologique T_3 à base dénombrable se plonge dans $\mathbf{R}^\omega = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ muni de la topologie produit.*

Démonstration. Soit $(B_n)_{n \geq 1}$ une base dénombrable de X . Puisque X est T_3 (régulier T_1) à base dénombrable, il est normal (tout espace de Lindelöf régulier est normal).

Pour chaque couple (m, n) tel que $\overline{B_m} \subset B_n$, le lemme d'Urysohn fournit une fonction continue $f_{m,n}: X \rightarrow [0, 1]$ avec $f_{m,n}|_{\overline{B_m}} \equiv 1$ et $f_{m,n}|_{X \setminus B_n} \equiv 0$. L'ensemble de ces couples est dénombrable; on les énumère en $(f_k)_{k \geq 1}$.

L'application $F: X \rightarrow \mathbf{R}^\omega$ définie par $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots)$ est continue (chaque composante l'est). Elle est injective : si $x \neq y$, il existe B_n contenant x mais pas y , et B_m avec $x \in B_m \subset \overline{B_m} \subset B_n$ (par régularité); alors $f_{m,n}(x) = 1$ et $f_{m,n}(y) = 0$.

Il reste à montrer que F est un homéomorphisme sur son image. Soit U ouvert dans X et $x \in U$. Choisissons B_m, B_n avec $x \in B_m \subset \overline{B_m} \subset B_n \subset U$. Alors $f_{m,n}^{-1}((0, +\infty)) \supset B_m \ni x$ et $F(f_{m,n}^{-1}((0, +\infty))) \subset F(B_n) \subset F(U)$. L'image $F(U)$ est donc ouvert dans $F(X)$ pour la topologie induite. $\square$

Théorème 9.10 (Métrisation d'Urysohn). *Un espace topologique est métrisable si et seulement s'il est T_3 et à base dénombrable.*

Démonstration. $(\Leftarrow)$ Par le théorème 9.9, X se plonge dans $\mathbf{R}^\omega$. Or $\mathbf{R}^\omega$ est métrisable, par exemple par la métrique

$$d((x_n), (y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}.$$

Tout sous-espace d'un espace métrisable est métrisable.

$(\Rightarrow)$ Tout espace métrisable est T_3 . Si de plus il est à base dénombrable (hypothèse nécessaire), c'est immédiat. En fait, la condition complète est : un espace métrisable est à base dénombrable si et seulement s'il est séparable (Lindelöf $\Leftrightarrow$ séparable $\Leftrightarrow$ base dénombrable dans le cas métrique). $\square$

9.6 Un contre-exemple fondamental

Exemple 9.11 (Le plan de Sorgenfrey). Considérons la droite de Sorgenfrey $\mathbf{R}_\ell$ (cf. annexe A.1) et son carré $S = \mathbf{R}_\ell \times \mathbf{R}_\ell$. L'espace S est séparable (les rationnels forment un ensemble dense), de Hausdorff, mais *non normal*.

En effet, les fermés $A = \{(x, -x) : x \in \mathbf{Q}\}$ et $B = \{(x, -x) : x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}\}$ (restreints à l'anti-diagonale) sont fermés disjoints dans S , mais ne peuvent être séparés par des ouverts disjoints. En particulier, le lemme d'Urysohn ne s'applique pas : il n'existe pas de fonction continue $f : S \rightarrow [0, 1]$ séparant A et B .

9.7 Exemples développés

Exemple 9.12 (Extension d'une fonction sur un fermé de $\mathbf{R}^n$). Soit $F = \{0\} \cup \{1/n : n \geq 1\} \subset \mathbf{R}$ et $f : F \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(1/n) = (-1)^n/n$. Comme $\mathbf{R}$ est normal et F est fermé, le théorème de Tietze garantit l'existence d'une extension continue $\tilde{f} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. On peut construire explicitement $\tilde{f}$ par interpolation linéaire entre les points de F .

Exemple 9.13 (Fonction d'Urysohn dans un espace métrique). Dans $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|)$, soient $A = \overline{B}(0, 1)$ (boule fermée) et $B = \mathbf{R}^2 \setminus B(0, 2)$ (complémentaire de la boule ouverte). La fonction

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

est une fonction d'Urysohn explicite : $f|_A \equiv 0$, $f|_B \equiv 1$, f continue et à valeurs dans $[0, 1]$.

Exemple 9.14 (Application du théorème de Tietze aux espaces compacts). Soit X un espace compact de Hausdorff (donc normal) et $K \subset X$ un fermé. Toute fonction continue

$f: K \rightarrow \mathbf{R}$ se prolonge en une fonction continue $\tilde{f}: X \rightarrow \mathbf{R}$. De plus, on peut imposer $\|\tilde{f}\|_\infty = \|f\|_\infty$ (la preuve du théorème de Tietze le garantit).

9.8 Exercices

Exercice 9.1 (*). Soit (X, d) un espace métrique et A, B deux fermés disjoints. Montrer directement (sans utiliser le lemme d'Urysohn) que la fonction $f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$ est une fonction d'Urysohn pour A et B .

Exercice 9.2 (*). Montrer qu'un sous-espace d'un espace complètement régulier est complètement régulier.

Exercice 9.3 (**). Compléter la preuve du théorème de Tietze 9.6 dans le cas d'une fonction $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ non bornée. *Indication* : utiliser l'homéomorphisme $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow (-1, 1)$, $\varphi(t) = t/(1 + |t|)$, et montrer que l'ensemble $(\varphi \circ f)^{-1}(\{-1, 1\})$ est fermé et disjoint de A .

