

Topologie Différentielle

Notes de Cours / Lecture Notes

Master / Doctorat — 2025–2026

Yaë Ulrich Gaba

*Variétés, plongements et théorie de Morse :
les structures lisses au cœur de la géométrie.*

Table des matières

Table des notations	6
Préface	7
1 Variétés différentielles — Définitions et exemples	8
1.1 Rappels topologiques	8
1.2 Cartes locales et atlas	9
1.3 Structure différentiable	10
1.4 Exemples fondamentaux	11
1.4.1 L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ et ses ouverts	11
1.4.2 Les sphères S^n	11
1.4.3 Espaces projectifs	12
1.4.4 Le tore	13
1.4.5 Groupes de Lie classiques	14
1.4.6 Grassmanniennes	15
1.5 Variétés avec bord	15
1.6 Partitions de l'unité	16
1.7 Exercices	18
2 Applications lisses et difféomorphismes	19
2.1 Applications lisses entre variétés	19
2.2 Difféomorphismes	20
2.3 Théorème d'inversion locale	21
2.4 Théorème des fonctions implicites	22
2.5 Immersions et submersions	23
2.6 Théorème de rang constant	24
2.7 Exemples d'applications lisses	25
2.7.1 Projections et inclusions	25
2.7.2 L'application de Hopf	26
2.7.3 Difféomorphismes locaux	26
2.8 Diagrammes commutatifs et catégorie C^∞	27
2.9 Exercices	27
3 Fibrés tangents et cotangents	29
3.1 L'espace tangent en un point	29
3.1.1 Définition via les dérivations	29
3.1.2 Définition via les classes d'équivalence de courbes	30
3.1.3 Équivalence des définitions	31
3.2 Différentielle d'une application lisse	31

3.3	Le fibré tangent	33
3.4	Le fibré cotangent	34
3.5	Champs de vecteurs	36
3.6	Le crochet de Lie	36
3.7	Flot d'un champ de vecteurs	37
3.8	Exercices	40
4	Sous-variétés et théorème de la valeur régulière	41
4.1	Immersion, submersion, plongement	41
4.2	Sous-variétés	43
4.3	Le théorème de la valeur régulière	43
4.4	Applications fondamentales	45
4.4.1	La sphère S^{n-1}	45
4.4.2	Le groupe orthogonal $O(n)$	45
4.4.3	Le groupe spécial linéaire $SL(n, \mathbb{R})$	46
4.4.4	Préimages dans $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$	47
4.4.5	Le théorème de Sard	47
4.5	Espace tangent d'une sous-variété	48
4.6	Théorème du rang constant	48
4.7	Sous-variétés à bord	49
4.8	Voisinage tubulaire	50
4.9	Exercices	50
5	Transversalité	53
5.1	Intersection transverse	53
5.1.1	Définition pour une application	53
5.1.2	Exemples et non-exemples	54
5.2	Théorème de transversalité	55
5.3	Transversalité et stabilité	56
5.4	Théorème de transversalité de Thom	57
5.5	Applications de la transversalité	58
5.5.1	Nombre d'intersection	58
5.5.2	Nombre d'intersection modulo 2	59
5.5.3	Nombre d'auto-intersection	60
5.5.4	Lien avec le théorème de Lefschetz	60
5.6	Exercices	60
6	Formes différentielles et intégration sur les variétés	62
6.1	Algèbre extérieure	62
6.2	Formes différentielles	64
6.3	Différentielle extérieure	64
6.3.1	Formes fermées et formes exactes	65
6.4	Tiré en arrière	66
6.5	Produit intérieur et dérivée de Lie	67
6.6	Orientation	69
6.7	Intégration des formes différentielles	70
6.7.1	Intégration sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$	70
6.7.2	Intégration sur une variété orientée	71
6.8	Formes à support compact	72

6.9	Vers le théorème de Stokes	72
6.10	Exercices	73
7	Théorème de Stokes	75
7.1	Chaînes singulières lisses	75
7.2	Intégration de formes sur des chaînes	77
7.3	Le théorème de Stokes	78
7.4	Cas classiques en $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$	79
7.5	Cohomologie de de Rham	80
7.6	Lemme de Poincaré	82
7.7	Invariance homotopique	84
7.8	Degré d'une application via l'intégration	85
7.9	Dualité de Poincaré	86
7.10	Exercices	86
8	Théorème de Sard	88
8.1	Valeurs critiques et valeurs régulières	88
8.2	Ensembles de mesure nulle	89
8.3	Théorème de Sard	90
8.4	Applications du théorème de Sard	92
8.4.1	Existence de valeurs régulières	92
8.4.2	Théorème de non-rétraction	92
8.4.3	Théorème du point fixe de Brouwer	93
8.4.4	Théorème de Brown	93
8.4.5	Applications transverses	94
8.5	Compléments	94
8.6	Exercices	95
9	Théorie de Morse — Introduction	97
9.1	Fonctions de Morse	97
9.2	Le lemme de Morse	98
9.3	Densité des fonctions de Morse	100
9.4	Sous-niveaux et attachement de cellules	100
9.5	Décomposition en anses	101
9.6	Inégalités de Morse	102
9.7	Exemples fondamentaux	103
9.8	Complexe de Morse et connexion avec la topologie algébrique	104
9.9	Exercices	105
10	Degré d'une application lisse et applications	107
10.1	Degré modulo 2	107
10.2	Degré orienté	108
10.3	Calcul du degré via les formes différentielles	109
10.4	Applications du degré	110
10.4.1	Théorème de Brouwer via le degré	110
10.4.2	Théorème de la sphère chevelue	110
10.4.3	Théorème de Borsuk–Ulam	111
10.4.4	Théorème du point fixe de Lefschetz	111
10.5	Nombre d'intersection comme degré	111

10.6 Exercices	112
11 Théorème de Whitney et plongements	114
11.1 Rappels : plongements et immersions	114
11.2 Théorème de Whitney : version faible	115
11.3 Théorème de Whitney : version forte	115
11.4 Théorème d'approximation de Whitney	116
11.5 Isotopie et plongements	117
11.6 Applications et exemples	117
11.7 Classification des surfaces lisses compactes	118
11.8 Aperçu : variétés exotiques	119
11.9 Exercices	120
A Rappels d'analyse	122
A.1 Théorème d'inversion locale	122
A.2 Théorème de Cauchy–Lipschitz	123
A.3 Mesure de Lebesgue et ensembles de mesure nulle	123
A.4 Partition de l'unité	124
A.5 Rappels de topologie différentielle de base	124
A.6 Lemme de Hadamard	125

Table des notations

Notation	Signification
M, N, P	Variétés différentielles lisses
$n = \dim M$	Dimension de la variété M
(U, φ)	Carte locale : U ouvert de M , $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ homéomorphisme sur son image
$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$	Atlas lisse sur M
$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$	Changement de cartes (application de transition)
$C^\infty(M)$	Algèbre des fonctions lisses $M \rightarrow \mathbb{R}$
$C^\infty(M, N)$	Ensemble des applications lisses de M dans N
$T_p M$	Espace tangent à M au point p
$T_p^* M$	Espace cotangent à M au point p
TM	Fibré tangent de M
T^*M	Fibré cotangent de M
df_p ou $(df)_p$	Différentielle de f au point p
$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right _p$	Vecteur tangent associé à la i -ème coordonnée au point p
dx^i	1-forme différentielle coordonnée
$\Omega^k(M)$	Espace des k -formes différentielles sur M
$\text{Diff}(M)$	Groupe des difféomorphismes de M
$\text{GL}(n, \mathbb{R})$	Groupe linéaire général
$\text{SL}(n, \mathbb{R})$	Groupe spécial linéaire
$\text{SO}(n)$	Groupe spécial orthogonal
$\text{SU}(n)$	Groupe spécial unitaire
S^n	Sphère de dimension n
$\mathbb{RP}^n$	Espace projectif réel de dimension n
$\mathbb{CP}^n$	Espace projectif complexe de dimension n
$\mathbb{T}^n$	Tore de dimension n
$\text{Gr}(k, n)$	Grassmannienne des k -plans dans $\mathbb{R}^n$
Id_M	Application identité sur M
$\text{rg}(f)$ ou $\text{rg}_p(f)$	Rang de f (au point p)
∂M	Bord de la variété M
$\mathbb{H}^n$	Demi-espace supérieur $\{x \in \mathbb{R}^n : x^n \geq 0\}$

Préface

La topologie différentielle est l'étude des variétés lisses et des applications différentiables entre elles. Elle occupe une position centrale dans les mathématiques modernes, au carrefour de l'analyse, de la géométrie et de la topologie algébrique.

Pourquoi la structure lisse est-elle si importante, au-delà de la seule structure topologique ? La réponse réside dans le fait qu'une variété topologique peut admettre plusieurs structures différentiables non difféomorphes, voire aucune. Le résultat le plus spectaculaire dans cette direction est dû à John Milnor (1956) : la sphère S^7 admet exactement 28 structures différentiables distinctes, les *sphères exotiques*. Plus surprenant encore, Simon Donaldson (1983) et Michael Freedman (1982) ont montré que $\mathbb{R}^4$ admet une infinité non dénombrable de structures lisses exotiques, un phénomène propre à la dimension 4.

L'histoire de la topologie différentielle est jalonnée de contributions fondatrices. Hassler Whitney a établi dans les années 1930 les bases de la théorie des variétés et démontré le célèbre théorème de plongement qui porte son nom : toute variété lisse de dimension n se plonge dans $\mathbb{R}^{2n+1}$. René Thom a introduit la théorie du cobordisme dans les années 1950, récompensée par la médaille Fields en 1958, établissant des liens profonds entre la topologie différentielle et la topologie algébrique. Stephen Smale a démontré la conjecture de Poincaré généralisée en dimension $n \geq 5$ (1961) et développé la théorie de Morse en dimension infinie. John Milnor, outre sa découverte des sphères exotiques, a apporté des contributions décisives à la théorie de Morse, à la K -théorie et à la chirurgie des variétés.

Ce cours s'adresse aux étudiants de Master et de Doctorat. Nous supposons acquises les bases de la topologie générale (espaces topologiques, compacité, connexité), de l'algèbre linéaire et de l'analyse dans $\mathbb{R}^n$ (théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites). Le cours se veut rigoureux : toutes les démonstrations essentielles sont présentées en détail. Chaque chapitre comporte des exemples détaillés et des exercices de difficulté graduée.

Bonne lecture et bon travail.

Chapitre 1

Variétés différentielles — Définitions et exemples

1.1 Rappels topologiques

Nous rappelons ici les notions topologiques indispensables à la théorie des variétés. Le lecteur familier avec ces concepts pourra passer directement à la
efsec :cartes-atlas.

Définition 1.1 (Espace topologique séparé). Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit *séparé* (ou de *Hausdorff*) si pour tous points distincts $x, y \in X$, il existe des ouverts $U, V \in \mathcal{T}$ tels que $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$.

Définition 1.2 (Base dénombrable). Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit à *base dénombrable* (ou *second dénombrable*) s'il existe une famille dénombrable $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts de X telle que tout ouvert de X s'écrive comme réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.

Définition 1.3 (Paracompacité). Un espace topologique X est dit *paracompact* si tout recouvrement ouvert de X admet un raffinement localement fini. Plus précisément, pour tout recouvrement ouvert $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ de X , il existe un recouvrement ouvert $(V_\beta)_{\beta \in B}$ de X tel que :

- (i) pour tout $\beta \in B$, il existe $\alpha \in A$ avec $V_\beta \subset U_\alpha$;
- (ii) pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert W de x tel que $\{\beta \in B : W \cap V_\beta \neq \emptyset\}$ soit fini.

Proposition 1.4 (Les espaces à base dénombrable séparés sont paracompacts). *Tout espace topologique séparé à base dénombrable est paracompact.*

Démonstration. Soit X un espace séparé à base dénombrable $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Soit $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert de X . Pour chaque $x \in X$, choisissons $\alpha(x)$ tel que $x \in U_{\alpha(x)}$, puis $n(x) \in \mathbb{N}$ tel que $x \in B_{n(x)} \subset U_{\alpha(x)}$. Posons $A_k = \{x \in X : n(x) = k\}$ pour $k \in \mathbb{N}$. Alors $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$.

Pour construire un raffinement localement fini, on utilise une exhaustion compacte.

Puisque X est séparé et à base dénombrable, on peut construire une suite $(K_j)_{j \geq 1}$ de compacts tels que $K_j \subset \overset{\circ}{K}_{j+1}$ et $X = \bigcup_j K_j$. On pose $C_j = K_j \setminus \overset{\circ}{K}_{j-1}$ (avec $K_0 = \emptyset$). Chaque C_j est compact et contenu dans l'ouvert $W_j = \overset{\circ}{K}_{j+1} \setminus K_{j-2}$ (avec $K_{-1} = \emptyset$).

Pour chaque j , le recouvrement $(U_\alpha \cap W_j)_\alpha$ de C_j admet un sous-recouvrement fini $(V_{j,1}, \dots, V_{j,m_j})$ avec $V_{j,i} \subset W_j$. La famille $(V_{j,i})_{j,i}$ est un raffinement ouvert localement fini de $(U_\alpha)_\alpha$, car tout point de X possède un voisinage ne rencontrant qu'un nombre fini des W_j . $\square$

Remarque 1.5. La paracompacité est essentielle pour l'existence de partitions de l'unité, outil fondamental de la topologie différentielle (voir la efsec :partitions-unite).

1.2 Cartes locales et atlas

Définition 1.6 (Variété topologique). Une *variété topologique de dimension n* est un espace topologique M vérifiant :

- (i) M est séparé ;
- (ii) M est à base dénombrable ;
- (iii) M est *localement euclidien de dimension n* : pour tout $p \in M$, il existe un ouvert U contenant p , un ouvert $\widehat{U} \subset \mathbb{R}^n$ et un homéomorphisme $\varphi: U \rightarrow \widehat{U}$.

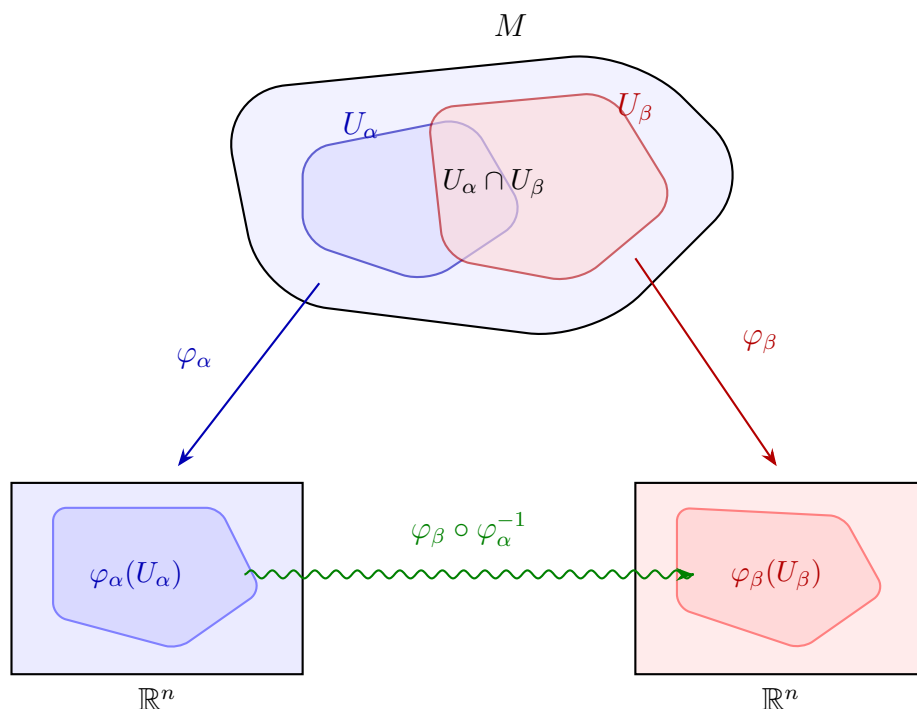
Définition 1.7 (Carte locale). Une *carte locale* (ou *carte*) sur une variété topologique M de dimension n est un couple (U, φ) où U est un ouvert de M et $\varphi: U \rightarrow \widehat{U} \subset \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme sur un ouvert $\widehat{U}$ de $\mathbb{R}^n$. On dit que U est le *domaine* de la carte et φ la *paramétrisation locale* (ou *application coordonnée*). Si $\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$, les fonctions $x^1, \dots, x^n: U \rightarrow \mathbb{R}$ sont appelées les *coordonnées locales* associées à la carte (U, φ) .

Définition 1.8 (Atlas). Un *atlas* sur une variété topologique M est une famille de cartes $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ telle que $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.

Définition 1.9 (Changement de cartes et atlas lisse). Soient $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ et (U_β, φ_β) deux cartes d'un atlas $\mathcal{A}$ sur M avec $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. L'*application de transition* (ou *changement de cartes*) est l'homéomorphisme

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta).$$

L'atlas $\mathcal{A}$ est dit C^∞ -lisse (ou simplement *lisse*) si toutes les applications de transition sont des difféomorphismes C^∞ entre ouverts de $\mathbb{R}^n$.


 FIGURE 1.1 – Atlas et changement de cartes sur une variété M .

Définition 1.10 (Compatibilité et atlas maximal). Deux atlas lisses $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sur M sont dits *compatibles* si $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ est encore un atlas lisse. La relation de compatibilité est une relation d'équivalence.

Un atlas lisse $\mathcal{A}$ est dit *maximal* s'il n'est contenu dans aucun atlas lisse strictement plus grand. Tout atlas lisse $\mathcal{A}$ est contenu dans un unique atlas maximal $\overline{\mathcal{A}}$, défini par :

$$\overline{\mathcal{A}} = \{(U, \varphi) \text{ carte sur } M : (U, \varphi) \text{ est compatible avec toute carte de } \mathcal{A}\}.$$

1.3 Structure différentiable

Définition 1.11 (Variété différentielle lisse). Une *variété différentielle lisse* (ou simplement *variété lisse*) de dimension n est un couple $(M, \overline{\mathcal{A}})$ où M est une variété topologique de dimension n et $\overline{\mathcal{A}}$ est un atlas maximal lisse sur M . L'atlas maximal $\overline{\mathcal{A}}$ est appelé la *structure lisse* (ou *structure différentiable*) de M .

En pratique, on spécifie une variété lisse en donnant un atlas lisse $\mathcal{A}$ quelconque ; la structure lisse sous-jacente est alors $\overline{\mathcal{A}}$.

Remarque 1.12. Par abus de notation, on écrira souvent M au lieu de $(M, \overline{\mathcal{A}})$ lorsque la structure lisse est claire du contexte. On parlera de variété lisse de dimension n , ou de n -variété lisse.

Remarque 1.13. Une même variété topologique peut admettre des structures lisses non difféomorphes. Le résultat célèbre de Milnor (1956) affirme que S^7 admet exactement 28 classes de structures lisses. En dimension 4, la situation est encore plus remarquable : $\mathbb{R}^4$ admet une infinité non dénombrable de structures lisses exotiques (Donaldson, Freedman).

1.4 Exemples fondamentaux

1.4.1 L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ et ses ouverts

Exemple 1.14 ($\mathbb{R}^n$ comme variété lisse). L'espace $\mathbb{R}^n$ muni de l'atlas à une seule carte $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, \text{Id}_{\mathbb{R}^n})\}$ est une variété lisse de dimension n . Il est séparé, à base dénombrable (les boules ouvertes à centre rationnel et rayon rationnel forment une base), et trivialement localement euclidien.

Exemple 1.15 (Ouverts de $\mathbb{R}^n$). Plus généralement, tout ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ est une variété lisse de dimension n , muni de l'atlas $\{(U, \iota)\}$ où $\iota: U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ est l'inclusion. Plus généralement encore, tout ouvert d'une variété lisse hérite naturellement d'une structure de variété lisse.

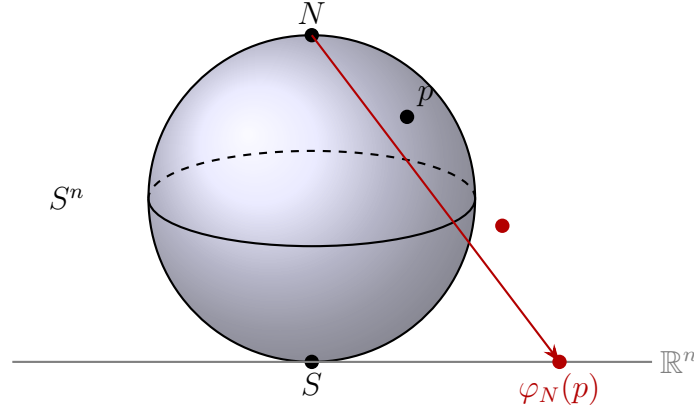
1.4.2 Les sphères S^n

Exemple 1.16 (La sphère S^n). La sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ est définie par

$$S^n = \left\{ x = (x^0, x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^n (x^i)^2 = 1 \right\}.$$

Elle est munie d'un atlas à deux cartes, les *projections stéréographiques* depuis le pôle nord $N = (1, 0, \dots, 0)$ et le pôle sud $S = (-1, 0, \dots, 0)$:

$$\begin{aligned} \varphi_N: S^n \setminus \{N\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n, & \varphi_N(x^0, x^1, \dots, x^n) &= \frac{1}{1 - x^0}(x^1, \dots, x^n), \\ \varphi_S: S^n \setminus \{S\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n, & \varphi_S(x^0, x^1, \dots, x^n) &= \frac{1}{1 + x^0}(x^1, \dots, x^n). \end{aligned}$$


 FIGURE 1.2 – Projection stéréographique de S^n depuis le pôle nord N .

Proposition 1.17 (Lissité de l'atlas stéréographique). *L'atlas $\mathcal{A} = \{(S^n \setminus \{N\}, \varphi_N), (S^n \setminus \{S\}, \varphi_S)\}$ est un atlas C^∞ -lisse sur S^n .*

Démonstration. L'intersection des domaines est $S^n \setminus \{N, S\}$, et les images par φ_N et φ_S de cet ensemble sont toutes deux $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Calculons le changement de cartes. Soit $y = \varphi_N(x) = \frac{1}{1-x^0}(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Alors

$$\|y\|^2 = \frac{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2}{(1-x^0)^2} = \frac{1-(x^0)^2}{(1-x^0)^2} = \frac{1+x^0}{1-x^0}.$$

D'autre part,

$$\varphi_S(x) = \frac{1}{1+x^0}(x^1, \dots, x^n) = \frac{1-x^0}{(1+x^0)(1-x^0)} \cdot (1-x^0) \cdot \frac{(x^1, \dots, x^n)}{1-x^0}.$$

Plus directement, on a

$$\varphi_S(x) = \frac{1}{1+x^0}(x^1, \dots, x^n) = \frac{1-x^0}{1-(x^0)^2}(x^1, \dots, x^n) = \frac{1}{\|y\|^2} y.$$

Ainsi, l'application de transition est

$$(\varphi_S \circ \varphi_N^{-1})(y) = \frac{y}{\|y\|^2}, \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

C'est l'*inversion* par rapport à la sphère unité, qui est un difféomorphisme C^∞ de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dans lui-même (chaque composante est une fraction rationnelle de dénominateur non nul). $\square$

1.4.3 Espaces projectifs

Exemple 1.18 (L'espace projectif réel $\mathbb{RP}^n$). L'espace projectif réel $\mathbb{RP}^n$ est l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^{n+1}$, c'est-à-dire le quotient

$$\mathbb{RP}^n = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim,$$

où $x \sim y$ si et seulement si $x = \lambda y$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On note $[x^0 : x^1 : \dots : x^n]$

la classe de $(x^0, x^1, \dots, x^n)$.

Pour $i = 0, 1, \dots, n$, posons $U_i = \{[x^0 : \dots : x^n] : x^i \neq 0\}$ et définissons

$$\varphi_i: U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad [x^0 : \dots : x^n] \longmapsto \left(\frac{x^0}{x^i}, \dots, \widehat{\frac{x^i}{x^i}}, \dots, \frac{x^n}{x^i} \right),$$

où le chapeau indique l'omission du terme $x^i/x^i = 1$. L'atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=0}^n$ est un atlas lisse sur $\mathbb{RP}^n$, ce qui en fait une variété lisse compacte de dimension n .

Vérifions la lissité des changements de cartes. Pour $i \neq j$, l'image $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ est l'ensemble des $(t^1, \dots, t^n) \in \mathbb{R}^n$ avec $t^j \neq 0$ (si $j < i$) ou $t^{j-1} \neq 0$ (si $j > i$, car la j -ème coordonnée est décalée). Par exemple, pour $i = 0$ et $j = 1$, on a $\varphi_0^{-1}(t^1, \dots, t^n) = [1 : t^1 : t^2 : \dots : t^n]$, donc

$$(\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1})(t^1, \dots, t^n) = \varphi_1([1 : t^1 : \dots : t^n]) = \left(\frac{1}{t^1}, \frac{t^2}{t^1}, \dots, \frac{t^n}{t^1} \right),$$

définie sur $\{t \in \mathbb{R}^n : t^1 \neq 0\}$. C'est une application C^∞ (fractions rationnelles de dénominateur non nul). Le cas général est analogue.

Exemple 1.19 (L'espace projectif complexe $\mathbb{CP}^n$). De manière analogue, l'espace projectif complexe est

$$\mathbb{CP}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim,$$

où $z \sim w$ si $z = \lambda w$ pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$. En identifiant $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, les cartes $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ définissent un atlas lisse, faisant de $\mathbb{CP}^n$ une variété lisse compacte de dimension réelle $2n$.

1.4.4 Le tore

Exemple 1.20 (Le tore $\mathbb{T}^n$). Le tore de dimension n est le quotient

$$\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n,$$

où $\mathbb{Z}^n$ agit par translations entières. La projection canonique $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ est un homéomorphisme local. Si $p = \pi(x)$ et U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant x et suffisamment petit pour que $\pi|_U$ soit injective (par exemple une boule ouverte de rayon $< 1/2$), alors $(\pi(U), (\pi|_U)^{-1})$ est une carte locale. L'atlas ainsi obtenu est lisse car les changements de cartes sont des translations par des vecteurs de $\mathbb{Z}^n$, qui sont des difféomorphismes C^∞ de $\mathbb{R}^n$.

Le tore $\mathbb{T}^n$ est compact (image continue du compact $[0, 1]^n$) et connexe.

Remarque 1.21. On a un difféomorphisme canonique $\mathbb{T}^n \cong (S^1)^n$, obtenu via l'identification $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ donnée par $t \mapsto e^{2\pi it}$. En particulier, $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ est le tore usuel, plongeable dans $\mathbb{R}^3$ par la paramétrisation

$$(\theta, \phi) \longmapsto ((R + r \cos \theta) \cos \phi, (R + r \cos \theta) \sin \phi, r \sin \theta),$$

avec $0 < r < R$.

1.4.5 Groupes de Lie classiques

Définition 1.22 (Groupe de Lie). Un *groupe de Lie* est un groupe G muni d'une structure de variété lisse telle que les applications

$$\begin{aligned}\mu: G \times G &\rightarrow G, & (g, h) &\mapsto gh, \\ \iota: G &\rightarrow G, & g &\mapsto g^{-1},\end{aligned}$$

soient lisses.

Exemple 1.23 ($GL(n, \mathbb{R})$). Le *groupe linéaire général* $GL(n, \mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices $n \times n$ inversibles à coefficients réels :

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}.$$

C'est un ouvert de $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ (car $\det$ est continue), donc une variété lisse de dimension n^2 . La multiplication matricielle est polynomiale en les coefficients, et l'inversion est donnée par la formule des cofacteurs, donc ces opérations sont lisses. Ainsi $GL(n, \mathbb{R})$ est un groupe de Lie de dimension n^2 .

Exemple 1.24 ($SL(n, \mathbb{R})$). Le *groupe spécial linéaire* est

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A = 1\} = \det^{-1}(\{1\}).$$

L'application $\det: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est lisse, et 1 est une valeur régulière de $\det$ restreinte à $GL(n, \mathbb{R})$ (on le montrera rigoureusement au chapitre 2 : applications-lisses via le théorème de la valeur régulière). Par conséquent, $SL(n, \mathbb{R})$ est une sous-variété lisse de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$, et c'est un groupe de Lie.

Exemple 1.25 ($SO(n)$). Le *groupe orthogonal* est $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^T A = I_n\}$. Considérons l'application $\Phi: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Sym}_n(\mathbb{R})$ définie par $\Phi(A) = A^T A$, où $\text{Sym}_n(\mathbb{R})$ est l'espace des matrices symétriques. L'espace $\text{Sym}_n(\mathbb{R})$ est de dimension $n(n+1)/2$. On montre que I_n est une valeur régulière de Φ , ce qui implique que $O(n) = \Phi^{-1}(I_n)$ est une sous-variété lisse de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension

$$\dim O(n) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Le *groupe spécial orthogonal* est la composante connexe de l'identité :

$$SO(n) = \{A \in O(n) : \det A = 1\}.$$

C'est un groupe de Lie connexe compact de dimension $n(n-1)/2$.

Exemple 1.26 ($SU(n)$). Le *groupe unitaire* $U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : A^*A = I_n\}$ (où $A^* = \overline{A}^T$) est une sous-variété lisse de $M_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{R}^{2n^2}$ de dimension n^2 . Le *groupe spécial unitaire*

$$SU(n) = \{A \in U(n) : \det A = 1\}$$

est un groupe de Lie compact connexe et simplement connexe de dimension $n^2 - 1$. En particulier, $SU(2)$ est difféomorphe à S^3 .

Remarque 1.27. Le difféomorphisme $SU(2) \cong S^3$ s'obtient en écrivant tout élément de $SU(2)$ sous la forme $\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ avec $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, et en identifiant $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ avec un point de S^3 .

1.4.6 Grassmanniennes

Exemple 1.28 (Grassmannienne $Gr(k, n)$). La *grassmannienne* $Gr(k, n)$ est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de $\mathbb{R}^n$. C'est une variété lisse compacte de dimension $k(n - k)$. On a $Gr(1, n + 1) \cong \mathbb{RP}^n$.

La structure de variété est définie comme suit. Soit $W \in Gr(k, n)$ et soit $W^\perp$ son complément orthogonal. Pour tout sous-espace V suffisamment proche de W (au sens où $V \cap W^\perp = \{0\}$), V est le graphe d'une unique application linéaire $A: W \rightarrow W^\perp$. Ceci définit une carte locale $\varphi_W: U_W \rightarrow \text{Hom}(W, W^\perp) \cong \mathbb{R}^{k(n-k)}$. Les changements de cartes sont lisses, ce qui munit $Gr(k, n)$ d'une structure de variété lisse.

1.5 Variétés avec bord

Définition 1.29 (Demi-espace supérieur). Le *demi-espace supérieur* de $\mathbb{R}^n$ est

$$\mathbb{H}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n \geq 0\}.$$

Son *bord* est $\partial\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x^n = 0\} \cong \mathbb{R}^{n-1}$ et son *intérieur* est $\text{Int}(\mathbb{H}^n) = \{x \in \mathbb{R}^n : x^n > 0\}$.

Définition 1.30 (Variété à bord). Une *variété lisse à bord de dimension n* est un espace topologique séparé à base dénombrable M tel que tout point possède un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{H}^n$, muni d'un atlas lisse (les changements de cartes étant des difféomorphismes entre ouverts de $\mathbb{H}^n$).

Le *bord* de M , noté ∂M , est l'ensemble des points de M envoyés sur $\partial\mathbb{H}^n$ par une (et donc toute) carte locale. L'*intérieur* de M est $\text{Int}(M) = M \setminus \partial M$.

Proposition 1.31. Soit M une variété lisse à bord de dimension n . Alors :

- (i) ∂M est une variété lisse (sans bord) de dimension $n - 1$;
- (ii) $\text{Int}(M)$ est une variété lisse (sans bord) de dimension n ;

(iii) $\partial(\partial M) = \emptyset$.

Démonstration. (i) Si (U, φ) est une carte de M avec $U \cap \partial M \neq \emptyset$, alors $\varphi(U \cap \partial M) = \varphi(U) \cap \partial \mathbb{H}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1} \cong \partial \mathbb{H}^n$. Les restrictions de ces cartes à ∂M forment un atlas lisse. (ii) est analogue, les cartes intérieures ayant leur image dans $\text{Int}(\mathbb{H}^n) \cong \mathbb{R}^n$. (iii) est immédiat car les cartes de ∂M ont leur image dans $\mathbb{R}^{n-1}$ (pas dans $\mathbb{H}^{n-1}$). $\square$

Exemple 1.32. Voici des exemples classiques de variétés à bord :

- (a) Le disque fermé $\overline{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ est une variété à bord de dimension n , avec $\partial \overline{D}^n = S^{n-1}$.
- (b) Le cylindre $S^1 \times [0, 1]$ est une variété à bord de dimension 2, avec $\partial(S^1 \times [0, 1]) = S^1 \times \{0\} \sqcup S^1 \times \{1\}$.
- (c) Le ruban de Möbius est une variété à bord de dimension 2, dont le bord est homéomorphe à S^1 .

1.6 Partitions de l'unité

Les partitions de l'unité sont un outil technique fondamental en topologie différentielle. Elles permettent de « recoller » des constructions locales en des objets globaux.

Définition 1.33 (Support). Soit $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Le *support* de f est

$$\text{supp}(f) = \overline{\{p \in M : f(p) \neq 0\}}.$$

Définition 1.34 (Partition de l'unité). Soit $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert d'une variété lisse M . Une *partition de l'unité subordonnée* à ce recouvrement est une famille $(\psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ de fonctions lisses $\psi_\alpha: M \rightarrow [0, 1]$ telle que :

- (i) $\text{supp}(\psi_\alpha) \subset U_\alpha$ pour tout $\alpha \in A$;
- (ii) la famille $(\text{supp}(\psi_\alpha))_{\alpha \in A}$ est localement finie ;
- (iii) $\sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha(p) = 1$ pour tout $p \in M$ (la somme est bien définie grâce à (ii)).

Lemme 1.35 (Fonction bosse lisse). Il existe une fonction lisse $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ à support compact, telle que $\rho(x) > 0$ pour $\|x\| < 1$ et $\rho(x) = 0$ pour $\|x\| \geq 1$.

Démonstration. On considère la fonction lisse $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$h(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

Cette fonction est C^∞ sur $\mathbb{R}$ entier (toutes les dérivées en 0 sont nulles). La fonction $g(t) = h(t)/(h(t) + h(1-t))$ est lisse, vérifie $g(t) = 0$ pour $t \leq 0$, $g(t) = 1$ pour $t \geq 1$, et $0 \leq g(t) \leq 1$. On pose alors

$$\rho(x) = g(1 - \|x\|^2).$$

C'est une fonction lisse (car $\|x\|^2$ est lisse et g est lisse), strictement positive pour $\|x\| < 1$ et nulle pour $\|x\| \geq 1$. $\square$

Théorème 1.36 (Existence de partitions de l'unité). *Soit M une variété lisse (sans bord ou à bord) et $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert de M . Alors il existe une partition de l'unité lisse subordonnée à $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$.*

Démonstration. La preuve se décompose en plusieurs étapes.

Étape 1 : Recouvrement localement fini par des boules coordonnées. Puisque M est à base dénombrable, elle possède une exhaustion par des compacts : il existe une suite $(K_j)_{j \geq 1}$ de compacts avec $K_j \subset \overset{\circ}{K}_{j+1}$ et $M = \bigcup_j K_j$. On pose $A_j = K_j \setminus \overset{\circ}{K}_{j-1}$ (compact) et $W_j = \overset{\circ}{K}_{j+1} \setminus K_{j-2}$ (ouvert contenant A_j), avec la convention $K_0 = K_{-1} = \emptyset$.

Pour chaque point $p \in A_j$, choisissons $\alpha(p) \in A$ avec $p \in U_{\alpha(p)}$, et une carte (V_p, φ_p) centrée en p telle que $V_p \subset U_{\alpha(p)} \cap W_j$ et $\varphi_p(V_p)$ contienne la boule unité fermée $\overline{B}(0, 1)$. Posons $B_p = \varphi_p^{-1}(B(0, 1))$. Les ouverts B_p , pour $p \in A_j$, recouvrent le compact A_j , donc on peut en extraire un sous-recouvrement fini $B_{p_1^j}, \dots, B_{p_{m_j}^j}$. La collection $(B_{p_i^j})_{j,i}$ est un recouvrement localement fini de M (car chaque W_j ne rencontre qu'un nombre fini de bandes A_k).

Étape 2 : Fonctions bosses. Pour chaque (j, i) , posons $f_{j,i} = \rho \circ \varphi_{p_i^j}$ (étendue par 0 en dehors de $V_{p_i^j}$), où ρ est la fonction bosse du

eflem :fonction-bosse. Alors $f_{j,i}$ est lisse, à support dans $V_{p_i^j} \subset U_{\alpha(p_i^j)}$, et strictement positive sur $B_{p_i^j}$.

Étape 3 : Normalisation. La somme $\sigma(p) = \sum_{j,i} f_{j,i}(p)$ est bien définie et lisse (somme localement finie de fonctions lisses), et $\sigma(p) > 0$ pour tout $p \in M$ car les $B_{p_i^j}$ recouvrent M . On pose $\tilde{\psi}_{j,i} = f_{j,i}/\sigma$.

Étape 4 : Subordination. Pour chaque $\alpha \in A$, on pose

$$\psi_\alpha = \sum_{\substack{(j,i) \\ \alpha(p_i^j) = \alpha}} \tilde{\psi}_{j,i}.$$

Alors $(\psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une partition de l'unité lisse subordonnée à $(U_\alpha)_\alpha$. $\square$

Corollaire 1.37. *Soit M une variété lisse. Alors :*

- (i) *Pour tout fermé $F \subset M$ et tout ouvert $U \supset F$, il existe une fonction lisse $f: M \rightarrow [0, 1]$ avec $f|_F = 1$ et $\text{supp}(f) \subset U$.*
- (ii) *Toute fonction continue sur M peut être uniformément approchée par des fonctions lisses.*

Démonstration. (i) Le recouvrement $\{U, M \setminus F\}$ de M admet une partition de l'unité subordonnée $\{\psi_1, \psi_2\}$ avec $\text{supp}(\psi_1) \subset U$ et $\text{supp}(\psi_2) \subset M \setminus F$. Alors $f = \psi_1$ satisfait $\text{supp}(f) \subset U$ et, pour $p \in F$, $\psi_2(p) = 0$ donc $f(p) = \psi_1(p) = 1$.

(ii) découle de (i) par un argument standard de régularisation à l'aide de partitions de l'unité. $\square$

1.7 Exercices

Exercice 1.1 (★★). Montrer que l'atlas stéréographique de S^1 (deux cartes) est compatible avec l'atlas formé des quatre cartes obtenues en projetant les demi-cercles ouverts sur les axes de coordonnées. En déduire qu'ils définissent la même structure lisse.

Exercice 1.2 (★★). Montrer que la projection canonique $\pi: S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ (qui identifie les points antipodaux) est un homéomorphisme local. En déduire que $\mathbb{RP}^n$ est compact et que l'atlas défini dans l'ex :RPn est bien un atlas lisse.

Exercice 1.3 (★★). Soient M et N deux variétés lisses de dimensions m et n respectivement. Montrer que $M \times N$ admet une structure naturelle de variété lisse de dimension $m + n$, avec l'atlas $\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}$ où $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ et $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ sont des atlas de M et N .

Exercice 1.4 (★★). Montrer que $\mathbb{CP}^1$ est difféomorphe à S^2 . *Indication* : Utiliser les deux cartes standard de $\mathbb{CP}^1$ et l'atlas stéréographique de S^2 , et construire explicitement un difféomorphisme.

Exercice 1.5 (★★★). Montrer que $SO(n)$ est connexe pour tout $n \geq 1$. *Indication* : Considérer la fibration $SO(n) \rightarrow S^{n-1}$ donnée par la dernière colonne, et procéder par récurrence sur n .

Exercice 1.6 (★★★). Montrer que la grassmannienne $Gr(k, n)$ est compacte. *Indication* : Montrer que $Gr(k, n)$ est un quotient du groupe compact $O(n)$.

Exercice 1.7 (★★). Soit M une variété lisse. En utilisant les partitions de l'unité, montrer que M admet une métrique riemannienne, c'est-à-dire un produit scalaire lisse sur chaque espace tangent, variant de manière lisse avec le point. *Remarque* : On utilisera la notion d'espace tangent du

efchap :applications-lisses.

Exercice 1.8 (★★★). Soit M une variété lisse à bord. Le *double* de M est l'espace topologique $D(M) = (M \sqcup M) / \sim$, où l'on identifie les deux copies de ∂M . Montrer que $D(M)$ admet une structure de variété lisse (sans bord) de même dimension que M . *Indication* : Utiliser un collier de ∂M dans M , c'est-à-dire un difféomorphisme $\partial M \times [0, 1) \rightarrow U$ où U est un voisinage ouvert de ∂M dans M .