Exercice 9.4 (**). Soit (X, d) un espace métrique et A un fermé. Montrer que la fonction $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne. En déduire une preuve directe du lemme d'Urysohn pour les espaces métriques.

Exercice 9.5 (**). Soit $(U_i)_{i=1}^n$ un recouvrement ouvert fini de $\mathbf{R}^n$. Construire explicitement une partition de l'unité subordonnée à (U_i) .

Exercice 9.6 (**). Soit X un espace compact métrisable. Montrer que X se plonge dans le cube de Hilbert $[0, 1]^{\mathbf{N}}$.

Exercice 9.7 (***). Montrer en détail que le plan de Sorgenfrey $\mathbf{R}_\ell \times \mathbf{R}_\ell$ n'est pas normal. *Indication* : considérer les fermés $\{(x, -x) : x \in \mathbf{Q}\}$ et $\{(x, -x) : x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}\}$ et utiliser un argument de catégorie de Baire.

Exercice 9.8 (***). Montrer la réciproque du théorème de Tietze : si pour tout fermé A d'un espace T_1 X , toute application continue $f: A \rightarrow [0, 1]$ admet une extension continue $\tilde{f}: X \rightarrow [0, 1]$, alors X est normal.

Résumé du chapitre 9

- Un espace est *complètement régulier* ($T_{3\frac{1}{2}}$) si les points et les fermés sont séparés par des fonctions continues à valeurs dans $[0, 1]$.
- Le **lemme d'Urysohn** affirme que dans un espace *normal*, deux fermés disjoints quelconques sont séparés par une telle fonction. La construction utilise une famille d'ouverts indexée par les rationnels dyadiques.
- Le **théorème de Tietze** étend toute fonction continue définie sur un fermé d'un espace normal à l'espace tout entier, en préservant les bornes.
- Les partitions de l'unité, construites via le lemme d'Urysohn, sont un outil central en géométrie différentielle et en analyse.

- Le **théorème de métrisation d’Urysohn** caractérise les espaces métrisables à base dénombrable : ce sont exactement les espaces T_3 à base dénombrable.

Chapitre 10

Aperçu sur la topologie algébrique

La topologie générale permet de définir les notions de continuité, de compacité, de connexité, mais elle peine à distinguer des espaces qui sont pourtant « essentiellement différents ». Comment prouver rigoureusement que $\mathbf{R}^2 \not\cong \mathbf{R}^3$, ou que la sphère S^2 n'est pas homéomorphe au tore T^2 ? La topologie algébrique répond à ces questions en associant à chaque espace topologique des invariants algébriques — groupes, anneaux, modules — qui sont préservés par homéomorphisme.

10.1 Homotopie de applications

Définition 10.1 (Homotopie). Soient X, Y des espaces topologiques et $f, g: X \rightarrow Y$ des applications continues. On dit que f et g sont *homotopes*, et l'on note $f \simeq g$, s'il existe une application continue $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ telle que $H(x, 0) = f(x)$ et $H(x, 1) = g(x)$ pour tout $x \in X$. L'application H est appelée une *homotopie* entre f et g .

Proposition 10.1. La relation d'homotopie est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathcal{C}(X, Y)$ des applications continues de X dans Y .

Démonstration. Réflexivité : $H(x, t) = f(x)$. Symétrie : $H'(x, t) = H(x, 1-t)$. Transitivité : si $f \simeq g$ via H_1 et $g \simeq h$ via H_2 , on pose

$$H(x, t) = \begin{cases} H_1(x, 2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ H_2(x, 2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

La continuité résulte du lemme de recollement. □

Définition 10.2 (Équivalence d'homotopie). Deux espaces X et Y sont dits *homotopiquement équivalents* (ou du même *type d'homotopie*) s'il existe des applications continues $f: X \rightarrow Y$ et $g: Y \rightarrow X$ telles que $g \circ f \simeq \text{id}_X$ et $f \circ g \simeq \text{id}_Y$. Un espace homotopiquement équivalent à un point est dit *contractile*.

Exemple 10.2. L'espace $\mathbf{R}^n$ est contractile : l'homotopie $H(x, t) = (1 - t)x$ contracte $\mathbf{R}^n$ sur l'origine. De même, tout espace convexe de $\mathbf{R}^n$ est contractile.

10.2 Le groupe fondamental

Définition 10.3 (Lacet, homotopie de lacets). Soit X un espace topologique et $x_0 \in X$ (le *point base*). Un *lacet* en x_0 est une application continue $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ telle que $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$. Deux lacets γ, δ en x_0 sont *homotopes relativement aux extrémités* (on note $\gamma \simeq \delta \text{ rel } \{0, 1\}$) s'il existe une homotopie $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ avec $H(s, 0) = \gamma(s)$, $H(s, 1) = \delta(s)$, $H(0, t) = H(1, t) = x_0$ pour tout s, t .

Définition 10.4 (Groupe fondamental). Le *groupe fondamental* de X en x_0 est l'ensemble

$$\pi_1(X, x_0) = \{\text{classes d'homotopie de lacets en } x_0\}$$

muni de la loi de composition $[\gamma] \cdot [\delta] = [\gamma * \delta]$, où la *concaténation* est définie par

$$(\gamma * \delta)(s) = \begin{cases} \gamma(2s) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ \delta(2s - 1) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Théorème 10.3. $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$ est un groupe. L'élément neutre est la classe du lacet constant $e(s) = x_0$, et l'inverse de $[\gamma]$ est $[\bar{\gamma}]$ où $\bar{\gamma}(s) = \gamma(1 - s)$.

Esquisse. L'associativité résulte d'une reparamétrisation continue : on montre que $(\gamma * \delta) * \eta \simeq \gamma * (\delta * \eta)$ par une homotopie qui ajuste les vitesses de parcours. Le lacet constant est neutre : $\gamma * e \simeq \gamma$ (on « ralentit » à la fin) et $e * \gamma \simeq \gamma$. Enfin, $\gamma * \bar{\gamma} \simeq e$: l'homotopie parcourt γ jusqu'au temps t , puis revient, et se contracte sur le point base quand $t \rightarrow 1$. $\square$

Proposition 10.4. Si X est connexe par arcs, alors $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$ pour tous $x_0, x_1 \in X$. L'isomorphisme est donné par conjugaison par un chemin reliant x_0 à x_1 .

Définition 10.5 (Espace simplement connexe). Un espace X connexe par arcs est *simplement connexe* si $\pi_1(X, x_0) = \{e\}$ (le groupe trivial) pour un (donc tout) point base x_0 .

Exemple 10.5. Les espaces $\mathbf{R}^n$, S^n pour $n \geq 2$, et tout espace convexe sont simplement connexes. En revanche, le cercle S^1 ne l'est pas.

10.3 Groupe fondamental du cercle

Théorème 10.6. $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbf{Z}$.

Esquisse via le revêtement $p: \mathbf{R} \rightarrow S^1$. Considérons l'application de revêtement $p: \mathbf{R} \rightarrow S^1$, $p(t) = e^{2\pi i t}$.

1. Relèvement des lacets. Tout lacet $\gamma: [0, 1] \rightarrow S^1$ basé en $1 = p(0)$ admet un unique relèvement $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ tel que $\tilde{\gamma}(0) = 0$ et $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. Le point $\tilde{\gamma}(1) \in p^{-1}(1) = \mathbf{Z}$ est un entier appelé le *degré* du lacet.

2. Invariance par homotopie. Si $\gamma \simeq \delta$ rel $\{0, 1\}$, l'homotopie se relève en une homotopie entre $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\delta}$, toutes deux d'origine 0. Par connexité de $[0, 1]$ et le fait que $p^{-1}(1)$ est discret, $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\delta}(1)$. Le degré ne dépend donc que de la classe d'homotopie.

3. Homomorphisme. L'application $\deg: \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbf{Z}$, $[\gamma] \mapsto \tilde{\gamma}(1)$ est un homomorphisme de groupes : le relèvement de $\gamma * \delta$ est la concaténation des relèvements, d'où $\deg(\gamma * \delta) = \deg(\gamma) + \deg(\delta)$.

4. Bijectivité. Surjectivité : le lacet $\omega_n(s) = e^{2\pi i n s}$ a pour degré n . Injectivité : si $\deg(\gamma) = 0$, alors $\tilde{\gamma}$ est un lacet dans $\mathbf{R}$ (espace contractile), d'où $\tilde{\gamma} \simeq \tilde{e}$ dans $\mathbf{R}$, et par projection, $\gamma \simeq e$ dans S^1 . $\square$

10.4 Espaces de revêtement

Définition 10.6 (Revêtement). Un *revêtement* d'un espace topologique X est un couple $(\tilde{X}, p)$ où $\tilde{X}$ est un espace topologique et $p: \tilde{X} \rightarrow X$ est une application continue surjective telle que tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert U dont la préimage $p^{-1}(U)$ est une réunion disjointe d'ouverts de $\tilde{X}$, chacun homéomorphe à U via p .

Exemple 10.7. (a) $p: \mathbf{R} \rightarrow S^1$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$ est le revêtement universel de S^1 .

(b) $p: S^n \rightarrow \mathbf{R}P^n$, $x \mapsto [x]$ est un revêtement à deux feuillets ($n \geq 1$).

(c) $p: \mathbf{R}^2 \rightarrow T^2$, $(x, y) \mapsto (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$ est le revêtement universel du tore.

Théorème 10.8 (Propriété de relèvement des chemins). Soit $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ un revêtement. Pour tout chemin $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ avec $\gamma(0) = x_0$, il existe un unique chemin $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ tel que $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$ et $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.

Théorème 10.9 (Relèvement des homotopies). Soit $p: \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement, $H: [0, 1]^2 \rightarrow X$ une homotopie et $\tilde{H}_0: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ un relèvement de $H(\cdot, 0)$. Il existe une unique homotopie $\tilde{H}: [0, 1]^2 \rightarrow \tilde{X}$ relevant H avec $\tilde{H}(\cdot, 0) = \tilde{H}_0$.

10.5 Théorème du point fixe de Brouwer en dimension 2

Théorème 10.10 (Brouwer, $n = 2$). Toute application continue $f: \overline{D}^2 \rightarrow \overline{D}^2$ du disque fermé dans lui-même possède un point fixe.

Démonstration. Supposons par l'absurde que $f(x) \neq x$ pour tout $x \in \overline{D}^2$. Pour chaque x , considérons la demi-droite issue de $f(x)$ passant par x : elle intersecte le cercle S^1 en un unique point $r(x)$. L'application $r: \overline{D}^2 \rightarrow S^1$ ainsi définie est continue (par une

formule explicite faisant intervenir une équation du second degré dont on choisit la racine correspondante de manière continue).