Exercice 1.9 (★★). Soit G un groupe de Lie et H un sous-groupe fermé de G . Admettre que H est une sous-variété lisse de G (théorème de Cartan). En déduire que les groupes suivants sont des groupes de Lie, et calculer leur dimension :

- (a) le groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles ;
- (b) le groupe symplectique $Sp(2n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(2n, \mathbb{R}) : A^T J A = J\}$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Chapitre 2

Applications lisses et difféomorphismes

2.1 Applications lisses entre variétés

Définition 2.1 (Application lisse). Soient M et N des variétés lisses de dimensions m et n respectivement. Une application continue $f: M \rightarrow N$ est dite *lisse* (ou C^∞) si, pour toute carte (U, φ) de M et toute carte (V, ψ) de N avec $f(U) \cap V \neq \emptyset$, l'application

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

est lisse (au sens usuel de l'analyse dans $\mathbb{R}^n$). L'application $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est appelée la *représentation locale* (ou *expression en coordonnées*) de f .

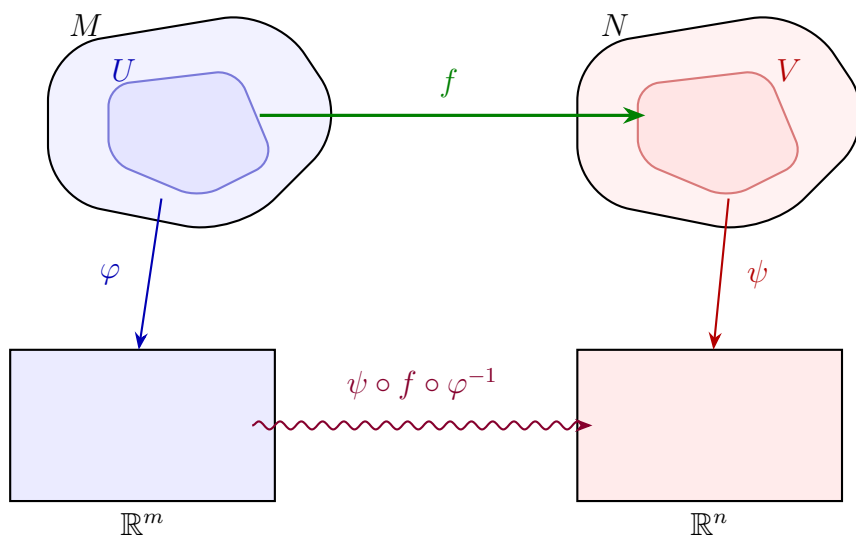


FIGURE 2.1 – Application lisse entre variétés et sa représentation locale.

Exemple 2.2. Considérons l'application $f: S^1 \rightarrow S^1$ définie par $f(e^{i\theta}) = e^{2i\theta}$ (application de degré 2). Pour vérifier que f est lisse, on utilise les cartes stéréographiques. Si $\varphi_N: S^1 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}$ est la projection stéréographique, alors la représentation locale est

$$(\varphi_N \circ f \circ \varphi_N^{-1})(t) = \frac{2t}{1-t^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^2 + \dots},$$

qui est une fonction rationnelle lisse sur son domaine de définition.

Remarque 2.3. La condition de lissité ne dépend pas du choix des cartes. En effet, si (U', φ') et (V', ψ') sont d'autres cartes, alors

$$\psi' \circ f \circ (\varphi')^{-1} = (\psi' \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ (\varphi')^{-1}),$$

qui est une composée d'applications lisses (les changements de cartes étant des difféomorphismes lisses par définition de la structure lisse).

Proposition 2.4 (Propriétés élémentaires). (i) L'application identité $\text{Id}_M: M \rightarrow M$ est lisse.

(ii) Si $f: M \rightarrow N$ et $g: N \rightarrow P$ sont lisses, alors $g \circ f: M \rightarrow P$ est lisse.

(iii) Les inclusions d'ouverts $U \hookrightarrow M$ sont lisses.

(iv) Les projections $M \times N \rightarrow M$ et $M \times N \rightarrow N$ sont lisses.

(v) Une application $f: M \rightarrow N$ est lisse si et seulement si, pour tout $p \in M$, il existe des cartes (U, φ) autour de p et (V, ψ) autour de $f(p)$ avec $f(U) \subset V$ telles que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ soit lisse.

Démonstration. Les points (i)–(iv) sont des vérifications directes à partir de la définition et des propriétés de lissité dans $\mathbb{R}^n$.

(v) Le sens direct est clair. Pour la réciproque, soient (U', φ') et (V', ψ') deux cartes quelconques. La lissité de $\psi' \circ f \circ (\varphi')^{-1}$ au voisinage d'un point $\varphi'(p)$ résulte de l'écriture

$$\psi' \circ f \circ (\varphi')^{-1} = (\psi' \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ (\varphi')^{-1})$$

valable au voisinage de $\varphi'(p)$, chaque facteur étant lisse. □

Notation 2.5. On note $C^\infty(M, N)$ l'ensemble des applications lisses de M dans N . Lorsque $N = \mathbb{R}$, on note simplement $C^\infty(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$, qui est une $\mathbb{R}$ -algèbre commutative pour les opérations ponctuelles.

Remarque 2.6 (Catégorie C^∞). Les variétés lisses et les applications lisses forment une catégorie, notée **Man** ou **Diff**. Les objets sont les variétés lisses, les morphismes sont les applications lisses, la composition est la composition usuelle (lisse par la proposition précédente), et l'identité est Id_M .

2.2 Difféomorphismes

Définition 2.7 (Difféomorphisme). Soient M et N deux variétés lisses. Un *difféomorphisme* de M sur N est une bijection $f: M \rightarrow N$ telle que f et f^{-1} soient lisses. On dit que M et N sont *difféomorphes* et on note $M \cong N$ ou $M \approx N$.

Remarque 2.8. La notion de difféomorphisme est la notion d'isomorphisme dans la catégorie des variétés lisses. Toute propriété définie en termes de la structure lisse est invariante par difféomorphisme : dimension, orientabilité, compacité, connexité, etc.

Exemple 2.9. (a) L'application $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ est une bijection lisse, mais ce n'est *pas* un difféomorphisme car $f^{-1}(y) = y^{1/3}$ n'est pas dérivable en 0.
 (b) Toute boule ouverte $B(0, r) \subset \mathbb{R}^n$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$ via $x \mapsto x/\sqrt{r^2 - \|x\|^2}$.
 (c) $SU(2) \cong S^3$ (cf. efrem :SU2-S3).
 (d) $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$ (cf. efexo :CP1-S2).

Définition 2.10 (Groupe des difféomorphismes). Pour une variété lisse M , le *groupe des difféomorphismes* de M est

$$\text{Diff}(M) = \{f: M \rightarrow M : f \text{ est un difféomorphisme}\},$$

muni de la loi de composition. C'est un groupe (en général de dimension infinie).

2.3 Théorème d'inversion locale

Définition 2.11 (Différentielle d'une application lisse). Soit $f: M \rightarrow N$ une application lisse et $p \in M$. La *différentielle* (ou *application tangente*) de f en p est l'application linéaire

$$df_p: T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$$

définie comme suit. En coordonnées locales (U, φ) autour de p et (V, ψ) autour de $f(p)$, si $\hat{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est la représentation locale, alors

$$df_p = (d\psi_{f(p)})^{-1} \circ D\hat{f}_{\varphi(p)} \circ d\varphi_p,$$

où $D\hat{f}_{\varphi(p)}$ est la matrice jacobienne usuelle. En coordonnées, si $\varphi = (x^1, \dots, x^m)$ et $\psi = (y^1, \dots, y^n)$, alors

$$df_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \hat{f}^j}{\partial x^i}(\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{f(p)}.$$

Remarque 2.12. Le *rang* de f en p est $\text{rg}_p(f) = \text{rg}(df_p) = \dim(\text{im}(df_p))$. C'est le rang de la matrice jacobienne de toute représentation locale de f en p .

Théorème 2.13 (Inversion locale — version euclidienne). Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application C^∞ . Si la matrice jacobienne Df_a est inversible en un point $a \in U$, alors il existe des voisinages ouverts V de a et W de $f(a)$ tels que $f|_V: V \rightarrow W$ soit un difféomorphisme C^∞ .

Théorème 2.14 (Inversion locale — version variétés). *Soient M et N des variétés lisses de même dimension n , et $f: M \rightarrow N$ une application lisse. Si $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ est un isomorphisme en un point $p \in M$, alors il existe des voisinages ouverts U de p et V de $f(p)$ tels que $f|_U: U \rightarrow V$ soit un difféomorphisme.*

Démonstration. Choisissons des cartes (U_0, φ) autour de p et (V_0, ψ) autour de $f(p)$ avec $f(U_0) \subset V_0$. La représentation locale $\hat{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ vérifie $D\hat{f}_{\varphi(p)}$ inversible (car c'est la matrice de df_p dans les bases coordonnées). Par le

efthm :inversion-locale-Rn, il existe des voisinages ouverts $\hat{U}$ de $\varphi(p)$ et $\hat{V}$ de $\psi(f(p))$ tels que $\hat{f}|_{\hat{U}}: \hat{U} \rightarrow \hat{V}$ soit un difféomorphisme. Posons $U = \varphi^{-1}(\hat{U})$ et $V = \psi^{-1}(\hat{V})$. Alors $f|_U = \psi^{-1} \circ \hat{f} \circ \varphi|_U: U \rightarrow V$ est un difféomorphisme (composée de difféomorphismes). $\square$

2.4 Théorème des fonctions implicites

Théorème 2.15 (Fonctions implicites — version euclidienne). *Soient $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ un ouvert et $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application C^∞ . Soit $(a, b) \in U$ avec $F(a, b) = 0$. Si la matrice $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \in M_n(\mathbb{R})$ (dérivée partielle par rapport aux n dernières variables) est inversible, alors il existe des voisinages ouverts V de a dans $\mathbb{R}^m$ et W de b dans $\mathbb{R}^n$ et une unique application lisse $g: V \rightarrow W$ tels que*

$$\{(x, y) \in V \times W : F(x, y) = 0\} = \{(x, g(x)) : x \in V\}.$$

Théorème 2.16 (Fonctions implicites — version variétés). *Soient M et N des variétés lisses de dimensions m et n respectivement, avec $m \geq n$. Soit $f: M \rightarrow N$ une application lisse et $q \in N$ une valeur régulière de f (c'est-à-dire que df_p est surjective pour tout $p \in f^{-1}(q)$). Alors $f^{-1}(q)$, s'il est non vide, est une sous-variété lisse de M de dimension $m - n$.*

Démonstration. Soit $p \in f^{-1}(q)$. Choisissons des cartes $(\tilde{U}, \varphi)$ autour de p et $(\tilde{V}, \psi)$ autour de q avec $\psi(q) = 0$ et $f(\tilde{U}) \subset \tilde{V}$. La représentation locale $\hat{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ vérifie $\hat{f}(\varphi(p)) = 0$ et $D\hat{f}_{\varphi(p)}$ est surjective (de rang n).

Quitte à réordonner les coordonnées de $\mathbb{R}^m$, on peut supposer que les n dernières colonnes de $D\hat{f}_{\varphi(p)}$ forment une matrice inversible. On écrit $\varphi(p) = (a, b)$ avec $a \in \mathbb{R}^{m-n}$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Par le

efthm :fonctions-implicites-Rn, il existe un voisinage V_0 de a et une application lisse $g: V_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ tels que $\hat{f}(x', x'') = 0$ localement si et seulement si $x'' = g(x')$.

L'application $\Phi: V_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x' \mapsto (x', g(x'))$ est un plongement lisse dont l'image est $\hat{f}^{-1}(0) \cap (V_0 \times \mathbb{R}^n)$. En revenant sur la variété, l'application $\varphi^{-1} \circ \Phi$ fournit une carte de $f^{-1}(q)$ au voisinage de p , montrant que $f^{-1}(q)$ est une sous-variété de dimension $m - n$. $\square$

Corollaire 2.17 (Théorème de la valeur régulière). *Soit $f: M \rightarrow N$ une application lisse entre variétés lisses, avec $\dim M \geq \dim N$. Si $q \in N$ est une valeur régulière de f , alors $f^{-1}(q)$ est soit vide, soit une sous-variété fermée de M de codimension $\dim N$.*

Exemple 2.18. La sphère $S^{n-1} = f^{-1}(1)$ où $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|^2$. On a $df_x(h) = 2\langle x, h \rangle$. Pour $x \neq 0$, df_x est surjective, donc 1 est une valeur régulière. Par le efcor :valeur-reguliere, S^{n-1} est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - 1$.

2.5 Immersions et submersions

Définition 2.19 (Immersion, submersion). Soit $f: M \rightarrow N$ une application lisse.

- (i) f est une *immersion* si df_p est injective pour tout $p \in M$ (rang = dim M partout).
- (ii) f est une *submersion* si df_p est surjective pour tout $p \in M$ (rang = dim N partout).
- (iii) f est un *difféomorphisme local* si df_p est un isomorphisme pour tout $p \in M$ (nécessairement dim $M = \dim N$).

Remarque 2.20. Pour qu'une immersion $f: M \rightarrow N$ existe, il faut $\dim M \leq \dim N$. Pour qu'une submersion existe, il faut $\dim M \geq \dim N$. Un difféomorphisme local nécessite $\dim M = \dim N$.

Définition 2.21 (Plongement). Une *immersion injective* $f: M \rightarrow N$ est appelée un *plongement*^a si f est un homéomorphisme de M sur $f(M)$ (muni de la topologie induite). L'image $f(M)$ est alors une *sous-variété* (au sens plongé) de N .

a. On dit aussi *plongement lisse* ou *embedding*.

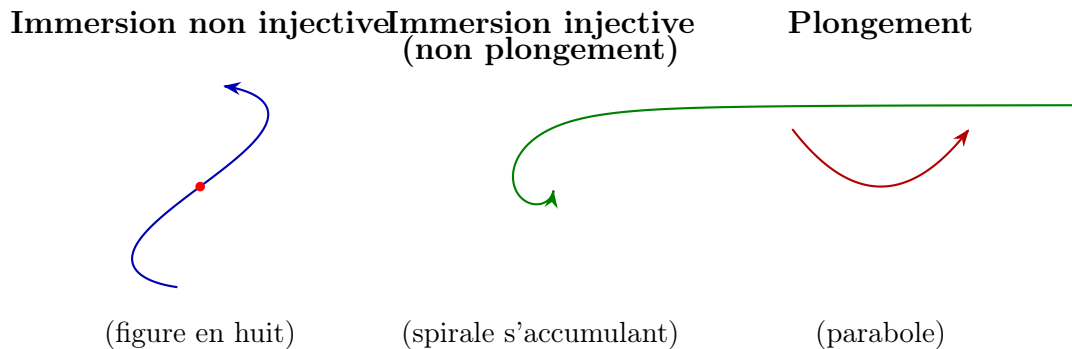


FIGURE 2.2 – Immersion, immersion injective (non plongement) et plongement.

Théorème 2.22 (Forme locale des immersions). Soit $f: M^m \rightarrow N^n$ une immersion (avec $m \leq n$) et $p \in M$. Alors il existe des cartes (U, φ) autour de p et (V, ψ) autour de $f(p)$ telles que

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0).$$

Autrement dit, toute immersion est localement l'inclusion canonique $\mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$.

Démonstration. Choisissons des cartes $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ autour de p et $(\tilde{V}, \tilde{\psi})$ autour de $f(p)$. Posons $\hat{f} = \tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ et $a = \tilde{\varphi}(p)$. Puisque f est une immersion, $D\hat{f}_a$ est injective, donc de rang m . Quitte à réordonner les coordonnées de $\mathbb{R}^n$, on peut supposer que les m premières lignes de $D\hat{f}_a$ forment une matrice inversible.

Écrivons $\hat{f}(x) = (\hat{f}_1(x), \hat{f}_2(x))$ avec $\hat{f}_1: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $\hat{f}_2: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$. La matrice $D(\hat{f}_1)_a$ est inversible. Définissons $\Psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$\Psi(y_1, y_2) = (\hat{f}_1^{-1}(y_1), y_2 - \hat{f}_2(\hat{f}_1^{-1}(y_1)))$$

localement autour de $\hat{f}(a)$ (en utilisant l'inversion locale pour $\hat{f}_1$). Alors

$$(\Psi \circ \hat{f})(x) = (\hat{f}_1^{-1}(\hat{f}_1(x)), \hat{f}_2(x) - \hat{f}_2(x)) = (x, 0).$$

On pose $\varphi = \tilde{\varphi}|$ et $\psi = \Psi \circ \tilde{\psi}$ (sur des domaines restreints appropriés). □

Théorème 2.23 (Forme locale des submersions). *Soit $f: M^m \rightarrow N^n$ une submersion (avec $m \geq n$) et $p \in M$. Alors il existe des cartes (U, φ) autour de p et (V, ψ) autour de $f(p)$ telles que*

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^n).$$

Autrement dit, toute submersion est localement une projection canonique $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Démonstration. Choisissons des cartes $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ autour de p et $(\tilde{V}, \tilde{\psi})$ autour de $f(p)$, et posons $\hat{f} = \tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}$, $a = \tilde{\varphi}(p)$. Puisque f est une submersion, $D\hat{f}_a$ est surjective de rang n . Quitte à réordonner les coordonnées de $\mathbb{R}^m$, les n premières colonnes de $D\hat{f}_a$ forment une matrice inversible.

Définissons $\Phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ par

$$\Phi(x) = (\hat{f}(x), x^{n+1}, \dots, x^m).$$

Alors $D\Phi_a$ est inversible (sa matrice est triangulaire par blocs avec des blocs diagonaux inversibles). Par le théorème d'inversion locale, Φ est un difféomorphisme local autour de a . On a

$$(\hat{f} \circ \Phi^{-1})(y^1, \dots, y^m) = (y^1, \dots, y^n),$$

car la première composante de Φ est exactement $\hat{f}$. On pose $\varphi = \Phi \circ \tilde{\varphi}$ et $\psi = \tilde{\psi}$. □

Corollaire 2.24. *Toute submersion est une application ouverte.*

Démonstration. La projection canonique $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est ouverte. Par la forme locale des submersions, une submersion est localement ouverte, donc ouverte. □

Corollaire 2.25. *Soit $f: M \rightarrow N$ une submersion et $q \in N$. Alors $f^{-1}(q)$ est une sous-variété lisse fermée de M de dimension $\dim M - \dim N$.*

Démonstration. Comme f est une submersion, q est automatiquement une valeur régulière. Le résultat découle du efhm : fonctions-implicites. La fermeture provient de la continuité de f . □

2.6 Théorème de rang constant

Théorème 2.26 (Rang constant). *Soit $f: M^m \rightarrow N^n$ une application lisse de rang constant r (c'est-à-dire $\text{rg}_p(f) = r$ pour tout $p \in M$). Alors pour tout $p \in M$, il existe des cartes (U, φ) autour de p et (V, ψ) autour de $f(p)$ telles que*

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0).$$

Démonstration. Choisissons des cartes et posons $\hat{f} = \psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1}$ avec $\hat{f}(0) = 0$ (quitte à translater). Puisque $\text{rg}(D\hat{f}_0) = r$, quitte à permuter les coordonnées, les r premières lignes et r premières colonnes de $D\hat{f}_0$ forment une matrice inversible. Écrivons $x = (x', x'') \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r}$ et $\hat{f}(x) = (P(x), Q(x))$ avec $P: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^r$ et $Q: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n-r}$.

Premier changement de coordonnées (dans la source). Posons $\Phi(x', x'') = (P(x', x''), x'')$. Alors $D\Phi_0$ est inversible (bloc triangulaire), donc Φ est un difféomorphisme local. Dans les nouvelles coordonnées $u = \Phi(x)$, on a

$$(\hat{f} \circ \Phi^{-1})(u', u'') = (u', \tilde{Q}(u', u''))$$

pour une certaine fonction lisse $\tilde{Q}$. La condition de rang constant r implique que $D_{u''}\tilde{Q} = 0$ identiquement, donc $\tilde{Q}(u', u'') = \tilde{Q}(u', 0) =: R(u')$ ne dépend que de u' .

Second changement de coordonnées (dans le but). Posons $\Psi(y', y'') = (y', y'' - R(y'))$. Alors $D\Psi_0$ est inversible et

$$(\Psi \circ \hat{f} \circ \Phi^{-1})(u', u'') = (u', 0).$$

On obtient les cartes cherchées par composition. □

Remarque 2.27. Les théorèmes de forme locale des immersions et submersions (efthm :forme-locale-immersion, thm :forme-locale-submersion) sont des cas particuliers du théorème de rang constant, avec $r = m$ et $r = n$ respectivement.

2.7 Exemples d'applications lisses

2.7.1 Projections et inclusions

Exemple 2.28 (Projection canonique). La projection $\pi: M \times N \rightarrow M$, $(p, q) \mapsto p$ est une submersion surjective. Sa différentielle en (p, q) est la projection $T_{(p,q)}(M \times N) \cong T_p M \oplus T_q N \rightarrow T_p M$.

Exemple 2.29 (Inclusion de sous-variété). Si $S \subset M$ est une sous-variété, l'inclusion $\iota: S \hookrightarrow M$ est un plongement. Sa différentielle $d\iota_p: T_p S \rightarrow T_p M$ est l'injection canonique de $T_p S$ dans $T_p M$ (identifiant $T_p S$ à un sous-espace de $T_p M$).

2.7.2 L'application de Hopf

Exemple 2.30 (Fibration de Hopf). L'application de Hopf est l'application $h: S^3 \rightarrow S^2$ définie comme suit. On identifie $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ par $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$, et $S^2 \cong \mathbb{CP}^1$ via la projection stéréographique. On pose

$$h(z_1, z_2) = [z_1 : z_2] \in \mathbb{CP}^1 \cong S^2.$$

En coordonnées réelles, si $z_1 = x_0 + ix_1$ et $z_2 = x_2 + ix_3$, on a

$$h(x_0, x_1, x_2, x_3) = (2(x_0x_2 + x_1x_3), 2(x_1x_2 - x_0x_3), x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2).$$

Proposition 2.31. *L'application de Hopf $h: S^3 \rightarrow S^2$ est une submersion surjective. Pour tout $p \in S^2$, la fibre $h^{-1}(p)$ est difféomorphe à S^1 .*

Démonstration. La surjectivité est claire : pour $[w_1 : w_2] \in \mathbb{CP}^1$, le point $(w_1, w_2)/\|(w_1, w_2)\| \in S^3$ est dans la préimage.

Pour la submersion, il suffit de vérifier que le rang est 2 en tout point. En utilisant les cartes de S^3 et S^2 , on calcule la matrice jacobienne et on vérifie que son rang est 2 (utilisant la contrainte $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$).

La fibre au-dessus de $[w_1 : w_2]$ est $\{e^{i\theta}(w_1, w_2)/\|(w_1, w_2)\| : \theta \in [0, 2\pi)\} \cong S^1$. $\square$

2.7.3 Difféomorphismes locaux

Exemple 2.32. (a) L'application $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto e^x$ est un difféomorphisme (global).

(b) L'application $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $t \mapsto e^{2\pi it}$ est un difféomorphisme local et une submersion, mais pas un difféomorphisme global (elle n'est pas injective).

(c) La projection $\pi: S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ (quotient par l'antipodie) est un difféomorphisme local (revêtement double).

Proposition 2.33. *Soit $f: M \rightarrow N$ une application lisse entre variétés de même dimension. Alors f est un difféomorphisme local si et seulement si df_p est un isomorphisme pour tout $p \in M$.*

Démonstration. Le sens direct est clair. La réciproque est le théorème d'inversion locale (efthm :inversion-locale). $\square$

Proposition 2.34. *Soit $f: M \rightarrow N$ une application lisse bijective entre variétés de même dimension. Si f est une immersion (ou, de manière équivalente, une submersion), alors f est un difféomorphisme.*

Démonstration. Si $\dim M = \dim N = n$ et f est une immersion, alors df_p est injective de $T_p M$ dans $T_{f(p)} N$, deux espaces de dimension n , donc df_p est un isomorphisme. Par le théorème d'inversion locale, f est un difféomorphisme local. Comme f est bijective et

continue, f^{-1} est continue (toute bijection continue d'un espace compact vers un espace séparé est un homéomorphisme, et dans le cas non compact, l'inversion locale fournit directement la lissité de f^{-1} point par point). Donc f^{-1} est lisse. $\square$

2.8 Diagrammes commutatifs et catégorie C^∞

La structure catégorielle de **Man** se manifeste naturellement par des diagrammes commutatifs.

Exemple 2.35. Soit G un groupe qui agit librement et proprement sur une variété M . Alors l'espace quotient M/G admet une unique structure de variété lisse telle que la projection $\pi: M \rightarrow M/G$ soit une submersion. Si $f: M \rightarrow N$ est une application lisse G -invariante, alors il existe une unique application lisse $\bar{f}: M/G \rightarrow N$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ M/G & & \end{array}$$

Exemple 2.36. Le produit de variétés satisfait la propriété universelle suivante : pour toutes applications lisses $f: P \rightarrow M$ et $g: P \rightarrow N$, il existe une unique application lisse $(f, g): P \rightarrow M \times N$ telle que

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & f \swarrow & \downarrow (f,g) & \searrow g & \\ M & \xleftarrow{\pi_M} & M \times N & \xrightarrow{\pi_N} & N \end{array}$$

commute.

2.9 Exercices

Exercice 2.1 ($\star\star$). Soient $f: M \rightarrow N$ et $g: N \rightarrow P$ des applications lisses.

- (a) Montrer que si f et g sont des immersions, alors $g \circ f$ est une immersion.
- (b) Montrer que si f et g sont des submersions, alors $g \circ f$ est une submersion.
- (c) Montrer que si $g \circ f$ est une immersion, alors f est une immersion.
- (d) Montrer que si $g \circ f$ est une submersion, alors g est une submersion.

Exercice 2.2 ($\star\star$). Soit $f: M \rightarrow N$ une application lisse. Montrer que le graphe

$$\Gamma_f = \{(p, f(p)) : p \in M\} \subset M \times N$$

est une sous-variété lisse de $M \times N$, difféomorphe à M .

Exercice 2.3 ($\star\star$). Montrer que l'application $\det: \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ est une submersion. En déduire que $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(1)$ est une sous-variété lisse de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ de codimension 1. *Indication* : calculer $d(\det)_A(H) = \det(A) \cdot \mathrm{tr}(A^{-1}H)$.

Exercice 2.4 (***). Soit $h: S^3 \rightarrow S^2$ l'application de Hopf.

- (a) Montrer en détail que h est lisse.
- (b) Calculer $dh_{(1,0)}$ dans les cartes stéréographiques et vérifier qu'il est surjectif.
- (c) Montrer que deux fibres distinctes $h^{-1}(p)$ et $h^{-1}(q)$ sont des cercles enlacés dans S^3 .

Exercice 2.5 (**). Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$.

- (a) Montrer que f est un difféomorphisme local en tout point.
- (b) Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$ et montrer que f n'est pas un difféomorphisme global.
- (c) Trouver un ouvert maximal $U \subset \mathbb{R}^2$ tel que $f|_U$ soit un difféomorphisme sur son image.

Exercice 2.6 (**). Soit $f: M \rightarrow N$ une submersion surjective.

- (a) Montrer que pour tout $q \in N$, il existe un voisinage ouvert V de q et une application lisse $s: V \rightarrow M$ (appelée *section locale*) telle que $f \circ s = \text{Id}_V$.
- (b) Donner un exemple montrant qu'il n'existe pas toujours de section globale lisse $s: N \rightarrow M$.

Exercice 2.7 (***). Soit $f: M \rightarrow N$ une submersion propre surjective (propre signifie que la préimage de tout compact est compacte). Montrer que f est une *fibration localement triviale* : pour tout $q \in N$, il existe un voisinage ouvert V de q et un difféomorphisme $\Phi: f^{-1}(V) \rightarrow V \times f^{-1}(q)$ tel que $\pi_1 \circ \Phi = f|_{f^{-1}(V)}$, où π_1 est la projection sur le premier facteur. *Indication* : C'est le théorème d'Ehresmann. Utiliser un champ de vecteurs horizontal et son flot.

Exercice 2.8 (**). Soit $f: M \rightarrow N$ une application lisse et $S \subset N$ une sous-variété. On dit que f est *transverse* à S , et on note $f \pitchfork S$, si pour tout $p \in f^{-1}(S)$,

$$\text{im}(df_p) + T_{f(p)}S = T_{f(p)}N.$$

Montrer que si $f \pitchfork S$, alors $f^{-1}(S)$ est une sous-variété de M de codimension $\text{codim}(S)$. *Indication* : Se ramener localement au cas où $S = f_0^{-1}(0)$ pour une submersion f_0 , puis appliquer le théorème de la valeur régulière à $f_0 \circ f$.

Exercice 2.9 (***). Soit $f: M \rightarrow N$ une application lisse.

- (a) Montrer que la fonction $p \mapsto \text{rg}_p(f)$ est semi-continue inférieurement : pour tout $p_0 \in M$, il existe un voisinage U de p_0 tel que $\text{rg}_p(f) \geq \text{rg}_{p_0}(f)$ pour tout $p \in U$.
- (b) En déduire que l'ensemble $\{p \in M : \text{rg}_p(f) \geq r\}$ est ouvert dans M pour tout $r \in \mathbb{N}$.
- (c) Montrer que si M est connexe et $\text{rg}_p(f) = r$ pour tout p dans un ouvert dense de M , alors l'ensemble des points où le rang est strictement inférieur à r est contenu dans un fermé d'intérieur vide.

Chapitre 3

Fibrés tangents et cotangents

Contents

1.1	Rappels topologiques	8
1.2	Cartes locales et atlas	9
1.3	Structure différentiable	10
1.4	Exemples fondamentaux	11
1.4.1	L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ et ses ouverts	11
1.4.2	Les sphères S^n	11
1.4.3	Espaces projectifs	12
1.4.4	Le tore	13
1.4.5	Groupes de Lie classiques	14
1.4.6	Grassmanniennes	15
1.5	Variétés avec bord	15
1.6	Partitions de l'unité	16
1.7	Exercices	18

3.1 L'espace tangent en un point

Soit M une variété lisse de dimension n et $p \in M$. L'espace tangent en p admet plusieurs définitions équivalentes, chacune éclairant un aspect différent de la géométrie différentielle.

3.1.1 Définition via les dérivations

Notons $C^\infty(M)$ l'algèbre des fonctions lisses $M \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition 3.1 (Dérivation en un point). Une **dérivation** en $p \in M$ est une application $\mathbb{R}$ -linéaire $v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant la *règle de Leibniz* :

$$v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f), \quad \forall f, g \in C^\infty(M).$$

L'ensemble de toutes les dérivations en p est noté $T_p M$ et s'appelle l'**espace tangent à M en p** .

Lemme 3.2 (Annulation sur les constantes). *Si $v \in T_p M$ et $c \in \mathbb{R}$ est une fonction constante, alors $v(c) = 0$.*

Démonstration. Posons $f = g = 1$ dans la règle de Leibniz : $v(1) = 1 \cdot v(1) + 1 \cdot v(1) = 2v(1)$, d'où $v(1) = 0$. Par linéarité, $v(c) = c \cdot v(1) = 0$. $\square$

Proposition 3.3 (Base de l'espace tangent). *Soit $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ une carte autour de p . Les dérivations partielles*

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p : f \mapsto \left. \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i} \right|_{\varphi(p)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

forment une base de $T_p M$. En particulier, $\dim T_p M = n$.

Démonstration. Indépendance linéaire. Si $\sum_i a^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p = 0$, on évalue cette dérivation sur la fonction coordonnée x^j :

$$0 = \sum_i a^i \left. \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \right|_p = \sum_i a^i \delta_i^j = a^j.$$

Donc $a^j = 0$ pour tout j .

Engendrement. Soit $v \in T_p M$ et posons $v^i = v(x^i)$. Montrons que $v = \sum_i v^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$. Pour toute $f \in C^\infty(M)$, on écrit $\hat{f} = f \circ \varphi^{-1}$ au voisinage de $\hat{p} = \varphi(p)$. Par le lemme de Hadamard, il existe des fonctions lisses g_i au voisinage de $\hat{p}$ telles que

$$\hat{f}(x) = \hat{f}(\hat{p}) + \sum_{i=1}^n (x^i - \hat{p}^i) g_i(x), \quad g_i(\hat{p}) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial r^i}(\hat{p}).$$

En appliquant v et en utilisant le lemme : dérivation-constante :

$$v(f) = \sum_{i=1}^n v(x^i - \hat{p}^i) g_i(\hat{p}) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial \hat{f}}{\partial r^i}(\hat{p}) = \sum_{i=1}^n v^i \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_p. \quad \square$$

3.1.2 Définition via les classes d'équivalence de courbes

Définition 3.4 (Vecteur tangent via les courbes). Soit $p \in M$. Deux courbes lisses $\gamma_1, \gamma_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ avec $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$ sont dites **équivalentes** si, pour une (et donc toute) carte (U, φ) autour de p ,

$$(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0).$$

L'espace tangent $T_p M$ est l'ensemble des classes d'équivalence, noté $[\gamma]_p$.

Remarque 3.5. La relation d'équivalence ne dépend pas du choix de carte : si (V, ψ) est une autre carte autour de p , alors

$$(\psi \circ \gamma)'(0) = D(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} \cdot (\varphi \circ \gamma)'(0),$$

et la matrice jacobienne $D(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}$ est inversible car $\psi \circ \varphi^{-1}$ est un difféomorphisme local.

3.1.3 Équivalence des définitions

Théorème 3.6 (Équivalence des définitions de l'espace tangent). *Soit M une variété lisse de dimension n et $p \in M$. L'application*

$$\Phi : \{[\gamma]_p\} \longrightarrow T_p M, \quad [\gamma]_p \longmapsto v_\gamma, \quad \text{où } v_\gamma(f) = (f \circ \gamma)'(0),$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration. Bonne définition. Si $\gamma_1 \sim \gamma_2$, alors pour toute $f \in C^\infty(M)$ et toute carte (U, φ) autour de p :

$$(f \circ \gamma_i)'(0) = D(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} \cdot (\varphi \circ \gamma_i)'(0).$$

Comme $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$, on obtient $v_{\gamma_1} = v_{\gamma_2}$.

Φ est une dérivation. Pour $f, g \in C^\infty(M)$:

$$v_\gamma(fg) = ((fg) \circ \gamma)'(0) = f(p) (g \circ \gamma)'(0) + g(p) (f \circ \gamma)'(0) = f(p) v_\gamma(g) + g(p) v_\gamma(f).$$

Injectivité. Si $v_\gamma = 0$, alors pour chaque coordonnée x^i : $0 = v_\gamma(x^i) = (x^i \circ \gamma)'(0)$, ce qui signifie $(\varphi \circ \gamma)'(0) = 0$, d'où $[\gamma]_p$ est la classe du vecteur nul.

Surjectivité. Soit $v = \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \in T_p M$. Définissons $\gamma(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + t a)$ où $a = (a^1, \dots, a^n)$. Alors $\gamma(0) = p$ et $(\varphi \circ \gamma)'(0) = a$, de sorte que $v_\gamma(x^i) = a^i = v(x^i)$ pour tout i . Par la propriété base-tangent, $v_\gamma = v$. $\square$

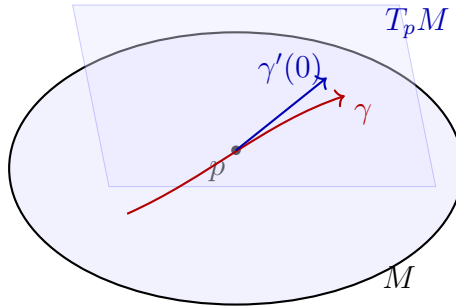


FIGURE 3.1 – Un vecteur tangent comme vecteur vitesse d'une courbe sur la variété.

3.2 Différentielle d'une application lisse

Définition 3.7 (Différentielle). Soient M, N des variétés lisses et $f : M \rightarrow N$ une application lisse. La **différentielle** (ou *application tangente*) de f en $p \in M$ est l'application linéaire

$$df_p : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$$

définie par

$$(df_p(v))(g) = v(g \circ f), \quad \forall v \in T_p M, g \in C^\infty(N).$$

Remarque 3.8. En termes de courbes : si $v = [\gamma]_p$, alors $df_p(v) = [f \circ \gamma]_{f(p)}$.

Proposition 3.9 (Expression en coordonnées). Soient $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$ et $(V, \psi = (y^1, \dots, y^n))$ des cartes autour de p et $f(p)$ respectivement. Si $\hat{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$, alors

$$df_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \hat{f}^j}{\partial x^i}(\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{f(p)}.$$

La matrice de df_p dans ces bases est la **matrice jacobienne** $J_{\hat{f}}(\varphi(p))$.

Démonstration. Pour toute $g \in C^\infty(N)$, posons $\hat{g} = g \circ \psi^{-1}$. Alors :

$$\begin{aligned} df_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) (g) &= \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (g \circ f) = \frac{\partial(\hat{g} \circ \hat{f})}{\partial x^i}(\varphi(p)) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \hat{g}}{\partial y^j}(\hat{f}(\varphi(p))) \cdot \frac{\partial \hat{f}^j}{\partial x^i}(\varphi(p)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \hat{f}^j}{\partial x^i}(\varphi(p)) \frac{\partial g}{\partial y^j} \Big|_{f(p)}. \quad \square \end{aligned}$$

Théorème 3.10 (Règle de chaîne). Soient $f : M \rightarrow N$ et $g : N \rightarrow P$ des applications lisses. Pour tout $p \in M$,

$$d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p.$$

Démonstration. Pour $v \in T_p M$ et $h \in C^\infty(P)$:

$$d(g \circ f)_p(v)(h) = v(h \circ g \circ f) = df_p(v)(h \circ g) = dg_{f(p)}(df_p(v))(h). \quad \square$$

Corollaire 3.11 (Fonctorialité). L'assignation $M \mapsto TM$, $f \mapsto df$ définit un foncteur de la catégorie des variétés lisses vers la catégorie des espaces vectoriels. En particulier :

- (i) $d(\text{Id}_M)_p = \text{Id}_{T_p M}$ pour tout $p \in M$.
- (ii) Si $f : M \rightarrow N$ est un difféomorphisme, alors df_p est un isomorphisme et $(df_p)^{-1} = d(f^{-1})_{f(p)}$.

Démonstration. Le point (i) est immédiat. Pour (ii), la règle de chaîne donne $d(f^{-1} \circ f)_p = d(f^{-1})_{f(p)} \circ df_p = \text{Id}_{T_p M}$ et de même dans l'autre sens. $\square$

Exemple 3.12 (Différentielle de la projection stéréographique). Soit $\sigma_N : S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la projection stéréographique depuis le pôle nord $N = (0, \dots, 0, 1)$, définie par

$$\sigma_N(x^1, \dots, x^{n+1}) = \frac{1}{1 - x^{n+1}}(x^1, \dots, x^n).$$

C'est un difféomorphisme, et sa différentielle en un point $p = (p^1, \dots, p^{n+1}) \in S^n$ est l'isomorphisme linéaire

$$d(\sigma_N)_p : T_p S^n \longrightarrow T_{\sigma_N(p)} \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n.$$

Pour $v \in T_p S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (avec $\langle p, v \rangle = 0$), un calcul direct donne

$$d(\sigma_N)_p(v) = \frac{1}{1 - p^{n+1}} (v^1, \dots, v^n) + \frac{v^{n+1}}{(1 - p^{n+1})^2} (p^1, \dots, p^n).$$

Exemple 3.13 (Différentielle de l'exponentielle matricielle). L'application exponentielle $\exp : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ définie par $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ est lisse. En identifiant $T_0 M_n(\mathbb{R}) \cong M_n(\mathbb{R})$ et $T_{I_n} GL(n, \mathbb{R}) \cong M_n(\mathbb{R})$, sa différentielle en 0 est

$$d(\exp)_0(B) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tB) = B.$$

Autrement dit, $d(\exp)_0 = \text{Id}_{M_n(\mathbb{R})}$, ce qui montre que $\exp$ est un difféomorphisme local au voisinage de 0.

3.3 Le fibré tangent

Définition 3.14 (Fibré tangent). Soit M une variété lisse de dimension n . Le **fibré tangent** de M est l'union disjointe

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M = \{(p, v) : p \in M, v \in T_p M\},$$

muni de la projection canonique $\pi : TM \rightarrow M$, $\pi(p, v) = p$.

Théorème 3.15 (Structure de variété lisse sur TM). Soit M une variété lisse de dimension n . Alors TM admet une unique structure de variété lisse de dimension $2n$ telle que, pour toute carte (U, φ) de M , l'application

$$\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n, \quad \left(p, \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) \longmapsto (\varphi(p), v^1, \dots, v^n),$$

soit un difféomorphisme. De plus, $\pi : TM \rightarrow M$ est une submersion lisse.

Démonstration. Topologie. On munit TM de la topologie la plus fine rendant toutes les applications $\tilde{\varphi}$ des homéomorphismes. Les ouverts de cette topologie sont les unions d'ensembles de la forme $\tilde{\varphi}^{-1}(W)$ avec W ouvert de $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$. Cette topologie est de Hausdorff et à base dénombrable car M possède ces propriétés.