De plus, si $x \in S^1$, alors la demi-droite issue de $f(x) \in \overline{D}^2$ passant par $x \in S^1$ rencontre S^1 en x lui-même (car x est déjà sur le bord), d'où $r|_{S^1} = \text{id}_{S^1}$.

Ainsi r est une *rétraction* de $\overline{D}^2$ sur S^1 . L'inclusion $\iota: S^1 \hookrightarrow \overline{D}^2$ vérifie $r \circ \iota = \text{id}_{S^1}$, d'où par fonctorialité de π_1 :

$$r_* \circ \iota_* = \text{id}: \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(S^1).$$

Or $\iota_*: \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(\overline{D}^2)$ envoie $\mathbf{Z}$ dans le groupe trivial $\{0\}$ (car $\overline{D}^2$ est contractile), donc $r_* \circ \iota_*$ est l'application nulle. Contradiction avec $r_* \circ \iota_* = \text{id}_{\mathbf{Z}}$. $\square$

Théorème 10.11 (Borsuk–Ulam, $n = 1$). *Pour toute application continue $f: S^1 \rightarrow \mathbf{R}$, il existe un point $x \in S^1$ tel que $f(x) = f(-x)$.*

Démonstration. La fonction $g(x) = f(x) - f(-x)$ est continue et vérifie $g(-x) = -g(x)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires (car S^1 est connexe), g s'annule. $\square$

Remarque 10.12 (Borsuk–Ulam en dimension n). Le théorème de Borsuk–Ulam en dimension n affirme que pour toute application continue $f: S^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, il existe $x \in S^n$ tel que $f(x) = f(-x)$. La preuve utilise des outils d'homologie ou de cohomologie.

10.6 Groupes d'homotopie supérieurs et homologie

Définition 10.7 (Groupes d'homotopie supérieurs). Pour $n \geq 1$, le n -ième groupe d'homotopie de (X, x_0) est

$$\pi_n(X, x_0) = [(S^n, *), (X, x_0)],$$

l'ensemble des classes d'homotopie (pointée) d'applications continues de $(S^n, *)$ dans (X, x_0) , muni d'une structure de groupe (abélien pour $n \geq 2$).

Remarque 10.13. Le calcul des groupes π_n est en général très difficile. Citons : $\pi_n(S^n) \cong \mathbf{Z}$ pour tout $n \geq 1$; $\pi_3(S^2) \cong \mathbf{Z}$ (fibration de Hopf).

Définition 10.8 (Homologie singulière — aperçu). L'homologie singulière associe à tout espace topologique X une suite de groupes abéliens $(H_n(X; \mathbf{Z}))_{n \geq 0}$, définis à l'aide de *simplexes singuliers* (applications continues $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$) et de *complexes de chaînes*. L'homologie est un invariant d'homotopie plus calculable que les groupes π_n .

Définition 10.9 (Caractéristique d'Euler). Si X est un espace dont les groupes d'homologie sont de type fini et nuls sauf un nombre fini, la *caractéristique d'Euler*

est

$$\chi(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \text{rang}(H_n(X; \mathbf{Z})).$$

Par exemple, $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$, $\chi(T^2) = 0$, $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$ pour la surface orientable de genre g .

10.7 Notes historiques

- Remarque 10.14** (Repères historiques). — **Henri Poincaré** (1895) introduit l’*Analysis Situs*, fondant la topologie algébrique. Il définit le groupe fondamental, les nombres de Betti, et formule la conjecture de Poincaré (démontrée par Perelman en 2003).
- **L. E. J. Brouwer** (vers 1910–1912) démontre le théorème du point fixe, le théorème d’invariance du domaine et le théorème d’invariance de la dimension.
 - **Witold Hurewicz** (1935–1936) introduit les groupes d’homotopie supérieurs π_n et démontre le théorème de Hurewicz reliant π_n et H_n .
 - **Samuel Eilenberg** et **Norman Steenrod** (1945) axiomatisent la théorie de l’homologie.

10.8 Exercices

Exercice 10.1 (*). Montrer que deux applications continues $f, g: X \rightarrow \mathbf{R}^n$ sont toujours homotopes. *Indication* : homotopie linéaire.

Exercice 10.2 (*). Montrer que tout espace contractile est simplement connexe.

Exercice 10.3 (**). Montrer que $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$. En déduire $\pi_1(T^2) \cong \mathbf{Z}^2$.

Exercice 10.4 (**). En admettant le théorème de van Kampen, calculer $\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \mathbf{Z} * \mathbf{Z}$ (groupe libre à deux générateurs).

Exercice 10.5 (**). Montrer qu’il n’existe pas de rétraction continue $r: \overline{D}^n \rightarrow S^{n-1}$ pour $n \geq 1$. *Indication pour $n = 2$* : utiliser π_1 .

Exercice 10.6 (***). Déduire du théorème de Brouwer en dimension 2 que tout champ de vecteurs continu $v: \overline{D}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ pointant vers l’intérieur sur S^1 possède un zéro.

Résumé du chapitre 10

- L’**homotopie** est une déformation continue d’applications ; elle induit une relation d’équivalence et la notion d’équivalence d’homotopie entre espaces.
- Le **groupe fondamental** $\pi_1(X, x_0)$ est le groupe des classes d’homotopie de lacets basés en x_0 . C’est un invariant topologique.
- $\pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$: la preuve utilise le revêtement $\mathbf{R} \rightarrow S^1$.

- Le théorème du **point fixe de Brouwer** (dim 2) se déduit de l'impossibilité de rétracter le disque sur son bord, elle-même conséquence de $\pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$.
- Les **groupes d'homotopie supérieurs** π_n et l'**homologie singulière** H_n sont des invariants algébriques plus fins, indispensables en topologie moderne.

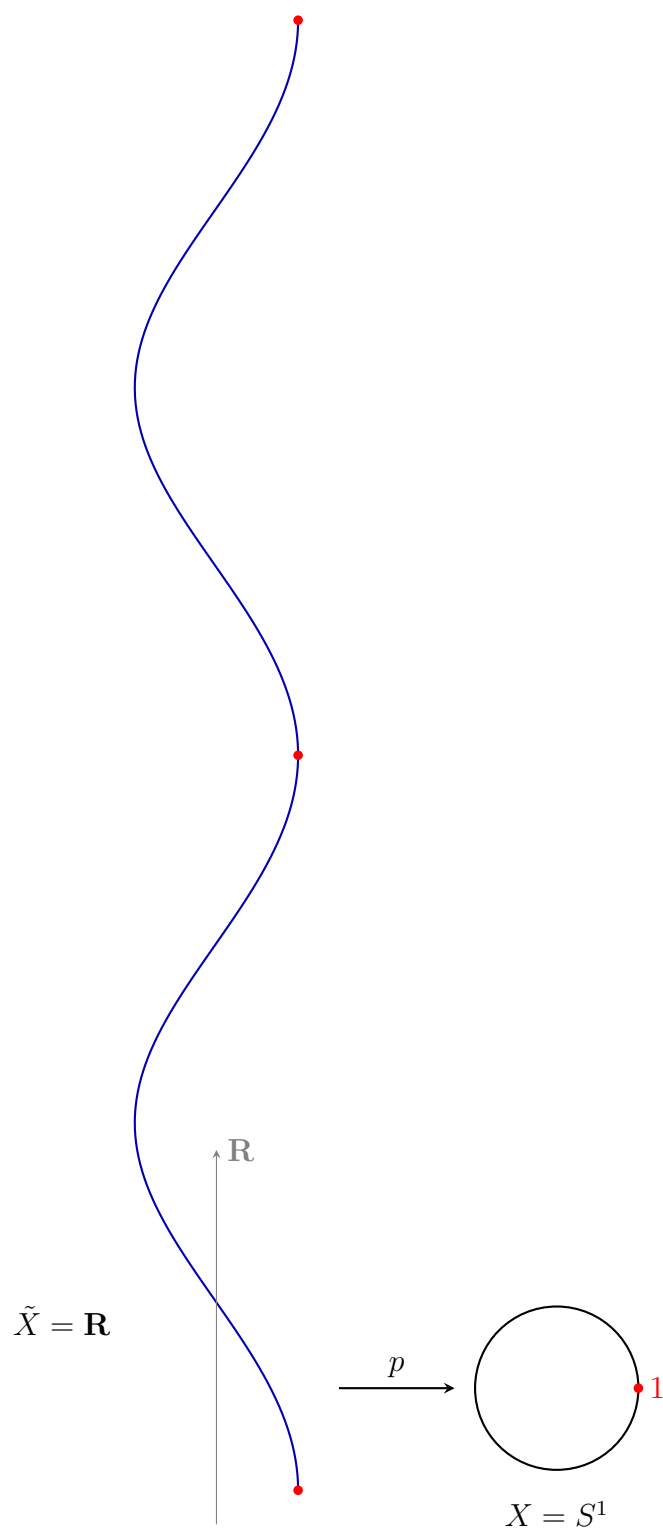
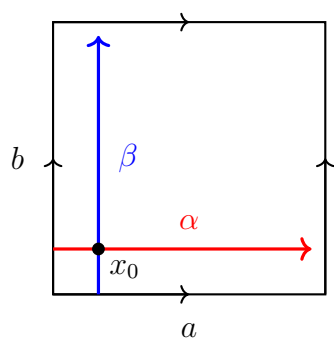


FIGURE 10.1 – Le revêtement $p: \mathbf{R} \rightarrow S^1$, $t \mapsto e^{2\pi it}$. Les points rouges sont les préimages de $1 \in S^1$.



$$\pi_1(T^2, x_0) \cong \mathbf{Z}^2$$

engendré par $[\alpha]$ et $[\beta]$

FIGURE 10.2 – Lacets générateurs du groupe fondamental du tore T^2 , représenté comme carré aux côtés identifiés.

Annexe A

Répertoire de contre-exemples

Nous rassemblons ici les principaux espaces et constructions qui servent de contre-exemples en topologie générale. Pour chaque espace, nous indiquons la définition, les propriétés de séparation, la compacité, la connexité, et les énoncés classiques pour lesquels il constitue un contre-exemple.

A.1 Droite de Sorgenfrey

Définition. La droite de Sorgenfrey $\mathbf{R}_\ell$ est l'ensemble $\mathbf{R}$ muni de la topologie engendrée par les intervalles semi-ouverts $[a, b)$, $a < b$.

Propriétés.

- Séparation : $T_{3\frac{1}{2}}$ (en fait parfaitement normal, donc T_4 et même T_6).
- Première dénombrabilité : oui.
- Seconde dénombrabilité : non (mais séparable et de Lindelöf).
- Compacité : non compact, non localement compact.
- Connexité : totalement séparé.
- Métrisabilité : non métrisable (séparable mais non à base dénombrable).

Contre-exemples.

- Montre que séparable et de Lindelöf n'impliquent pas la seconde dénombrabilité.
- Montre que la normalité n'est pas préservée par produit (voir plan de Sorgenfrey ci-dessous).