Atlas lisse. Les changements de cartes sont de la forme

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} : \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n,$$

$$(x, v) \longmapsto (\psi \circ \varphi^{-1}(x), D(\psi \circ \varphi^{-1})_x \cdot v).$$

Comme $\psi \circ \varphi^{-1}$ est un difféomorphisme, cette application est lisse, et la collection $\{(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})\}$ forme un atlas lisse sur TM .

Dimension. Chaque carte $\tilde{\varphi}$ prend ses valeurs dans un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$, donc $\dim TM = 2n$.

π est une *submersion*. En coordonnées locales, π se lit $\varphi \circ \pi \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x, v) = x$, qui est la projection sur les n premières composantes, de rang n partout. $\square$

Exemple 3.16 (Fibré tangent de $\mathbb{R}^n$). On a $T\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$. L'identification est donnée par la carte globale $(\mathbb{R}^n, \text{Id})$.

Exemple 3.17 (Fibré tangent de S^1). Le fibré tangent TS^1 est difféomorphe à $S^1 \times \mathbb{R}$, car S^1 est un groupe de Lie et tout groupe de Lie a un fibré tangent trivialisable.

Le diagramme suivant résume la situation pour une application lisse $f : M \rightarrow N$:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{df} & TN \\ \pi_M \downarrow & & \downarrow \pi_N \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

3.4 Le fibré cotangent

Définition 3.18 (Espace cotangent). L'**espace cotangent** en $p \in M$ est le dual de l'espace tangent :

$$T_p^*M = (T_pM)^* = \text{Hom}(T_pM, \mathbb{R}).$$

Un élément de T_p^*M est appelé **covecteur** en p .

Définition 3.19 (Différentielle d'une fonction). Pour $f \in C^\infty(M)$, la **différentielle** de f en p est le covecteur

$$df_p \in T_p^*M, \quad df_p(v) = v(f), \quad \forall v \in T_pM.$$

Proposition 3.20 (Base duale). Si $(x^1, \dots, x^n)$ sont des coordonnées locales autour de p , les covecteurs $dx^1|_p, \dots, dx^n|_p$ forment la base duale de $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p\right)$, c'est-à-dire

$$dx^i|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \delta_j^i.$$

Tout covecteur $\omega \in T_p^*M$ s'écrit $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^i|_p$ avec $\omega_i = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\right)$.

Définition 3.21 (Fibré cotangent). Le **fibré cotangent** de M est

$$T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M,$$

muni de la projection $\pi^* : T^*M \rightarrow M$. C'est une variété lisse de dimension $2n$.

Le diagramme des projections s'écrit :

$$\begin{array}{ccc} T^*M & & TM \\ & \swarrow \text{section} \quad \searrow \text{section} & \\ & M & \end{array}$$

Proposition 3.22 (Application cotangente). Soit $f : M \rightarrow N$ une application lisse. L'**application cotangente** (ou pull-back) est l'application

$$df_p^* : T_{f(p)}^*N \longrightarrow T_p^*M, \quad (df_p^* \omega)(v) = \omega(df_p(v)),$$

pour $\omega \in T_{f(p)}^*N$ et $v \in T_pM$. Contrairement à df_p , l'application cotangente va en sens inverse : elle est **contravariante**.

Démonstration. La linéarité de df_p^* est claire. Pour vérifier la bonne définition, il suffit de noter que $df_p^* \omega$ est la composée de l'application linéaire $df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ et de la forme linéaire $\omega : T_{f(p)}N \rightarrow \mathbb{R}$, ce qui donne bien un élément de T_p^*M . $\square$

Remarque 3.23 (Notation duale). Le diagramme commutatif complet des fibrés tangent et cotangent est :

$$T_p^*M \xleftarrow{df_p^*} T_{f(p)}^*N$$

$$T_pM \xrightarrow{df_p} T_{f(p)}N$$

L'application tangente va dans le même sens que f (covariante) tandis que l'application cotangente va en sens inverse (contravariante).

Exemple 3.24 (Pull-back de la différentielle). Si $h \in C^\infty(N)$ et $f : M \rightarrow N$ est lisse, alors

$$df_p^*(dh_{f(p)}) = d(h \circ f)_p.$$

En effet, pour tout $v \in T_pM$: $df_p^*(dh_{f(p)})(v) = dh_{f(p)}(df_p(v)) = (df_p(v))(h) = v(h \circ f) = d(h \circ f)_p(v)$.

3.5 Champs de vecteurs

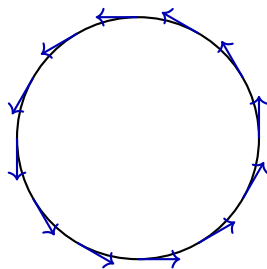
Définition 3.25 (Champ de vecteurs). Un **champ de vecteurs** sur M est une section lisse du fibré tangent, c'est-à-dire une application lisse $X : M \rightarrow TM$ telle que $\pi \circ X = \text{Id}_M$. L'ensemble des champs de vecteurs sur M est noté $\mathfrak{X}(M)$.

Remarque 3.26. Un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(M)$ agit comme une dérivation sur $C^\infty(M)$:

$$X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M), \quad (Xf)(p) = X_p(f).$$

En coordonnées locales $(x^1, \dots, x^n)$, on écrit $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ où $X^i \in C^\infty(U)$.

Exemple 3.27 (Champs de vecteurs sur S^1). Le cercle $S^1 = \{(\cos \theta, \sin \theta) : \theta \in \mathbb{R}\}$ admet le champ de vecteurs $X = \frac{\partial}{\partial \theta}$, qui ne s'annule jamais. C'est une conséquence de la trivialité de TS^1 .



Champ $\frac{\partial}{\partial \theta}$ sur S^1

FIGURE 3.2 – Le champ de vecteurs tangent unitaire sur le cercle S^1 .

3.6 Le crochet de Lie

Définition 3.28 (Crochet de Lie). Le **crochet de Lie** de deux champs de vecteurs $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ est le champ de vecteurs $[X, Y]$ défini par

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)), \quad \forall f \in C^\infty(M).$$

Proposition 3.29 (Le crochet de Lie est bien un champ de vecteurs). *Pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, l'opérateur $[X, Y]$ est une dérivation de $C^\infty(M)$, et donc définit un champ de vecteurs lisse sur M .*

Démonstration. La linéarité est claire. Il suffit de vérifier la règle de Leibniz :

$$\begin{aligned}
 [X, Y](fg) &= X(Y(fg)) - Y(X(fg)) \\
 &= X(fY(g) + gY(f)) - Y(fX(g) + gX(f)) \\
 &= X(f)Y(g) + fX(Y(g)) + X(g)Y(f) + gX(Y(f)) \\
 &\quad - Y(f)X(g) - fY(X(g)) - Y(g)X(f) - gY(X(f)) \\
 &= f[X, Y](g) + g[X, Y](f).
 \end{aligned}$$

□

Proposition 3.30 (Expression en coordonnées locales). *Soient $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$. Alors*

$$[X, Y] = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^k}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Démonstration. Appliquons $[X, Y]$ à une fonction coordonnée x^k . On a :

$$[X, Y](x^k) = X(Y^k) - Y(X^k) = \sum_i X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} - \sum_i Y^i \frac{\partial X^k}{\partial x^i}.$$

□

Théorème 3.31 (Propriétés du crochet de Lie). *L'espace $(\mathfrak{X}(M), [\cdot, \cdot])$ est une algèbre de Lie de dimension infinie. Plus précisément, pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ et $f, g \in C^\infty(M)$:*

- (i) **Bilinéarité sur $\mathbb{R}$** : $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ pour $a, b \in \mathbb{R}$.
- (ii) **Antisymétrie** : $[X, Y] = -[Y, X]$.
- (iii) **Identité de Jacobi** : $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.
- (iv) **$C^\infty(M)$ -comportement** : $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$.

Démonstration. Les points (i) et (ii) résultent directement de la définition. Pour (iii), il s'agit d'un calcul direct :

$$\begin{aligned}
 [X, [Y, Z]](f) &= X(Y(Z(f)) - Z(Y(f))) - (Y(Z(X(f))) - Z(Y(X(f)))) \\
 &= X(Y(Z(f))) - X(Z(Y(f))) - Y(Z(X(f))) + Z(Y(X(f))).
 \end{aligned}$$

En sommant cycliquement sur (X, Y, Z) , chaque terme apparaît une fois avec un signe positif et une fois avec un signe négatif, d'où l'annulation.

Pour (iv), calculons $[fX, gY](h)$:

$$\begin{aligned}
 [fX, gY](h) &= fX(gY(h)) - gY(fX(h)) \\
 &= fgX(Y(h)) + f(Xg)Y(h) - gfY(X(h)) - g(Yf)X(h) \\
 &= fg[X, Y](h) + f(Xg)Y(h) - g(Yf)X(h).
 \end{aligned}$$

□

3.7 Flot d'un champ de vecteurs

Définition 3.32 (Courbe intégrale). Soit $X \in \mathfrak{X}(M)$. Une **courbe intégrale** de X issue de $p \in M$ est une courbe lisse $\gamma : I \rightarrow M$, où I est un intervalle ouvert contenant 0, telle que

$$\gamma(0) = p \quad \text{et} \quad \gamma'(t) = X_{\gamma(t)}, \quad \forall t \in I.$$

Théorème 3.33 (Existence et unicité des courbes intégrales). Soit $X \in \mathfrak{X}(M)$ et $p \in M$. Il existe un intervalle ouvert maximal $I_p \ni 0$ et une unique courbe intégrale maximale $\gamma_p : I_p \rightarrow M$ de X issue de p .

Démonstration. Existence et unicité locales. En coordonnées locales $(x^1, \dots, x^n)$ autour de p , l'équation $\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$ se traduit par le système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dx^i}{dt}(t) = X^i(x^1(t), \dots, x^n(t)), \quad i = 1, \dots, n,$$

avec condition initiale $(x^1(0), \dots, x^n(0)) = \varphi(p)$. Comme les X^i sont lisses (donc localement lipschitziennes), le théorème de Cauchy–Lipschitz classique donne l'existence et l'unicité d'une solution sur un intervalle $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Maximalité. Si $\gamma_1 : I_1 \rightarrow M$ et $\gamma_2 : I_2 \rightarrow M$ sont deux courbes intégrales issues de p , alors par unicité locale elles coïncident sur $I_1 \cap I_2$. On définit $I_p = \bigcup \{I : \text{il existe une courbe intégrale sur } I\}$ et γ_p en recollant les solutions. $\square$

Définition 3.34 (Flot). Le **flot** du champ X est l'application

$$\theta : \mathcal{D} \longrightarrow M, \quad \theta(t, p) = \theta_t(p) = \gamma_p(t),$$

où $\mathcal{D} = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times M : t \in I_p\}$ est le *domaine du flot*.

Proposition 3.35 (Propriétés du flot). Soit θ le flot de $X \in \mathfrak{X}(M)$.

- (i) $\theta_0 = \text{Id}_M$.
- (ii) $\theta_{s+t} = \theta_s \circ \theta_t$ là où les deux membres sont définis (propriété de groupe à un paramètre).
- (iii) Si X est complet (i.e., $I_p = \mathbb{R}$ pour tout p), alors $t \mapsto \theta_t$ est un homomorphisme de groupes $(\mathbb{R}, +) \rightarrow \text{Diff}(M)$.

Démonstration. Le point (i) est immédiat par définition. Pour (ii), fixons $p \in M$ et considérons les courbes $t \mapsto \theta_{s+t}(p)$ et $t \mapsto \theta_s(\theta_t(p))$. Les deux sont des courbes intégrales de X passant par $\theta_s(p)$ en $t = 0$. Par unicité, elles coïncident. Le point (iii) en découle directement. $\square$

Théorème 3.36 (Compacité implique complétude). Si M est compacte, alors tout champ de vecteurs sur M est complet.

Esquisse de preuve. Par compacité, on peut recouvrir M par un nombre fini d'ouverts de cartes. Sur chacun, le théorème de Cauchy–Lipschitz fournit un temps d'existence $\varepsilon_i > 0$

uniforme. On pose $\varepsilon = \min_i \varepsilon_i > 0$. Par la propriété de groupe, la solution se prolonge de ε en ε sur tout $\mathbb{R}$. $\square$

Exemple 3.37 (Flot d'un champ de rotation). Sur $\mathbb{R}^2$, considérons le champ de vecteurs $X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$. Le système d'équations différentielles associé est

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x,$$

dont la solution avec condition initiale (x_0, y_0) est

$$\theta_t(x_0, y_0) = (x_0 \cos t - y_0 \sin t, x_0 \sin t + y_0 \cos t).$$

C'est la rotation d'angle t autour de l'origine. Le champ X est complet et le flot est un groupe à un paramètre de rotations : $\theta_t = R_t \in \text{SO}(2)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Les courbes intégrales sont les cercles centrés à l'origine.

Proposition 3.38 (Lien entre différentielle et flot). *Soient $X \in \mathfrak{X}(M)$ de flot θ_t et $f : M \rightarrow N$ une application lisse. Pour tout $p \in M$:*

$$df_p(X_p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\theta_t(p)).$$

Démonstration. Soit $\gamma(t) = \theta_t(p)$ la courbe intégrale de X issue de p . Alors $\gamma'(0) = X_p$ et, par définition de la différentielle via les courbes :

$$df_p(X_p) = df_p(\gamma'(0)) = (f \circ \gamma)'(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\theta_t(p)). \quad \square$$

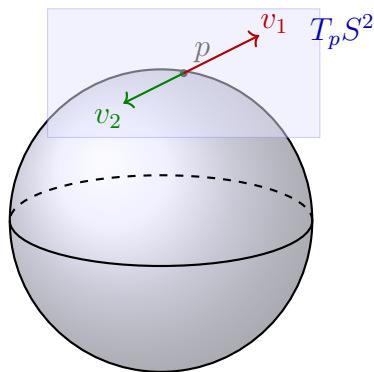
Proposition 3.39 (Commutativité des flots et crochet nul). *Soient $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ des champs complets de flots θ_t et ψ_s . Alors $[X, Y] = 0$ si et seulement si $\theta_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \theta_t$ pour tous $s, t \in \mathbb{R}$.*

Esquisse de preuve. Le sens direct utilise la dérivée de Lie : $[X, Y] = 0$ signifie que Y est invariant par le flot de X , c'est-à-dire $(\theta_t)_* Y = Y$ pour tout t . Ceci implique que le flot de Y commute avec θ_t . La réciproque s'obtient en dérivant l'égalité $\theta_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \theta_t$ par rapport à t en $t = 0$. $\square$

Remarque 3.40 (Crochet de Lie et flot). Le crochet de Lie possède une interprétation dynamique fondamentale : si θ_t et ψ_s désignent les flots de X et Y respectivement, alors

$$[X, Y]_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\theta_{-t})_* Y_{\theta_t(p)} - Y_p}{t} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\theta_t^* Y)_p,$$

c'est-à-dire que $[X, Y]$ est la *dérivée de Lie* de Y le long du flot de X .


 FIGURE 3.3 – Le plan tangent $T_p S^2$ à la sphère en un point p .

3.8 Exercices

Exercice 3.1. Montrer que l'espace tangent $T_p \mathbb{R}^n$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{R}^n$ via l'identification $v \mapsto (v(x^1), \dots, v(x^n))$ où $(x^1, \dots, x^n)$ sont les coordonnées standard.

Exercice 3.2. Soit $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. En utilisant la paramétrisation $\gamma(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$, montrer que $T_{(1,0)} S^1$ est engendré par le vecteur $(0, 1)$.

Exercice 3.3. Soit $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{R}^m$, sous l'identification $T_p \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m$, on a $dL_p = L$.

Exercice 3.4. Soit $U \subset M$ un ouvert et $\iota : U \hookrightarrow M$ l'inclusion. Montrer que $d\iota_p : T_p U \rightarrow T_p M$ est un isomorphisme pour tout $p \in U$.

Exercice 3.5. Soient $X = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$ et $Y = \frac{\partial}{\partial z}$ sur $\mathbb{R}^3$. Calculer $[X, Y]$ et interpréter géométriquement.

Exercice 3.6. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et X_A le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ défini par $X_A(x) = Ax$. Montrer que le flot de X_A est $\theta_t(x) = e^{tA}x$.

Exercice 3.7. Soient $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ et $f : M \rightarrow N$ un difféomorphisme. Montrer que $f_*[X, Y] = [f_*X, f_*Y]$, où f_*X est le champ image directe défini par $(f_*X)_{f(p)} = df_p(X_p)$.

Exercice 3.8. Le champ d'Euler sur $\mathbb{R}^n$ est $E = \sum_{i=1}^n x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

- (a) Calculer le flot de E .
- (b) Montrer que $[E, X] = -X$ pour tout champ de vecteurs X homogène de degré 0.
- (c) Montrer que $Ef = kf$ si et seulement si f est homogène de degré k .

Exercice 3.9. Soient $(U, \varphi = (x^i))$ et $(V, \psi = (y^j))$ deux cartes sur M avec $U \cap V \neq \emptyset$. Montrer que la loi de transformation d'un covecteur $\omega = \sum_i \omega_i dx^i$ dans la carte (V, ψ) est

$$\omega = \sum_j \left(\sum_i \omega_i \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right) dy^j.$$

Comparer avec la loi de transformation des composantes d'un vecteur tangent.

Exercice 3.10. Soit $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$. Identifier $T_I G$ avec $M_n(\mathbb{R})$ et montrer que le crochet de Lie de deux champs de vecteurs invariants à gauche correspond au commutateur $[A, B] = AB - BA$.

Chapitre 4

Sous-variétés et théorème de la valeur régulière

Contents

2.1	Applications lisses entre variétés	19
2.2	Difféomorphismes	20
2.3	Théorème d'inversion locale	21
2.4	Théorème des fonctions implicites	22
2.5	Immersions et submersions	23
2.6	Théorème de rang constant	24
2.7	Exemples d'applications lisses	25
2.7.1	Projections et inclusions	25
2.7.2	L'application de Hopf	26
2.7.3	Difféomorphismes locaux	26
2.8	Diagrammes commutatifs et catégorie C^∞	27
2.9	Exercices	27

4.1 Immersions, submersions, plongements

Définition 4.1 (Immersion, submersion). Soit $f : M \rightarrow N$ une application lisse entre variétés.

- (i) f est une **immersion** si df_p est injective pour tout $p \in M$.
- (ii) f est une **submersion** si df_p est surjective pour tout $p \in M$.
- (iii) Un point $p \in M$ est un **point régulier** de f si df_p est surjective. Sinon, p est un **point critique**.
- (iv) Une valeur $c \in N$ est une **valeur régulière** de f si tout point de $f^{-1}(c)$ est régulier. Une valeur qui n'est pas régulière est une **valeur critique**.

Remarque 4.2. Par convention, si $f^{-1}(c) = \emptyset$, alors c est une valeur régulière (la condition est vide).

Définition 4.3 (Plongement). Une application lisse $f : M \rightarrow N$ est un **plongement** (ou *plongement lisse*) si elle est une immersion injective qui est un homéomorphisme sur son image $f(M) \subset N$ (muni de la topologie induite).

Proposition 4.4 (Immersion injective propre). *Toute immersion injective propre est un plongement. En particulier, si M est compacte, toute immersion injective $f : M \rightarrow N$ est un plongement.*

Démonstration. Soit $f : M \rightarrow N$ une immersion injective propre. Il suffit de montrer que f est un homéomorphisme sur son image. Comme f est propre et N est localement compact, f est une application fermée. Une bijection continue et fermée est un homéomorphisme. Pour la seconde assertion, si M est compacte, toute application continue $M \rightarrow N$ est propre (image réciproque d'un compact est un fermé de M compact, donc compact). $\square$

Théorème 4.5 (Forme locale d'une immersion). *Soit $f : M^m \rightarrow N^n$ une immersion ($m \leq n$). Pour tout $p \in M$, il existe des cartes (U, φ) autour de p et (V, ψ) autour de $f(p)$ telles que*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0).$$

Démonstration. Comme df_p est injective, la matrice jacobienne de $\hat{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ en $\varphi(p)$ est de rang m . Quitte à permuter les coordonnées de N , on peut supposer que les m premières lignes forment une sous-matrice inversible. Définissons $F : \varphi(U) \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$F(x, y) = \hat{f}(x) + (0, \dots, 0, y^1, \dots, y^{n-m}).$$

Alors $DF_{(\varphi(p), 0)}$ est inversible, donc F est un difféomorphisme local. En posant $\psi' = F^{-1} \circ \psi$ au voisinage de $f(p)$, on obtient $\psi' \circ f \circ \varphi^{-1}(x) = (x, 0)$. $\square$

Théorème 4.6 (Forme locale d'une submersion). *Soit $f : M^m \rightarrow N^n$ une submersion ($m \geq n$). Pour tout $p \in M$, il existe des cartes (U, φ) autour de p et (V, ψ) autour de $f(p)$ telles que*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^n).$$

Démonstration. La surjectivité de df_p implique que les n premières colonnes de la jacobienne $D\hat{f}_{\varphi(p)}$ (quitte à permuter) forment une matrice inversible. Définissons $G : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^m$ par

$$G(x) = (\hat{f}(x), x^{n+1}, \dots, x^m).$$

Alors $DG_{\varphi(p)}$ est inversible et $\hat{f} \circ G^{-1}(y^1, \dots, y^m) = (y^1, \dots, y^n)$. En posant $\varphi' = G \circ \varphi$, on obtient la forme canonique souhaitée. $\square$

Exemple 4.7 (Immersion et submersion). (i) L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (t^2, t^3)$, n'est pas une immersion car $df_0 = 0$. En revanche, $f|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$ est une immersion.

(ii) La projection $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\pi(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^k)$ avec $k \leq n$, est une

submersion (la jacobienne est $(I_k \mid 0)$, de rang k).

(iii) Le déterminant $\det : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ est une submersion.

4.2 Sous-variétés

Définition 4.8 (Sous-variété plongée). Un sous-ensemble $S \subset M$ est une **sous-variété plongée** de dimension k si, pour tout $p \in S$, il existe une carte (U, φ) de M autour de p telle que

$$\varphi(U \cap S) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}),$$

où l'on identifie $\mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$. Une telle carte est appelée **carte de sous-variété** (ou *carte adaptée*). La **codimension** de S dans M est $n - k$.

Définition 4.9 (Sous-variété immergée). Un sous-ensemble $S \subset M$ est une **sous-variété immergée** de dimension k si S admet une structure de variété lisse de dimension k pour laquelle l'inclusion $\iota : S \hookrightarrow M$ est une immersion lisse.

Remarque 4.10. Toute sous-variété plongée est immergée, mais la réciproque est fausse. La topologie d'une sous-variété immergée peut différer de la topologie induite.

Exemple 4.11 (Sous-variété plongée : $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$). La sphère $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x|^2 = 1\}$ est une sous-variété plongée de $\mathbb{R}^{n+1}$ de codimension 1. Nous le démontrerons rigoureusement au e4thm :valeur-reguliere comme préimage d'une valeur régulière.

Exemple 4.12 (Sous-variété immergée non plongée). L'application $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (\sin(2t), \sin(t))$ est une immersion dont l'image est une figure en huit. L'image, munie de la topologie de $\mathbb{R}$ via γ , est une sous-variété immergée de $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas plongée (au point double $(0, 0)$).

Exemple 4.13 (Droite irrationnelle sur le tore). Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et considérons l'application $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ définie par $\gamma(t) = [(t, \alpha t)]$. C'est une immersion injective dont l'image est dense dans T^2 . L'image est une sous-variété immergée de dimension 1 qui n'est pas plongée.

4.3 Le théorème de la valeur régulière

Le théorème de la valeur régulière est un des résultats fondamentaux de la topologie différentielle. Il fournit un procédé systématique pour construire des sous-variétés.

Théorème 4.14 (Théorème de la valeur régulière). *Soit $f : M^m \rightarrow N^n$ une application lisse entre variétés lisses, avec $m \geq n$. Si $c \in N$ est une **valeur régulière** de f , alors :*

- (i) $S = f^{-1}(c)$ est une sous-variété plongée de M de codimension n , c'est-à-dire $\dim S = m - n$.
- (ii) Pour tout $p \in S$, l'espace tangent à S en p est

$$T_p S = \ker df_p = \{v \in T_p M : df_p(v) = 0\}.$$

Démonstration. Soit $p \in S = f^{-1}(c)$. Par hypothèse, $df_p : T_p M \rightarrow T_c N$ est surjective, donc de rang n . On procède en plusieurs étapes.

Étape 1 : Réduction en coordonnées. Choisissons des cartes (U, φ) autour de p et (V, ψ) autour de c avec $f(U) \subset V$, $\varphi(p) = 0$ et $\psi(c) = 0$. L'application $\hat{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ est lisse et $D\hat{f}_0$ est surjective.

Étape 2 : Application du théorème des fonctions implicites. Quitte à réordonner les coordonnées, on peut supposer que les n dernières colonnes de $D\hat{f}_0$ forment une matrice $n \times n$ inversible. Écrivons $\varphi(U) \ni x = (x', x'')$ avec $x' \in \mathbb{R}^{m-n}$ et $x'' \in \mathbb{R}^n$. Le théorème des fonctions implicites donne l'existence d'un voisinage ouvert W de 0 dans $\mathbb{R}^{m-n}$ et d'une application lisse $g : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $g(0) = 0$ et

$$\hat{f}(x', x'') = 0 \iff x'' = g(x').$$

Étape 3 : Carte de sous-variété. Définissons $\Phi : W \times \mathbb{R}^n \supset U' \rightarrow \mathbb{R}^m$ par $\Phi(x', y) = (x', g(x') + y)$. Alors $D\Phi_0 = \begin{pmatrix} I_{m-n} & 0 \\ Dg_0 & I_n \end{pmatrix}$ est inversible, donc Φ est un difféomorphisme local. L'application $\tilde{\varphi} = \Phi^{-1} \circ \varphi$ est une carte autour de p telle que

$$\tilde{\varphi}(U \cap S) = \tilde{\varphi}(U) \cap (\mathbb{R}^{m-n} \times \{0\}).$$

Ceci montre que S est une sous-variété plongée de codimension n .

Étape 4 : Espace tangent. Soit $v \in T_p S$. On peut écrire $v = [\gamma]_p$ pour une courbe $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ avec $\gamma(0) = p$. Comme $f \circ \gamma(t) = c$ pour tout t , on a $df_p(v) = (f \circ \gamma)'(0) = 0$, d'où $T_p S \subset \ker df_p$. Réciproquement, $\dim T_p S = m - n = m - \text{rg}(df_p) = \dim \ker df_p$ par le théorème du rang, d'où l'égalité. $\square$

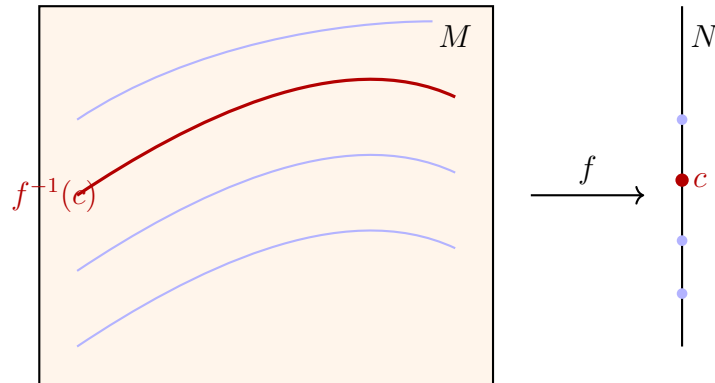


FIGURE 4.1 – Le théorème de la valeur régulière : la préimage $f^{-1}(c)$ d'une valeur régulière c est une sous-variété.

4.4 Applications fondamentales

4.4.1 La sphère S^{n-1}

Exemple 4.15 (S^{n-1} comme préimage d'une valeur régulière). Considérons l'application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|^2 = \sum_{i=1}^n (x^i)^2$. La différentielle en x est

$$df_x(v) = 2 \sum_{i=1}^n x^i v^i = 2\langle x, v \rangle.$$

Pour $x \neq 0$, l'application df_x est surjective (il suffit de prendre $v = x$). En particulier, 1 est une valeur régulière de f , et

$$S^{n-1} = f^{-1}(1)$$

est une sous-variété plongée de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - 1$. L'espace tangent est

$$T_x S^{n-1} = \ker df_x = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle x, v \rangle = 0\} = x^\perp.$$

4.4.2 Le groupe orthogonal $O(n)$

Exemple 4.16 ($O(n)$ comme sous-variété de $GL(n, \mathbb{R})$). Considérons l'espace $M_n(\mathbb{R})$ des matrices $n \times n$ (identifié à $\mathbb{R}^{n^2}$) et le sous-espace $\text{Sym}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques (de dimension $n(n+1)/2$). Définissons

$$f : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \text{Sym}_n(\mathbb{R}), \quad f(A) = A^\top A.$$

Calculons la différentielle. Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B \in T_A M_n(\mathbb{R}) \cong M_n(\mathbb{R})$:

$$df_A(B) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (A + tB)^\top (A + tB) = B^\top A + A^\top B.$$

Montrons que df_A est surjective pour $A \in O(n) = f^{-1}(I_n)$. Soit $S \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$. Posons $B = \frac{1}{2}AS$. Alors

$$df_A(B) = \frac{1}{2}(SA^\top A + A^\top AS) = \frac{1}{2}(S + S) = S,$$

car $A^\top A = I_n$. Donc I_n est une valeur régulière et

$$O(n) = f^{-1}(I_n)$$

est une sous-variété plongée de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension

$$\dim O(n) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

L'espace tangent en I_n est

$$T_{I_n} O(n) = \ker df_{I_n} = \{B \in M_n(\mathbb{R}) : B^\top + B = 0\} = \mathfrak{o}(n),$$

l'algèbre de Lie des matrices antisymétriques. Plus généralement, pour $A \in O(n)$:

$$T_A O(n) = \{B \in M_n(\mathbb{R}) : B^\top A + A^\top B = 0\} = A \cdot \mathfrak{o}(n).$$

4.4.3 Le groupe spécial linéaire $SL(n, \mathbb{R})$

Exemple 4.17 ($SL(n, \mathbb{R})$ comme sous-variété de $GL(n, \mathbb{R})$). Considérons le déterminant $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$. Sa différentielle en $A \in GL(n, \mathbb{R})$ est donnée par

$$d(\det)_A(B) = \det(A) \cdot \text{tr}(A^{-1}B).$$

Pour $A \in SL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(1)$, on a $\det(A) = 1$, donc $d(\det)_A(B) = \text{tr}(A^{-1}B)$, qui est surjective (prendre par exemple $B = \frac{1}{n}A$, ce qui donne $\text{tr}(I_n/n) \cdot n = 1$).

Ainsi, 1 est une valeur régulière du déterminant et

$$SL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(1)$$

est une sous-variété plongée de $GL(n, \mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$. L'espace tangent en I_n est

$$T_{I_n} SL(n, \mathbb{R}) = \{B \in M_n(\mathbb{R}) : \text{tr}(B) = 0\} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}).$$

4.4.4 Préimages dans $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Exemple 4.18 (Tore comme préimage). Considérons $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R \right)^2 + z^2,$$

où $R > r > 0$. La valeur r^2 est une valeur régulière de f (on le vérifie par un calcul direct de df), et

$$T^2 = f^{-1}(r^2)$$

est un tore de révolution, sous-variété plongée de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.

Exemple 4.19 (Hyperboloïde à une nappe). L'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, a pour différentielle $df_{(x,y,z)} = (2x, 2y, -2z)$, qui s'annule uniquement à l'origine. Donc toute valeur $c \neq 0$ est régulière et $f^{-1}(c)$ est une surface lisse. Pour $c = 1$, on obtient l'hyperboloïde à une nappe.

Exemple 4.20 (Préimage dans $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$). Considérons $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1^2 + x_2^2 - 1, x_3^2 + x_4^2 - 1).$$

La matrice jacobienne est

$$Df_{(x_1, x_2, x_3, x_4)} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3 & 2x_4 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de rang 2 en tout point de $f^{-1}(0, 0)$ (car $(x_1, x_2) \neq 0$ et $(x_3, x_4) \neq 0$ sur cet ensemble). Donc $(0, 0)$ est une valeur régulière et

$$f^{-1}(0, 0) = S^1 \times S^1 = T^2$$

est une sous-variété plongée de $\mathbb{R}^4$ de dimension 2, difféomorphe au tore.

4.4.5 Le théorème de Sard

Le théorème de la valeur régulière est d'autant plus puissant que la plupart des valeurs sont régulières, au sens suivant.

Théorème 4.21 (Théorème de Sard). *Soit $f : M \rightarrow N$ une application lisse. L'ensemble des valeurs critiques de f est de mesure de Lebesgue nulle dans N . En particulier, l'ensemble des valeurs régulières est dense dans N .*

Remarque 4.22. La preuve du théorème de Sard, bien que technique, repose essentiellement sur le théorème de Fubini et des estimations de volume. Nous l'admettons ici et renvoyons à [13] pour une démonstration complète. Ce théorème, combiné au théorème de la valeur régulière, montre que pour une application lisse « générique »,

presque toutes les fibres sont des sous-variétés lisses.

4.5 Espace tangent d'une sous-variété

Proposition 4.23 (Espace tangent d'une sous-variété plongée). *Soit $S \subset M$ une sous-variété plongée et $\iota : S \hookrightarrow M$ l'inclusion. Pour tout $p \in S$, l'application $d\iota_p : T_p S \rightarrow T_p M$ est injective et identifie $T_p S$ au sous-espace*

$$d\iota_p(T_p S) = \{v \in T_p M : v(f) = 0 \text{ pour toute } f \in C^\infty(M) \text{ avec } f|_S = 0\}.$$

Démonstration. L'inclusion ι est un plongement, donc $d\iota_p$ est injective. Soit $v = [\gamma]_p \in T_p S$ et $f \in C^\infty(M)$ avec $f|_S = 0$. Alors $d\iota_p(v)(f) = v(f \circ \iota) = v(f|_S) = v(0) = 0$. Réciproquement, soit $v \in T_p M$ annulant toute f qui s'annule sur S . En carte de sous-variété $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^n))$ avec $U \cap S = \{x^{k+1} = \dots = x^n = 0\}$, les fonctions $x^{k+1}, \dots, x^n$ s'annulent sur S , donc $v(x^j) = 0$ pour $j > k$. Ainsi $v = \sum_{i=1}^k v(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \in d\iota_p(T_p S)$. $\square$

Corollaire 4.24 (Espace tangent d'une préimage). *Si c est une valeur régulière de $f : M \rightarrow N$ et $S = f^{-1}(c)$, alors pour tout $p \in S$:*

$$T_p S = \ker df_p.$$

4.6 Théorème du rang constant

Théorème 4.25 (Théorème du rang constant). *Soit $f : M^m \rightarrow N^n$ une application lisse de rang constant r sur un voisinage de $p \in M$. Alors il existe des cartes (U, φ) centrées en p et (V, ψ) centrées en $f(p)$ telles que*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0).$$

Démonstration. Par un changement de coordonnées préliminaire, on peut supposer que le mineur $r \times r$ en haut à gauche de la matrice jacobienne $D\hat{f}_0$ est inversible. Définissons $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ par

$$\Phi(x) = (\hat{f}^1(x), \dots, \hat{f}^r(x), x^{r+1}, \dots, x^m).$$

Comme $D\Phi_0$ est inversible (le mineur $r \times r$ et le bloc identité se combinent), Φ est un difféomorphisme local. En composant, on obtient

$$(\hat{f} \circ \Phi^{-1})(u) = (u^1, \dots, u^r, h^{r+1}(u), \dots, h^n(u))$$

pour certaines fonctions lisses h^j . L'hypothèse de rang constant r implique que $\frac{\partial h^j}{\partial u^i} = 0$ pour tout $i > r$ et $j > r$. Donc $h^j(u) = h^j(u^1, \dots, u^r, 0, \dots, 0) =: k^j(u^1, \dots, u^r)$. On définit alors $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$\Psi(y^1, \dots, y^n) = (y^1, \dots, y^r, y^{r+1} - k^{r+1}(y^1, \dots, y^r), \dots, y^n - k^n(y^1, \dots, y^r)).$$

C'est un difféomorphisme local et $(\Psi \circ \hat{f} \circ \Phi^{-1})(u) = (u^1, \dots, u^r, 0, \dots, 0)$. $\square$

Corollaire 4.26 (Version sous-variété du théorème du rang). *Sous les hypothèses du efthm :rang-constant :*

- (i) *Si f est une immersion ($r = m$), alors localement f s'écrit comme une inclusion linéaire $\mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$.*
- (ii) *Si f est une submersion ($r = n$), alors localement f s'écrit comme une projection linéaire $\mathbb{R}^m \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n$.*
- (iii) *Si f est de rang constant r , alors pour tout $c \in f(M)$, $f^{-1}(c)$ est une sous-variété plongée de dimension $m - r$.*

Démonstration. Les points (i) et (ii) sont des cas particuliers de la forme normale. Pour (iii), en coordonnées normales, $f^{-1}(c) \cap U$ est défini par les r premières coordonnées constantes, ce qui donne la structure de sous-variété. $\square$

4.7 Sous-variétés à bord

Rappelons le demi-espace $\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x^n \geq 0\}$.

Définition 4.27 (Variété à bord). Une **variété à bord** de dimension n est un espace topologique M de Hausdorff, à base dénombrable, muni d'un atlas maximal de cartes à valeurs dans des ouverts de $\mathbb{H}^n$ dont les changements de cartes sont lisses. Le **bord** de M est

$$\partial M = \{p \in M : \varphi(p) \in \partial \mathbb{H}^n \text{ pour une (toute) carte } (U, \varphi)\},$$

et l'**intérieur** est $\text{Int}(M) = M \setminus \partial M$.

Proposition 4.28 (Le bord est une variété sans bord). *Si M est une variété à bord de dimension n , alors ∂M est une variété lisse (sans bord) de dimension $n - 1$.*

Définition 4.29 (Sous-variété à bord propre). Soit M une variété sans bord. Un sous-ensemble $S \subset M$ est une **sous-variété à bord propre** de M si, pour tout $p \in S$, il existe une carte (U, φ) de M telle que

$$\varphi(U \cap S) = \varphi(U) \cap \mathbb{H}^k$$

pour un certain $k \leq n$.

Exemple 4.30 (Disque comme sous-variété à bord). Le disque fermé $\overline{D}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x|^2 \leq 1\}$ est une sous-variété à bord de $\mathbb{R}^2$, de bord $\partial \overline{D}^2 = S^1$.

4.8 Voisinage tubulaire

Le théorème du voisinage tubulaire affirme qu'une sous-variété plongée admet un voisinage qui est diffeomorphe à son fibré normal. C'est un outil fondamental pour la théorie de l'intersection et la transversalité.

Définition 4.31 (Fibré normal). Soit $S \subset M$ une sous-variété plongée et supposons M munie d'une métrique riemannienne g . Le **fibré normal** de S dans M est le fibré vectoriel

$$NS = \bigsqcup_{p \in S} N_p S, \quad N_p S = (T_p S)^\perp \subset T_p M,$$

où l'orthogonalité est prise par rapport à g_p .

Théorème 4.32 (Voisinage tubulaire). Soit S une sous-variété plongée compacte d'une variété lisse M . Il existe un voisinage ouvert U de S dans M et un diffeomorphisme

$$\Phi : NS \supset V \xrightarrow{\sim} U$$

d'un voisinage V de la section nulle dans NS sur U , tel que Φ restreint à la section nulle soit l'identité $S \rightarrow S$.

Remarque 4.33. La preuve (que nous omettons) repose sur l'application exponentielle riemannienne : on définit $\Phi(p, v) = \exp_p(v)$ pour $v \in N_p S$ suffisamment petit. La compacité de S assure l'existence d'un $\varepsilon > 0$ uniforme tel que Φ soit défini et soit un diffeomorphisme sur le ε -voisinage tubulaire.

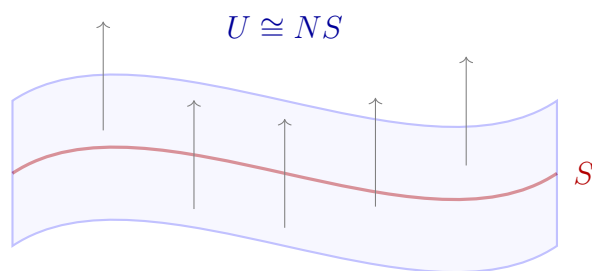


FIGURE 4.2 – Un voisinage tubulaire d'une sous-variété S : chaque fibre normale est représentée comme un segment transverse.

4.9 Exercices

Exercice 4.1. Soit $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2$.

- Montrer que 1 est une valeur régulière de f .
- En déduire que S^n est une sous-variété plongée de $\mathbb{R}^{n+1}$ de dimension n .
- Calculer $T_x S^n$ pour tout $x \in S^n$.

Exercice 4.2. Montrer que $\mathrm{SO}(n) = \{A \in O(n) : \det A = 1\}$ est une sous-variété plongée de $M_n(\mathbb{R})$ de même dimension que $O(n)$. *Indication* : montrer que $\mathrm{SO}(n)$ est une composante connexe de $O(n)$.

Exercice 4.3. La **variété de Stiefel** $V_k(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des k -repères orthonormaux dans $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire

$$V_k(\mathbb{R}^n) = \{A \in M_{n \times k}(\mathbb{R}) : A^\top A = I_k\}.$$

Montrer que $V_k(\mathbb{R}^n)$ est une sous-variété plongée de $M_{n \times k}(\mathbb{R})$ et calculer sa dimension.