A.2 Plan de Sorgenfrey

Définition. $S = \mathbf{R}_\ell \times \mathbf{R}_\ell$, produit de deux copies de la droite de Sorgenfrey.

Propriétés.

- Séparation : $T_{3\frac{1}{2}}$ mais *non normal*.
- Séparable : oui ($\mathbf{Q}^2$ est dense).
- De Lindelöf : non.

- Compacité : non compact.

Contre-exemples.

- Contre-exemple canonique pour : le produit de deux espaces normaux n'est pas nécessairement normal.
- Contre-exemple pour : le produit de deux espaces de Lindelöf n'est pas nécessairement de Lindelöf.
- Le lemme d'Urysohn échoue dans cet espace.

A.3 Topologie cofinie

Définition. Sur un ensemble infini X , la topologie cofinie est $\tau = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : X \setminus U \text{ est fini}\}$.

Propriétés.

- Séparation : T_1 mais non T_2 .
- Compacité : compact (tout recouvrement ouvert admet un sous-recouvrement fini).
- Connexité : connexe (tout ouvert non vide est cofinement grand).
- Métrisabilité : non métrisable.

Contre-exemples.

- Espace compact non séparé.
- Montre que compact et T_1 n'impliquent pas T_2 .

A.4 Topologie codénombrable

Définition. Sur un ensemble non dénombrable X , la topologie codénombrable est $\tau = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : X \setminus U \text{ est dénombrable}\}$.

Propriétés.

- Séparation : T_1 mais non T_2 .
- Compacité : non compact en général.
- Connexité : connexe.

Contre-exemples.

- Espace T_1 , connexe, non séparé.
- Les suites ne suffisent pas à décrire la topologie.

A.5 Espace de Sierpiński

Définition. $S = \{0, 1\}$ avec $\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\}$.

Propriétés.

- Séparation : T_0 mais non T_1 .
- Compacité : compact (espace fini).

— Connexité : connexe.

Contre-exemples.

— Le plus petit espace T_0 non T_1 .

— Joue un rôle universel : les ouverts de X correspondent aux applications continues $X \rightarrow S$.

A.6 Ensemble de Cantor

Définition. L'ensemble triadique de Cantor est $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ où $C_0 = [0, 1]$ et C_{n+1} est obtenu en retirant le tiers central ouvert de chaque intervalle de C_n . Alternativement, $C = \{x \in [0, 1] : x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k/3^k, a_k \in \{0, 2\}\}$.

Propriétés.

— Séparation : T_4 (métrisable).

— Compacité : compact.

— Connexité : totalement séparé.

— Homéomorphe à $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (produit dénombrable).

— Non dénombrable, de mesure de Lebesgue nulle.

Contre-exemples.

— Compact non dénombrable sans point isolé, de mesure nulle.

— Espace universel : tout espace métrique compact totalement séparé est homéomorphe à un fermé de C .

A.7 Courbe du topologiste (*topologist's sine curve*)

Définition. $T = \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, \sin(1/x)) : 0 < x \leq 1\}$ muni de la topologie induite de $\mathbb{R}^2$.

Propriétés.

— Séparation : T_4 (métrisable).

— Compacité : compact.

— Connexité : connexe mais *non connexe par arcs*.

Contre-exemples.

— Contre-exemple canonique : connexe n'implique pas connexe par arcs.

A.8 Longue droite

Définition. Soit ω_1 le premier ordinal non dénombrable. La *longue droite* est $L = \omega_1 \times [0, 1)$ muni de la topologie de l'ordre lexicographique, privé de son point minimal.

Propriétés.

— Séparation : T_5 (complètement normal).

- Compacité : non compact, localement compact, séquentiellement compact, dénombrablement compact.
- Connexité : connexe, localement connexe par arcs.
- Non métrisable, non séparable, non à base dénombrable.

Contre-exemples.

- Séquentiellement compact mais non compact.
- Dénombrablement compact mais non compact.
- Localement métrisable mais non métrisable globalement.

A.9 Droite à double origine (*bug-eyed line*)

Définition. Soit $X = (\mathbf{R} \setminus \{0\}) \cup \{0^+, 0^-\}$. La topologie est définie en gardant la topologie usuelle sur $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ et en prenant comme voisinages de $0^\pm$ les ensembles $(-\varepsilon, 0) \cup \{0^\pm\} \cup (0, \varepsilon)$.

Propriétés.

- Séparation : T_1 , localement homéomorphe à $\mathbf{R}$, mais *non* T_2 (les points 0^+ et 0^- ne sont pas séparés par des ouverts disjoints).
- Première dénombrabilité : oui. Seconde dénombrabilité : oui.
- Connexité : connexe.

Contre-exemples.

- Variété topologique (localement euclidienne) non séparée.
- Montre que la condition de Hausdorff est indépendante des conditions de dénombrabilité et de la structure locale.

A.10 Topologie du point particulier

Définition. Soit X un ensemble et $p \in X$ un point distingué. La *topologie du point particulier* est $\tau = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : p \in U\}$.

Propriétés.

- Séparation : T_0 mais non T_1 (les points $\neq p$ ne sont pas fermés).
- Compacité : compact (tout ouvert non vide contient p , donc un seul ouvert suffit).
- Connexité : connexe et connexe par arcs.

Contre-exemples.

- Espace compact, connexe par arcs, non T_1 .
- Illustre la distinction entre T_0 et T_1 .