Exercice 4.4. En utilisant le fait que $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ agit librement sur $V_k(\mathbb{R}^n)$, montrer que la grassmannienne $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) = V_k(\mathbb{R}^n) / \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ est une variété lisse de dimension $k(n - k)$.

Exercice 4.5. Soit $f : M \rightarrow N$ une application lisse de rang constant r avec M compacte et connexe. Montrer que $f(M)$ est une sous-variété plongée compacte de N de dimension r .

Exercice 4.6. Soient $S_1 \subset M_1$ et $S_2 \subset M_2$ des sous-variétés plongées. Montrer que $S_1 \times S_2$ est une sous-variété plongée de $M_1 \times M_2$ et que $\mathrm{codim}(S_1 \times S_2) = \mathrm{codim}(S_1) + \mathrm{codim}(S_2)$.

Exercice 4.7. Soit $\pi : M \rightarrow N$ une submersion surjective.

- (a) Montrer que π est une application ouverte.
- (b) Montrer que pour tout $q \in N$, la fibre $\pi^{-1}(q)$ est une sous-variété plongée de M de codimension $\dim N$.
- (c) Si de plus π est propre, montrer que π est un fibré lisse localement trivial (théorème d'Ehresmann).

Exercice 4.8. Soient $f : M \rightarrow N$ une application lisse et $S \subset N$ une sous-variété plongée. On dit que f est **transverse** à S (noté $f \pitchfork S$) si pour tout $p \in f^{-1}(S)$:

$$\mathrm{d}f_p(T_p M) + T_{f(p)} S = T_{f(p)} N.$$

Montrer que si $f \pitchfork S$, alors $f^{-1}(S)$ est une sous-variété plongée de M de codimension $\mathrm{codim}(S)$. *Indication* : se ramener au théorème de la valeur régulière en composant f avec une submersion locale définissant S .

Exercice 4.9. Montrer que le groupe unitaire spécial $\mathrm{SU}(2) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) : A\bar{A}^\top = I_2, \det A = 1\}$ est difféomorphe à S^3 . *Indication* : écrire la forme générale d'un élément de $\mathrm{SU}(2)$ et identifier avec $S^3 \subset \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$.

Exercice 4.10. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

- (a) Déterminer les points critiques et les valeurs critiques de f .
- (b) Pour chaque valeur régulière c , décrire la topologie de $f^{-1}(c)$.
- (c) Dessiner les lignes de niveau pour $c = -1, 0, 1$.
- (d) Que se passe-t-il au passage par la valeur critique $c = 0$?

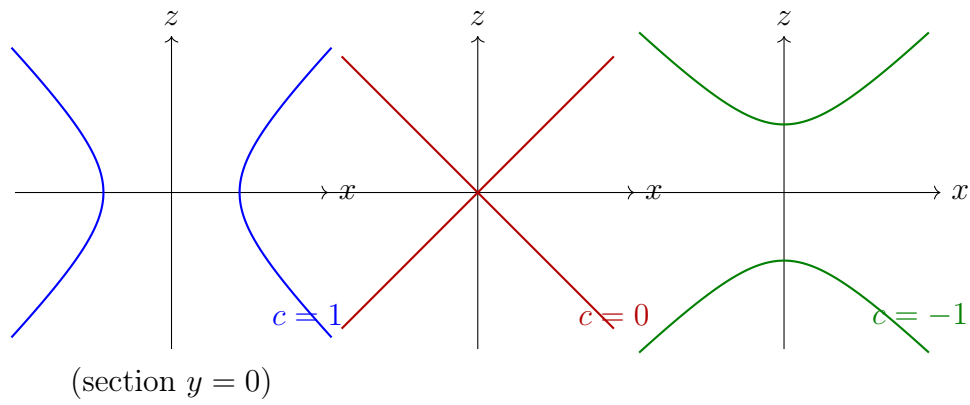


FIGURE 4.3 – Sections des ensembles de niveau de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ dans le plan $y = 0$, pour les valeurs $c = 1, 0, -1$.

Chapitre 5

Transversalité

Contents

3.1	L'espace tangent en un point	29
3.1.1	Définition via les dérivations	29
3.1.2	Définition via les classes d'équivalence de courbes	30
3.1.3	Équivalence des définitions	31
3.2	Différentielle d'une application lisse	31
3.3	Le fibré tangent	33
3.4	Le fibré cotangent	34
3.5	Champs de vecteurs	36
3.6	Le crochet de Lie	36
3.7	Flot d'un champ de vecteurs	37
3.8	Exercices	40

La transversalité est l'un des concepts les plus puissants de la topologie différentielle. Intuitivement, deux sous-variétés se coupent transversalement lorsqu'elles se croisent de la manière la plus « générale » possible, sans tangence. Ce chapitre développe cette notion, établit le théorème fondamental reliant transversalité et structure de sous-variété, puis montre que la transversalité est une condition *générique* au sens de Baire. Les applications aux nombres d'intersection et au théorème de Lefschetz illustrent la richesse de cette théorie.

5.1 Intersection transverse

5.1.1 Définition pour une application

Définition 5.1 (Transversalité d'une application à une sous-variété). Soient $f: M \rightarrow N$ une application lisse entre variétés lisses et $W \subset N$ une sous-variété (plongée). On dit que f est **transverse** à W , et on note $f \pitchfork W$, si pour tout $x \in f^{-1}(W)$ on a

$$df_x(T_x M) + T_{f(x)} W = T_{f(x)} N.$$

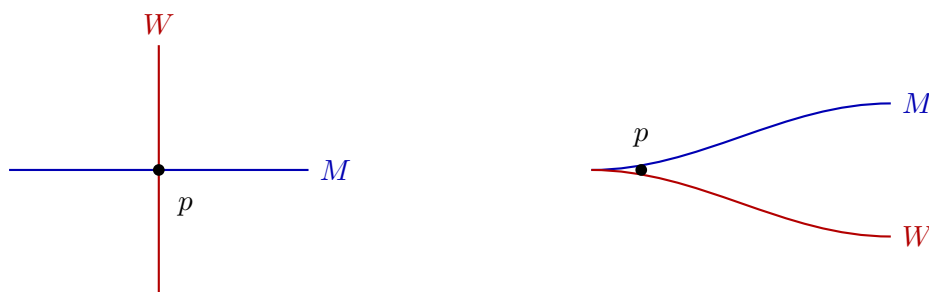
Autrement dit, l'image de la différentielle de f en x et l'espace tangent à W en $f(x)$ engendrent ensemble tout l'espace tangent à N .

Définition 5.2 (Transversalité de deux sous-variétés). Soient M et W deux sous-variétés d'une variété ambiante N . On dit que M et W **se coupent transversalement**, et on note $M \pitchfork W$, si pour tout $p \in M \cap W$ on a

$$T_p M + T_p W = T_p N.$$

Remarque 5.3. La définition 5.2 est un cas particulier de la définition 5.1 : il suffit de prendre $f: M \hookrightarrow N$ l'inclusion. Notons aussi que si $f^{-1}(W) = \emptyset$, la condition de transversalité est automatiquement satisfaite (il n'y a aucun point à vérifier).

Remarque 5.4. Si $\dim M + \dim W < \dim N$, alors la transversalité $M \pitchfork W$ implique $M \cap W = \emptyset$ (pour des raisons de dimension, la somme $T_p M + T_p W$ ne peut jamais être $T_p N$ si les deux sous-espaces sont en position générale).



$M \pitchfork W$: transverse

Non transverse : tangence en p

FIGURE 5.1 – À gauche, deux courbes dans $\mathbb{R}^2$ se coupant transversalement ; à droite, une intersection non transverse (tangente).

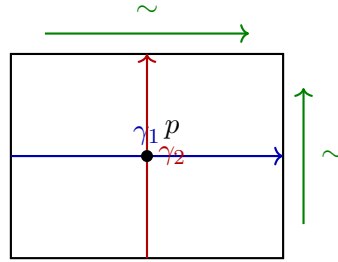
5.1.2 Exemples et non-exemples

Exemple 5.5 (Droites dans le plan). Dans $\mathbb{R}^2$, deux droites distinctes et non parallèles se coupent transversalement. Deux droites parallèles distinctes vérifient trivialement la transversalité (intersection vide). En revanche, une droite considérée comme sous-variété de $\mathbb{R}^2$ se coupe elle-même de manière non transverse (la somme $T_p L + T_p L = T_p L \neq T_p \mathbb{R}^2$).

Exemple 5.6 (Sphère et plan). Dans $\mathbb{R}^3$, la sphère S^2 et le plan $\{z = c\}$ se coupent transversalement si et seulement si $c \neq \pm 1$. Aux pôles $c = \pm 1$, le plan est tangent à la sphère.

Exemple 5.7 (Courbes sur une surface). Sur le tore $T^2 = S^1 \times S^1$, les cercles $\gamma_1 = S^1 \times \{1\}$ et $\gamma_2 = \{1\} \times S^1$ se coupent transversalement en un unique point.

Exemple 5.8 (Application non transverse). L'application $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t^2)$ n'est pas transverse à l'axe des abscisses $W = \mathbb{R} \times \{0\}$ en $t = 0$, car $df_0(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \times \{0\} = T_{(0,0)}W$.



Domaine fondamental du tore T^2

FIGURE 5.2 – Deux cercles générateurs sur le tore, se coupant transversalement en un point.

5.2 Théorème de transversalité

Le résultat fondamental suivant montre que l'image réciproque d'une sous-variété par une application transverse est encore une sous-variété, de la codimension attendue.

Théorème 5.9 (Préimage transverse). Soient $f: M \rightarrow N$ une application lisse et $W \subset N$ une sous-variété de codimension k . Si $f \pitchfork W$, alors :

- (i) $f^{-1}(W)$ est une sous-variété lisse de M ;
- (ii) $\text{codim}_M f^{-1}(W) = \text{codim}_N W = k$;
- (iii) pour tout $x \in f^{-1}(W)$, on a $T_x(f^{-1}(W)) = (df_x)^{-1}(T_{f(x)}W)$.

Démonstration. Soit $x_0 \in f^{-1}(W)$ et posons $y_0 = f(x_0) \in W$.

Étape 1 : Linéarisation locale de W . Comme W est une sous-variété de codimension k de N , il existe un voisinage ouvert V de y_0 dans N et une submersion $g: V \rightarrow \mathbb{R}^k$ telle que $W \cap V = g^{-1}(0)$.

Étape 2 : La composée $g \circ f$ est une submersion. Considérons l'application $h = g \circ f: f^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{R}^k$. Pour $x \in f^{-1}(W \cap V)$, on a $f(x) \in W$, donc $\ker dg_{f(x)} = T_{f(x)}W$. La condition de transversalité $df_x(T_xM) + T_{f(x)}W = T_{f(x)}N$ et la surjectivité de $dg_{f(x)}: T_{f(x)}N \rightarrow \mathbb{R}^k$ donnent :

$$dh_x(T_xM) = dg_{f(x)}(df_x(T_xM)) = dg_{f(x)}(df_x(T_xM) + T_{f(x)}W) = dg_{f(x)}(T_{f(x)}N) = \mathbb{R}^k.$$

Donc $h = g \circ f$ est une submersion en tout point de $h^{-1}(0)$.

Étape 3 : Application du théorème de la valeur régulière. Puisque h est une submersion en tout point de $h^{-1}(0)$, le théorème de la valeur régulière assure que $h^{-1}(0) = f^{-1}(W) \cap f^{-1}(V)$ est une sous-variété de $f^{-1}(V)$ de codimension k . Comme ceci vaut au voisinage de chaque point $x_0 \in f^{-1}(W)$, on obtient que $f^{-1}(W)$ est une sous-variété de M de codimension k .

Étape 4 : Espace tangent. Pour $x \in f^{-1}(W)$, on a

$$T_x(f^{-1}(W)) = T_x(h^{-1}(0)) = \ker dh_x = \ker(dg_{f(x)} \circ df_x) = (df_x)^{-1}(\ker dg_{f(x)}) = (df_x)^{-1}(T_{f(x)}W). \quad \square$$

Corollaire 5.10. *Si M et W sont deux sous-variétés de N avec $M \pitchfork W$, alors $M \cap W$ est une sous-variété de N et*

$$\text{codim}(M \cap W) = \text{codim}(M) + \text{codim}(W).$$

De manière équivalente, $\dim(M \cap W) = \dim M + \dim W - \dim N$.

Démonstration. On applique le théorème 5.9 à l'inclusion $\iota: M \hookrightarrow N$, qui est transverse à W précisément lorsque $M \pitchfork W$. On a $\iota^{-1}(W) = M \cap W$. $\square$

Exemple 5.11. Dans $\mathbb{R}^3$, considérons les sphères $S_1 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ et $S_2 = \{(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Elles se coupent transversalement car en tout point d'intersection, les normales sont distinctes. Par le corollaire, $S_1 \cap S_2$ est une sous-variété de dimension $2 + 2 - 3 = 1$: c'est un cercle.

5.3 Transversalité et stabilité

La transversalité est une condition « ouverte » : elle persiste sous de petites perturbations.

Proposition 5.12 (Stabilité de la transversalité). *Soient M compacte, N une variété lisse et $W \subset N$ une sous-variété fermée. L'ensemble*

$$\pitchfork(M, N; W) = \{f \in C^\infty(M, N) \mid f \pitchfork W\}$$

est un ouvert de $C^\infty(M, N)$ pour la topologie C^1 (et a fortiori pour la topologie C^∞).

Idée de preuve. La condition de transversalité en un point est une condition de rang maximal sur une application linéaire, donc ouverte. Comme M est compacte, on peut recouvrir $f^{-1}(W)$ par un nombre fini de cartes et utiliser la continuité de la différentielle en topologie C^1 pour conclure. $\square$

Lemme 5.13 (Transversalité et rang). *Soit $f: M \rightarrow N$ lisse et $W \subset N$ une sous-variété de codimension k définie localement comme $g^{-1}(0)$ pour une submersion $g: V \rightarrow \mathbb{R}^k$. Alors $f \pitchfork W$ sur $f^{-1}(V)$ si et seulement si $g \circ f$ est de rang k en tout point de $(g \circ f)^{-1}(0)$.*

Démonstration. C'est exactement le calcul effectué dans l'étape 2 de la preuve du théorème 5.9 : la surjectivité de $d(g \circ f)_x$ est équivalente à la condition de transversalité. $\square$

Exemple 5.14 (Perturbation transverse). Considérons dans $\mathbb{R}^2$ la parabole $C = \{y = x^2\}$ et l'axe $W = \{y = 0\}$. L'intersection $C \cap W = \{(0, 0)\}$ n'est pas transverse car $T_{(0,0)}C = T_{(0,0)}W = \mathbb{R} \times \{0\}$. Cependant, pour tout $\varepsilon > 0$, la translation $C_\varepsilon = \{y = x^2 - \varepsilon\}$ coupe W transversalement en deux points $(\pm\sqrt{\varepsilon}, 0)$.

Remarque 5.15. En pratique, si une application f n'est pas transverse à W , on peut souvent la « perturber » légèrement pour obtenir une application $\tilde{f}$, homotope à f , telle que $\tilde{f} \pitchfork W$. C'est le contenu du théorème de transversalité de Thom.

5.4 Théorème de transversalité de Thom

Le théorème suivant affirme que la transversalité est une condition *générique*, c'est-à-dire vérifiée par un ensemble résiduel d'applications.

Théorème 5.16 (Transversalité de Thom). *Soit $F: M \times S \rightarrow N$ une application lisse, où M, S, N sont des variétés lisses avec M de dimension finie. Soit $W \subset N$ une sous-variété. Si $F \pitchfork W$, alors l'ensemble*

$$\{s \in S \mid F_s \pitchfork W\}, \quad \text{où } F_s = F(\cdot, s): M \rightarrow N,$$

est résiduel dans S (et donc dense si S est un espace de Baire). De plus, si M est compacte, cet ensemble est un ouvert dense.

Esquisse de preuve. Étape 1. Par hypothèse $F \pitchfork W$, donc le théorème 5.9 assure que $\mathcal{W} = F^{-1}(W)$ est une sous-variété de $M \times S$ de codimension $\text{codim}(W)$.

Étape 2. Considérons la projection $\pi: \mathcal{W} \rightarrow S$, $\pi(x, s) = s$. On montre que $s \in S$ est une valeur régulière de π si et seulement si $F_s \pitchfork W$.

En effet, fixons $(x_0, s_0) \in \mathcal{W}$. L'espace tangent $T_{(x_0, s_0)}\mathcal{W} = (dF_{(x_0, s_0)})^{-1}(T_{F(x_0, s_0)}W)$. La condition que $d\pi$ soit surjective en (x_0, s_0) signifie que la composante en S de cet espace tangent est tout $T_{s_0}S$, ce qui se reformule exactement comme $F_{s_0} \pitchfork W$ en x_0 .

Étape 3. Le théorème de Sard appliqué à π donne que l'ensemble des valeurs régulières de π est résiduel (dense et de mesure pleine). Donc $\{s \in S \mid F_s \pitchfork W\}$ est résiduel.

La partie sur l'ouverture lorsque M est compacte découle de la proposition 5.12. $\square$

Remarque 5.17. Le théorème de Thom admet l'interprétation suivante : si l'on dispose d'une famille d'applications suffisamment riche (paramétrée par S) et si la « famille totale » F est transverse à W , alors « presque tout » membre de la famille est transverse à W . Le paramètre $s \in S$ joue le rôle d'une perturbation, et l'espace S doit être assez grand pour « résoudre » tous les défauts de transversalité.

Exemple 5.18 (Application du théorème de Thom). Considérons M une variété compacte plongée dans $\mathbb{R}^N$ et $W \subset \mathbb{R}^N$ une sous-variété. Pour $s \in \mathbb{R}^N$, posons

$M_s = M + s$ (translaté). La famille $F: M \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, $F(x, s) = x + s$ est une submersion, donc $F \pitchfork W$. Par le théorème de Thom, pour presque tout $s \in \mathbb{R}^N$ (au sens de la mesure et de Baire), $M_s \pitchfork W$.

Corollaire 5.19 (Densité de la transversalité). *Soient M compacte, N une variété et $W \subset N$ une sous-variété fermée. Alors $\{f \in C^\infty(M, N) \mid f \pitchfork W\}$ est un ouvert dense de $C^\infty(M, N)$ pour la topologie C^∞ .*

Démonstration. La densité s'obtient en appliquant le théorème 5.16 avec un choix judicieux de famille paramétrée. Par exemple, si N est plongée dans $\mathbb{R}^K$ (par le théorème de Whitney), on pose $F: M \times B_\varepsilon(0) \rightarrow N$, $(x, s) \mapsto \pi_N(f(x) + s)$ où π_N est une projection tubulaire. On vérifie que $F \pitchfork W$ pour ε assez petit. L'ouverture découle de la proposition 5.12. $\square$

5.5 Applications de la transversalité

5.5.1 Nombre d'intersection

Définition 5.20 (Nombre d'intersection orienté). Soient M^m et N^n deux variétés lisses compactes orientées sans bord, et soit $f: M \rightarrow N$ une application lisse avec $f \pitchfork W$, où $W \subset N$ est une sous-variété fermée orientée de codimension m . Alors $f^{-1}(W)$ est un ensemble fini de points. En chaque point $x \in f^{-1}(W)$, on définit un **signe** $\varepsilon(x) = \pm 1$ selon que l'isomorphisme

$$df_x: T_x M / T_x(f^{-1}(W)) \xrightarrow{\sim} T_{f(x)} N / T_{f(x)} W$$

préserve ou renverse l'orientation. Le **nombre d'intersection** de f et W est

$$I(f, W) = \sum_{x \in f^{-1}(W)} \varepsilon(x) \in \mathbb{Z}.$$

Théorème 5.21 (Invariance homotopique du nombre d'intersection). *Le nombre d'intersection $I(f, W)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de f . Plus précisément, si $f_0 \simeq f_1$ et les deux sont transverses à W , alors $I(f_0, W) = I(f_1, W)$.*

Idée de preuve. Soit $H: M \times [0, 1] \rightarrow N$ une homotopie lisse entre f_0 et f_1 . Par le théorème de Thom, on peut supposer $H \pitchfork W$ (quitte à perturber). Alors $H^{-1}(W)$ est une 1-variété compacte à bord dans $M \times [0, 1]$, dont le bord est $f_0^{-1}(W) \sqcup f_1^{-1}(W)$. Un argument de comptage des signes sur le bord d'une 1-variété orientée montre l'égalité. $\square$

Définition 5.22 (Nombre d'intersection de deux sous-variétés). Soient M^n une variété orientée compacte sans bord, et soient $A^a, B^b \subset M$ deux sous-variétés compactes orientées avec $a + b = n$ et $A \pitchfork B$. Le nombre d'intersection est

$$I(A, B) = \sum_{p \in A \cap B} \varepsilon(p),$$

où $\varepsilon(p) = +1$ si l'orientation de $T_p A \oplus T_p B$ coïncide avec celle de $T_p M$, et -1 sinon.

Proposition 5.23. *Le nombre d'intersection satisfait :*

- (i) $I(A, B) = (-1)^{ab} I(B, A)$ où $a = \text{codim } A$ et $b = \text{codim } B$;
- (ii) $I(A, B)$ ne dépend que des classes d'homologie de A et B ;
- (iii) si A et B sont homologiquement triviaux, alors $I(A, B) = 0$.

Preuve de (i). Il suffit d'observer que le changement de l'ordre des facteurs dans $T_p A \oplus T_p B \cong T_p M$ introduit un signe $(-1)^{\dim A \cdot \dim B} = (-1)^{(n-a)(n-b)}$. Comme $a + b = n$, on vérifie que $(n-a)(n-b) = ab \pmod{2}$, d'où le résultat. $\square$

Exemple 5.24 (Intersection sur le tore). Sur le tore $T^2 = S^1 \times S^1$, orienté par la forme d'aire standard, les cercles $\alpha = S^1 \times \{1\}$ et $\beta = \{1\} \times S^1$ se coupent transversalement en $(1, 1)$. L'orientation de $T_{(1,1)}\alpha \oplus T_{(1,1)}\beta$ coïncide avec l'orientation de T^2 , donc $I(\alpha, \beta) = +1$. De même, $I(\beta, \alpha) = +1$ car $1 \cdot 1 = 1$ est impair, mais $(-1)^{1 \cdot 1} \cdot (+1) = -1$... En fait, avec les conventions de codimension, $a = b = 1$ et $I(\alpha, \beta) = (-1)^{1 \cdot 1} I(\beta, \alpha)$, donc $I(\alpha, \beta) = -I(\beta, \alpha)$ si l'on échange l'ordre. Ceci dépend de la convention d'orientation choisie ; avec la convention usuelle, $I(\alpha, \beta) = +1$.

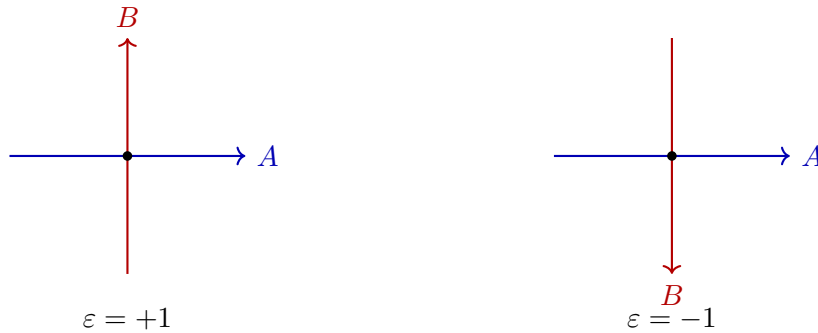


FIGURE 5.3 – Signe de l'intersection : $\varepsilon = +1$ lorsque les orientations de A et B donnent l'orientation ambiante, $\varepsilon = -1$ sinon.

5.5.2 Nombre d'intersection modulo 2

Définition 5.25 (Nombre d'intersection mod 2). Si M , A , B ne sont pas nécessairement orientables, on définit le **nombre d'intersection modulo 2** :

$$I_2(A, B) = \#(A \cap B) \pmod{2} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

à condition que $A \pitchfork B$ et que les dimensions soient complémentaires. Ce nombre est un invariant d'homotopie.

Exemple 5.26. Dans $\mathbb{RP}^2$, la droite projective standard $\mathbb{RP}^1 \subset \mathbb{RP}^2$ a un nombre d'auto-intersection $I_2(\mathbb{RP}^1, \mathbb{RP}^1) = 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (on perturbe une copie et on compte les intersections modulo 2).

5.5.3 Nombre d'auto-intersection

Définition 5.27 (Nombre d'auto-intersection). Soit A une sous-variété compacte orientée de codimension k dans une variété orientée M^n . Le **nombre d'auto-intersection** de A est

$$I(A, A) = I(A, A'),$$

où A' est une petite perturbation de A telle que $A \pitchfork A'$. Ce nombre est bien défini par l'invariance homotopique.

Exemple 5.28. La section nulle de S^2 dans son fibré tangent TS^2 a un nombre d'auto-intersection égal à $\chi(S^2) = 2$, la caractéristique d'Euler. Plus généralement, le nombre d'auto-intersection de la diagonale $\Delta \subset M \times M$ est $\chi(M)$.

5.5.4 Lien avec le théorème de Lefschetz

Théorème 5.29 (Théorème du point fixe de Lefschetz — énoncé). Soit $f: M \rightarrow M$ une application lisse d'une variété compacte orientée sans bord. Le **nombre de Lefschetz** est

$$L(f) = \sum_{k=0}^{\dim M} (-1)^k \operatorname{tr}(f_*: H_k(M; \mathbb{Q}) \rightarrow H_k(M; \mathbb{Q})).$$

Si $L(f) \neq 0$, alors f admet un point fixe.

Remarque 5.30. Le lien avec la transversalité est le suivant. Le graphe $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in M\} \subset M \times M$ et la diagonale $\Delta = \{(x, x) \mid x \in M\}$ sont des sous-variétés de $M \times M$. Les points fixes de f correspondent exactement aux points de $\Gamma_f \cap \Delta$. Si $\Gamma_f \pitchfork \Delta$, alors le nombre de Lefschetz est le nombre d'intersection : $L(f) = I(\Gamma_f, \Delta)$.

5.6 Exercices

Exercice 5.1. Dans $\mathbb{R}^2$, déterminer pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ les courbes $\{y = x^2\}$ et $\{y = a\}$ se coupent transversalement.

Exercice 5.2. Montrer que dans $\mathbb{R}^{n+1}$, les sphères $S_r = \{|x| = r\}$ et $S'_R = \{|x - a| = R\}$ (avec $a \in \mathbb{R}^{n+1}$) se coupent transversalement si et seulement si elles ne sont pas tangentes intérieurement ou extérieurement.

Exercice 5.3. Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2$.

(a) Montrer que $f \pitchfork \{1\}$.

- (b) En déduire que $f^{-1}(1)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ?
 (c) Que se passe-t-il pour $f^{-1}(0)$?

Exercice 5.4. Soient V et W deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ avec $V \pitchfork W$ (au sens de sous-variétés de $\mathbb{R}^n$). Montrer que $V + W = \mathbb{R}^n$ et en déduire $\dim(V \cap W) = \dim V + \dim W - n$.

Exercice 5.5 (Transversalité et submersions). Montrer que si $f: M \rightarrow N$ est une submersion, alors f est transverse à toute sous-variété $W \subset N$.

Exercice 5.6. Sur le tore T^2 , considérer les courbes $\alpha(t) = (e^{2\pi it}, 1)$ et $\beta(t) = (e^{2\pi i p t}, e^{2\pi i q t})$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$ et $\gcd(p, q) = 1$. Montrer que $\alpha \pitchfork \beta$ et calculer $I(\alpha, \beta)$.

Exercice 5.7 (Densité de la transversalité). Soit $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un plongement lisse. Montrer qu'il existe une droite $L \subset \mathbb{R}^2$ telle que $f(S^1) \pitchfork L$. *Indication : utiliser le théorème de Sard.*

Exercice 5.8. Soit $f: M^n \rightarrow N^n$ une application lisse entre variétés orientées compactes sans bord, et soit $q \in N$ une valeur régulière. Montrer que $I(f, \{q\}) = \deg(f)$, le degré topologique de f .

Exercice 5.9 (Auto-intersection de la diagonale). Soit M^n une variété compacte orientée. Considérons la diagonale $\Delta \subset M \times M$.

- (a) Montrer que le fibré normal de Δ dans $M \times M$ est isomorphe au fibré tangent TM .
 (b) En déduire que $I(\Delta, \Delta) = \chi(M)$, la caractéristique d'Euler de M .

Exercice 5.10. En utilisant le résultat de l'exercice 5.9, retrouver le fait que S^{2n} ne possède pas de champ de vecteurs ne s'annulant jamais. (*Théorème de la boule chevelue.*)

Exercice 5.11 (Transversalité dans les espaces projectifs). Dans $\mathbb{CP}^n$, montrer que deux sous-espaces projectifs $\mathbb{CP}^k$ et $\mathbb{CP}^\ell$ (en position générale) se coupent transversalement. Quelle est la dimension de l'intersection lorsque $k + \ell \geq n$?

Exercice 5.12 (Application du théorème de Thom). Soit M^m une variété compacte et $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application lisse avec $m < n$.

- (a) Montrer que pour presque tout $y \in \mathbb{R}^n$, $f^{-1}(y) = \emptyset$.
 (b) En déduire que l'image $f(M)$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^n$. (*Retrouver ainsi une conséquence du théorème de Sard.*)

Chapitre 6

Formes différentielles et intégration sur les variétés

Contents

4.1	Immersions, submersions, plongements	41
4.2	Sous-variétés	43
4.3	Le théorème de la valeur régulière	43
4.4	Applications fondamentales	45
4.4.1	La sphère S^{n-1}	45
4.4.2	Le groupe orthogonal $O(n)$	45
4.4.3	Le groupe spécial linéaire $SL(n, \mathbb{R})$	46
4.4.4	Préimages dans $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$	47
4.4.5	Le théorème de Sard	47
4.5	Espace tangent d'une sous-variété	48
4.6	Théorème du rang constant	48
4.7	Sous-variétés à bord	49
4.8	Voisinage tubulaire	50
4.9	Exercices	50

Les formes différentielles fournissent le cadre naturel pour l'intégration sur les variétés. Ce chapitre rappelle d'abord l'algèbre extérieure, puis construit les formes différentielles et leur différentielle extérieure. Nous introduisons ensuite le tiré en arrière, le produit intérieur et la dérivée de Lie, avant de traiter l'orientation et l'intégration.

6.1 Algèbre extérieure

Définition 6.1 (Puissance extérieure). Soit V un espace vectoriel réel de dimension n . La k -ième **puissance extérieure** $\Lambda^k V^*$ est l'espace vectoriel des formes k -linéaires alternées sur V :

$$\Lambda^k V^* = \left\{ \omega : \underbrace{V \times \cdots \times V}_k \rightarrow \mathbb{R} \mid \omega \text{ est } k\text{-linéaire et alternée} \right\}.$$

Par convention, $\Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$ et $\Lambda^k V^* = 0$ pour $k > n$.

Proposition 6.2. $\dim \Lambda^k V^* = \binom{n}{k}$. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de V et $(e^1, \dots, e^n)$ la base duale, alors les éléments

$$e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n,$$

forment une base de $\Lambda^k V^*$.

Définition 6.3 (Produit extérieur). Le **produit extérieur** $\wedge: \Lambda^k V^* \times \Lambda^\ell V^* \rightarrow \Lambda^{k+\ell} V^*$ est défini par

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{k+\ell}) = \frac{1}{k! \ell!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \text{sgn}(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+\ell)}).$$

Proposition 6.4 (Propriétés du produit extérieur). Pour $\alpha \in \Lambda^k V^*$, $\beta \in \Lambda^\ell V^*$, $\gamma \in \Lambda^m V^*$:

- (i) Associativité : $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$;
- (ii) Anti-commutativité graduée : $\alpha \wedge \beta = (-1)^{k\ell} \beta \wedge \alpha$;
- (iii) Bilinéarité : $\wedge$ est bilinéaire en chaque argument.

Définition 6.5 (Algèbre extérieure). L'**algèbre extérieure** de V^* est la somme directe graduée

$$\Lambda^* V^* = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k V^*,$$

munie du produit extérieur. C'est une algèbre associative graduée de dimension 2^n .

Exemple 6.6. Pour $V = \mathbb{R}^3$ avec base duale (e^1, e^2, e^3) :

- $\Lambda^0(\mathbb{R}^3)^* \cong \mathbb{R}$ (dimension 1) ;
- $\Lambda^1(\mathbb{R}^3)^*$ a pour base $\{e^1, e^2, e^3\}$ (dimension 3) ;
- $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$ a pour base $\{e^1 \wedge e^2, e^1 \wedge e^3, e^2 \wedge e^3\}$ (dimension 3) ;
- $\Lambda^3(\mathbb{R}^3)^*$ a pour base $\{e^1 \wedge e^2 \wedge e^3\}$ (dimension 1).

On retrouve la dimension totale $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$. L'isomorphisme $\Lambda^1 \cong \Lambda^2$ en dimension 3 est à l'origine du produit vectoriel et de la dualité de Hodge.

Proposition 6.7 (Déterminant comme forme extérieure). Si $\dim V = n$, alors $\Lambda^n V^*$ est de dimension 1. Pour $\varphi: V \rightarrow V$ linéaire, l'application induite $\Lambda^n \varphi^*: \Lambda^n V^* \rightarrow \Lambda^n V^*$ est la multiplication par $\det(\varphi)$.

6.2 Formes différentielles

Définition 6.8 (Forme différentielle de degré k). Soit M une variété lisse de dimension n . Une **forme différentielle de degré k** (ou k -forme) sur M est une section lisse du fibré $\Lambda^k T^*M$:

$$\omega \in \Omega^k(M) = \Gamma^\infty(\Lambda^k T^*M).$$

Autrement dit, ω associe à chaque point $p \in M$ un élément $\omega_p \in \Lambda^k T_p^*M$, de manière lisse.

Remarque 6.9. $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$: les 0-formes sont les fonctions lisses. $\Omega^k(M) = 0$ pour $k > \dim M$.

Proposition 6.10 (Expression locale). Si $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ est une carte locale de M , toute k -forme $\omega \in \Omega^k(M)$ s'écrit sur U :

$$\omega|_U = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

où les $\omega_{i_1 \dots i_k} \in C^\infty(U)$ sont les **fonctions composantes** de ω .

Exemple 6.11. Sur $\mathbb{R}^3$ avec coordonnées (x, y, z) :

- 0-forme : $f(x, y, z)$;
- 1-forme : $\omega = P dx + Q dy + R dz$;
- 2-forme : $\eta = A dy \wedge dz + B dz \wedge dx + C dx \wedge dy$;
- 3-forme : $\mu = \rho dx \wedge dy \wedge dz$.

6.3 Différentielle extérieure

Théorème 6.12 (Différentielle extérieure). Il existe un unique opérateur linéaire $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$, pour chaque $k \geq 0$, vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) pour $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$, df est la différentielle usuelle ;
- (ii) Règle de Leibniz graduée : pour $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^\ell(M)$,

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta;$$

- (iii) Nilpotence : $d \circ d = 0$;

- (iv) d est local : si $\omega|_U = \eta|_U$, alors $d\omega|_U = d\eta|_U$.

Démonstration. Unicité. Sur un ouvert de carte $(U, x^1, \dots, x^n)$, les propriétés (i) et (ii) imposent :

$$d\left(\sum_I \omega_I dx^I\right) = \sum_I d\omega_I \wedge dx^I = \sum_I \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_I}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^I,$$

où nous utilisons la multi-notation $dx^I = dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$. Ceci détermine d de manière unique.

Existence. On définit d par la formule ci-dessus en coordonnées locales. Il faut vérifier que la définition est indépendante du choix de carte (ce qui découle de la règle de changement de variables pour les dérivées partielles) et que les propriétés (i)–(iv) sont satisfaites.

Vérifions (iii) : $d^2 = 0$. Il suffit de le vérifier sur les générateurs. Pour $f \in C^\infty(M)$:

$$d^2 f = d\left(\sum_j \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j\right) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j = 0,$$

car $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ est symétrique en (i, j) tandis que $dx^i \wedge dx^j$ est antisymétrique. La propriété s'étend aux k -formes par la règle de Leibniz. $\square$

Proposition 6.13 (Formule intrinsèque). *Pour $\omega \in \Omega^k(M)$ et des champs de vecteurs $X_0, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$:*

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, \dots, X_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i X_i(\omega(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k)) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k), \end{aligned}$$

où $\widehat{X}_i$ signifie que le terme X_i est omis.

Exemple 6.14. Pour une 1-forme ω et des champs X, Y :

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]).$$

Exemple 6.15 (Lien avec l'analyse vectorielle). Sur $\mathbb{R}^3$:

- $df = \nabla f \cdot dx$ (gradient) ;
- $d(P dx + Q dy + R dz)$ correspond au rotationnel ;
- $d(A dy \wedge dz + B dz \wedge dx + C dx \wedge dy) = \operatorname{div}(A, B, C) dx \wedge dy \wedge dz$.

L'identité $d^2 = 0$ encode simultanément $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$ et $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{F}) = 0$.

6.3.1 Formes fermées et formes exactes

Définition 6.16 (Formes fermées et exactes). Une k -forme $\omega \in \Omega^k(M)$ est dite :

- **fermée** si $d\omega = 0$;
- **exacte** s'il existe $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ telle que $\omega = d\eta$.

Puisque $d^2 = 0$, toute forme exacte est fermée. La réciproque est en général fausse.

Définition 6.17 (Cohomologie de de Rham). Le k -ième **groupe de cohomologie**

de de Rham de M est

$$H_{\text{dR}}^k(M) = \frac{\ker(d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M))}{\text{im}(d: \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M))} = \frac{Z^k(M)}{B^k(M)},$$

où $Z^k(M)$ est l'espace des k -formes fermées et $B^k(M)$ celui des k -formes exactes. C'est un espace vectoriel réel qui mesure l'obstruction à ce que toute forme fermée soit exacte.

Théorème 6.18 (Lemme de Poincaré). *Si $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert étoilé (ou plus généralement contractile), alors $H_{\text{dR}}^k(U) = 0$ pour tout $k \geq 1$. Autrement dit, toute forme fermée sur U est exacte.*

Idée de preuve. On construit un opérateur d'homotopie $K: \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k-1}(U)$ tel que $dK + Kd = \text{Id}$ sur $\Omega^k(U)$ pour $k \geq 1$. Si U est étoilé par rapport à l'origine, on pose

$$(K\omega)_x(v_1, \dots, v_{k-1}) = \int_0^1 t^{k-1} \omega_{tx}(x, v_1, \dots, v_{k-1}) dt.$$

Alors pour ω fermée : $\omega = d(K\omega) + K(d\omega) = d(K\omega)$. □

6.4 Tiré en arrière

Définition 6.19 (Tiré en arrière). Soit $f: M \rightarrow N$ une application lisse. Le **tiré en arrière** (ou *pullback*) est l'application linéaire $f^*: \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ définie par

$$(f^*\omega)_p(v_1, \dots, v_k) = \omega_{f(p)}(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k)),$$

pour $p \in M$ et $v_1, \dots, v_k \in T_p M$.

Théorème 6.20 (Propriétés du tiré en arrière). *Soient $f: M \rightarrow N$ et $g: N \rightarrow P$ des applications lisses.*

- (i) Fonctorialité : $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$;
- (ii) $(\text{Id}_M)^* = \text{Id}_{\Omega^*(M)}$;
- (iii) $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta$;
- (iv) Naturalité de d : $f^* \circ d = d \circ f^*$, c'est-à-dire le diagramme suivant commute pour tout k :

$$\begin{array}{ccc} \Omega^k(N) & \xrightarrow{d} & \Omega^{k+1}(N) \\ f^* \downarrow & & \downarrow f^* \\ \Omega^k(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^{k+1}(M) \end{array}$$

- (v) pour $h \in C^\infty(N)$: $f^*(h) = h \circ f$.

Démonstration. (i) Pour $\omega \in \Omega^k(P)$ et $v_1, \dots, v_k \in T_p M$:

$$\begin{aligned} ((g \circ f)^* \omega)_p(v_1, \dots, v_k) &= \omega_{g(f(p))}(d(g \circ f)_p(v_1), \dots, d(g \circ f)_p(v_k)) \\ &= \omega_{g(f(p))}(dg_{f(p)} \circ df_p(v_1), \dots, dg_{f(p)} \circ df_p(v_k)) \\ &= (g^* \omega)_{f(p)}(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k)) \\ &= (f^*(g^* \omega))_p(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

(iv) Il suffit de vérifier en coordonnées locales. Pour $\omega = \sum_I \omega_I dy^I$ sur N :

$$f^*(d\omega) = f^*\left(\sum_I d\omega_I \wedge dy^I\right) = \sum_I d(\omega_I \circ f) \wedge f^*(dy^I) = d\left(\sum_I (\omega_I \circ f) f^*(dy^I)\right) = d(f^* \omega),$$

en utilisant $d^2 = 0$ et la règle de Leibniz. $\square$

Remarque 6.21. Le tiré en arrière f^* est défini pour *toute* application lisse f , pas seulement pour les difféomorphismes. Il va dans le sens « inverse », ce qui en fait un foncteur contravariant. Il n'existe en général pas d'analogue covariant (« pushforward ») pour les formes différentielles, sauf si f est un difféomorphisme.

6.5 Produit intérieur et dérivée de Lie

Définition 6.22 (Produit intérieur). Soit $X \in \mathfrak{X}(M)$ un champ de vecteurs. Le **produit intérieur** (ou contraction) par X est l'opérateur linéaire $\iota_X : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ défini par

$$(\iota_X \omega)(Y_1, \dots, Y_{k-1}) = \omega(X, Y_1, \dots, Y_{k-1}).$$

Pour $k = 0$, on pose $\iota_X f = 0$.

Proposition 6.23 (Propriétés du produit intérieur). (i) ι_X est une anti-dérivation de degré -1 :

$$\iota_X(\alpha \wedge \beta) = (\iota_X \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (\iota_X \beta), \quad \alpha \in \Omega^k(M);$$

(ii) $\iota_X \circ \iota_X = 0$;

(iii) $\iota_X \circ \iota_Y + \iota_Y \circ \iota_X = 0$;

(iv) $\iota_{fX} \omega = f \cdot \iota_X \omega$ pour $f \in C^\infty(M)$.

Définition 6.24 (Dérivée de Lie des formes). Soit $X \in \mathfrak{X}(M)$ un champ de vecteurs et φ_t son flot. La **dérivée de Lie** d'une k -forme ω par rapport à X est

$$\mathcal{L}_X \omega = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^* \omega.$$

Théorème 6.25 (Formule de Cartan). *Pour tout champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(M)$ et toute forme $\omega \in \Omega^k(M)$:*

$$\mathcal{L}_X \omega = d(\iota_X \omega) + \iota_X(d\omega) = (d \circ \iota_X + \iota_X \circ d)\omega.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur le degré k .

Cas $k = 0$. Pour $f \in C^\infty(M)$: $\mathcal{L}_X f = X(f) = df(X) = \iota_X(df)$, et $d(\iota_X f) = d(0) = 0$. Donc $\mathcal{L}_X f = d(\iota_X f) + \iota_X(df)$.

Cas $k = 1$ pour les formes exactes. Pour $\omega = df$: $\mathcal{L}_X(df) = d(\mathcal{L}_X f) = d(X(f))$ (car $\mathcal{L}_X$ et d commutent). D'autre part, $d(\iota_X df) + \iota_X(d^2 f) = d(X(f)) + 0$. D'accord.

Cas général. On utilise le fait que $\mathcal{L}_X$, $d \circ \iota_X + \iota_X \circ d$, et les formes localement engendrées par des produits de fonctions et de leurs différentielles. Les deux opérateurs sont des dérivations de l'algèbre $\Omega^*(M)$ qui coïncident sur $\Omega^0(M)$ et sur $d(\Omega^0(M))$, donc ils coïncident partout puisque $\Omega^*(M)$ est localement engendrée par ces éléments. $\square$

Corollaire 6.26. (i) $\mathcal{L}_X \circ d = d \circ \mathcal{L}_X$;
(ii) $\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = (\mathcal{L}_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathcal{L}_X \beta)$;
(iii) $\mathcal{L}_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X$.

Remarque 6.27. Les opérateurs d , ι_X , $\mathcal{L}_X$ satisfont les relations d'une *algèbre de Weil* :

$$[d, d] = 0, \quad [\iota_X, \iota_Y] = 0, \quad [d, \iota_X] = \mathcal{L}_X, \quad [\mathcal{L}_X, d] = 0, \quad [\mathcal{L}_X, \iota_Y] = \iota_{[X,Y]},$$

où $[A, B] = A \circ B - (-1)^{|A||B|} B \circ A$ est le crochet gradué.

Exemple 6.28 (Dérivée de Lie d'une 1-forme). Soit $X = \partial_x$ et $\omega = y dx + x^2 dy$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculons $\mathcal{L}_X \omega$ via la formule de Cartan :

$$\begin{aligned} \iota_X \omega &= y, \\ d(\iota_X \omega) &= dy, \\ d\omega &= dy \wedge dx + 2x dx \wedge dy = (2x - 1) dx \wedge dy, \\ \iota_X(d\omega) &= (2x - 1) dy. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{L}_X \omega = dy + (2x - 1) dy = 2x dy$. On peut vérifier : le flot de X est $\varphi_t(x, y) = (x + t, y)$, donc $\varphi_t^* \omega = y dx + (x + t)^2 dy$ et $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi_t^* \omega = 2x dy$. Conforme.

Proposition 6.29 (Formule de Cartan pour les fonctions). *Pour $f \in C^\infty(M)$ et $X \in \mathfrak{X}(M)$:*

$$\mathcal{L}_X f = \iota_X(df) = df(X) = X(f).$$

La dérivée de Lie d'une fonction est simplement la dérivée directionnelle.

Proposition 6.30 (Formes fermées et dérivée de Lie). *Soit ω une forme fermée ($d\omega = 0$). Alors $\mathcal{L}_X\omega = d(\iota_X\omega)$ est exacte. Autrement dit, la dérivée de Lie d'une forme fermée est exacte.*

Démonstration. Par la formule de Cartan : $\mathcal{L}_X\omega = d(\iota_X\omega) + \iota_X(d\omega) = d(\iota_X\omega) + 0 = d(\iota_X\omega)$. $\square$

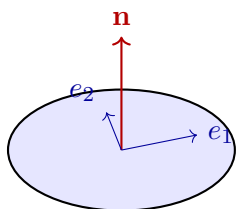
6.6 Orientation

Définition 6.31 (Orientation d'une variété). Soit M une variété lisse de dimension n . Une **orientation** de M est le choix d'une classe d'équivalence de n -formes ne s'annulant en aucun point, où $\omega_1 \sim \omega_2$ si $\omega_1 = f \cdot \omega_2$ avec $f > 0$ partout. Une variété est dite **orientable** si une telle forme existe, et **orientée** si un tel choix a été fait.

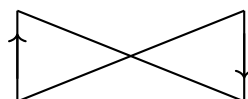
Proposition 6.32 (Critères d'orientabilité). *Pour une variété M^n connexe, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) M est orientable ;
- (ii) il existe un atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ dont toutes les fonctions de transition ont un jacobien positif ;
- (iii) le fibré $\Lambda^n T^*M$ est trivialisable (isomorphe à $M \times \mathbb{R}$) ;
- (iv) il existe une n -forme $\omega \in \Omega^n(M)$ qui ne s'annule nulle part.

Exemple 6.33. (a) Toute variété simplement connexe est orientable (faux en général, mais vrai pour les surfaces).
 (b) $\mathbb{R}^n$, S^n , T^n , $\text{GL}^+(n, \mathbb{R})$ sont orientables.
 (c) $\mathbb{RP}^n$ est orientable si et seulement si n est impair.
 (d) La bouteille de Klein et le ruban de Möbius ne sont pas orientables.



Surface orientée



Ruban de Möbius (non orientable)

FIGURE 6.1 – À gauche, une surface orientée avec un champ normal ; à droite, le domaine fondamental du ruban de Möbius (les flèches indiquent l'identification avec renversement).

Définition 6.34 (Orientation induite sur le bord). Soit M une variété orientée à bord. L'**orientation induite** sur ∂M est définie par : une base $(e_1, \dots, e_{n-1})$ de $T_p(\partial M)$ est positivement orientée si $(-\nu, e_1, \dots, e_{n-1})$ est positivement orientée dans $T_p M$, où ν est le vecteur normal unitaire sortant.

Exemple 6.35 (Orientation du bord d'un disque). Le disque $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, muni de l'orientation standard $dx \wedge dy$, a pour bord $\partial D^2 = S^1$. Le vecteur normal sortant en $(x, y) \in S^1$ est $\nu = (x, y)$. L'orientation induite sur S^1 est le sens trigonométrique (antihoraire).

Exemple 6.36 (Orientation du bord d'un intervalle). Pour $M = [a, b]$ orienté dans le sens croissant, $\partial M = \{a, b\}$. Le vecteur sortant en b est $+\partial_x$ (sortant vers la droite), et en a c'est $-\partial_x$ (sortant vers la gauche). L'orientation induite donne $\varepsilon(b) = +1$ et $\varepsilon(a) = -1$. Ceci est cohérent avec le théorème fondamental de l'analyse : $\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$.

Lemme 6.37. Soit M^n une variété orientée et compacte sans bord. Pour toute n -forme ω compatible avec l'orientation (i.e. ω_p est positive en chaque point), on a $\int_M \omega > 0$. En particulier, ω n'est pas exacte.

Démonstration. La positivité de l'intégrale résulte du fait que dans chaque carte orientée, ω s'écrit $f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ avec $f > 0$, et la partition de l'unité $\rho_\alpha \geq 0$. Si $\omega = d\eta$, le théorème de Stokes donnerait $\int_M \omega = \int_{\partial M} \eta = 0$ (car $\partial M = \emptyset$), contradiction. $\square$

6.7 Intégration des formes différentielles

6.7.1 Intégration sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Définition 6.38. Soit $\omega = f(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ une n -forme à support compact sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$. On définit

$$\int_U \omega = \int_U f(x) dx^1 \cdots dx^n,$$

où le membre de droite est l'intégrale de Lebesgue usuelle.

Lemme 6.39 (Changement de variables). Soit $\varphi: U \rightarrow V$ un difféomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^n$ préservant l'orientation (i.e. $\det d\varphi > 0$). Alors pour toute n -forme ω à support compact sur V :

$$\int_V \omega = \int_U \varphi^* \omega.$$

Si φ renverse l'orientation, on a $\int_V \omega = - \int_U \varphi^* \omega$.

Démonstration. Écrivons $\omega = g(y) dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n$. Alors $\varphi^*\omega = g(\varphi(x)) \det(d\varphi_x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$. Par la formule de changement de variables de l'intégrale de Lebesgue :

$$\int_U \varphi^*\omega = \int_U g(\varphi(x)) \det(d\varphi_x) dx^1 \cdots dx^n = \int_V g(y) dy^1 \cdots dy^n = \int_V \omega,$$

à condition que $\det d\varphi > 0$. Si $\det d\varphi < 0$, un signe $-$ apparaît. $\square$

6.7.2 Intégration sur une variété orientée

Définition 6.40 (Intégrale d'une n -forme). Soit M^n une variété orientée et $\omega \in \Omega^n(M)$ une n -forme à support compact. Soit $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlas orienté et $\{\rho_\alpha\}$ une partition de l'unité subordonnée. On définit

$$\int_M \omega = \sum_\alpha \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} (\varphi_\alpha^{-1})^*(\rho_\alpha \omega).$$

Théorème 6.41. *L'intégrale $\int_M \omega$ est bien définie, c'est-à-dire indépendante du choix d'atlas orienté et de partition de l'unité.*

Démonstration. Soient $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha), \rho_\alpha\}$ et $\{(V_\beta, \psi_\beta), \sigma_\beta\}$ deux choix. Alors

$$\begin{aligned} \sum_\alpha \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} (\varphi_\alpha^{-1})^*(\rho_\alpha \omega) &= \sum_\alpha \sum_\beta \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} (\varphi_\alpha^{-1})^*(\rho_\alpha \sigma_\beta \omega) \\ &= \sum_\alpha \sum_\beta \int_{\psi_\beta(V_\beta)} (\psi_\beta^{-1})^*(\rho_\alpha \sigma_\beta \omega) \\ &= \sum_\beta \int_{\psi_\beta(V_\beta)} (\psi_\beta^{-1})^*(\sigma_\beta \omega), \end{aligned}$$

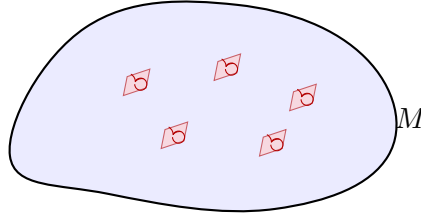
où la deuxième égalité utilise le lemme 6.39 avec le changement de cartes $\psi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ (qui préserve l'orientation par hypothèse). $\square$

Proposition 6.42 (Propriétés de l'intégrale). (i) Linéarité : $\int_M (a\omega + b\eta) = a \int_M \omega + b \int_M \eta$;

(ii) Changement d'orientation : si $\overline{M}$ désigne M avec l'orientation opposée, $\int_{\overline{M}} \omega = - \int_M \omega$;

(iii) Additivité : si $M = M_1 \sqcup M_2$ (union disjointe), $\int_M \omega = \int_{M_1} \omega + \int_{M_2} \omega$;

(iv) Fonctorialité : si $f: M \rightarrow N$ est un difféomorphisme préservant l'orientation, $\int_N \omega = \int_M f^*\omega$.



$\omega \in \Omega^2(M)$: mesure infinitésimale orientée

FIGURE 6.2 – Visualisation d’une 2-forme sur une surface : en chaque point, la forme associe une aire orientée à chaque paire de vecteurs tangents.

6.8 Formes à support compact

Définition 6.43 (Support d’une forme). Le **support** d’une forme $\omega \in \Omega^k(M)$ est

$$\text{supp}(\omega) = \overline{\{p \in M \mid \omega_p \neq 0\}}.$$

On note $\Omega_c^k(M)$ l’espace des k -formes à support compact.

Remarque 6.44. L’hypothèse de support compact est essentielle pour que l’intégrale converge sur les variétés non compactes. Si M est compacte, toute forme est automatiquement à support compact.

Proposition 6.45. Si $\omega \in \Omega_c^k(M)$, alors $d\omega \in \Omega_c^{k+1}(M)$. Autrement dit, d restreint à $\Omega_c^*(M)$ donne un complexe de chaînes

$$0 \rightarrow \Omega_c^0(M) \xrightarrow{d} \Omega_c^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega_c^n(M) \rightarrow 0.$$

La cohomologie de ce complexe est la **cohomologie de de Rham à support compact** $H_c^k(M)$.

Proposition 6.46 (Tiré en arrière propre). Si $f: M \rightarrow N$ est propre (i.e. la préimage de tout compact est compact), alors $f^*: \Omega_c^k(N) \rightarrow \Omega_c^k(M)$.

6.9 Vers le théorème de Stokes

Nous énonçons ici le théorème de Stokes, qui sera démontré au chapitre suivant.

Théorème 6.47 (Stokes). Soit M une variété orientée de dimension n à bord ∂M (muni de l’orientation induite). Pour toute $(n-1)$ -forme $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Si $\partial M = \emptyset$, alors $\int_M d\omega = 0$.

Remarque 6.48. Le théorème de Stokes unifie :

- le théorème fondamental de l'analyse : $\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$;
- le théorème de Green dans le plan ;
- le théorème de la divergence (Gauss–Ostrogradski) dans $\mathbb{R}^3$;
- le théorème de Stokes classique pour les surfaces dans $\mathbb{R}^3$.

6.10 Exercices

Exercice 6.1 (Calculs en coordonnées). Sur $\mathbb{R}^3$, soient $\omega = xz dx + y^2 dy - z dz$ et $\eta = y dx \wedge dz + x dy \wedge dz$.

- (a) Calculer $d\omega$.
- (b) Calculer $d\eta$.
- (c) Vérifier que $d^2\omega = 0$.
- (d) Calculer $\omega \wedge d\omega$.

Exercice 6.2 (Formes sur S^2). Considérons $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ munie des coordonnées sphériques (θ, ϕ) . Soit $\omega = \sin \theta d\theta \wedge d\phi$.

- (a) Montrer que ω est une forme d'aire sur S^2 .
- (b) Calculer $\int_{S^2} \omega$.
- (c) Montrer que ω n'est pas exacte.

Exercice 6.3 (Tiré en arrière). Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$.

- (a) Calculer $f^*(dx)$, $f^*(dy)$, $f^*(dz)$.
- (b) Calculer $f^*(x dy \wedge dz)$.
- (c) Montrer que $f^*(dx \wedge dy \wedge dz) = 0$. Interpréter géométriquement.

Exercice 6.4 (Formule de Cartan). Soit $X = x \partial_x + y \partial_y$ le champ radial sur $\mathbb{R}^2$ et $\omega = x dy - y dx$.

- (a) Calculer $\iota_X \omega$.
- (b) Calculer $\mathcal{L}_X \omega$ en utilisant la formule de Cartan.
- (c) Vérifier en calculant $\mathcal{L}_X \omega$ directement via le flot de X .

Exercice 6.5 (Forme symplectique). Sur $\mathbb{R}^{2n}$ avec coordonnées $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$, on pose $\omega = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i$.

- (a) Montrer que $d\omega = 0$.
- (b) Montrer que $\omega^n = \underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_n = n! dq^1 \wedge dp_1 \wedge \dots \wedge dq^n \wedge dp_n$.
- (c) En déduire que $\omega^n \neq 0$ partout (forme volume).
- (d) Montrer que ω n'est pas exacte sur $\mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}$ pour $n \geq 2$.

Exercice 6.6 (Orientation de $\mathbb{RP}^n$). (a) Montrer que $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$ est orientable.

(b) Montrer que $\mathbb{RP}^2$ n'est pas orientable. *Indication : considérer l'action de l'antipode sur les formes.*

(c) Plus généralement, montrer que $\mathbb{RP}^n$ est orientable si et seulement si n est impair.

Exercice 6.7 (Intégration et degré). Soit $f: S^1 \rightarrow S^1$ l'application $z \mapsto z^k$ (avec $k \in \mathbb{Z}$). Soit $\omega = d\theta$ la 1-forme angulaire standard.

(a) Calculer $f^*\omega$.

(b) Calculer $\int_{S^1} f^*\omega$ et $\int_{S^1} \omega$.

(c) En déduire que $\deg(f) = k$.

Exercice 6.8 ($d^2 = 0$ et formes exactes). (a) Soit $\omega = \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Montrer que $d\omega = 0$.

(b) Montrer que ω n'est pas exacte sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. *Indication : calculer $\int_{S^1} \omega$.*

(c) Montrer que ω est exacte sur tout ouvert simplement connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Exercice 6.9 (Formes invariantes sur les groupes de Lie). Soit G un groupe de Lie et $L_g: G \rightarrow G$, $h \mapsto gh$ la translation à gauche.

(a) Montrer que les formes invariantes à gauche (i.e. $L_g^*\omega = \omega$ pour tout $g \in G$) forment une sous-algèbre de $(\Omega^*(G), \wedge)$ stable par d .

(b) Pour $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, montrer que $\omega = \mathrm{tr}(A^{-1}dA)$ est une 1-forme invariante à gauche.

(c) Calculer $d\omega$ pour $n = 1$ et $n = 2$.

Exercice 6.10 (Forme volume et métrique riemannienne). Soit (M^n, g) une variété riemannienne orientée.

(a) Montrer qu'il existe une unique n -forme $\mathrm{vol}_g \in \Omega^n(M)$ telle que $\mathrm{vol}_g(e_1, \dots, e_n) = 1$ pour toute base orthonormée directe $(e_1, \dots, e_n)$.

(b) En coordonnées locales, montrer que $\mathrm{vol}_g = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$.

(c) Calculer vol_g pour S^2 munie de la métrique induite par $\mathbb{R}^3$.

Chapitre 7

Théorème de Stokes

Contents

5.1	Intersection transverse	53
5.1.1	Définition pour une application	53
5.1.2	Exemples et non-exemples	54
5.2	Théorème de transversalité	55
5.3	Transversalité et stabilité	56
5.4	Théorème de transversalité de Thom	57
5.5	Applications de la transversalité	58
5.5.1	Nombre d'intersection	58
5.5.2	Nombre d'intersection modulo 2	59
5.5.3	Nombre d'auto-intersection	60
5.5.4	Lien avec le théorème de Lefschetz	60
5.6	Exercices	60

Le théorème de Stokes est l'un des résultats les plus profonds et les plus élégants de la géométrie différentielle. Il unifie en une seule formule les théorèmes classiques de Green, de la divergence et de Stokes en $\mathbb{R}^3$, tout en ouvrant la voie à la cohomologie de de Rham. Ce chapitre développe d'abord le formalisme des chaînes singulières lisses et de l'intégration des formes différentielles, puis établit le théorème de Stokes dans le cadre des variétés à bord compactes orientées. Les cas classiques en analyse vectorielle apparaissent comme corollaires immédiats. La seconde moitié du chapitre introduit la cohomologie de de Rham, le lemme de Poincaré, et l'invariance homotopique, outils qui seront abondamment utilisés dans la suite du cours.

7.1 Chaînes singulières lisses

Définition 7.1 (Simplexe standard). Le *k-simplexe standard* est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{k+1}$ défini par

$$\Delta^k = \left\{ (t_0, t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid t_i \geq 0, \sum_{i=0}^k t_i = 1 \right\}.$$

Ses *sommets* sont les vecteurs $e_0, e_1, \dots, e_k$ de la base canonique de $\mathbb{R}^{k+1}$.

Définition 7.2 (Applications de face). Pour $0 \leq i \leq k$, la i -ème application de face $\varepsilon_i^k: \Delta^{k-1} \rightarrow \Delta^k$ est l'unique application affine envoyant e_j sur e_j si $j < i$ et sur e_{j+1} si $j \geq i$. Explicitement,

$$\varepsilon_i^k(t_0, \dots, t_{k-1}) = (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{k-1}).$$

Définition 7.3 (Simplexe singulier lisse). Soit M une variété lisse. Un k -simplexe singulier lisse dans M est une application lisse $\sigma: \Delta^k \rightarrow M$, où l'on entend par « lisse » que σ se prolonge en une application lisse sur un voisinage ouvert de Δ^k dans le sous-espace affine engendré.

Définition 7.4 (Chaîne singulière lisse). Le groupe des k -chaînes singulières lisses de M , noté $C_k^\infty(M)$, est le groupe abélien libre engendré par les k -simplexes singuliers lisses dans M . Un élément $c \in C_k^\infty(M)$ s'écrit

$$c = \sum_{j=1}^N a_j \sigma_j, \quad a_j \in \mathbb{Z},$$

où les $\sigma_j: \Delta^k \rightarrow M$ sont des k -simplexes singuliers lisses.

Définition 7.5 (Opérateur de bord). L'opérateur de bord $\partial_k: C_k^\infty(M) \rightarrow C_{k-1}^\infty(M)$ est défini sur les simplexes singuliers par

$$\partial_k \sigma = \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma \circ \varepsilon_i^k$$

et étendu par linéarité à $C_k^\infty(M)$.

Proposition 7.6. On a $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$ pour tout $k \geq 1$.

Démonstration. Il suffit de vérifier sur un simplexe singulier $\sigma: \Delta^k \rightarrow M$. On a

$$\partial_{k-1}(\partial_k \sigma) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{i+j} \sigma \circ \varepsilon_i^k \circ \varepsilon_j^{k-1}.$$

La relation $\varepsilon_i^k \circ \varepsilon_j^{k-1} = \varepsilon_j^k \circ \varepsilon_{i-1}^{k-1}$ pour $j < i$ permet de regrouper les termes par paires opposées, ce qui donne zéro. $\square$

Remarque 7.7. On obtient ainsi un complexe de chaînes

$$\dots \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k^\infty(M) \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1}^\infty(M) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0^\infty(M) \rightarrow 0.$$

L'homologie correspondante $H_k^\infty(M) = \ker \partial_k / \operatorname{im} \partial_{k+1}$ est isomorphe à l'homologie singulière usuelle $H_k(M; \mathbb{Z})$ lorsque M est lisse.

Exemple 7.8. Considérons $M = \mathbb{R}^2$ et le 1-simplexe singulier $\sigma: \Delta^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini par $\sigma(t_0, t_1) = (1 - t_0) \cdot (0, 0) + t_0 \cdot (1, 1)$, avec $t_0 + t_1 = 1$, soit en paramétrant par $t = t_0 \in [0, 1]$, $\sigma(t) = (t, t)$. Alors $\partial_1 \sigma = \sigma(e_1) - \sigma(e_0) = (1, 1) - (0, 0)$, ce qui correspond à la différence des deux 0-simplexes (points) aux extrémités du segment. Considérons maintenant le 2-simplexe $\tau: \Delta^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini par $\tau(t_0, t_1, t_2) = t_0 \cdot (0, 0) + t_1 \cdot (1, 0) + t_2 \cdot (0, 1)$, qui paramètre le triangle de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$. Son bord est

$$\partial_2 \tau = \tau \circ \varepsilon_0^2 - \tau \circ \varepsilon_1^2 + \tau \circ \varepsilon_2^2,$$

ce qui donne les trois arêtes du triangle avec les orientations correctes.

Définition 7.9 (Cycle et bord). Une k -chaîne $c \in C_k^\infty(M)$ est un k -cycle si $\partial_k c = 0$. Elle est un k -bord s'il existe $b \in C_{k+1}^\infty(M)$ tel que $c = \partial_{k+1} b$. L'ensemble des k -cycles est noté $Z_k^\infty(M)$ et l'ensemble des k -bords $B_k^\infty(M)$.

7.2 Intégration de formes sur des chaînes

Remarque 7.10. L'intégration des formes différentielles sur des chaînes dépend de l'orientation : si l'on remplace σ par $-\sigma$ (au sens de la chaîne), l'intégrale change de signe. C'est l'analogue discret du fait que l'intégrale d'une n -forme sur une variété orientée change de signe quand on renverse l'orientation.

Définition 7.11 (Intégrale sur un simplexe singulier). Soit ω une k -forme différentielle sur M et $\sigma: \Delta^k \rightarrow M$ un k -simplexe singulier lisse. On pose

$$\int_\sigma \omega = \int_{\Delta^k} \sigma^* \omega.$$

L'intégrale de droite est l'intégrale usuelle de la k -forme $\sigma^* \omega$ sur le domaine compact $\Delta^k \subset \mathbb{R}^k$ (après identification du sous-espace affine contenant Δ^k avec $\mathbb{R}^k$).

Définition 7.12 (Intégrale sur une chaîne). Pour $c = \sum_j a_j \sigma_j \in C_k^\infty(M)$, on définit

$$\int_c \omega = \sum_j a_j \int_{\sigma_j} \omega.$$

Proposition 7.13 (Stokes pour les chaînes). Soit $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ et $c \in C_k^\infty(M)$. Alors

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Démonstration. Par linéarité, il suffit de traiter le cas $c = \sigma$, un k -simplexe singulier. On a

$\sigma^*(d\omega) = d(\sigma^*\omega)$. Par le théorème de Stokes classique sur le domaine Δ^k (voir ci-dessous),

$$\int_{\Delta^k} d(\sigma^*\omega) = \int_{\partial\Delta^k} \sigma^*\omega = \sum_{i=0}^k (-1)^i \int_{\Delta^{k-1}} (\sigma \circ \varepsilon_i^k)^*\omega = \int_{\partial\sigma} \omega. \quad \square$$

7.3 Le théorème de Stokes

Définition 7.14 (Variété à bord orientée). Soit M une variété lisse de dimension n à bord ∂M . On dit que M est *orientée* si elle est munie d'une classe d'orientation, c'est-à-dire d'un atlas maximal dont les changements de cartes ont un jacobien de déterminant strictement positif. Le bord ∂M hérite alors d'une *orientation induite* : en un point $p \in \partial M$, si $(v_1, \dots, v_{n-1})$ est un repère de $T_p(\partial M)$, on le déclare positivement orienté si $(\nu, v_1, \dots, v_{n-1})$ est un repère positivement orienté de $T_p M$, où ν est le vecteur normal sortant.

Théorème 7.15 (Théorème de Stokes). Soit M une variété lisse orientée de dimension n à bord ∂M , compacte. Pour toute $(n-1)$ -forme différentielle $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$, on a

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Si $\partial M = \emptyset$, le membre de droite est nul.

Démonstration. La preuve se décompose en trois étapes.

Étape 1 : Réduction locale via une partition de l'unité. Soit $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ un atlas fini (par compacité) de cartes positives de M , compatible avec l'orientation, tel que chaque $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ soit soit un ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit un ouvert du demi-espace $\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$. Soit $\{\rho_\alpha\}$ une partition de l'unité subordonnée à $\{U_\alpha\}$. On écrit

$$\omega = \sum_{\alpha} \rho_\alpha \omega,$$

et par linéarité de l'intégrale et de d , il suffit de montrer

$$\int_M d(\rho_\alpha \omega) = \int_{\partial M} \rho_\alpha \omega$$

pour chaque α . Posons $\omega_\alpha = \rho_\alpha \omega$, qui est à support compact dans U_α .

Étape 2 : Cas intérieur. Si U_α est une carte intérieure, i.e. $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors ω_α est à support compact dans $\mathbb{R}^n$ et $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \partial M = \emptyset$.

Écrivons, dans les coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$,

$$(\varphi_\alpha^{-1})^* \omega_\alpha = \sum_{i=1}^n f_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n,$$

où les f_i sont à support compact. Alors

$$(\varphi_\alpha^{-1})^* d\omega_\alpha = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Par le théorème de Fubini, chaque intégrale $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \cdots dx_n$ se calcule en intégrant d'abord par rapport à x_i . Puisque f_i est à support compact, cette intégrale vaut zéro. Donc $\int_M d\omega_\alpha = 0$, et $\int_{\partial M} \omega_\alpha = 0$ puisque $\text{supp}(\omega_\alpha) \cap \partial M = \emptyset$.

Étape 3 : Cas du bord. Si U_α est une carte de bord, $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ est un ouvert de $\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$. On raisonne de manière analogue. Pour $i < n$, les intégrales $\int \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ s'annulent comme avant. Pour $i = n$, on obtient

$$\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\partial f_n}{\partial x_n} dx_1 \cdots dx_n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[\int_0^\infty \frac{\partial f_n}{\partial x_n} dx_n \right] dx_1 \cdots dx_{n-1}.$$

L'intégrale intérieure vaut $-f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ car f_n est à support compact et s'annule pour x_n grand. En tenant compte des signes $(-1)^{n-1}$ et de l'orientation induite sur ∂M (correspondant à $x_n = 0$ avec le vecteur normal sortant $-e_n$), on vérifie que

$$\int_M d\omega_\alpha = (-1)^{n-1} \cdot (-1) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \cdots dx_{n-1} = \int_{\partial M} \omega_\alpha.$$

Conclusion. En sommant sur α , on obtient

$$\int_M d\omega = \sum_\alpha \int_M d\omega_\alpha = \sum_\alpha \int_{\partial M} \omega_\alpha = \int_{\partial M} \omega. \quad \square$$

Remarque 7.16. Lorsque M est compacte sans bord, le théorème de Stokes donne $\int_M d\omega = 0$ pour toute $(n-1)$ -forme ω . En particulier, si $\int_M \eta \neq 0$ pour une n -forme η , alors η n'est pas exacte. Ceci fournit un outil fondamental pour détecter des classes de cohomologie non triviales.

7.4 Cas classiques en $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Corollaire 7.17 (Théorème de Green). *Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine compact à bord ∂D lisse par morceaux, orienté positivement (sens trigonométrique). Pour $P, Q \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$,*

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial D} P dx + Q dy.$$

Démonstration. On applique le théorème de Stokes à la 1-forme $\omega = P dx + Q dy$ sur la variété à bord $M = D$. On a $d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$. $\square$

Corollaire 7.18 (Théorème de la divergence). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine compact à bord lisse $\partial\Omega$, orienté par la normale sortante. Pour un champ de vecteurs lisse $F = (F_1, F_2, F_3)$,*

$$\iiint_\Omega \text{div}(F) dV = \iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu dS,$$

où ν est la normale unitaire sortante et dS l'élément d'aire.

Démonstration. On pose $\omega = F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy$, qui est une 2-forme sur $\mathbb{R}^3$. Alors $d\omega = \text{div}(F) dx \wedge dy \wedge dz$, et l'intégrale de ω sur $\partial\Omega$ avec l'orientation induite donne le flux $\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu dS$. $\square$

Corollaire 7.19 (Théorème de Stokes classique en $\mathbb{R}^3$). Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface compacte orientée à bord ∂S (courbe fermée orientée). Pour un champ de vecteurs lisse F ,

$$\iint_S (\operatorname{rot} F) \cdot \nu \, dS = \oint_{\partial S} F \cdot d\ell.$$

Démonstration. On applique Stokes à la 1-forme $\omega = F_1 \, dx + F_2 \, dy + F_3 \, dz$. Alors $d\omega$ est la 2-forme associée au rotationnel de F , et la formule en découle. $\square$

Exemple 7.20. Par le théorème de Green, l'aire d'un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ à bord lisse $\gamma = \partial D$ s'écrit

$$\operatorname{Aire}(D) = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} x \, dy - y \, dx.$$

En effet, on prend $P = -y/2$ et $Q = x/2$, de sorte que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$. En appliquant ceci au disque unité paramétré par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ pour $t \in [0, 2\pi]$, on obtient

$$\operatorname{Aire}(D) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos t \cdot \cos t + \sin t \cdot \sin t) \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 \, dt = \pi.$$

Exemple 7.21. Considérons le champ $F(x, y, z) = (x, y, z)$ sur $\mathbb{R}^3$ et la boule unité $B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. On a $\operatorname{div}(F) = 3$, donc

$$\iiint_B 3 \, dV = 3 \cdot \frac{4\pi}{3} = 4\pi.$$

D'autre part, sur $S^2 = \partial B$, la normale sortante est $\nu = (x, y, z)$ et $F \cdot \nu = x^2 + y^2 + z^2 = 1$, d'où

$$\iint_{S^2} F \cdot \nu \, dS = \operatorname{Aire}(S^2) = 4\pi.$$

Les deux résultats coïncident, conformément au théorème de la divergence.

Remarque 7.22. Les théorèmes de Green, de la divergence et de Stokes classique sont fondamentaux en physique mathématique. Les équations de Maxwell, la conservation de la masse en mécanique des fluides, et le théorème de Gauss en électrostatique s'expriment naturellement en termes de ces théorèmes. La formulation en termes de formes différentielles permet de les énoncer de manière indépendante des coordonnées, ce qui est essentiel pour la relativité générale et la théorie de jauge.

7.5 Cohomologie de de Rham

L'une des applications les plus importantes du théorème de Stokes est la construction de la cohomologie de de Rham, qui associe à toute variété lisse des invariants algébriques mesurant l'obstruction à ce que les formes fermées soient exactes.

Définition 7.23 (Complexe de de Rham). Le *complexe de de Rham* de M est la suite

$$0 \rightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \rightarrow 0.$$

La relation $d \circ d = 0$ en fait un complexe de cochaînes.

Définition 7.24 (Groupes de cohomologie de de Rham). Le k -ème groupe de cohomologie de de Rham de M est le quotient

$$H_{\text{dR}}^k(M) = \frac{\ker(d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M))}{\text{im}(d: \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M))} = \frac{Z^k(M)}{B^k(M)},$$

où $Z^k(M)$ désigne les k -formes fermées ($d\omega = 0$) et $B^k(M)$ les k -formes exactes ($\omega = d\eta$). La classe d'une forme fermée ω est notée $[\omega]$.

Proposition 7.25. Pour une variété lisse connexe M , on a $H_{\text{dR}}^0(M) \cong \mathbb{R}$.

Démonstration. On a $\Omega^{-1}(M) = 0$, donc $B^0(M) = 0$, et $Z^0(M)$ est l'espace des fonctions $f \in C^\infty(M)$ telles que $df = 0$, c'est-à-dire les fonctions localement constantes. Si M est connexe, elles sont constantes, d'où $H_{\text{dR}}^0(M) = Z^0(M) \cong \mathbb{R}$. $\square$

Proposition 7.26 (Fonctorialité). Toute application lisse $f: M \rightarrow N$ induit un morphisme de $\mathbb{R}$ -algèbres graduées $f^*: H_{\text{dR}}^*(N) \rightarrow H_{\text{dR}}^*(M)$ par $f^*[\omega] = [f^*\omega]$. De plus :

- (i) $(\text{Id}_M)^* = \text{Id}$;
- (ii) $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Démonstration. La commutation $f^* \circ d = d \circ f^*$ assure que f^* préserve les formes fermées et les formes exactes, d'où un morphisme bien défini sur la cohomologie. Les propriétés (i) et (ii) découlent des propriétés correspondantes du pullback. $\square$

Exemple 7.27. Calculons $H_{\text{dR}}^1(S^1)$. Paramétrons S^1 par l'angle $\theta \in [0, 2\pi]$. La 1-forme $d\theta$ (définie globalement comme forme angulaire) est fermée mais non exacte, car $\int_{S^1} d\theta = 2\pi \neq 0$. Par le théorème de Stokes, une forme exacte df intégrée sur S^1 donne zéro. Donc $[d\theta] \neq 0$ dans $H_{\text{dR}}^1(S^1)$. On peut montrer que $H_{\text{dR}}^1(S^1) \cong \mathbb{R}$, engendré par $[d\theta/(2\pi)]$.

Proposition 7.28 (Produit en cohomologie). Le produit extérieur induit un produit bien défini sur la cohomologie :

$$\smile: H_{\text{dR}}^k(M) \times H_{\text{dR}}^\ell(M) \rightarrow H_{\text{dR}}^{k+\ell}(M), \quad [\alpha] \smile [\beta] = [\alpha \wedge \beta].$$

Ce produit est associatif, et graduellement commutatif : $[\alpha] \smile [\beta] = (-1)^{k\ell} [\beta] \smile [\alpha]$. Muni de ce produit, $H_{\text{dR}}^*(M) = \bigoplus_{k=0}^n H_{\text{dR}}^k(M)$ est une $\mathbb{R}$ -algèbre graduée commutative.

Démonstration. Le produit est bien défini car si $\alpha' = \alpha + d\eta$, alors $\alpha' \wedge \beta = \alpha \wedge \beta + d(\eta \wedge \beta)$ (en utilisant $d\beta = 0$ et $d(\eta \wedge \beta) = d\eta \wedge \beta + (-1)^{k-1} \eta \wedge d\beta = d\eta \wedge \beta$). Les propriétés d'associativité et de commutativité graduée se déduisent des propriétés correspondantes du produit extérieur. $\square$

Exemple 7.29. Considérons le tore $T^2 = S^1 \times S^1$. Soient $d\theta_1$ et $d\theta_2$ les formes angulaires sur les deux facteurs. Par la formule de Künneth pour la cohomologie de de Rham, on a

$$\begin{aligned} H_{\text{dR}}^0(T^2) &\cong \mathbb{R}, \\ H_{\text{dR}}^1(T^2) &\cong \mathbb{R}^2, \quad \text{engendré par } [d\theta_1], [d\theta_2], \\ H_{\text{dR}}^2(T^2) &\cong \mathbb{R}, \quad \text{engendré par } [d\theta_1 \wedge d\theta_2]. \end{aligned}$$

La forme volume $d\theta_1 \wedge d\theta_2$ n'est pas exacte car $\int_{T^2} d\theta_1 \wedge d\theta_2 = (2\pi)^2 \neq 0$.

7.6 Lemme de Poincaré

Définition 7.30 (Ouvert étoilé). Un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ est dit *étoilé* par rapport au point $p \in U$ si, pour tout $x \in U$, le segment $[p, x]$ est contenu dans U .

Théorème 7.31 (Lemme de Poincaré). *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert étoilé. Alors, pour tout $k \geq 1$,*

$$H_{\text{dR}}^k(U) = 0.$$

Autrement dit, toute k -forme fermée sur U est exacte.

Démonstration. Quitte à traduire, on peut supposer U étoilé par rapport à l'origine. On construit une *homotopie de contraction* $K: \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k-1}(U)$ explicitement.

Pour $\omega \in \Omega^k(U)$, on écrit en coordonnées

$$\omega = \sum_I f_I(x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

où la somme porte sur les multi-indices croissants $I = (i_1 < \cdots < i_k)$. On définit l'opérateur K par

$$(K\omega)(x) = \sum_I \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} x_{i_j} \left(\int_0^1 t^{k-1} f_I(tx) dt \right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Vérification de l'identité homotopique. Un calcul direct montre que

$$d(K\omega) + K(d\omega) = \omega \tag{7.1}$$

pour tout $\omega \in \Omega^k(U)$ avec $k \geq 1$.

Vérifions-le. Considérons d'abord un monôme $\omega = f(x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$. On a

$$K\omega = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} x_{i_j} \left(\int_0^1 t^{k-1} f(tx) dt \right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

En calculant $d(K\omega)$, on fait apparaître deux types de termes : ceux provenant de la dérivation de $x_{i_j} \int_0^1 t^{k-1} f(tx) dt$ par rapport à x_{i_j} (qui contribuent par $\int_0^1 t^{k-1} f(tx) dt + x_{i_j} \int_0^1 t^{k-1} \frac{\partial f}{\partial x_{i_j}}(tx) \cdot t dt$) et ceux provenant de la dérivation par rapport aux autres variables.

D'autre part, $K(d\omega)$ fait intervenir $d\omega = \sum_{\ell} \frac{\partial f}{\partial x_{\ell}} dx_{\ell} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$.