A.11 Espace de Moore (plan de Niemytzki)

Définition. Soit $X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq 0\}$ (demi-plan supérieur fermé). Pour (x, y) avec $y > 0$, les voisinages sont les disques ouverts habituels. Pour $(x, 0)$ sur l'axe, les voisinages de base sont les ensembles $\{(x, 0)\} \cup D((x, \varepsilon), \varepsilon)$ où $D((x, \varepsilon), \varepsilon)$ est le disque ouvert de centre (x, ε) et de rayon ε , tangent à l'axe des abscisses en $(x, 0)$.

Propriétés.

- Séparation : $T_{3\frac{1}{2}}$ (complètement régulier) mais *non normal*.
- Première dénombrabilité : oui.
- Séparable : oui ($\mathbf{Q}^2 \cap X$ est dense).
- Seconde dénombrabilité : non.
- Compacité : non compact.

Contre-exemples.

- Espace séparable, complètement régulier, non normal.
- Montre que $T_{3\frac{1}{2}}$ n'implique pas T_4 .

A.12 Planche de Tychonoff

Définition. Soit $\Omega = \omega_1 + 1 = [0, \omega_1]$ et $\Sigma = \omega + 1 = [0, \omega]$ munis de la topologie de l'ordre. La *planche de Tychonoff* est l'espace $T = (\Omega \times \Sigma) \setminus \{(\omega_1, \omega)\}$, c'est-à-dire le produit $\Omega \times \Sigma$ privé de son coin supérieur droit.

Propriétés.

- Séparation : $T_{3\frac{1}{2}}$ (complètement régulier) mais *non normal*.
- Compacité : non compact (mais localement compact).
- Connexité : connexe.

Contre-exemples.

- Sous-espace d'un produit de deux espaces compacts qui n'est pas normal.
- Illustre que la normalité est une propriété fragile vis-à-vis des sous-espaces.

Bibliographie

- [1] MUNKRES, J. R., *Topology*, 2^e éd., Prentice Hall, Upper Saddle River, 2000.
- [2] BOURBAKI, N., *Topologie Générale*, chapitres 1 à 4, Springer, Berlin, 2007 (réimpression).
- [3] WILLARD, S., *General Topology*, Dover Publications, Mineola, 2004 (réimpression de l'éd. 1970).
- [4] KELLEY, J. L., *General Topology*, Springer, Graduate Texts in Mathematics **27**, 1975 (réimpression).
- [5] DUGUNDJI, J., *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.
- [6] DIXMIER, J., *Topologie Générale*, Presses Universitaires de France, collection « Mathématiques », Paris, 1981.
- [7] STEEN, L. A. et SEEBACH, J. A., *Counterexamples in Topology*, Dover Publications, Mineola, 1995 (réimpression de l'éd. 1978).
- [8] HATCHER, A., *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002. Disponible en ligne : <https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html>.

Index

- adhérence, 18
 - caractérisation séquentielle, 19
 - non séquentielle, 23
- Alexandroff, 58
- application continue, 38
- application fermée, 40
- application ouverte, 40
- application quotient, 73, 74
 - composition, 74
 - conditions, 74
- axiome du choix, 57
- axiomes de séparation, 45
- base d'une topologie, 29
- base dénombrable, 84
- Bolzano-Weierstrass, 54
- Borsuk-Ulam, 91
 - dimension n , 91
- Bourbaki, 101
- Brouwer
 - L.E.J., 92
 - théorème du point fixe, 90
- bug-eyed line, 99
- Cantor
 - ensemble de, 65, 98
- caractéristique d'Euler, 91
- cercle S^1
 - comme quotient, 75
- chemin, 66
- clopen, 17, 63
- compact, 52
 - caractérisation par FIP, 53
 - contre-exemples, 59
 - dans un espace métrique, 55
 - de $[0, 1]$, 60
 - fermé dans compact, 53
 - fermé dans Hausdorff, 47, 53
 - Hausdorff implique normal, 49
 - image continue, 53
 - par point d'accumulation, 54
 - sous-ensemble, 52
 - séquentiellement, 54
- compactification, 58
 - d'Alexandroff, 58
 - de $\mathbb{N}$, 59
 - de $\mathbb{R}^n$, 59
- complètement régulier
 - sous-espace, 86
- composante connexe, 65
- composition
 - d'applications continues, 39
- connexe
 - adhérence, 64
 - caractérisations, 63
 - dans $\mathbb{R}$, 69
 - espace, 63
 - image continue, 64
 - produit, 68
 - produit arbitraire, 68
 - réunion, 64
- connexe par arcs, 66
 - et localement connexe par arcs, 68
 - implique connexe, 66
- connexité, 63
- connexité locale, 67
- connexité par arcs, 66
- continuité
 - dans un produit, 73
- contre-exemples
 - répertoire, 96
- convergence
 - dans un produit, 77
- coproduit topologique, 77
- courbe du topologiste, 66, 98
- cube de Hilbert, 60
- cube de Tychonoff, 80
- cylindre
 - comme quotient, 77