En combinant et en utilisant la formule d'Euler pour les fonctions homogènes (appliquée via le changement de variable $u = tx$),

$$\sum_{\ell=1}^n x_{\ell} \int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial x_{\ell}}(tx) dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} [t^k f(tx)] dt - k \int_0^1 t^{k-1} f(tx) dt,$$

on obtient, après simplification,

$$d(K\omega) + K(d\omega) = f(x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = \omega.$$

Conclusion. Si ω est fermée ($d\omega = 0$), l'identité (7.1) donne $\omega = d(K\omega)$, donc ω est exacte. $\square$

Corollaire 7.32. *Toute variété lisse difféomorphe à un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^n$ a une cohomologie de de Rham triviale en degrés $k \geq 1$: $H_{\text{dR}}^k(M) = 0$. En particulier, $H_{\text{dR}}^k(\mathbb{R}^n) = 0$ pour tout $k \geq 1$.*

Remarque 7.33. Le lemme de Poincaré admet l'interprétation géométrique suivante : sur un ouvert étoilé, il n'y a pas de « trous » topologiques qui empêcheraient une forme fermée d'être exacte. L'opérateur K de la preuve réalise une *contraction* vers le centre de l'étoile, et la primitive $K\omega$ est obtenue en « intégrant ω le long des rayons » partant de l'origine.

Exemple 7.34. Illustrons la construction sur un exemple concret. Soit $\omega = 2xy dx + x^2 dy$ sur $\mathbb{R}^2$ (étoilé par rapport à l'origine). On vérifie que $d\omega = 0$: en effet, $\frac{\partial(x^2)}{\partial x} - \frac{\partial(2xy)}{\partial y} = 2x - 2x = 0$.

L'opérateur K de la preuve donne, avec $f_1(x, y) = 2xy$ et $f_2(x, y) = x^2$:

$$\begin{aligned} K\omega(x, y) &= x \int_0^1 f_1(tx, ty) dt + y \int_0^1 f_2(tx, ty) dt \\ &= x \int_0^1 2t^2 xy dt + y \int_0^1 t^2 x^2 dt \\ &= x \cdot \frac{2xy}{3} + y \cdot \frac{x^2}{3} = \frac{2x^2 y}{3} + \frac{x^2 y}{3} = x^2 y. \end{aligned}$$

On vérifie : $d(x^2 y) = 2xy dx + x^2 dy = \omega$.

7.7 Invariance homotopique

Définition 7.35 (Homotopie lisse). Deux applications lisses $f_0, f_1: M \rightarrow N$ sont *lisses-homotopes* s'il existe une application lisse $F: M \times [0, 1] \rightarrow N$ telle que $F(\cdot, 0) = f_0$ et $F(\cdot, 1) = f_1$.

Théorème 7.36 (Invariance homotopique de la cohomologie). Si $f_0, f_1: M \rightarrow N$ sont lisses-homotopes, alors $f_0^* = f_1^*: H_{\text{dR}}^*(N) \rightarrow H_{\text{dR}}^*(M)$.

Démonstration. Soit $F: M \times [0, 1] \rightarrow N$ l'homotopie. On construit un opérateur d'homotopie de chaînes $\mathcal{K}: \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ par

$$\mathcal{K}\omega = \int_0^1 \iota_{\partial/\partial t}(F^*\omega) dt,$$

où $\iota_{\partial/\partial t}$ désigne le produit intérieur par le champ $\partial/\partial t$ sur $M \times [0, 1]$, et l'intégrale est prise fibre par fibre en t .

On vérifie par un calcul direct que cette construction satisfait la *formule magique de Cartan* :

$$f_1^*\omega - f_0^*\omega = d(\mathcal{K}\omega) + \mathcal{K}(d\omega).$$

En effet, en utilisant $\mathcal{L}_{\partial/\partial t} = d \circ \iota_{\partial/\partial t} + \iota_{\partial/\partial t} \circ d$ (formule de Cartan pour la dérivée de Lie), on obtient

$$F^*\omega|_{t=1} - F^*\omega|_{t=0} = \int_0^1 \mathcal{L}_{\partial/\partial t}(F^*\omega) dt = \int_0^1 d(\iota_{\partial/\partial t} F^*\omega) dt + \int_0^1 \iota_{\partial/\partial t}(d(F^*\omega)) dt.$$

En restreignant à M (identification de M avec $M \times \{s\}$) et en utilisant $F^* \circ d = d \circ F^*$ et la commutation de d avec l'intégration en t , on obtient la relation souhaitée.

Si ω est fermée, $d\omega = 0$ et $f_1^*\omega - f_0^*\omega = d(\mathcal{K}\omega)$, donc $[f_1^*\omega] = [f_0^*\omega]$. $\square$

Corollaire 7.37. Si $f: M \rightarrow N$ est une équivalence d'homotopie lisse, alors $f^*: H_{\text{dR}}^*(N) \xrightarrow{\sim} H_{\text{dR}}^*(M)$ est un isomorphisme.

Démonstration. Soit $g: N \rightarrow M$ l'inverse homotopique de f . Alors $g \circ f \simeq \text{Id}_M$ et $f \circ g \simeq \text{Id}_N$. Par le théorème, $f^* \circ g^* = (g \circ f)^* = \text{Id}_{H_{\text{dR}}^*(M)}$ et $g^* \circ f^* = \text{Id}_{H_{\text{dR}}^*(N)}$. $\square$

Corollaire 7.38. Si M est contractile (homotopiquement équivalente à un point), alors $H_{\text{dR}}^k(M) = 0$ pour tout $k \geq 1$.

Exemple 7.39. Puisque $\mathbb{R}^n$ est contractile, on retrouve $H_{\text{dR}}^k(\mathbb{R}^n) = 0$ pour $k \geq 1$, ce qui généralise le lemme de Poincaré.

Exemple 7.40. Calculons $H_{\text{dR}}^*(S^n)$ pour $n \geq 1$ par la suite de Mayer–Vietoris. Recouvrons S^n par les ouverts $U = S^n \setminus \{N\}$ (pôle nord retiré) et $V = S^n \setminus \{S\}$ (pôle sud retiré). Alors U et V sont difféomorphes à $\mathbb{R}^n$ (par projection stéréographique) et

$U \cap V$ est homotopiquement équivalent à S^{n-1} . La suite exacte de Mayer–Vietoris et une récurrence sur n donnent

$$H_{\text{dR}}^k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0 \text{ ou } k = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 7.41. L'invariance homotopique de la cohomologie de de Rham a des conséquences frappantes. Par exemple, puisque $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ se rétracte par déformation sur S^{n-1} , on a $H_{\text{dR}}^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong H_{\text{dR}}^k(S^{n-1})$. De même, le cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$ est homotope à S^1 , donc $H_{\text{dR}}^1(S^1 \times \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$.

7.8 Degré d'une application via l'intégration

Définition 7.42 (Degré d'une application). Soit $f: M \rightarrow N$ une application lisse entre variétés compactes orientées sans bord de même dimension n . Le *degré* de f est l'unique entier $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ tel que, pour toute n -forme ω sur N ,

$$\int_M f^* \omega = \deg(f) \int_N \omega.$$

Proposition 7.43. *Le degré est bien défini et ne dépend que de la classe d'homotopie de f .*

Démonstration. L'application linéaire $f^*: H_{\text{dR}}^n(N) \rightarrow H_{\text{dR}}^n(M)$ est un morphisme entre deux espaces de dimension 1 (car M et N sont compactes, orientées, connexes et sans bord), donc est la multiplication par un scalaire. L'intégrité de ce scalaire sera montrée au chapitre 10 en utilisant le théorème de Sard. L'invariance homotopique découle du efhm :invariance-homotopique. $\square$

Remarque 7.44. Si $q \in N$ est une valeur régulière de f , alors $\deg(f) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \text{sgn det}(df_p)$, somme des signes des déterminants jacobiens aux préimages. Ce lien sera développé au chapitre 10.

Exemple 7.45. Considérons l'application $f_n: S^1 \rightarrow S^1$ définie par $f_n(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$ pour $n \in \mathbb{Z}$. La forme volume $\omega = d\theta$ sur S^1 vérifie $\int_{S^1} \omega = 2\pi$, et

$$\int_{S^1} f_n^* \omega = \int_{S^1} n d\theta = 2\pi n.$$

Donc $\deg(f_n) = n$, conformément à l'intuition que f_n « enroule S^1 autour de lui-même n fois ».

Proposition 7.46 (Propriétés du degré). *Le degré possède les propriétés suivantes :*

- (i) $\deg(\text{Id}_M) = 1$;
- (ii) $\deg(g \circ f) = \deg(g) \cdot \deg(f)$;
- (iii) si f est un difféomorphisme préservant l'orientation, $\deg(f) = 1$; si f renverse l'orientation, $\deg(f) = -1$;
- (iv) si f n'est pas surjective, $\deg(f) = 0$.

Démonstration. (i) est immédiat car $\text{Id}^* \omega = \omega$. (ii) découle de $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. (iii) Un difféomorphisme bijectif a exactement une préimage en chaque point, et le signe du jacobien donne ± 1 . (iv) Si $q \notin f(M)$, on choisit ω à support dans un voisinage de q ne rencontrant pas $f(M)$, de sorte que $f^* \omega = 0$, d'où $\deg(f) \int_N \omega = 0$ avec $\int_N \omega \neq 0$. $\square$

7.9 Dualité de Poincaré

Théorème 7.47 (Dualité de Poincaré — énoncé). *Soit M une variété lisse compacte orientée sans bord de dimension n . L'accouplement bilinéaire*

$$H_{\text{dR}}^k(M) \times H_{\text{dR}}^{n-k}(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad ([\alpha], [\beta]) \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta$$

est non dégénéré. Autrement dit, il induit un isomorphisme

$$H_{\text{dR}}^k(M) \cong (H_{\text{dR}}^{n-k}(M))^*.$$

Remarque 7.48. La preuve complète de ce théorème requiert la suite exacte de Mayer-Vietoris et un argument de récurrence sur les recouvrements (voir, par exemple, Bott et Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*). L'idée essentielle est que le produit extérieur $\alpha \wedge \beta$ donne une n -forme que l'on intègre sur M , et le théorème de Stokes garantit que cet accouplement est bien défini sur la cohomologie.

Corollaire 7.49. *Les nombres de Betti $b_k(M) = \dim H_{\text{dR}}^k(M)$ satisfont $b_k = b_{n-k}$ pour toute variété compacte orientée sans bord de dimension n .*

7.10 Exercices

Exercice 7.1. Soit $\omega = x \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z \, dx \wedge dy$ la 2-forme sur $\mathbb{R}^3$. Calculer $\int_{S^2} \omega$ de deux manières :

- (a) directement par paramétrisation ;
- (b) en utilisant le théorème de la divergence (identifier le champ de vecteurs correspondant et son flux).

Exercice 7.2. Vérifier le théorème de Stokes pour $\omega = xy \, dx + y^2 \, dy$ sur le triangle T de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$, en calculant séparément $\int_T d\omega$ et $\int_{\partial T} \omega$.

Exercice 7.3. Soit M une variété compacte orientée sans bord de dimension n . Montrer que si $\alpha \in \Omega^k(M)$ et $\beta \in \Omega^{n-k-1}(M)$, alors

$$\int_M d\alpha \wedge \beta = (-1)^{k+1} \int_M \alpha \wedge d\beta.$$

Exercice 7.4. Soit $\omega = \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$ la forme angulaire sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

- (a) Vérifier que $d\omega = 0$.
- (b) Calculer $\int_\gamma \omega$ où γ est le cercle unité orienté dans le sens trigonométrique.
- (c) En déduire que $[\omega] \neq 0$ dans $H_{\text{dR}}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$.

Exercice 7.5. Montrer que $H_{\text{dR}}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \mathbb{R}$ en utilisant l'homotopie avec S^1 et l'invariance homotopique de la cohomologie de de Rham.

Exercice 7.6. Soit $\omega = e^{xyz}(yz dx + xz dy + xy dz)$ sur $\mathbb{R}^3$.

- (a) Vérifier que ω est fermée.
- (b) Utiliser la construction de la preuve du lemme de Poincaré pour trouver explicitement une fonction f telle que $\omega = df$.

Exercice 7.7. Soient M et N deux variétés compactes connexes orientées sans bord de même dimension. Montrer que si $f: M \rightarrow N$ n'est pas surjective, alors $\deg(f) = 0$. *Indication : considérer le support d'une forme volume sur N concentrée au voisinage d'un point non atteint.*

Exercice 7.8. Soit $f: S^n \rightarrow S^n$ l'application antipodale $f(x) = -x$.

- (a) Calculer $f^*\omega$ pour la forme volume standard ω de S^n .
- (b) En déduire que $\deg(f) = (-1)^{n+1}$.
- (c) Montrer que si n est pair, f n'est pas homotope à l'identité.

Exercice 7.9. Soit $M = U \cup V$ un recouvrement ouvert d'une variété lisse. Construire la suite exacte longue de Mayer–Vietoris

$$\cdots \rightarrow H_{\text{dR}}^{k-1}(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H_{\text{dR}}^k(M) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(U) \oplus H_{\text{dR}}^k(V) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(U \cap V) \rightarrow \cdots$$

et l'utiliser pour calculer $H_{\text{dR}}^*(S^n)$ par récurrence sur n .

Exercice 7.10. Montrer que la caractéristique d'Euler–Poincaré $\chi(M) = \sum_{k=0}^n (-1)^k b_k(M)$ est un invariant homotopique. Calculer $\chi(S^n)$, $\chi(\mathbb{RP}^2)$ et $\chi(T^2)$, où $T^2 = S^1 \times S^1$ est le tore.

Exercice 7.11. Soient M et N deux variétés compactes. Montrer que l'application

$$\bigoplus_{p+q=k} H_{\text{dR}}^p(M) \otimes H_{\text{dR}}^q(N) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(M \times N), \quad [\alpha] \otimes [\beta] \mapsto [\pi_M^* \alpha \wedge \pi_N^* \beta]$$

est un isomorphisme (formule de Künneth). En déduire $H_{\text{dR}}^*(T^n)$ pour le tore $T^n = (S^1)^n$. *Indication : utiliser le fait que $H_{\text{dR}}^*(S^1) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ (en degrés 0 et 1).*

Exercice 7.12. Soit ω la 2-forme sur S^2 définie comme la forme volume standard (forme d'aire) normalisée à $\int_{S^2} \omega = 4\pi$.

- (a) Montrer que ω n'est pas exacte.
- (b) Montrer que $[\omega]$ engendre $H_{\text{dR}}^2(S^2) \cong \mathbb{R}$.
- (c) Soit $f: S^2 \rightarrow S^2$ lisse. Montrer que $\int_{S^2} f^* \omega = 4\pi \cdot \deg(f)$.

Chapitre 8

Théorème de Sard

Contents

6.1	Algèbre extérieure	62
6.2	Formes différentielles	64
6.3	Différentielle extérieure	64
6.3.1	Formes fermées et formes exactes	65
6.4	Tiré en arrière	66
6.5	Produit intérieur et dérivée de Lie	67
6.6	Orientation	69
6.7	Intégration des formes différentielles	70
6.7.1	Intégration sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$	70
6.7.2	Intégration sur une variété orientée	71
6.8	Formes à support compact	72
6.9	Vers le théorème de Stokes	72
6.10	Exercices	73

Le théorème de Sard affirme que les valeurs critiques d'une application lisse sont « rares » au sens de la mesure de Lebesgue. Ce résultat, d'apparence technique, est en réalité l'un des outils les plus puissants de la topologie différentielle, comme en témoignent les applications spectaculaires qui clôturent ce chapitre. La preuve repose sur une analyse fine utilisant le développement de Taylor et un argument de comptage volumétrique. Les applications incluent le théorème du point fixe de Brouwer, le théorème de non-rétraction et l'existence d'applications transverses.

8.1 Valeurs critiques et valeurs régulières

Définition 8.1 (Points et valeurs critiques). Soit $f: M^m \rightarrow N^n$ une application lisse entre variétés.

- (i) Un point $p \in M$ est un *point critique* de f si l'application linéaire tangente $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ n'est pas surjective, c'est-à-dire $\text{rg}(df_p) < n$.
- (ii) L'ensemble des points critiques est noté $C_f \subset M$.
- (iii) Un point $q \in N$ est une *valeur critique* si $q \in f(C_f)$.
- (iv) Un point $q \in N$ est une *valeur régulière* si $q \notin f(C_f)$. En particulier, tout

$q \notin f(M)$ est une valeur régulière.

Remarque 8.2. Si q est une valeur régulière de f et $f^{-1}(q) \neq \emptyset$, alors par le théorème des fonctions implicites (ou le théorème de la préimage régulière), $f^{-1}(q)$ est une sous-variété lisse de M de dimension $m - n$.

Exemple 8.3. Considérons la projection $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\pi(x, y, z) = z$ (la « fonction hauteur »). Ici $M = S^2$ (dimension 2) et $N = \mathbb{R}$ (dimension 1). Les points critiques sont ceux où $d\pi_p: T_p S^2 \rightarrow T_{\pi(p)} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ est l'application nulle, c'est-à-dire les points où le plan tangent à S^2 est horizontal. Ce sont le pôle nord $(0, 0, 1)$ et le pôle sud $(0, 0, -1)$, et les valeurs critiques sont $\{-1, 1\}$. Pour tout $t \in (-1, 1)$, la préimage $\pi^{-1}(t)$ est le cercle $\{x^2 + y^2 = 1 - t^2, z = t\}$, qui est bien une sous-variété de dimension 1.

Exemple 8.4. Considérons $f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(A) = \det(A)$. Ici $M = M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$, $N = \mathbb{R}$. On montre que $df_A(H) = \det(A) \operatorname{tr}(A^{-1}H)$ lorsque A est inversible. Donc les matrices inversibles ne sont jamais des points critiques. Les points critiques sont les matrices singulières, mais la seule valeur critique est 0 (car $f(C_f) = \{0\}$). Le théorème de Sard est vérifié de manière triviale ici : $\{0\}$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}$.

8.2 Ensembles de mesure nulle

Définition 8.5 (Mesure nulle dans $\mathbb{R}^n$). Un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ est de *mesure (de Lebesgue) nulle* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille dénombrable de pavés $\{R_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $A \subset \bigcup_i R_i$ et $\sum_i \operatorname{vol}(R_i) < \varepsilon$.

Lemme 8.6. (i) Une union dénombrable d'ensembles de mesure nulle est de mesure nulle.

(ii) Un sous-ensemble de mesure nulle n'a pas de point intérieur (et en particulier n'est pas $\mathbb{R}^n$ entier).

(iii) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ est de mesure nulle et $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est lipschitzienne sur un voisinage de A , alors $f(A)$ est de mesure nulle.

Démonstration. (i) Si $A = \bigcup_j A_j$ avec $\mu(A_j) = 0$, pour chaque j on recouvre A_j par des pavés de volume total $< \varepsilon/2^{j+1}$. Leur réunion recouvre A avec un volume total $< \varepsilon$.

(ii) Si A contenait un ouvert U , alors U aurait un volume positif, contradiction puisque $U \subset A$ et A est recouvert par des pavés de volume total arbitrairement petit.

(iii) Si f est L -lipschitzienne, elle envoie un pavé de côté r dans un pavé de côté $2Lr$. Donc les volumes sont multipliés par au plus $(2L)^n$, et le résultat suit. $\square$

Définition 8.7 (Mesure nulle dans une variété). Un sous-ensemble $A \subset M$ d'une variété lisse M est de *mesure nulle* si, pour toute carte (U, φ) de M , l'ensemble $\varphi(A \cap U)$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^n$. Par le eflm :mesure-nulle-dénombrable(iii), cette définition ne dépend pas du choix d'atlas.

Lemme 8.8 (Lemme de Fubini pour les ensembles de mesure nulle). Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la tranche $A_t = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x', t) \in A\}$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^{n-1}$. Alors A est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$. Pour chaque rationnel $q_k \in \mathbb{Q}$ et chaque $j \in \mathbb{N}$, recouvrons A_{q_k} par des pavés de $\mathbb{R}^{n-1}$ de volume total $< \varepsilon/2^{k+j+2}$. En épaississant chaque pavé $(n-1)$ -dimensionnel en un pavé n -dimensionnel de hauteur $1/2^j$, et en prenant la réunion sur tous les rationnels q_k dans un intervalle $[q_k - 1/2^{j+1}, q_k + 1/2^{j+1}]$, on construit un recouvrement de A (car pour tout $(x', t) \in A$, la tranche A_t est de mesure nulle, et t est approché par des rationnels) de volume total fini arbitrairement petit.

Plus précisément, fixons $N \in \mathbb{N}$. Posons $I_k = [k/N, (k+1)/N]$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Pour $t \in I_k$, on a $A_t \subset \mathbb{R}^{n-1}$ de mesure nulle. On recouvre A_t par des $(n-1)$ -pavés de volume total $< \varepsilon/(2^{|k|+2} \cdot N)$. En épaississant avec I_k (de longueur $1/N$), on obtient des n -pavés de volume total $< \varepsilon/2^{|k|+2}$. En sommant sur $k \in \mathbb{Z}$, le volume total est $< \varepsilon$. $\square$

8.3 Théorème de Sard

Théorème 8.9 (Sard, 1942). Soit $f: M^m \rightarrow N^n$ une application lisse entre variétés. L'ensemble des valeurs critiques de f est de mesure nulle dans N .

La preuve se ramène au cas euclidien par des cartes.

Lemme 8.10. Il suffit de démontrer le théorème de Sard pour $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, où $U \subset \mathbb{R}^m$ est ouvert.

Preuve du lemme. Soit $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlas dénombrable de M et $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ un atlas dénombrable de N . L'ensemble des valeurs critiques $f(C_f)$ s'écrit comme union dénombrable d'images $\psi_\beta(f(C_f) \cap V_\beta)$. Pour chaque (α, β) , l'application $\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ est lisse de $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)) \subset \mathbb{R}^m$ vers $\mathbb{R}^n$, et ses valeurs critiques contiennent $\psi_\beta(f(C_f \cap U_\alpha) \cap V_\beta)$. Par union dénombrable, le résultat pour les ouverts de $\mathbb{R}^m$ implique le cas général. $\square$

Preuve du eflm :sard. Par le eflm :sard-local, il suffit de traiter $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ avec $U \subset \mathbb{R}^m$ ouvert. On procède par récurrence sur m .

Cas $m = 0$. Trivial : U est discret, dénombrable, et un ensemble dénombrable est de mesure nulle.

Cas $m < n$. Pour tout $p \in U$, $\text{rg}(df_p) \leq m < n$, donc tout point est critique et $C_f = U$. On doit montrer que $f(U)$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^n$. Cela suit du fait que $f(U)$ est contenu dans une union dénombrable d'images de cubes de dimension $m < n$, et l'image d'un m -cube par une application lipschitzienne dans $\mathbb{R}^n$ avec $m < n$ est de mesure nulle (l'image est contenue dans un « voisinage tubulaire » de volume arbitrairement petit).

Cas $m \geq n$: décomposition de l'ensemble critique. Définissons les sous-ensembles suivants de C_f :

$$C_1 = \{p \in U \mid df_p = 0\},$$

$$C_k = \{p \in U \mid D^\alpha f(p) = 0 \text{ pour tout multi-indice } |\alpha| \leq k\}, \quad k \geq 2.$$

On a la suite décroissante $C_f \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots$.

Nous montrons séparément :

- (A) $f(C_k)$ est de mesure nulle pour k assez grand (plus précisément $k \geq m/n$);
- (B) $f(C_k \setminus C_{k+1})$ est de mesure nulle pour tout $k \geq 1$;
- (C) $f(C_f \setminus C_1)$ est de mesure nulle.

Puisque $f(C_f) = f(C_f \setminus C_1) \cup f(C_1 \setminus C_2) \cup \dots \cup f(C_{k-1} \setminus C_k) \cup f(C_k)$, cela conclut.

Preuve de (A) : $f(C_k)$ est de mesure nulle pour $k \geq m/n$. Soit $p \in C_k$ et Q un cube de côté δ centré en p , contenu dans U . Par Taylor, pour $x \in Q$,

$$|f(x) - f(p)| \leq C |x - p|^{k+1} \leq C'(\delta)^{k+1}.$$

Donc $f(Q)$ est contenu dans un cube de côté $\leq 2C'(\delta)^{k+1}$ dans $\mathbb{R}^n$. Subdivisons Q en N^m sous-cubes de côté δ/N . Chaque sous-cube contenant un point de C_k a son image contenue dans un cube de $\mathbb{R}^n$ de côté $\leq 2C'(\delta/N)^{k+1}$. Le volume total des images est donc majoré par

$$N^m \cdot (2C'(\delta/N)^{k+1})^n = \text{const} \cdot N^{m-n(k+1)}.$$

Si $k+1 > m/n$, i.e. $k \geq \lceil m/n \rceil$, l'exposant $m - n(k+1) < 0$ et cette quantité tend vers 0 quand $N \rightarrow \infty$. Donc $f(C_k \cap Q)$ est de mesure nulle. Par un recouvrement dénombrable de C_k par de tels cubes, $f(C_k)$ est de mesure nulle.

Preuve de (B) : $f(C_k \setminus C_{k+1})$ est de mesure nulle. Soit $p \in C_k \setminus C_{k+1}$. Il existe un multi-indice $|\alpha| = k+1$ avec $D^\alpha f_i(p) \neq 0$ pour une composante f_i . On peut supposer que $\frac{\partial}{\partial x_1}(D^{\alpha'} f_i)(p) \neq 0$ pour un certain $|\alpha'| = k$. Posons $g = D^{\alpha'} f_i$; alors $g(p) = 0$ et $\frac{\partial g}{\partial x_1}(p) \neq 0$.

Par le théorème des fonctions implicites, $\{g = 0\}$ est localement une hypersurface lisse, difféomorphe à $\mathbb{R}^{m-1}$. L'application $\Phi(x) = (g(x), x_2, \dots, x_m)$ est un difféomorphisme local. En composant $f \circ \Phi^{-1}$, on se ramène à étudier les valeurs critiques d'une application lisse sur $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} \cong \mathbb{R}^{m-1}$, ce qui donne le résultat par l'hypothèse de récurrence sur m .

Preuve de (C) : $f(C_f \setminus C_1)$ est de mesure nulle. Soit $p \in C_f \setminus C_1$. Il existe i, j tels que $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \neq 0$. Quitte à réordonner, supposons $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) \neq 0$. L'application

$$\Phi(x) = (f_1(x), x_2, \dots, x_m)$$

est un difféomorphisme local au voisinage de p . En posant $\tilde{f} = f \circ \Phi^{-1}$, on obtient $\tilde{f}(y_1, y_2, \dots, y_m) = (y_1, h_2(y), \dots, h_n(y))$.

Pour $y_1 = c$ fixé, considérons $\tilde{f}_c(y_2, \dots, y_m) = (h_2(c, y'), \dots, h_n(c, y'))$. Un point critique de $\tilde{f}$ dans la tranche $\{y_1 = c\}$ est un point critique de $\tilde{f}_c$. Par récurrence sur m (appliquée à $\tilde{f}_c: \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$), l'ensemble des valeurs critiques de $\tilde{f}_c$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^{n-1}$ pour chaque c . Par le lemme de Fubini (eflem :fubini-mesure), l'ensemble des valeurs critiques de $\tilde{f}$ (dans $\mathbb{R}^n$) est de mesure nulle, d'où le résultat. $\square$

Corollaire 8.11. *L'ensemble des valeurs régulières d'une application lisse $f: M \rightarrow N$ est dense dans N . Plus précisément, c'est un résiduel (intersection dénombrable d'ouverts denses) dans N .*

Démonstration. Un ensemble de mesure nulle a un complémentaire dense (car un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ n'est pas de mesure nulle). Le complémentaire de l'ensemble des valeurs critiques est l'ensemble des valeurs régulières. La structure de résiduel résulte du fait qu'un ensemble de mesure nulle est contenu dans une intersection dénombrable d'ouverts de mesure arbitrairement petite. $\square$

8.4 Applications du théorème de Sard

8.4.1 Existence de valeurs régulières

Proposition 8.12. *Soit $f: M \rightarrow N$ une application lisse entre variétés. Si $\dim M < \dim N$, alors $f(M)$ est de mesure nulle dans N ; en particulier, f n'est pas surjective.*

Démonstration. Si $\dim M < \dim N$, tout point de M est critique. Par Sard, $f(C_f) = f(M)$ est de mesure nulle. $\square$

Corollaire 8.13. *Il n'existe pas de submersion $f: M^m \rightarrow N^n$ si $m < n$.*

8.4.2 Théorème de non-rétraction

Théorème 8.14 (Non-rétraction). *Il n'existe pas de rétraction lisse $r: D^n \rightarrow S^{n-1}$, c'est-à-dire d'application lisse $r: D^n \rightarrow S^{n-1}$ telle que $r|_{S^{n-1}} = \text{Id}_{S^{n-1}}$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'une telle rétraction lisse r existe.

Étape 1. Par le théorème de Sard, r admet une valeur régulière $q \in S^{n-1}$. Puisque $r|_{S^{n-1}} = \text{Id}$, on a $q \in r(D^n)$, donc $r^{-1}(q) \neq \emptyset$.

Étape 2. Puisque q est une valeur régulière, $r^{-1}(q)$ est une sous-variété lisse de D^n de dimension $n - (n - 1) = 1$. C'est donc une courbe lisse (compacte, car D^n est compact) dans D^n .

Étape 3. Le bord de $r^{-1}(q)$ dans D^n est $r^{-1}(q) \cap S^{n-1} = \{q\}$ (puisque $r|_{S^{n-1}} = \text{Id}$ implique que le seul point de S^{n-1} envoyé sur q est q lui-même). Ainsi, $r^{-1}(q)$ est une 1-variété compacte à bord consistant en un seul point.

Étape 4. Or, toute variété compacte de dimension 1 à bord est une union disjointe de copies de $[0, 1]$ et de S^1 . Le nombre de points de bord est donc pair. Avoir un seul point de bord est impossible. Contradiction. $\square$

8.4.3 Théorème du point fixe de Brouwer

Théorème 8.15 (Brouwer, version lisse). *Toute application lisse $f: D^n \rightarrow D^n$ admet un point fixe.*

Démonstration. Supposons que f n'ait pas de point fixe. Pour chaque $x \in D^n$, considérons la demi-droite issue de $f(x)$ passant par x et prolongée au-delà de x . Soit $r(x) \in S^{n-1}$ le point d'intersection de cette demi-droite avec S^{n-1} . Plus précisément, $r(x) = x + t(x)(x - f(x))$ où $t(x) \geq 0$ est l'unique valeur telle que $|r(x)| = 1$.

L'application $r: D^n \rightarrow S^{n-1}$ est lisse (car $t(x)$ dépend lissement de x par le théorème des fonctions implicites, puisque la condition $|x + t(x - f(x))|^2 = 1$ est résolue par une équation du second degré en t dont le discriminant est strictement positif).

De plus, si $x \in S^{n-1}$, la demi-droite issue de $f(x)$ passant par x atteint S^{n-1} en x (car $|x| = 1$ et $t = 0$ convient), donc $r|_{S^{n-1}} = \text{Id}_{S^{n-1}}$.

Ceci contredit le *efthm* :non-retraction. □

Remarque 8.16. Le théorème de Brouwer reste vrai pour les applications continues. On se ramène au cas lisse par approximation : toute application continue $f: D^n \rightarrow D^n$ est uniformément approchée par des applications lisses f_ε (par convolution). Si f n'a pas de point fixe, alors $|f(x) - x| \geq \delta > 0$ pour tout x , et pour ε assez petit, f_ε n'a pas non plus de point fixe, contredisant le cas lisse.

Remarque 8.17. En dimension 1, le théorème de Brouwer est le théorème des valeurs intermédiaires : si $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est continue, la fonction $g(x) = f(x) - x$ satisfait $g(0) = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$, donc g s'annule en un point, qui est un point fixe de f .

Corollaire 8.18. *Il n'existe pas d'application continue $f: D^n \rightarrow \partial D^n = S^{n-1}$ sans point fixe (au sens où $f(x) \neq x$ pour tout $x \in \partial D^n$) qui soit l'identité sur le bord.*

8.4.4 Théorème de Brown

Théorème 8.19 (Brown). *Soit $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un homéomorphisme. Alors h envoie les ensembles de mesure nulle sur des ensembles de mesure nulle.*

Remarque 8.20. La preuve de ce théorème utilise le théorème de Sard de manière indirecte, via l'invariance du domaine et des propriétés topologiques des homéomorphismes de $\mathbb{R}^n$. Nous ne donnons pas la preuve complète ici, mais signalons que l'ingrédient clé est le fait (conséquence de Sard) que l'image d'un compact de mesure nulle par une application lipschitzienne est de mesure nulle, combiné à l'approximation d'un homéomorphisme par des applications lipschitziennes par morceaux.

8.4.5 Applications transverses

Définition 8.21 (Transversalité). Soit $f: M \rightarrow N$ lisse et $W \subset N$ une sous-variété. On dit que f est *transverse* à W , noté $f \pitchfork W$, si pour tout $p \in f^{-1}(W)$,

$$\text{im}(df_p) + T_{f(p)}W = T_{f(p)}N.$$

Théorème 8.22 (Théorème de transversalité). Soit $F: M \times S \rightarrow N$ une application lisse telle que $F \pitchfork W$, où $W \subset N$ est une sous-variété fermée. Alors, pour presque tout $s \in S$ (i.e. pour tout s sauf un ensemble de mesure nulle), l'application $f_s = F(\cdot, s): M \rightarrow N$ est transverse à W .

Démonstration. Posons $Z = F^{-1}(W)$. Puisque $F \pitchfork W$, Z est une sous-variété de $M \times S$. Considérons la projection $\pi: Z \rightarrow S$, $\pi(p, s) = s$. Par Sard, l'ensemble des valeurs critiques de π est de mesure nulle dans S . Un calcul montre que s est une valeur régulière de π si et seulement si $f_s \pitchfork W$. $\square$

Corollaire 8.23. Soit $f: M \rightarrow N$ lisse et $W \subset N$ une sous-variété fermée. Alors f peut être approchée arbitrairement (en topologie C^∞) par des applications transverses à W .

Esquisse de preuve. On plonge N dans $\mathbb{R}^k$ (par Whitney) et on considère un voisinage tubulaire $\nu: E \rightarrow N$ de N dans $\mathbb{R}^k$. On définit $F: M \times B_\varepsilon(0) \rightarrow N$ par $F(p, s) = \nu^{-1}(f(p) + s)$ (pour ε assez petit). On vérifie que $F \pitchfork W$ en utilisant la surjectivité des translations. Par le *efthm :transversalite-sard*, $f_s = F(\cdot, s)$ est transverse à W pour presque tout $s \in B_\varepsilon(0)$, et $f_s \rightarrow f$ quand $s \rightarrow 0$. $\square$

Remarque 8.24. Le *efcor :approx-transverse* est souvent résumé par le slogan : « la transversalité est une propriété générique ». Plus précisément, l'ensemble des applications $f: M \rightarrow N$ transverses à une sous-variété fermée $W \subset N$ est un résiduel (et en particulier dense) dans l'espace $C^\infty(M, N)$ muni de la topologie de Whitney. Ce résultat fondamental, dû à Thom, est à la base de la théorie de la transversalité développée au chapitre 5.

8.5 Compléments

Proposition 8.25 (Sard paramétrique). Soit $f: M \rightarrow N$ une application lisse de classe C^r avec $r \geq \max(m - n + 1, 1)$. Alors les valeurs critiques de f sont de mesure nulle dans N .

Remarque 8.26. L'hypothèse de régularité C^r avec $r \geq \max(m - n + 1, 1)$ est optimale : Whitney a construit des exemples d'applications C^{r-1} dont l'ensemble des valeurs critiques a une mesure de Lebesgue positive. Plus précisément, pour $m \geq n \geq 1$ et $r < \max(m - n + 1, 1)$, il existe $f \in C^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ telle que l'ensemble des valeurs

critiques de f contient un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 8.27. Soit M une variété compacte et $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse. Les valeurs critiques de f forment un compact de mesure nulle dans $\mathbb{R}$. Les valeurs régulières forment donc un ouvert dense. Si de plus f est une *fonction de Morse* (tous les points critiques sont non dégénérés), l'ensemble des valeurs critiques est fini. Par Sard, les fonctions de Morse sont denses dans $C^\infty(M, \mathbb{R})$: étant donné $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, la famille $f_a(x) = f(x) + \langle a, \varphi(x) \rangle$ (où φ est un plongement de M dans $\mathbb{R}^k$) est une fonction de Morse pour presque tout $a \in \mathbb{R}^k$.

Proposition 8.28. Soit $f: M^m \rightarrow N^n$ lisse avec $m \geq n$. Alors pour presque toute valeur $q \in N$, la préimage $f^{-1}(q)$ est soit vide, soit une sous-variété lisse de M de dimension $m - n$.

Démonstration. Par Sard, presque tout q est une valeur régulière. Pour une valeur régulière, le théorème de la préimage régulière donne le résultat. $\square$

8.6 Exercices

Exercice 8.1. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$. Déterminer l'ensemble des points critiques et des valeurs critiques de f . Le théorème de Sard est-il vérifié ?

Exercice 8.2. Montrer que l'ensemble triadique de Cantor $\mathcal{C} \subset [0, 1]$ est de mesure nulle. Plus généralement, montrer qu'un compact totalement discontinu de $\mathbb{R}$ est de mesure nulle.

Exercice 8.3. Soit $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe lisse. Montrer que l'image $\gamma(\mathbb{R})$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^2$. *Indication : utiliser la proposition 8.12.*

Exercice 8.4. Soit $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application lisse. Montrer que presque toute valeur $t \in \mathbb{R}$ est régulière, et que pour une telle valeur t , $f^{-1}(t)$ est une union finie de courbes fermées lisses plongées dans S^2 .

Exercice 8.5. Soit $n \geq 1$.

- (a) Reprendre la preuve du *efthm* : brouwer et vérifier tous les détails de la construction de la rétraction r .
- (b) Montrer que r est bien lisse en détaillant le calcul du discriminant.

Exercice 8.6. Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application lisse propre telle que $\det(df_p) > 0$ pour tout p . Montrer que f est surjective. *Indication : montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est ouvert et fermé dans $\mathbb{R}^n$.*

Exercice 8.7. Soient $M = S^1 \times S^1$ (le tore) et $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ un plongement lisse. Montrer que pour presque tout plan affine $P \subset \mathbb{R}^3$ de dimension 2, l'intersection $f(M) \cap P$ est soit vide, soit une union finie de courbes lisses. *Indication : paramétrer les plans par la grassmannienne et un vecteur de translation, puis appliquer le théorème de transversalité.*

Exercice 8.8. Soit $f: M \rightarrow N$ une application lisse entre variétés compactes de même dimension, avec M connexe et N connexe. Montrer que si f est une submersion (pas de points critiques), alors f est un revêtement lisse. *Indication : montrer que f est propre et un difféomorphisme local, puis que les fibres sont finies.*

Exercice 8.9. Montrer qu'il n'existe pas d'application lisse $f: S^2 \rightarrow S^1$ qui soit une submersion. *Indication : raisonner par les préimages de valeurs régulières.*

Exercice 8.10. Dédurre du théorème de Brouwer les résultats suivants :

- (a) Toute application continue $f: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^n$ admet un point fixe.
- (b) Il n'existe pas de champ de vecteurs continu non nul sur S^{2n} (théorème de la boule chevelue pour les sphères paires). *Indication pour (b) : si v est un tel champ, construire une rétraction $D^{2n+1} \rightarrow S^{2n}$.*

Chapitre 9

Théorie de Morse — Introduction

Contents

7.1	Chaînes singulières lisses	75
7.2	Intégration de formes sur des chaînes	77
7.3	Le théorème de Stokes	78
7.4	Cas classiques en $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$	79
7.5	Cohomologie de de Rham	80
7.6	Lemme de Poincaré	82
7.7	Invariance homotopique	84
7.8	Degré d'une application via l'intégration	85
7.9	Dualité de Poincaré	86
7.10	Exercices	86

La théorie de Morse constitue l'un des ponts les plus remarquables entre l'analyse et la topologie. L'idée fondatrice, due à Marston Morse dans les années 1920–1930, est d'étudier la topologie d'une variété M à travers le comportement des points critiques d'une fonction lisse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Plus précisément, on montre que les changements de topologie des ensembles de sous-niveaux $f^{-1}((-\infty, a])$ sont entièrement contrôlés par les points critiques de f et par leur *indice*.

9.1 Fonctions de Morse

Définition 9.1 (Point critique non dégénéré). Soit M une variété lisse de dimension n et $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une application lisse. Un point $p \in M$ est un **point critique** de f si $df_p = 0$, c'est-à-dire si la différentielle de f en p s'annule. Un point critique p est dit **non dégénéré** si la **matrice hessienne**

$$H_f(p) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

est inversible, pour un choix (et donc pour tout choix) de coordonnées locales $(x_1, \dots, x_n)$ au voisinage de p .

Remarque 9.2. La non-dégénérescence de la hessienne ne dépend pas du choix de coordonnées locales. En effet, si φ désigne un changement de coordonnées, la matrice hessienne se transforme par la règle

$$H_{f \circ \varphi}(q) = J_{\varphi}(q)^T H_f(\varphi(q)) J_{\varphi}(q) + \sum_k \frac{\partial f}{\partial y_k}(\varphi(q)) \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_i \partial x_j}(q).$$

Si p est un point critique, le second terme disparaît et l'inversibilité est préservée par congruence.

Définition 9.3 (Fonction de Morse). Une application lisse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est une **fonction de Morse** si tous ses points critiques sont non dégénérés.

Définition 9.4 (Indice d'un point critique). Soit p un point critique non dégénéré de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. L'**indice** de f en p , noté $\lambda(p)$ ou $\text{ind}(f, p)$, est le nombre de valeurs propres strictement négatives de la hessienne $H_f(p)$. Puisque $H_f(p)$ est une matrice symétrique réelle inversible, on a $0 \leq \lambda(p) \leq n$.

Remarque 9.5. Par la loi d'inertie de Sylvester, l'indice est un invariant bien défini, indépendant du choix de coordonnées locales.

9.2 Le lemme de Morse

Le lemme suivant montre qu'au voisinage d'un point critique non dégénéré, une fonction de Morse admet une forme normale particulièrement simple.

Lemme 9.6 (Lemme de Morse). Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une application lisse et $p \in M$ un point critique non dégénéré d'indice λ . Alors il existe un système de coordonnées locales $(y_1, \dots, y_n)$ centré en p tel que, dans ces coordonnées,

$$f(y) = f(p) - y_1^2 - \dots - y_{\lambda}^2 + y_{\lambda+1}^2 + \dots + y_n^2.$$

Démonstration. On peut supposer, quitte à travailler en coordonnées, que $M = \mathbb{R}^n$, $p = 0$ et $f(0) = 0$. On procède en deux étapes.

Étape 1 : Décomposition quadratique. Par le lemme de Hadamard, puisque $f(0) = 0$, il existe des fonctions lisses g_i avec $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x)$ et $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0$ (car 0 est un point critique). Appliquant le lemme de Hadamard à chaque g_i , on obtient des fonctions lisses h_{ij} telles que

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j h_{ij}(x).$$

On peut supposer $h_{ij} = h_{ji}$ en posant $h'_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji})$. De plus, $(h_{ij}(0)) = \frac{1}{2}H_f(0)$ est inversible.

Étape 2 : Diagonalisation par récurrence. On procède par récurrence sur le nombre

de variables déjà mises sous forme canonique. Supposons que, dans des coordonnées $(u_1, \dots, u_n)$, on a

$$f = \pm u_1^2 \pm \dots \pm u_{r-1}^2 + \sum_{i,j \geq r} u_i u_j h_{ij}(u)$$

avec $(h_{ij}(0))_{i,j \geq r}$ inversible. En particulier, quitte à effectuer un changement linéaire dans les variables $u_r, \dots, u_n$, on peut supposer $h_{rr}(0) \neq 0$. Posons $\varepsilon = \text{sgn}(h_{rr}(0))$ et, au voisinage de 0,

$$v_r = \sqrt{|h_{rr}(u)|} \left(u_r + \sum_{j>r} \frac{h_{rj}(u)}{h_{rr}(u)} u_j \right), \quad v_i = u_i \text{ pour } i \neq r.$$

La fonction $|h_{rr}|^{1/2}$ est lisse et non nulle au voisinage de 0. Le jacobien de la transformation $(u_1, \dots, u_n) \mapsto (v_1, \dots, v_n)$ est non nul en 0, donc c'est un difféomorphisme local. Un calcul direct montre que dans les nouvelles coordonnées :

$$f = \pm v_1^2 \pm \dots \pm v_{r-1}^2 + \varepsilon v_r^2 + \sum_{i,j>r} v_i v_j h'_{ij}(v),$$

ce qui achève la récurrence. Au bout de n étapes, on obtient la forme quadratique souhaitée, et le nombre de signes $-$ est exactement l'indice λ par la loi d'inertie de Sylvester. $\square$

Corollaire 9.7. *Les points critiques non dégénérés sont isolés. En particulier, si M est compacte, une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ n'a qu'un nombre fini de points critiques.*

Démonstration. Au voisinage d'un point critique non dégénéré p , le lemme de Morse donne $df = -2y_1 dy_1 - \dots - 2y_\lambda dy_\lambda + 2y_{\lambda+1} dy_{\lambda+1} + \dots + 2y_n dy_n$, qui ne s'annule qu'en p . $\square$

Corollaire 9.8. *Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse sur une variété compacte. Alors, par une perturbation arbitrairement petite, on peut supposer que les valeurs critiques $f(p_1), \dots, f(p_k)$ sont toutes distinctes.*

Démonstration. Les points critiques sont isolés (et en nombre fini sur une variété compacte). Si $f(p_i) = f(p_j)$ pour $i \neq j$, on modifie f en ajoutant une petite fonction à support compact au voisinage de p_i pour séparer les valeurs critiques, sans créer de nouveaux points critiques. $\square$

Proposition 9.9 (Unicité des coordonnées de Morse). *Les coordonnées de Morse ne sont pas uniques, mais l'indice λ est univoquement déterminé. De plus, si $(y_1, \dots, y_n)$ et $(z_1, \dots, z_n)$ sont deux systèmes de coordonnées de Morse en un même point critique p , alors la transformation $y \mapsto z$ préserve les sous-espaces $\{y_1 = \dots = y_\lambda = 0\}$ et $\{y_{\lambda+1} = \dots = y_n = 0\}$ au premier ordre.*

9.3 Densité des fonctions de Morse

Théorème 9.10 (Densité des fonctions de Morse). *Soit M une variété lisse compacte. L'ensemble des fonctions de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est un ouvert dense dans $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ muni de la topologie $\mathcal{C}^2$.*

Idée de la preuve. La preuve utilise le théorème de Sard et la transversalité. On plonge M dans $\mathbb{R}^N$ (par Whitney) et on considère les fonctions hauteur $f_a(x) = \langle a, x \rangle$ pour $a \in S^{N-1}$. L'application

$$F : M \times S^{N-1} \rightarrow T^*M, \quad (x, a) \mapsto (x, df_a(x))$$

est transverse à la section nulle de T^*M . Par le théorème de transversalité de Thom, pour presque tout a (au sens de Sard), la fonction f_a est de Morse. Ceci montre la densité.

Pour l'ouverture, on observe que la condition « la hessienne est inversible en tout point critique » est ouverte pour la topologie $\mathcal{C}^2$, car le déterminant de la hessienne dépend continûment des dérivées secondes, et les points critiques dépendent continûment de la fonction dans la topologie $\mathcal{C}^1$. $\square$

Remarque 9.11. On peut aussi démontrer la densité en perturbant directement une fonction lisse : si p est un point critique dégénéré de f , on peut ajouter une petite forme linéaire pour lever la dégénérescence.

9.4 Sous-niveaux et attachement de cellules

Notons $M^a = f^{-1}((-\infty, a])$ l'ensemble de sous-niveau de f en a .

Théorème 9.12 (Passage sans point critique). *Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse propre et $a < b$ deux valeurs régulières de f telles que $f^{-1}([a, b])$ ne contienne aucun point critique. Alors M^a est difféomorphe à M^b , et l'inclusion $M^a \hookrightarrow M^b$ est une équivalence d'homotopie.*

Idée de la preuve. On utilise le champ de vecteurs gradient $\nabla f / |\nabla f|^2$ (pour une métrique riemannienne fixée) et son flot. L'absence de point critique assure que ce champ est bien défini sur $f^{-1}([a, b])$. Le flot de ce champ fournit le difféomorphisme désiré entre M^a et M^b . $\square$

Théorème 9.13 (Attachement d'une cellule). *Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse propre et p un point critique d'indice λ avec $f(p) = c$. Supposons que $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ ne contienne aucun autre point critique (pour $\varepsilon > 0$ assez petit). Alors $M^{c+\varepsilon}$ a le type d'homotopie de $M^{c-\varepsilon}$ avec une λ -cellule attachée :*

$$M^{c+\varepsilon} \simeq M^{c-\varepsilon} \cup_{\varphi} e^{\lambda},$$

où $\varphi : \partial D^{\lambda} \rightarrow \partial M^{c-\varepsilon}$ est une application d'attachement convenable.

Idée de la preuve. Dans les coordonnées de Morse $(y_1, \dots, y_n)$ au voisinage de p , on a

$$f(y) = c - y_1^2 - \dots - y_{\lambda}^2 + y_{\lambda+1}^2 + \dots + y_n^2.$$

Le sous-ensemble $M^{c+\varepsilon} \setminus \text{int}(M^{c-\varepsilon})$ est un « col » qui se déforme par rétraction sur le disque $D^\lambda = \{y_1^2 + \dots + y_\lambda^2 \leq \varepsilon, y_{\lambda+1} = \dots = y_n = 0\}$. Ce disque est la λ -cellule qui s'attache à $M^{c-\varepsilon}$. Le bord $\partial D^\lambda = S^{\lambda-1}$ s'envoie dans le niveau $f^{-1}(c - \varepsilon) = \partial M^{c-\varepsilon}$ par l'application d'attachement φ .

La vérification que $M^{c+\varepsilon}$ a le type d'homotopie de $M^{c-\varepsilon} \cup_\varphi e^\lambda$ utilise le flot du gradient modifié et un argument de déformation par rétraction. On renvoie à [2] pour les détails techniques. $\square$

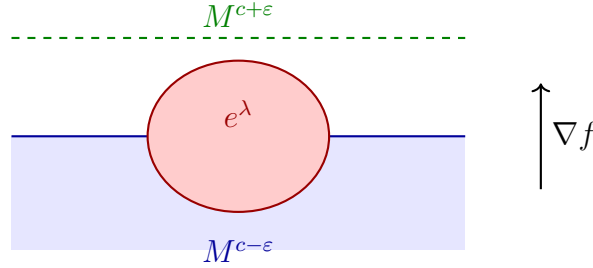


FIGURE 9.1 – Attachement d'une cellule au passage d'un point critique.

9.5 Décomposition en anses

Définition 9.14 (Anse). Soit M une variété lisse compacte de dimension n . Une **anse d'indice λ** (ou λ -anse) est un exemplaire de $D^\lambda \times D^{n-\lambda}$ attaché à la frontière de la variété existante par un plongement $\varphi : \partial D^\lambda \times D^{n-\lambda} \rightarrow \partial M$. La variété résultante est

$$M' = M \cup_\varphi (D^\lambda \times D^{n-\lambda}).$$

Théorème 9.15 (Décomposition en anses). *Toute variété lisse compacte M admet une **décomposition en anses** : partant de D^n (une 0-anse), on construit M en attachant successivement des anses d'indices croissants.*

Esquisse. On choisit une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ (qui existe par le théorème de densité 9.10) avec des valeurs critiques distinctes $c_1 < c_2 < \dots < c_k$. D'après le théorème 9.12, la topologie ne change qu'aux niveaux critiques, et le théorème 9.13 montre que chaque passage correspond à l'attachement d'une anse. Le minimum global de f fournit la 0-anse initiale. $\square$

Corollaire 9.16 (CW-structure). *Toute variété lisse compacte admet la structure d'un CW-complexe fini, avec exactement une cellule de dimension λ pour chaque point critique d'indice λ de toute fonction de Morse.*

Exemple 9.17 (Décomposition en anses du tore T^2). En utilisant la fonction hauteur sur le tore T^2 , la décomposition en anses est la suivante :

1. une 0-anse $D^0 \times D^2 \cong D^2$ (le minimum) ;

2. une première 1-anse $D^1 \times D^1$ (le premier col) ;
3. une deuxième 1-anse $D^1 \times D^1$ (le deuxième col) ;
4. une 2-anse $D^2 \times D^0 \cong D^2$ (le maximum).

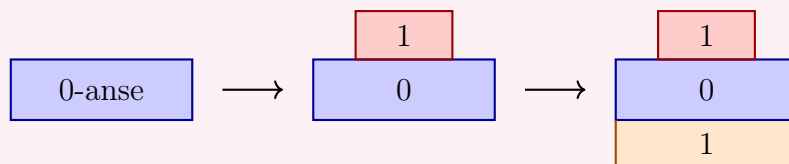


FIGURE 9.2 – Construction progressive du tore par attachement d'anses.

Proposition 9.18 (Réarrangement des anses). *Soit M une variété compacte munie d'une décomposition en anses. On peut toujours réarranger l'ordre d'attachement de sorte que les anses d'indice λ soient attachées avant celles d'indice $\lambda + 1$.*

Idée. On modifie la fonction de Morse par une isotopie du flot gradient de façon à séparer les valeurs critiques d'indices différents. Si deux anses d'indices $\lambda < \mu$ sont attachées dans le « mauvais » ordre, on peut permuter les valeurs critiques correspondantes sans changer le type de difféomorphisme de M , à condition que $\lambda < \mu$. $\square$

9.6 Inégalités de Morse

Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse sur une variété compacte M . Notons c_λ le nombre de points critiques d'indice λ et $b_\lambda = \dim H_\lambda(M; \mathbb{Q})$ le λ -ième nombre de Betti.

Théorème 9.19 (Inégalités de Morse faibles). *Pour tout $\lambda \in \{0, 1, \dots, n\}$,*

$$c_\lambda \geq b_\lambda.$$

Démonstration. Le corollaire 9.16 fournit un CW-complexe avec c_λ cellules de dimension λ . Le complexe cellulaire associé a un groupe de chaînes $C_\lambda \cong \mathbb{Z}^{c_\lambda}$. Par le théorème des coefficients universels,

$$b_\lambda = \dim_{\mathbb{Q}} H_\lambda(M; \mathbb{Q}) \leq \dim_{\mathbb{Q}} (C_\lambda \otimes \mathbb{Q}) = c_\lambda. \quad \square$$

Théorème 9.20 (Inégalités de Morse fortes). *Pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$,*

$$\sum_{\lambda=0}^k (-1)^{k-\lambda} c_\lambda \geq \sum_{\lambda=0}^k (-1)^{k-\lambda} b_\lambda.$$

En particulier, pour $k = n$ on retrouve l'égalité d'Euler–Poincaré :

$$\sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda c_\lambda = \sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda b_\lambda = \chi(M).$$

Démonstration. Notons $d_\lambda : C_\lambda \rightarrow C_{\lambda-1}$ les différentielles du complexe cellulaire, et posons $z_\lambda = \text{rg}(\ker d_\lambda)$, $\beta_\lambda = \text{rg}(\text{im } d_{\lambda+1})$. Alors $b_\lambda = z_\lambda - \beta_\lambda$ et $c_\lambda = z_\lambda + \beta_{\lambda-1}$. On a donc

$$c_\lambda - b_\lambda = 2\beta_{\lambda-1} + (z_\lambda - z_\lambda) + (\beta_\lambda - \beta_\lambda) + \beta_\lambda - \beta_{\lambda-1} + \beta_{\lambda-1}.$$

Plus précisément, un calcul par somme alternée donne

$$\sum_{\lambda=0}^k (-1)^{k-\lambda} (c_\lambda - b_\lambda) = \beta_k \geq 0,$$

ce qui est exactement l'inégalité forte annoncée. $\square$

9.7 Exemples fondamentaux

Exemple 9.21 (Hauteur sur la sphère S^n). Considérons $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x|^2 = 1\}$ et la fonction hauteur $f(x_0, \dots, x_n) = x_n$. Les points critiques sont :

- le pôle sud $S = (0, \dots, 0, -1)$, minimum, d'indice $\lambda = 0$;
- le pôle nord $N = (0, \dots, 0, 1)$, maximum, d'indice $\lambda = n$.

La fonction f est de Morse avec exactement 2 points critiques. Les inégalités de Morse faibles donnent $c_0 = 1 \geq b_0 = 1$ et $c_n = 1 \geq b_n = 1$, avec $c_\lambda = 0 \geq b_\lambda = 0$ pour $0 < \lambda < n$, ce qui est cohérent avec $H_k(S^n) = \mathbb{Z}$ pour $k = 0, n$ et 0 sinon.

Exemple 9.22 (Hauteur sur le tore T^2). Plongeons le tore T^2 dans $\mathbb{R}^3$ de la manière standard et considérons la fonction hauteur $f : T^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = z$.

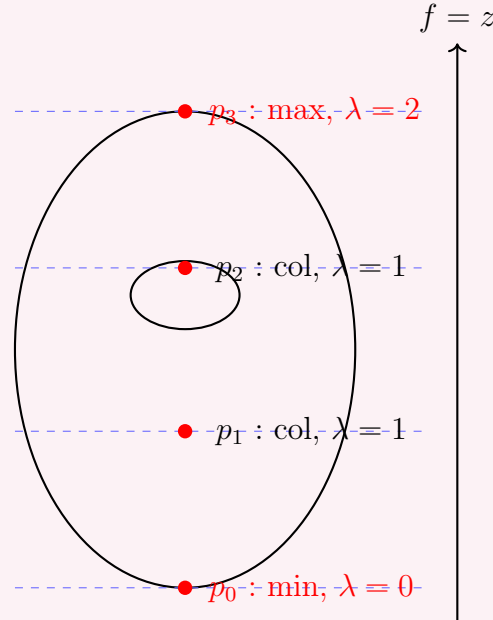


FIGURE 9.3 – Fonction hauteur sur le tore T^2 : quatre points critiques.

La fonction f possède exactement 4 points critiques :

1. un minimum ($\lambda = 0$) ;

2. deux cols ($\lambda = 1$);
3. un maximum ($\lambda = 2$).

On a donc $c_0 = 1$, $c_1 = 2$, $c_2 = 1$. Les nombres de Betti du tore sont $b_0 = 1$, $b_1 = 2$, $b_2 = 1$. Les inégalités de Morse sont des égalités : la fonction hauteur est une fonction de Morse **parfaite**.

La caractéristique d'Euler vaut $\chi(T^2) = 1 - 2 + 1 = 0$.

L'évolution des ensembles de sous-niveaux est la suivante :

- Pour a juste au-dessus du minimum : $M^a \cong D^2$ (un disque).
- Après le premier col : M^a est un cylindre (homotope à S^1).
- Après le deuxième col : M^a est homéomorphe à T^2 privé d'un disque.
- Après le maximum : $M^a = T^2$.

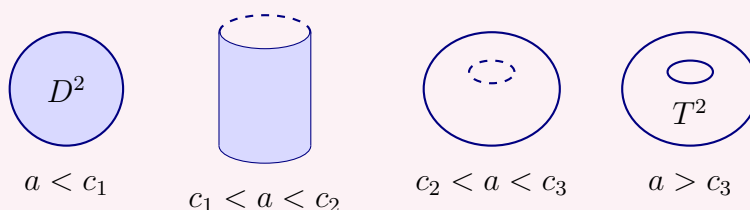


FIGURE 9.4 – Évolution des sous-niveaux de la fonction hauteur sur T^2 .

Exemple 9.23 (Fonctions de Morse sur $\mathbb{RP}^2$). On réalise $\mathbb{RP}^2$ comme le quotient de S^2 par l'identification antipodale. La fonction $f([x_0, x_1, x_2]) = \frac{x_0^2 - x_2^2}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2}$ est bien définie sur $\mathbb{RP}^2$ et constitue une fonction de Morse avec trois points critiques : $c_0 = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 1$. Les nombres de Betti rationnels de $\mathbb{RP}^2$ sont $b_0 = 1$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0$. Les inégalités de Morse sont strictes pour $\lambda = 1, 2$, ce qui reflète la torsion dans $H_1(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

9.8 Complexe de Morse et connexion avec la topologie algébrique

Définition 9.24 (Complexe de Morse–Smale–Witten). Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse sur une variété compacte orientée M , et g une métrique riemannienne telle que le couple (f, g) satisfait la condition de Morse–Smale (les variétés stables et instables se coupent transversalement). Le **complexe de Morse** est le complexe de chaînes $(C_*^{\text{Morse}}, \partial)$ défini par :

- $C_\lambda^{\text{Morse}} = \bigoplus_{\text{ind}(p)=\lambda} \mathbb{Z} \cdot p$, le groupe abélien libre engendré par les points critiques d'indice λ ;
- la différentielle $\partial : C_\lambda^{\text{Morse}} \rightarrow C_{\lambda-1}^{\text{Morse}}$ est définie par $\partial p = \sum_{\text{ind}(q)=\lambda-1} n(p, q) \cdot q$, où $n(p, q)$ est le nombre algébrique de lignes de flot du gradient $-\nabla f$ allant de p à q .

Théorème 9.25 (Homologie de Morse). *Le complexe de Morse vérifie $\partial^2 = 0$, et son homologie est canoniquement isomorphe à l'homologie singulière :*

$$H_\lambda^{\text{Morse}}(M, f, g) \cong H_\lambda(M; \mathbb{Z}).$$

Remarque 9.26. Ce résultat remarquable permet de calculer l'homologie d'une variété compacte à l'aide d'un complexe de chaînes de rang fini (engendré par les points critiques d'une fonction de Morse), ce qui est bien plus économique que le complexe singulier.

9.9 Exercices

Exercice 9.1 (Points critiques sur des surfaces). Soit Σ_g la surface orientable compacte de genre g . Montrer que toute fonction de Morse sur Σ_g possède au moins $2g + 2$ points critiques. *Indication :* utiliser les inégalités de Morse faibles et les nombres de Betti $b_0 = 1$, $b_1 = 2g$, $b_2 = 1$.

Exercice 9.2 (Minimum du nombre de points critiques). Montrer qu'il existe une fonction de Morse sur T^2 ayant exactement 4 points critiques (la fonction hauteur), et qu'aucune fonction de Morse sur T^2 ne peut en avoir moins de 4.

Exercice 9.3 (Fonction de Morse sur $S^1 \times S^2$). Construire une fonction de Morse sur $S^1 \times S^2$ et déterminer ses points critiques et leurs indices. Vérifier les inégalités de Morse.

Exercice 9.4 (Morse et caractéristique d'Euler). Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse sur une variété compacte de dimension n . Montrer que $\chi(M) = \sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda c_\lambda$, où c_λ est le nombre de points critiques d'indice λ . En déduire que $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$.

Exercice 9.5 (Morse sur les espaces projectifs). Considérer la fonction $f : \mathbb{CP}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f([z_0 : \cdots : z_n]) = \frac{\sum_{k=0}^n k |z_k|^2}{\sum_{k=0}^n |z_k|^2}.$$

Montrer que f est une fonction de Morse avec exactement $n + 1$ points critiques, d'indices $0, 2, 4, \dots, 2n$. En déduire que $\chi(\mathbb{CP}^n) = n + 1$.

Exercice 9.6 (Lemme de Morse en dimension 1). Vérifier directement le lemme de Morse pour une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ayant un point critique non dégénéré en 0 : trouver explicitement le changement de variable $y = y(x)$.

Exercice 9.7 (Indice et signature). Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^T A x$ où A est une matrice symétrique inversible. Montrer que 0 est un point critique non dégénéré et que l'indice est le nombre de valeurs propres négatives de A .

Exercice 9.8 (Fonctions de Morse et homotopie). Soit M une variété compacte connexe admettant une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ avec exactement deux points critiques (un minimum et un maximum).

(a) Montrer que M est homéomorphe à S^n .

- (b) L'application est-elle nécessairement un difféomorphisme ? (*Considérer les sphères exotiques de Milnor.*)

Exercice 9.9 (Perturbation en fonction de Morse). Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ (singularité de type D_4^-). Montrer que 0 est un point critique dégénéré. Trouver une perturbation f_ε de f qui est une fonction de Morse au voisinage de l'origine, et déterminer les points critiques et indices de f_ε .

Exercice 9.10 (Lacet polynomial de Morse). Soit M une variété compacte orientée de dimension n et $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse. On définit le **polynôme de Morse** par

$$\mathcal{M}_f(t) = \sum_{\lambda=0}^n c_\lambda t^\lambda,$$

où c_λ est le nombre de points critiques d'indice λ . De même, le **polynôme de Poincaré** est $\mathcal{P}_M(t) = \sum_\lambda b_\lambda t^\lambda$.

- (a) Montrer que $\mathcal{M}_f(t) - \mathcal{P}_M(t) = (1+t)Q(t)$ pour un certain polynôme $Q(t)$ à coefficients entiers non négatifs.
- (b) Vérifier cette relation pour la fonction hauteur sur $T^2, S^2, \mathbb{RP}^2$.
- (c) En déduire les inégalités de Morse fortes.

Exercice 9.11 (Fonction de Morse sur les groupes de Lie). Soit $G = \mathrm{SO}(3)$. En identifiant $\mathrm{SO}(3) \cong \mathbb{RP}^3$, construire une fonction de Morse sur G et en déduire les nombres de Betti rationnels de $\mathrm{SO}(3)$.

Chapitre 10

Degré d'une application lisse et applications

Contents

8.1	Valeurs critiques et valeurs régulières	88
8.2	Ensembles de mesure nulle	89
8.3	Théorème de Sard	90
8.4	Applications du théorème de Sard	92
8.4.1	Existence de valeurs régulières	92
8.4.2	Théorème de non-rétraction	92
8.4.3	Théorème du point fixe de Brouwer	93
8.4.4	Théorème de Brown	93
8.4.5	Applications transverses	94
8.5	Compléments	94
8.6	Exercices	95

Le *degré* d'une application lisse entre variétés compactes est un invariant entier (ou modulo 2 dans le cas non orientable) qui mesure combien de fois le domaine « enveloppe » le but. Cet invariant, malgré sa simplicité apparente, possède des conséquences topologiques profondes : il permet de démontrer le théorème de Brouwer sur le point fixe, le théorème de la sphère chevelue, et bien d'autres résultats fondamentaux.

10.1 Degré modulo 2

Définition 10.1 (Degré mod 2). Soient M et N deux variétés lisses compactes sans bord de même dimension n , et $f : M \rightarrow N$ une application lisse. Soit $q \in N$ une valeur régulière de f . Le **degré modulo 2** de f est

$$\deg_2(f) = \#f^{-1}(q) \pmod{2} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Théorème 10.2 (Bonne définition du degré mod 2). *Le degré $\deg_2(f)$ ne dépend pas du choix de la valeur régulière q .*

Démonstration. Soient $q_0, q_1 \in N$ deux valeurs régulières de f . On relie q_0 à q_1 par un chemin lisse $\gamma : [0, 1] \rightarrow N$. Par le théorème de Sard, on peut choisir γ transverse à f , de sorte que $W = \{(t, p) \in [0, 1] \times M \mid f(p) = \gamma(t)\}$ est une sous-variété de dimension 1 à bord de $[0, 1] \times M$.

Le bord de W est

$$\partial W = (\{0\} \times f^{-1}(q_0)) \cup (\{1\} \times f^{-1}(q_1)).$$

Puisque toute variété compacte de dimension 1 à bord a un nombre pair de points de bord, on obtient $\#f^{-1}(q_0) + \#f^{-1}(q_1) \equiv 0 \pmod{2}$. $\square$

Théorème 10.3 (Invariance homotopique du degré mod 2). *Si $f_0, f_1 : M \rightarrow N$ sont homotopes, alors $\deg_2(f_0) = \deg_2(f_1)$.*

Démonstration. Soit $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$ une homotopie lisse entre f_0 et f_1 (on peut toujours lisser une homotopie continue). Soit $q \in N$ une valeur régulière de F (qui est aussi valeur régulière de f_0 et de f_1 pour un choix générique). Alors $W = F^{-1}(q)$ est une variété compacte de dimension 1 à bord, avec $\partial W = f_0^{-1}(q) \sqcup f_1^{-1}(q)$. On conclut comme précédemment par parité. $\square$

10.2 Degré orienté

Définition 10.4 (Degré orienté). Soient M et N deux variétés lisses compactes sans bord, connexes, orientées, de même dimension n , et $f : M \rightarrow N$ une application lisse. Pour une valeur régulière $q \in N$ et $p \in f^{-1}(q)$, on définit le **signe local** de f en p par

$$\varepsilon(p) = \operatorname{sgn}(\det df_p) = \begin{cases} +1 & \text{si } df_p : T_p M \rightarrow T_q N \text{ préserve l'orientation,} \\ -1 & \text{si } df_p \text{ renverse l'orientation.} \end{cases}$$

Le **degré** de f est l'entier

$$\deg(f) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \varepsilon(p) \in \mathbb{Z}.$$

Théorème 10.5 (Bonne définition et invariance homotopique). *Soient M, N comme ci-dessus.*

- (i) *Le degré $\deg(f)$ ne dépend pas du choix de la valeur régulière q .*
- (ii) *Si $f_0 \simeq f_1$ (homotopes), alors $\deg(f_0) = \deg(f_1)$.*
- (iii) $\deg(\operatorname{Id}_M) = 1$.
- (iv) $\deg(g \circ f) = \deg(g) \cdot \deg(f)$.

Démonstration. (i) et (ii) : La preuve est analogue au cas mod 2, mais en comptant les signes. Si $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$ est une homotopie lisse et q une valeur régulière de F , alors $W = F^{-1}(q)$ est une variété orientée de dimension 1 à bord. Les composantes de W sont soit des cercles (qui ne contribuent pas au bord), soit des arcs reliant un point de $f_0^{-1}(q)$ à un point de $f_1^{-1}(q)$. Un examen des orientations montre que les signes des deux extrémités de chaque arc sont opposés (en tenant compte de l'orientation du bord de W), d'où $\deg(f_0) = \deg(f_1)$.

(iii) est immédiat. (iv) découle du fait que, pour une valeur régulière q de $g \circ f$, on a $\varepsilon_{g \circ f}(p) = \varepsilon_g(f(p)) \cdot \varepsilon_f(p)$, et l'on somme en regroupant par fibre. $\square$

Proposition 10.6 (Degré d'un difféomorphisme). *Un difféomorphisme $f : M \rightarrow N$ entre variétés compactes orientées connexes a pour degré $\deg(f) = +1$ s'il préserve l'orientation, et $\deg(f) = -1$ s'il la renverse.*

Proposition 10.7 (Surjectivité et degré). *Soit $f : M \rightarrow N$ une application lisse entre variétés compactes connexes orientées de même dimension. Si $\deg(f) \neq 0$, alors f est surjective.*

Démonstration. Si f n'est pas surjective, soit $q \in N \setminus f(M)$. Puisque $f(M)$ est compact (donc fermé) dans N , q est une valeur régulière de f avec $f^{-1}(q) = \emptyset$, donc $\deg(f) = 0$. $\square$

Proposition 10.8 (Degré et applications constantes). *Toute application constante $f : M \rightarrow N$ a pour degré $\deg(f) = 0$ (avec la convention $\deg_2(f) = 0$ dans le cas non orienté).*

Remarque 10.9. La réciproque est fausse : $\deg(f) = 0$ n'implique pas que f est homotope à une application constante. Par exemple, l'application de Hopf $h : S^3 \rightarrow S^2$ n'est pas de degré zéro au sens usuel (elle est entre variétés de dimensions différentes), mais toute application $S^n \rightarrow S^n$ de degré zéro qui se factorise par un espace de dimension inférieure est homotopiquement triviale.

10.3 Calcul du degré via les formes différentielles

Théorème 10.10 (Formule intégrale du degré). *Soient M, N des variétés compactes orientées sans bord de dimension n , et $f : M \rightarrow N$ lisse. Pour toute n -forme ω sur N telle que $\int_N \omega \neq 0$,*

$$\deg(f) = \frac{\int_M f^* \omega}{\int_N \omega}.$$

Démonstration. Il suffit de vérifier la formule pour une forme ω à support dans un petit voisinage d'une valeur régulière q . Au voisinage de chaque $p_i \in f^{-1}(q)$, f est un difféomorphisme local, et $f^* \omega$ a pour intégrale $\varepsilon(p_i) \int_N \omega$. En sommant sur les préimages, on obtient $\int_M f^* \omega = \deg(f) \int_N \omega$. $\square$

Exemple 10.11 (Degré de $z \mapsto z^k$ sur S^1). Soit $f_k : S^1 \rightarrow S^1$ définie par $f_k(z) = z^k$ (en voyant $S^1 \subset \mathbb{C}$). La forme $\omega = d\theta$ vérifie $\int_{S^1} \omega = 2\pi$, et $f_k^*(d\theta) = k d\theta$, donc

$$\deg(f_k) = \frac{\int_{S^1} k d\theta}{\int_{S^1} d\theta} = k.$$

On peut aussi le voir directement : pour $q = 1$, on a $f_k^{-1}(1) = \{e^{2i\pi j/k} \mid 0 \leq j < k\}$, et le jacobien est positif en chaque préimage (pour $k > 0$).

10.4 Applications du degré

10.4.1 Théorème de Brouwer via le degré

Théorème 10.12 (Théorème du point fixe de Brouwer). *Toute application continue $g : D^n \rightarrow D^n$ du disque fermé dans lui-même possède un point fixe.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que g n'a pas de point fixe. On construit alors une rétraction $r : D^n \rightarrow S^{n-1}$ en envoyant chaque $x \in D^n$ sur le point d'intersection de la demi-droite partant de $g(x)$ et passant par x avec S^{n-1} .

L'application r est continue et vérifie $r|_{S^{n-1}} = \text{Id}_{S^{n-1}}$. Considérons l'inclusion $\iota : S^{n-1} \hookrightarrow D^n$. Alors $r \circ \iota = \text{Id}_{S^{n-1}}$, donc $\deg(r \circ \iota) = \deg(\text{Id}_{S^{n-1}}) = 1$. Mais ι se prolonge en $\iota' : D^n \rightarrow D^n$ qui est contractile (puisque D^n est contractile), donc $r \circ \iota$ est homotope à une application constante, qui a degré 0. Contradiction. $\square$

10.4.2 Théorème de la sphère chevelue

Théorème 10.13 (Théorème de la sphère chevelue). *Il n'existe pas de champ de vecteurs continu ne s'annulant en aucun point sur S^{2n} (sphère de dimension paire).*

Démonstration. Supposons qu'il existe un champ de vecteurs $V : S^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ continu, tangent et non nul en chaque point. On normalise : $v(x) = V(x)/|V(x)|$, de sorte que $|v(x)| = 1$ et $\langle v(x), x \rangle = 0$ pour tout $x \in S^{2n}$. Considérons l'homotopie

$$H_t(x) = \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)v(x), \quad t \in [0, 1].$$

On vérifie que $|H_t(x)| = 1$ pour tout t (par orthogonalité de x et $v(x)$), donc $H_t : S^{2n} \rightarrow S^{2n}$. De plus, $H_0 = \text{Id}$ et $H_1 = -\text{Id}$ (l'application antipodale). Par invariance homotopique, $\deg(\text{Id}) = \deg(-\text{Id})$, soit $1 = (-1)^{2n+1} = -1$, ce qui est absurde. $\square$

Remarque 10.14. En revanche, S^{2n+1} admet toujours un champ de vecteurs non nul. Par exemple, sur $S^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2}$, le champ $V(x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}, x_{2n+2}) = (-x_2, x_1, \dots, -x_{2n+2}, x_{2n+1})$ convient.

10.4.3 Théorème de Borsuk–Ulam

Théorème 10.15 (Borsuk–Ulam). *Pour toute application continue $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, il existe $x \in S^n$ tel que $f(x) = f(-x)$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que $f(x) \neq f(-x)$ pour tout x . On pose

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|},$$

qui est une application continue $g : S^n \rightarrow S^{n-1}$ vérifiant $g(-x) = -g(x)$ (application **impaire**).

On montre que toute application impaire $S^n \rightarrow S^{n-1}$ a un degré mod 2 non nul (par récurrence sur n). Pour $n = 1$, une application impaire $g : S^1 \rightarrow S^0 = \{\pm 1\}$ envoie des points antipodaux sur des points distincts, ce qui est impossible par connexité de S^1 .

Pour le pas de récurrence, on restreint g à l'équateur $S^{n-1} \subset S^n$. La restriction $g|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ est encore impaire, donc de degré impair par hypothèse de récurrence. Mais $g|_{S^{n-1}}$ se prolonge à l'hémisphère D_+^n , donc serait d'extension possible à D^n , ce qui impliquerait degré nul. Contradiction. $\square$

10.4.4 Théorème du point fixe de Lefschetz

Théorème 10.16 (Lefschetz, esquisse). *Soit M une variété compacte et $f : M \rightarrow M$ une application lisse. On définit le **nombre de Lefschetz***

$$L(f) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \operatorname{tr}(f_* : H_k(M; \mathbb{Q}) \rightarrow H_k(M; \mathbb{Q})).$$

Si $L(f) \neq 0$, alors f admet un point fixe.

Remarque 10.17. Le nombre de Lefschetz de l'identité est $L(\operatorname{Id}) = \chi(M)$. On retrouve ainsi le fait qu'une variété compacte de caractéristique d'Euler non nulle vérifie la propriété du point fixe pour toute application homotope à l'identité.

10.5 Nombre d'intersection comme degré

Définition 10.18 (Nombre d'intersection). Soient M une variété compacte orientée de dimension n , et A, B des sous-variétés compactes orientées de dimensions complémentaires $\dim A + \dim B = n$, se coupant transversalement. Le **nombre d'intersection** de A et B est

$$I(A, B) = \sum_{p \in A \cap B} \varepsilon(p),$$

où $\varepsilon(p) = +1$ si l'orientation de $T_p A \oplus T_p B$ coïncide avec celle de $T_p M$, et $\varepsilon(p) = -1$ sinon.

Proposition 10.19. *Le nombre d'intersection peut s'exprimer comme un degré. Si A et B sont des sous-variétés compactes orientées sans bord de M de dimensions complémentaires, et si $\tau : M \rightarrow M \times M$ est l'inclusion diagonale tandis que $A \times B \hookrightarrow M \times M$, alors $I(A, B)$ coïncide avec le nombre d'intersection de $\tau(M)$ et $A \times B$ dans $M \times M$.*

10.6 Exercices

Exercice 10.1 (Degré d'applications entre sphères). (a) Calculer le degré de la réflexion $r : S^n \rightarrow S^n$ définie par $r(x_0, \dots, x_n) = (-x_0, x_1, \dots, x_n)$.

(b) En déduire le degré de l'application antipodale $a : S^n \rightarrow S^n$, $a(x) = -x$.

(c) Montrer que si n est pair, l'application antipodale n'est pas homotope à l'identité.

Exercice 10.2 (Degré et revêtement). Soit $p : M \rightarrow N$ un revêtement lisse à k feuillets entre variétés compactes orientées connexes. Montrer que $\deg(p) = k$ (si p préserve l'orientation) ou $\deg(p) = -k$ (sinon).

Exercice 10.3 (Application sans point fixe). Soit $f : S^n \rightarrow S^n$ une application lisse sans point fixe. Montrer que $\deg(f) = (-1)^{n+1}$. *Indication* : montrer que f est homotope à l'application antipodale.

Exercice 10.4 (Théorème fondamental de l'algèbre via le degré). Soit $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ un polynôme de degré $n \geq 1$.

(a) Pour $R > 0$ assez grand, montrer que l'application $f_R : S^1 \rightarrow S^1$ définie par $f_R(z) = P(Rz)/|P(Rz)|$ est bien définie et a pour degré n .

(b) En déduire que P a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Exercice 10.5 (Degré et forme volume). Soit $f : S^2 \rightarrow S^2$ une application lisse. En utilisant la forme volume $\omega = \sin \varphi \, d\varphi \wedge d\theta$ de S^2 , calculer $\deg(f)$ par la formule intégrale pour

(a) f = projection stéréographique composée avec l'inversion,

(b) $f(x, y, z) = (x, y, -z)$.

Exercice 10.6 (Degré de l'application de Hopf). L'application de Hopf $h : S^3 \rightarrow S^2$ est définie par $h(z_1, z_2) = [z_1 : z_2] \in \mathbb{CP}^1 \cong S^2$, où $(z_1, z_2) \in S^3 \subset \mathbb{C}^2$. Expliquer pourquoi la notion de degré ne s'applique pas directement (dimensions différentes). Quel invariant peut-on associer à h ?

Exercice 10.7 (Borsuk–Ulam et coloriage). En utilisant le théorème de Borsuk–Ulam, montrer que pour toute application continue $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, il existe un grand cercle de S^2 sur lequel f est constante en au moins un point et son antipodal.

Exercice 10.8 (Nombre d'intersection). Soit $T^2 = S^1 \times S^1$ le tore, et $A = S^1 \times \{1\}$, $B = \{1\} \times S^1$ les deux cercles générateurs. Calculer $I(A, B)$ en munissant T^2 , A et B de leurs orientations standard.

Exercice 10.9 (Degré et polynômes trigonométriques). Soit $f : S^1 \rightarrow S^1$ définie par $f(e^{i\theta}) = e^{iP(\theta)}$ où $P(\theta) = n\theta + \sum_{k=1}^N a_k \sin(k\theta)$ avec des a_k assez petits. Montrer que $\deg(f) = n$.

Exercice 10.10 (Degré et indice d'un champ de vecteurs). Soit V un champ de vecteurs lisse sur $\mathbb{R}^2$ ayant un zéro isolé en p . On définit l'**indice** de V en p par

$$\text{ind}_p(V) = \deg\left(\frac{V}{|V|} : S_\varepsilon^1(p) \rightarrow S^1\right)$$

pour $\varepsilon > 0$ assez petit (où $S_\varepsilon^1(p)$ est le cercle de rayon ε centré en p).

- (a) Calculer l'indice de $V(x, y) = (x, y)$ en l'origine.
- (b) Calculer l'indice de $V(x, y) = (-y, x)$ en l'origine.
- (c) Calculer l'indice de $V(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ en l'origine.
- (d) Énoncer le théorème de Poincaré–Hopf reliant la somme des indices à la caractéristique d'Euler.