- cône topologique, 78
- degré d'un lacet, 90
- dense, 20
- diagonale, 47
- Dixmier, 101
- droite de Sorgenfrey, 23, 31, 50
- droite à double origine, 49
- droite à double origine, 99
- dualité intérieur-adhérence, 19
- Dugundji, 101
- embedding, *voir* plongement topologique
- ensemble
 - ouvert et fermé, 17
- ensemble dense, 20
- ensemble dérivé, 20
- espace de Hausdorff, 40
 - produit, 50
- espace compact, 40
- espace complètement régulier, 80
- espace connexe, 63
- espace contractile, 88
- espace de Cantor, 59
- espace de Hausdorff, 46
- espace de Lindelöf, 32
- espace de revêtement, 90
- espace de Tychonoff, 80
- espace métrique, 45
 - est T_4 , 50
- espace métrisable, 85
- espace non normal, 85
- espace normal, 48, 81
 - complètement régulier, 82
- espace paracompact
 - partition de l'unité, 84
- espace parfait, 65
- espace projectif réel $\mathbb{R}P^2$, 76
- espace régulier, 48
- espace séparable, 32
- espace T_0 , 45
- espace T_1 , 46
- espace T_2 , 46
- espace T_3 , 48
 - sous-espace, 50
- espace T_4 , 48
- espace topologique, 8
- extension
 - dans $\mathbf{R}^n$, 85
 - théorème de Tietze, 83
- fermé, 16
- FIP, *voir* propriété de l'intersection finie
- frontière, 19
- groupe fondamental, 89
 - changement de point base, 89
 - du cercle, 89
 - du tore, 92
 - définition, 89
- groupe linéaire
 - connexité, 69
- groupes d'homotopie
 - supérieurs, 91
- Hatcher, 101
- homologie singulière, 91
- homotopie, 88
- homéomorphisme, 39
- Hopf
 - fibration de, 91
- Hurewicz, 92
- intersection infinie d'ouverts, 13
- intérieur, 17
- invariance du domaine, 43
- invariant topologique, 39
- Kelley, 101
- Klein
 - bouteille de, 75
- Kolmogorov, 45
- Kuratowski
 - axiomes de fermeture, 21
 - exemple des 14 ensembles, 24
 - théorème des 14 ensembles, 21
- lacet, 89
- lemme d'Urysohn, 80, 81
- lemme de recollement, 42
- lemme du tube, 73
- Lindelöf
 - normal, 84
- localement connexe, 67
- localement connexe par arcs, 67

- localement fini, 84
- longue droite, 98
- Moore
 - espace de, 100
- Munkres, 101
- Möbius
 - ruban de, 75
- Niemytzki
 - plan de, 100
- nombre de Lebesgue, 60
- nulle part dense, 20
- ouvert, 9
 - caractérisation par voisinages, 12
- ouvert-fermé, 63
- partition de l'unité, 84
 - dans $\mathbf{R}^n$, 86
- peigne (espace), 70
- π_1 , 89
- π_n , 91
- plan de Sorgenfrey, 50
- plongement topologique, 41
- Poincaré, 92
- point d'accumulation, 20
- point fixe
 - Brouwer, 90
- point isolé, 20
- premier dénombrable, 32
- produit
 - complète régularité, 80
- projection
 - non fermée, 73
 - ouverte, 73
- projection canonique, 71
- propriété de l'intersection finie, 53
- propriété topologique, 41
- propriété universelle
 - coproduit, 77
 - produit, 72
 - topologie produit, 72
 - topologie quotient, 74
- quotient
 - par un sous-espace, 78
- rationnels
 - denses dans $\mathbb{R}$, 20
 - totalemt discontinu, 65
- rationnels dyadiques, 81
- relèvement
 - des chemins, 90
 - des homotopies, 90
- revêtement, 90
 - de S^1 , 89
- rétraction, 91
- réunion disjointe, 77
- saturé (ensemble), 74
- second dénombrable, 32
- Seebach, 101
- Sierpiński
 - espace de, 97
- simplement connexe, 89
- singleton fermé, 46
- sinus du topologiste, *voir* courbe du topologiste
- Sorgenfrey, 23
 - droite de, 96
 - non normalité du plan, 86
 - plan de, 85, 96
- sous-base, 30, 55
- Steen, 101
- suspension topologique, 79
- système de voisinages, 11
- séparation
 - T_1 , 14
- $T_{3\frac{1}{2}}$, 80
- théorème
 - des valeurs intermédiaires, 64
- théorème d'Alexander, 56
- théorème de Tychonoff, 56
- théorème de Dini, 60
- théorème de Heine-Borel, 52
- théorème de métrisation d'Urysohn, 84
- théorème de Tietze, 80, 83
- théorème des bornes atteintes, 54
- Tietze
 - espace compact, 85
- topologie, 8
 - codénombrable, 9
 - cofinie, 9
 - de Zariski, 10

- discrète, 9
- indiscrète, 9
- intersection de topologies, 11
- moins fine, 10
- métrique, 10
- plus fine, 10
- topologie cofinie
 - pas T_2 , 49
- topologie algébrique, 88
- topologie boîte, 72
 - défauts, 76
 - non compacte, 76
 - non connexe, 76
- topologie codénombrable, 97
 - suites convergentes, 26
- topologie cofinie, 34, 46, 97
- topologie de l'ordre, 31
- topologie de Sierpiński, 46
- topologie du point particulier, 49, 99
- topologie engendrée, 14, 30
- topologie produit, 71
 - cas général, 72
 - produit fini, 71
- topologie quotient, 71, 73
- topologie somme, 77
- tore
 - comme quotient, 75
- totalelement discontinu, 65
- tube (lemme du), 73
- Tychonoff
 - espace de, 80
 - planche de, 100
 - théorème de, 76
 - topologie de, 72
- unicité des limites, 47
- Urysohn
 - théorème de métrisation, 84
- van Kampen, 92
- voisinage, 11
- Willard, 101
- équivalence d'homotopie, 88