Exercice 10.11 (Degré mod 2 et Borsuk–Ulam). Montrer que toute application impaire $f : S^n \rightarrow S^n$ a un degré mod 2 égal à 1, c'est-à-dire $\deg_2(f) = 1$. En déduire une preuve alternative du théorème de Borsuk–Ulam.

Chapitre 11

Théorème de Whitney et plongements

Contents

9.1	Fonctions de Morse	97
9.2	Le lemme de Morse	98
9.3	Densité des fonctions de Morse	100
9.4	Sous-niveaux et attachement de cellules	100
9.5	Décomposition en anses	101
9.6	Inégalités de Morse	102
9.7	Exemples fondamentaux	103
9.8	Complexe de Morse et connexion avec la topologie algébrique	104
9.9	Exercices	105

Une question naturelle en topologie différentielle est de savoir si toute variété abstraite (définie par un atlas) peut être « réalisée » comme une sous-variété d'un espace euclidien. Les théorèmes de Whitney répondent par l'affirmative et fournissent des bornes optimales sur la dimension de l'espace ambiant nécessaire.

11.1 Rappels : plongements et immersions

Définition 11.1 (Rappel). Soit $f : M \rightarrow N$ une application lisse entre variétés.

- (i) f est une **immersion** si df_p est injective pour tout $p \in M$.
- (ii) f est un **plongement** (embedding) si f est une immersion injective qui est un homéomorphisme sur son image $f(M)$ (munie de la topologie induite).

Remarque 11.2. Si M est compacte, toute immersion injective $f : M \rightarrow N$ est automatiquement un plongement (car une bijection continue d'un compact vers un espace séparé est un homéomorphisme).

11.2 Théorème de Whitney : version faible

Théorème 11.3 (Plongement de Whitney, version faible). *Toute variété lisse compacte de dimension n admet un plongement dans $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Démonstration. La preuve se décompose en plusieurs étapes.

Étape 1 : Plongement dans $\mathbb{R}^N$ pour N grand. On recouvre M par un nombre fini de cartes $(U_i, \varphi_i)_{1 \leq i \leq k}$ et on choisit une partition de l'unité (ρ_i) subordonnée à ce recouvrement. On définit

$$F : M \rightarrow \mathbb{R}^{k(n+1)}, \quad F(p) = (\rho_1(p)\varphi_1(p), \dots, \rho_k(p)\varphi_k(p), \rho_1(p), \dots, \rho_k(p)).$$

L'application F est une immersion injective (l'injectivité utilise les ρ_i , et le fait que df est injective se vérifie dans chaque ouvert U_i où $\rho_i \neq 0$). Comme M est compacte, F est un plongement. Posons $N = k(n+1)$.

Étape 2 : Réduction de la dimension. On montre que si $N > 2n+1$, on peut projeter $F(M) \subset \mathbb{R}^N$ sur un hyperplan $\mathbb{R}^{N-1}$ tout en conservant le caractère de plongement. Il suffit de trouver une direction $v \in S^{N-1}$ telle que la projection $\pi_v : \mathbb{R}^N \rightarrow v^\perp \cong \mathbb{R}^{N-1}$ restreinte à $F(M)$ reste un plongement.

La projection $\pi_v \circ F$ échoue à être injective si v est de la forme

$$v = \frac{F(p) - F(q)}{|F(p) - F(q)|} \quad \text{pour } p \neq q.$$

Définissons $\alpha : M \times M \setminus \Delta \rightarrow S^{N-1}$ par $\alpha(p, q) = \frac{F(p) - F(q)}{|F(p) - F(q)|}$. L'ensemble source est de dimension $2n$, et le but S^{N-1} de dimension $N-1 > 2n$ (car $N > 2n+1$). Par le théorème de Sard, $\text{im}(\alpha)$ est de mesure nulle dans S^{N-1} .

De même, $\pi_v \circ F$ échoue à être une immersion si v appartient à l'image de l'application de Gauss $\beta : TM \setminus \{0\} \rightarrow S^{N-1}$ définie par $\beta(p, w) = dF_p(w) / |dF_p(w)|$. Le domaine est de dimension $2n-1$, donc $\text{im}(\beta)$ est aussi de mesure nulle pour $N-1 > 2n-1$, c'est-à-dire $N > 2n$.

On choisit $v \notin \text{im}(\alpha) \cup \text{im}(\beta)$, et la projection $\pi_v \circ F$ est un plongement dans $\mathbb{R}^{N-1}$. On itère jusqu'à atteindre $\mathbb{R}^{2n+1}$. □

11.3 Théorème de Whitney : version forte

Théorème 11.4 (Plongement de Whitney, version forte). *Toute variété lisse compacte de dimension $n \geq 1$ admet un plongement dans $\mathbb{R}^{2n}$.*

Remarque 11.5. La preuve de la version forte est considérablement plus délicate que celle de la version faible. Elle nécessite la technique du « truc de Whitney » (Whitney trick) qui permet d'éliminer des points doubles par paires via des disques de Whitney. Nous renvoyons à [9] et [10] pour les détails.

Remarque 11.6. La borne $2n$ est optimale en général. Par exemple, la bouteille de Klein (variété de dimension 2) ne se plonge pas dans $\mathbb{R}^3$ mais se plonge dans $\mathbb{R}^4$.

Théorème 11.7 (Immersion de Whitney). *Toute variété lisse compacte de dimension $n \geq 1$ admet une immersion dans $\mathbb{R}^{2n-1}$.*

Remarque 11.8. Pour les immersions, la borne $2n - 1$ est elle aussi optimale en général. Un résultat plus fin de Hirsch et Smale montre que l'existence d'une immersion $M^n \looparrowright \mathbb{R}^k$ est contrôlée par l'existence d'un monomorphisme de fibrés vectoriels $TM \rightarrow \varepsilon^k$.

11.4 Théorème d'approximation de Whitney

Théorème 11.9 (Approximation de Whitney). *Soient M et N des variétés lisses, et $f : M \rightarrow N$ une application continue. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une application lisse $g : M \rightarrow N$ telle que g est ε -proche de f (pour une métrique fixée sur N) et g est homotope à f .*

Idée de la preuve. On plonge N dans $\mathbb{R}^K$ par Whitney. L'application $f : M \rightarrow N \subset \mathbb{R}^K$ est approchée par une application lisse $\tilde{g} : M \rightarrow \mathbb{R}^K$ par convolution avec un noyau régularisant. On projette ensuite $\tilde{g}$ sur N via la rétraction par voisinage tubulaire $r : \mathcal{U} \rightarrow N$, ce qui donne $g = r \circ \tilde{g}$. L'homotopie entre f et g est fournie par le segment $[f, \tilde{g}]$ composé avec r . $\square$

Corollaire 11.10. *Deux applications lisses $f, g : M \rightarrow N$ qui sont homotopes par une homotopie continue sont aussi homotopes par une homotopie lisse.*

Remarque 11.11. Le théorème d'approximation de Whitney est l'un des outils fondamentaux permettant de transférer les résultats de topologie algébrique (qui opèrent avec des applications continues) au cadre de la topologie différentielle. Par exemple, c'est grâce à ce théorème que l'invariance homotopique du degré, démontrée pour des homotopies lisses, s'étend automatiquement aux homotopies continues.

Proposition 11.12 (Approximation relative). *Soient M, N des variétés lisses, $A \subset M$ un sous-ensemble fermé, et $f : M \rightarrow N$ une application continue qui est déjà lisse sur un voisinage de A . Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une application lisse $g : M \rightarrow N$ telle que $g|_A = f|_A$, g est ε -proche de f , et g est homotope à f relativement à A .*

Idée. On utilise une partition de l'unité pour construire l'approximation seulement loin de A , en interpolant avec f au voisinage de A où f est déjà lisse. $\square$

11.5 Isotopie et plongements

Définition 11.13 (Isotopie). Deux plongements $f_0, f_1 : M \hookrightarrow N$ sont **isotopes** s'il existe une application lisse $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$ telle que :

- (i) $F(-, 0) = f_0$ et $F(-, 1) = f_1$;
- (ii) pour tout $t \in [0, 1]$, $F(-, t) : M \hookrightarrow N$ est un plongement.

Définition 11.14 (Isotopie ambiante). Deux plongements $f_0, f_1 : M \hookrightarrow N$ sont **ambiamment isotopes** s'il existe un difféomorphisme $\Phi : N \rightarrow N$ isotope à l'identité tel que $\Phi \circ f_0 = f_1$.

Théorème 11.15 (Théorème d'extension d'isotopie). *Soit M une variété compacte et N une variété sans bord. Toute isotopie entre deux plongements $f_0, f_1 : M \hookrightarrow N$ s'étend en une isotopie ambiante de N .*

Idee de la preuve. L'isotopie $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$ engendre un champ de vecteurs dépendant du temps sur N , défini le long de l'image $F(M, t)$ pour chaque t . On étend ce champ à N tout entier à l'aide d'une partition de l'unité et d'un voisinage tubulaire de $F(M, t)$. Le flot intégré de ce champ étendu fournit le difféomorphisme $\Phi_t : N \rightarrow N$ avec $\Phi_0 = \text{Id}_N$ et $\Phi_1 \circ f_0 = f_1$. $\square$

Remarque 11.16. Le théorème d'extension d'isotopie est faux si M n'est pas compacte. Un contre-exemple est donné par une isotopie qui « pousse » un plongement de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ vers l'infini.

Proposition 11.17 (Unicité du plongement de la boule). *Deux plongements lisses $f_0, f_1 : D^n \hookrightarrow M^n$ qui préservent l'orientation sont ambiamment isotopes (théorème du disque de Palais).*

11.6 Applications et exemples

Exemple 11.18 (Plongement du tore dans $\mathbb{R}^3$). Le tore $T^2 = S^1 \times S^1$ admet le plongement classique dans $\mathbb{R}^3$:

$$\iota(\theta, \varphi) = ((R + r \cos \varphi) \cos \theta, (R + r \cos \varphi) \sin \theta, r \sin \varphi)$$

pour $0 < r < R$. Ce plongement est bien une immersion (la différentielle est de rang 2 partout) et l'injectivité est assurée par le choix $r < R$.

Exemple 11.19 (Plongement de $\mathbb{RP}^2$ dans $\mathbb{R}^4$ et non-plongement dans $\mathbb{R}^3$). Le plan projectif réel $\mathbb{RP}^2$ admet un plongement dans $\mathbb{R}^4$ mais ne se plonge pas dans $\mathbb{R}^3$. Le non-plongement résulte du fait que $\mathbb{RP}^2$ est une surface compacte non orientable, et

toute surface compacte sans bord plongée dans $\mathbb{R}^3$ est orientable (par le théorème de Jordan–Brouwer).

Un plongement explicite de $\mathbb{RP}^2$ dans $\mathbb{R}^4$ est donné par

$$F([x : y : z]) = (xy, xz, y^2 - z^2, 2yz) \cdot \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

On vérifie que cette application est bien définie, lisse, injective et de rang 2 partout.

Exemple 11.20 (Immersion de Boy). L’immersion de Boy est une immersion de $\mathbb{RP}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ (mais pas un plongement, car elle possède des auto-intersections). Elle a été découverte par Werner Boy en 1901 et constitue un exemple remarquable d’immersion d’une surface non orientable dans $\mathbb{R}^3$. L’immersion de Boy possède une symétrie d’ordre 3 et un unique point triple.

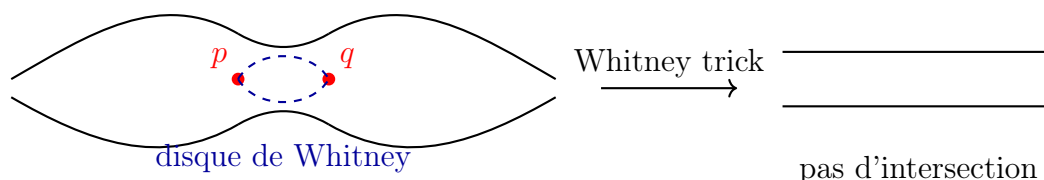


FIGURE 11.1 – Le « truc de Whitney » : élimination de deux points d’intersection de signes opposés via un disque de Whitney.

11.7 Classification des surfaces lisses compactes

Théorème 11.21 (Classification des surfaces compactes). *Toute surface lisse compacte connexe sans bord est difféomorphe à l’une des surfaces suivantes :*

- (i) la sphère S^2 ;
 - (ii) la somme connexe de g tores : $\Sigma_g = T^2 \# \cdots \# T^2$ (g fois), pour $g \geq 1$;
 - (iii) la somme connexe de k plans projectifs : $\mathbb{RP}^2 \# \cdots \# \mathbb{RP}^2$ (k fois), pour $k \geq 1$.
- Les surfaces (i) et (ii) sont orientables ; les surfaces (iii) ne le sont pas.

Remarque 11.22. Ce théorème, combiné avec les résultats de plongement de Whitney, montre que toute surface lisse compacte orientable se plonge dans $\mathbb{R}^3$, tandis que les surfaces non orientables nécessitent au moins $\mathbb{R}^4$.

Remarque 11.23. La classification est complètement déterminée par deux invariants :

- l’**orientabilité** (oui ou non) ;
- la **caractéristique d’Euler** $\chi(\Sigma)$, ou de manière équivalente, le genre.

Pour les surfaces orientables, $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$. Pour les surfaces non orientables à

k plans projectifs, $\chi = 2 - k$. Notons que $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ est la bouteille de Klein, et $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ est homéomorphe à $T^2 \# \mathbb{RP}^2$.

Proposition 11.24 (Plongement des surfaces orientables). *Toute surface orientable compacte Σ_g se plonge dans $\mathbb{R}^3$. En particulier :*

- (i) S^2 est le bord de la boule D^3 ;
- (ii) Σ_g pour $g \geq 1$ se réalise comme un « bretzel » à g trous dans $\mathbb{R}^3$.

11.8 Aperçu : variétés exotiques

Les théorèmes de Whitney montrent que toute variété lisse compacte se plonge dans un espace euclidien, mais la question de l'*unicité* de la structure lisse est bien plus subtile.

Théorème 11.25 (Milnor, 1956). *Il existe des variétés lisses homéomorphes à S^7 mais non difféomorphes à S^7 . Plus précisément, le groupe Θ_7 des classes de difféomorphisme de structures lisses sur S^7 est isomorphe à $\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$.*

Remarque 11.26. La construction originale de Milnor utilise des fibrés en sphères S^3 sur S^4 . Ces fibrés sont classifiés par $\pi_3(\mathrm{SO}(4)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, et pour certains choix, l'espace total est homéomorphe mais non difféomorphe à S^7 . Milnor détecte la non-trivialité de la structure lisse en utilisant un invariant basé sur la signature et les classes de Pontryaguine.

Remarque 11.27. Ce résultat fondamental de Milnor a ouvert un champ immense de recherche. On sait aujourd'hui que :

- En dimension $n \leq 6$, la sphère S^n admet une unique structure lisse (à difféomorphisme près).
- En dimension 4, la situation est encore largement ouverte : on ne sait pas s'il existe des S^4 exotiques (c'est le problème lisse de la conjecture de Poincaré en dimension 4).
- L'espace $\mathbb{R}^4$ admet une infinité non dénombrable de structures lisses non difféomorphes entre elles (résultat remarquable de Donaldson et Freedman).
- Le groupe des sphères exotiques Θ_n est connu pour de nombreuses valeurs de n . Par exemple, $|\Theta_{11}| = 992$ et $|\Theta_{15}| = 16256$.

Remarque 11.28 (Sphères exotiques et théorie de Morse). La connexion avec la théorie de Morse est la suivante : une sphère exotique Σ^n admet une fonction de Morse avec exactement deux points critiques (un minimum et un maximum), puisqu'elle est homéomorphe à S^n . La décomposition en anses correspondante consiste en une 0-anse et une n -anse, mais l'application de recollement entre ces deux anses définit un difféomorphisme $\varphi : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ qui n'est pas isotope à l'identité.

11.9 Exercices

Exercice 11.1 (Plongement de graphe). Soit $f : M \rightarrow N$ une application lisse. Montrer que l'application $\Gamma_f : M \rightarrow M \times N$ définie par $\Gamma_f(p) = (p, f(p))$ est un plongement. En déduire que toute variété compacte de dimension n se plonge dans $\mathbb{R}^{2n+1}$ à l'aide d'une application $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$.

Exercice 11.2 (Immersion de S^1 dans $\mathbb{R}^2$). (a) Montrer que le plongement standard $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ et l'immersion en huit $\gamma(t) = (\sin(2t), \sin(t))$ ne sont pas régulièrement homotopes.

(b) Énoncer le théorème de classification de Whitney–Graustein pour les courbes fermées régulières dans le plan.

Exercice 11.3 (Non-plongement de la bouteille de Klein). Montrer que la bouteille de Klein ne se plonge pas dans $\mathbb{R}^3$. *Indication* : utiliser l'argument d'orientabilité (théorème de Jordan–Brouwer).

Exercice 11.4 (Plongements de $\mathbb{RP}^n$). (a) Construire un plongement de $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$ dans $\mathbb{R}^2$.

(b) Montrer que $\mathbb{RP}^2$ ne se plonge pas dans $\mathbb{R}^3$.

(c) Montrer que $\mathbb{RP}^n$ se plonge dans $\mathbb{R}^{n(n+2)/2}$ via l'application $[x] \mapsto \frac{xx^T}{|x|^2}$ (matrices symétriques).

Exercice 11.5 (Immersion et fibré normal). Soit $f : M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ une immersion. On définit le **fibré normal** ν_f de f comme le fibré vectoriel sur M dont la fibre en p est $(df_p(T_p M))^\perp$ dans $\mathbb{R}^{n+k}$.

(a) Montrer que $TM \oplus \nu_f \cong \varepsilon^{n+k}$ (fibré trivial).

(b) En déduire que $w(TM) \cdot w(\nu_f) = 1$ dans $H^*(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, où w désigne la classe de Stiefel–Whitney totale.

Exercice 11.6 (Whitney et Sard). Reprendre la preuve du théorème de Whitney faible (théorème 11.3) et vérifier en détail que l'argument de dimension fonctionne : si $N > 2n + 1$, les « mauvaises directions » forment un ensemble de mesure nulle dans S^{N-1} .

Exercice 11.7 (Approximation par des plongements). Soit M une variété compacte de dimension n et $N > 2n$. Montrer que toute application lisse $f : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ peut être approchée arbitrairement près (en topologie $\mathcal{C}^1$) par un plongement.

Exercice 11.8 (Isotopie de noeuds). Un **noeud** est un plongement $\gamma : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$.

(a) Montrer que tout noeud $\gamma : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ avec $n \geq 4$ est isotope au noeud trivial (le plongement standard de S^1 dans un plan).

(b) Pourquoi cet argument échoue-t-il pour $n = 3$?

Exercice 11.9 (Surfaces exotiques). (a) Montrer que toute variété de dimension ≤ 3 admet une unique structure lisse (à difféomorphisme près) compatible avec sa structure topologique. (*Admis : citer les théorèmes de Radó, Moise et Munkres.*)

(b) Pourquoi la dimension 4 est-elle exceptionnelle du point de vue des structures lisses ?

Exercice 11.10 (Immersion en codimension 1). (a) Montrer que toute variété compacte orientable de dimension n admet une immersion dans $\mathbb{R}^{n+1}$ si et seulement si son fibré tangent est stablement trivial.

- (b) La sphère S^n admet-elle toujours une immersion dans $\mathbb{R}^{n+1}$? Justifier.
- (c) Montrer que $\mathbb{R}P^n$ admet une immersion dans $\mathbb{R}^{n+1}$ si et seulement si n est de la forme $2^k - 1$. (*Admis : on pourra utiliser les classes de Stiefel–Whitney.*)

Exercice 11.11 (Plongement de variétés produits). (a) Si M^m se plonge dans $\mathbb{R}^p$ et N^n se plonge dans $\mathbb{R}^q$, montrer que $M \times N$ se plonge dans $\mathbb{R}^{p+q}$.

- (b) Donner un plongement explicite de $T^n = (S^1)^n$ dans $\mathbb{R}^{2n}$.
- (c) Peut-on toujours faire mieux que la borne $p + q$? Donner un exemple où $M \times N$ se plonge dans $\mathbb{R}^k$ avec $k < p + q$.

Annexe A

Rappels d'analyse

Contents

10.1 Degré modulo 2	107
10.2 Degré orienté	108
10.3 Calcul du degré via les formes différentielles	109
10.4 Applications du degré	110
10.4.1 Théorème de Brouwer via le degré	110
10.4.2 Théorème de la sphère chevelue	110
10.4.3 Théorème de Borsuk–Ulam	111
10.4.4 Théorème du point fixe de Lefschetz	111
10.5 Nombre d'intersection comme degré	111
10.6 Exercices	112

Nous rassemblons ici quelques résultats classiques d'analyse utilisés tout au long de ce cours.

A.1 Théorème d'inversion locale

Théorème A.1 (Inversion locale). *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 1$) et $a \in U$ tel que $\det(df_a) \neq 0$. Alors il existe des ouverts $V \ni a$ et $W \ni f(a)$ tels que $f|_V : V \rightarrow W$ est un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme.*

Corollaire A.2 (Théorème des fonctions implicites). *Soit $F : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^k$, où $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ sont ouverts, et $(a, b) \in U \times V$ tel que $F(a, b) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)$ est inversible. Alors il existe un voisinage $U' \ni a$ et une unique application $g : U' \rightarrow V$ de classe $\mathcal{C}^k$ telle que $g(a) = b$ et $F(x, g(x)) = 0$ pour tout $x \in U'$.*

Corollaire A.3 (Théorème du rang constant). *Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 1$) de rang constant r sur $U \subset \mathbb{R}^n$. Alors pour tout $a \in U$, il existe des $\mathcal{C}^k$ -difféomorphismes φ et ψ au voisinage de a et $f(a)$ respectivement, tels que*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

A.2 Théorème de Cauchy–Lipschitz

Théorème A.4 (Cauchy–Lipschitz / Picard–Lindelöf). Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $X : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 1$). Pour tout $(t_0, x_0) \in I \times U$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = X(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

admet une unique solution maximale $x : J \rightarrow U$ de classe $\mathcal{C}^{k+1}$, définie sur un intervalle ouvert maximal $J \subset I$ contenant t_0 .

Théorème A.5 (Dépendance régulière). Si X est de classe $\mathcal{C}^k$, le flot $\Phi : \Omega \rightarrow U$, $\Phi(t, x_0) = x(t; t_0, x_0)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur son domaine de définition $\Omega \subset \mathbb{R} \times U$.

Remarque A.6. Pour les champs de vecteurs lisses ($\mathcal{C}^\infty$) sur une variété compacte, le flot est défini pour tout temps : $\Omega = \mathbb{R} \times M$.

A.3 Mesure de Lebesgue et ensembles de mesure nulle

Définition A.7 (Ensemble de mesure nulle). Un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ est de **mesure de Lebesgue nulle** si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille dénombrable de pavés $(R_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} R_k$ et $\sum_{k \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_k) < \varepsilon$.

Proposition A.8 (Propriétés). (i) Toute réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle est de mesure nulle.
(ii) Tout sous-ensemble d'un ensemble de mesure nulle est de mesure nulle.
(iii) Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est localement lipschitzienne et $A \subset U$ est de mesure nulle, alors $f(A)$ est de mesure nulle.
(iv) Si $k < n$, tout sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k} \subset \mathbb{R}^n$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^n$.

Théorème A.9 (Sard). Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application de classe $\mathcal{C}^k$ avec $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $k \geq \max(1, n - m + 1)$. Alors l'ensemble des valeurs critiques de f est de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{R}^m$.

A.4 Partition de l'unité

Théorème A.10 (Existence de partitions de l'unité). *Soit M une variété lisse paracompacte et $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert de M . Il existe une partition de l'unité $(\rho_\alpha)_{\alpha \in A}$ subordonnée à (U_α) , c'est-à-dire :*

- (i) chaque $\rho_\alpha : M \rightarrow [0, 1]$ est lisse ;
- (ii) $\text{supp}(\rho_\alpha) \subset U_\alpha$ pour tout α ;
- (iii) la famille $(\text{supp}(\rho_\alpha))$ est localement finie ;
- (iv) $\sum_\alpha \rho_\alpha(p) = 1$ pour tout $p \in M$.

Remarque A.11. L'existence des partitions de l'unité est un outil fondamental en topologie différentielle. Elle permet de « recoller » des constructions locales en constructions globales, et joue un rôle essentiel dans les preuves des théorèmes de plongement de Whitney, de l'existence de métriques riemanniennes, de connexions, et de bien d'autres résultats.

A.5 Rappels de topologie différentielle de base

Théorème A.12 (Existence de métriques riemanniennes). *Toute variété lisse paracompacte admet une métrique riemannienne.*

Esquisse. On choisit un recouvrement par des cartes (U_i, φ_i) et une partition de l'unité (ρ_i) subordonnée. Sur chaque U_i , la métrique euclidienne tirée en arrière par φ_i donne une métrique locale g_i . On pose $g = \sum_i \rho_i g_i$, qui est une métrique riemannienne globale car une combinaison convexe de formes définies positives est définie positive. $\square$

Théorème A.13 (Voisinage tubulaire). *Soit $S \subset M$ une sous-variété compacte d'une variété lisse M . Alors il existe un voisinage ouvert U de S dans M et un difféomorphisme $\Phi : \nu(S) \supset V \rightarrow U$ d'un voisinage ouvert V du plongement par la section nulle du fibré normal $\nu(S) \rightarrow S$ sur U , tel que $\Phi|_S = \text{Id}_S$.*

Esquisse. On choisit une métrique riemannienne g sur M . L'application exponentielle restreinte au fibré normal $\exp^\perp : \nu(S) \rightarrow M$ est un difféomorphisme local au voisinage de la section nulle (par le théorème d'inversion locale). Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, l'application $\exp^\perp$ est un difféomorphisme de $\{v \in \nu(S) \mid |v|_g < \varepsilon\}$ sur un voisinage tubulaire ouvert U de S . $\square$

Remarque A.14. Le voisinage tubulaire est unique à isotopie près : deux voisinages tubulaires de S dans M sont ambialement isotopes (c'est un corollaire du théorème d'extension d'isotopie et de l'unicité du fibré normal).

A.6 Lemme de Hadamard

Lemme A.15 (Hadamard). *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe contenant l'origine, et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application lisse avec $f(0) = 0$. Alors il existe des fonctions lisses $g_1, \dots, g_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ telles que*

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x) \quad \text{et} \quad g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0).$$

Démonstration. On écrit

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt = \sum_{i=1}^n x_i \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt}_{=g_i(x)}.$$

La fonction g_i est lisse par le théorème de différentiation sous le signe intégral, et $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$. $\square$

Bibliographie

- [1] J. W. Milnor, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, The University Press of Virginia, 1965.
- [2] J. W. Milnor, *Morse Theory*, Annals of Mathematics Studies, No. 51, Princeton University Press, 1963.
- [3] V. Guillemin et A. Pollack, *Differential Topology*, AMS Chelsea Publishing, 2010 (réédition).
- [4] M. W. Hirsch, *Differential Topology*, Graduate Texts in Mathematics 33, Springer-Verlag, 1976.
- [5] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, 2e édition, Graduate Texts in Mathematics 218, Springer, 2013.
- [6] T. Bröcker et K. Jänich, *Introduction to Differential Topology*, Cambridge University Press, 1982.
- [7] R. Bott et L. W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Graduate Texts in Mathematics 82, Springer-Verlag, 1982.
- [8] F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Graduate Texts in Mathematics 94, Springer-Verlag, 1983.
- [9] H. Whitney, *The self-intersections of a smooth n -manifold in $2n$ -space*, Annals of Mathematics 45 (1944), 220–246.
- [10] M. Adachi, *Embeddings and Immersions*, Translations of Mathematical Monographs 124, AMS, 1993.
- [11] A. A. Kosinski, *Differential Manifolds*, Academic Press, 1993.
- [12] J. W. Milnor et J. D. Stasheff, *Characteristic Classes*, Annals of Mathematics Studies, No. 76, Princeton University Press, 1974.
- [13] J. W. Milnor, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, The University Press of Virginia, 1965.

Index

- d, 64
- ι_X , 67
- $\mathcal{L}_X$, 67
- $\wedge$, 63
- f^* , 66
- algèbre de Lie, 37
 - des matrices, 40
 - $\mathfrak{o}(n)$, 46
- algèbre de Weil, 68
- algèbre extérieure, 62
 - totale, 63
- analyse vectorielle, 65
- anse (handle), 102
- application cotangente, 35
- application de face, 76
- application de Hopf, 113
- application de transition, 9
- application impaire, 112
- application lisse, 19, 31
- application propre, 42, 72
- application tangente, 21
- approximation
 - relative, 117
- approximation transverse, 95
- atlas, 9
 - lisse, 9
 - maximal, 10
- attachement de cellule, 101
- auto-intersection, 60
- base duale, 34
- base dénombrable, 8
- bord, 15, 49
 - d'une chaîne, 77
 - d'une variété, 15
 - variété sans bord, 49
- Borsuk–Ulam, 94
- Bott, 127
- boule chevelue (théorème), 61
- bouteille de Klein, 69, 117
 - non-plongement, 121
- Bröcker, 127
- $C^\infty(M, N)$, 20
- Cartan
 - formule magique, 68
- carte de sous-variété, 43
- carte locale, 9, 30
- catégorie lisse, 20
- Cauchy–Lipschitz, 38
- cercle
 - champ de vecteurs, 36
 - fibré tangent, 34
- champ complet, 38
- champ d'Euler, 40
- champ de vecteurs, 36
- changement de cartes, 9
- changement de variables, 70
- chaîne singulière, 76
 - exemples, 77
- classes de Pontryaguine, 120
- classification des surfaces, 119
- codimension, 43
- cohomologie
 - de de Rham, 66
 - de de Rham à support compact, 72
- cohomologie de de Rham, 81
 - des sphères, 85
 - du cercle, 81
 - du tore, 82
 - fonctorialité, 81
 - groupes, 81
 - invariance homotopique, 84
 - à support compact, 88
- complexe de de Rham, 81
- complexe de Morse, 105
- complexe de Morse–Smale–Witten, 105
- conjecture de Poincaré, 120
- contravariante, 35
- coordonnées locales, 9
- courbe intégrale, 38
- courbe lisse, 30

- covecteur, 34
- $\mathbb{CP}^n$, 13
- crochet de Lie, 36
 - calcul, 40
 - en coordonnées, 37
 - propriétés, 37
- CW-complexe
 - induit par Morse, 102
- cycle, 77
- de Rham
 - cohomologie, 66
- degré
 - bonne définition, 109
 - de z^k sur S^1 , 111
 - exemples, 86
 - formule intégrale, 110
 - invariance homotopique, 109
 - modulo 2, 108
 - orienté, 109
 - propriétés, 86
 - via l'intégration, 85
- demi-espace, 15, 49
- diagramme commutatif, 27
 - fibré tangent, 34
- $\text{Diff}(M)$, 21
- difféomorphisme, 21, 32
- difféomorphisme local, 23
 - exemples, 26
- différentielle, 21, 31
 - d'une fonction, 34
 - et flot, 39
- différentielle extérieure, 64
 - formule intrinsèque, 65
- disque
 - sous-variété à bord, 49
- Donaldson, 120
- dualité de Poincaré, 86
- décomposition en anses, 102
 - du tore, 102
- dépendance régulière en les conditions initiales, 124
- dérivation, 29
- dérivée de Lie, 39
 - des formes différentielles, 67
- dérivée partielle, 30
- déterminant, 63
- ensemble de mesure nulle, 124
- ensemble de sous-niveau, 101
- espace cotangent, 34
- espace projectif complexe, 13
- espace projectif réel, 12
 - plongement dans $\mathbb{R}^4$, 118
- espace séparé, 8
- espace tangent, 29
 - préimage, 48
 - sous-variété, 48
- exercice
 - atlas de S^1 , 18
 - composition d'immersions, 27
 - connexité de $\text{SO}(n)$, 18
 - $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$, 18
 - double d'une variété à bord, 18
 - déterminant comme submersion, 28
 - espace projectif, 18
 - fibration de Hopf, 28
 - graphe comme sous-variété, 28
 - grassmannienne compacte, 18
 - image inverse d'une sous-variété, 28
 - partition de l'unité et métrique, 18
 - produit de variétés, 18
 - section d'une submersion, 28
 - semi-continuité du rang, 28
 - sous-groupe fermé, 18
 - submersion propre, 28
 - théorème d'inversion locale, 28
- exponentielle matricielle
 - différentielle, 33
- fibration de Hopf, 26
- fibration localement triviale, 28
- fibré cotangent, 35
 - changement de cartes, 40
- fibré normal, 50, 121
- fibré tangent, 33
 - structure de variété, 33
- flot, 38
 - commutativité, 39
 - propriétés, 38
 - rotation, 39
 - système linéaire, 40
- fonction bosse, 16
- fonction de Morse, 51, 99
 - densité, 101
 - parfaite, 105
 - sur $\mathbb{RP}^2$, 105
 - sur la sphère, 104

- sur le tore, 104
 - sur un groupe de Lie, 107
- fonction lisse, 29
- fonctions de Morse
 - et Sard, 96
- fonctorialité, 32, 66
- forme angulaire, 87
- forme différentielle, 64
 - expression locale, 64
- forme exacte, 65, 81
- forme fermée, 65, 81
- forme invariante, 74
- forme locale
 - immersion, 24
 - submersion, 24
- forme symplectique, 73
- forme volume, 70, 74
- formule de Cartan, 68, 84
- formule de Künneth, 88
- formule de l'aire, 80
- Freedman, 120
- Fubini
 - lemme pour mesure nulle, 91
- $GL(n, \mathbb{R})$, 14, 40
- $Gr(k, n)$, 15
- grassmannienne, 15, 51
- groupe de Lie, 14
 - $GL(n, \mathbb{R})$, 14
 - $SL(n, \mathbb{R})$, 14
 - $SO(n)$, 14
 - $SU(n)$, 15
- groupe orthogonal, 14, 46
- groupe spécial linéaire, 46
- groupe unitaire, 15
- Guillemin, 127
- généricité, 57
- Hausdorff, *voir* espace séparé
- Hirsch, 127
- homologie de Morse, 106
- homotopie de contraction, 82
- homotopie lisse, 84
- Hopf, 26
- hyperboloïde, 47
- identité de Jacobi, 37
- immersion, 23, 41, 115
 - de S^1 , 121
 - en codimension 1, 121
 - forme locale, 24, 42
 - injective propre, 42
- immersion de Boy, 119
- inclusion, 26
- indice
 - d'un champ de vecteurs, 114
 - d'un point critique, 99
- intégrale
 - sur un simplexe singulier, 77
 - sur une chaîne, 77
- intégration
 - propriétés, 71
 - sur $\mathbb{R}^n$, 70
 - sur une variété, 71
- invariant différentiel, 21
- inversion, 12
- inégalités de Morse
 - faibles, 103
 - fortes, 103
- isomorphisme
 - espace tangent, 31
- isotopie, 118
 - ambiante, 118
- Jänich, 127
- Lee, 127
- Lefschetz
 - théorème du point fixe, 60
- lemme
 - de Poincaré, 66
- lemme de Hadamard, 30, 99, 126
- lemme de Morse, 99
 - unicité, 100
- lemme de Poincaré, 82
 - calcul explicite, 83
 - constructif, 87
 - interprétation géométrique, 83
- loi d'inertie de Sylvester, 99
- lois de conservation, 80
- Man**, 20
- matrice hessienne, 98
- matrice jacobienne, 32
- matrices symétriques, 46
- Mayer–Vietoris, 85, 86
- mesure nulle, 47, 90
 - dans une variété, 91

- exemples, 96
- Milnor, 120, 127
- Milnor, John, 7
- métrique riemannienne, 74, 125
- Möbius
 - ruban de, 69
- naturalité, 66
- noeud, 121
- nombre d'intersection, 58, 112
 - de sous-variétés, 58
 - invariance homotopique, 58
 - mod 2, 60
- nombre de Betti, 103
- nombre de Lefschetz, 112
- nombres de Betti, 86
- non-rétraction, 93
- $O(n)$
 - comme sous-variété, 46
- opérateur d'homotopie de chaînes, 84
- opérateur de bord
 - chaînes singulières, 76
- orientabilité
 - critères, 69
- orientation, 69
 - du bord, 70
- orientation induite, 78
- ouvert étoilé, 82
- paracompact, 8
 - et base dénombrable, 8
- partition de l'unité, 16, 71, 125
 - dans la preuve de Stokes, 78
 - existence, 17
- plongement, 23, 42, 115
 - de la boule, 118
- Poincaré
 - lemme de, 66
- point critique, 41, 89, 98
 - application déterminant, 90
 - exemples, 90
 - non dégénéré, 98
- point régulier, 41
- Pollack, 127
- polynôme de Morse, 107
- produit cup
 - en cohomologie de de Rham, 82
- produit de sous-variétés, 51
- produit extérieur, 63
- produit intérieur, 67
- projection, 25
- projection stéréographique, 11
 - différentielle, 32
- puissance extérieure, 62
- pull-back, 35
- rang, 22
 - d'une application lisse, 22
- représentation locale, 19
- $\mathbb{R}P^n$, 12
- règle de chaîne, 32
- réarrangement des anses, 103
- Sard
 - théorème de, 57
 - version paramétrique, 95
- Sard (théorème de), 47
- second dénombrable, *voir* base dénombrable
- section locale, 28
- signe d'intersection, 58
- simplexe singulier lisse, 76
- simplexe standard, 75
- $SL(n, \mathbb{R})$, 14
 - comme sous-variété, 46
- Smale, Stephen, 7
- $SO(n)$, 14
 - comme sous-variété, 51
- sous-niveau
 - passage sans point critique, 101
- sous-variété
 - immergée, 43
 - immergée non plongée, 43
 - plongée, 43
 - à bord, 49
- sphère, 11
 - comme sous-variété, 43
 - sous-variété, 50
 - valeur régulière, 45
- sphère exotique, 120
- sphères exotiques, 7
- Stokes
 - théorème de, 72
- structure différentiable, 10
- structures exotiques, 11
- $SU(2)$, 51
- $SU(n)$, 15
- submersion, 23, 33, 41

- application ouverte, 24
- forme locale, 24, 42
- suite exacte de Mayer–Vietoris, 87
- support, 16
 - d’une forme différentielle, 72
- surface de Boy, 119
- surfaces
 - plongement, 120
- $\mathbb{T}^n$, 13
- Thom
 - théorème de transversalité, 57
- Thom, René, 7
- théorie de Morse, 98
- théorème
 - d’approximation de Whitney, 117
 - d’Ehresmann, 51
 - d’extension d’isotopie, 118
 - d’inversion locale, 123
 - de Borsuk–Ulam, 112
 - de Brouwer (point fixe), 111
 - de Cauchy–Lipschitz, 38, 124
 - de Jordan–Brouwer, 119
 - de la préimage transverse, 55
 - de la sphère chevelue, 111
 - de la valeur régulière, 44
 - de Lefschetz (point fixe), 112
 - de Poincaré–Hopf, 114
 - de Sard, 47
 - de Stokes, 72
 - de transversalité de Thom, 57
 - de Whitney, 115
 - de Whitney (immersion), 117
 - de Whitney (version faible), 116
 - de Whitney (version forte), 116
 - des fonctions implicites, 44, 123
 - du point fixe de Lefschetz, 60
 - du rang constant, 48, 123
 - version sous-variété, 49
 - du voisinage tubulaire, 50
 - fondamental de l’algèbre, 113
- théorème d’Ehresmann, 28
- théorème d’inversion locale, 22
 - version euclidienne, 22
- théorème de Brouwer, 94
 - constructif, 96
 - dimension 1, 94
- théorème de Brown, 94
- théorème de Green, 79
- théorème de la divergence, 79
 - exemple, 80
- théorème de la valeur régulière, 23
- théorème de rang constant, 25
- théorème de Sard, 91, 101, 124
- théorème de Stokes, 78
 - classique en $\mathbb{R}^3$, 80
 - pour les chaînes, 77
- théorème de transversalité, 95
- théorème de transversalité de Thom, 101
- théorème des fonctions implicites, 22
 - version euclidienne, 22
- théorème du point fixe
 - conséquences, 97
- tiré en arrière, 66
 - propriétés, 66
- tore, 13
 - comme préimage, 47
 - droite irrationnelle, 43
 - plongement dans $\mathbb{R}^3$, 118
- $T_p M$, 29
- transversalité, 51, 95
 - d’une application, 54
 - de sous-variétés, 54
 - densité, 58
 - exemples, 54
 - exercice, 96
 - généricité, 95
 - intersection de sous-variétés, 56
 - stabilité, 56
 - théorème de la préimage, 55
- truc de Whitney, 116
- Tu, 127
- valeur critique, 41, 89
- valeur régulière, 22, 41, 89, 108
- valeurs régulières
 - densité, 93
- variété
 - orientée, 69
- variété contractile, 85
- variété de Stiefel, 51
- variété différentielle, 10
- variété lisse, 10, 29
 - ouverts de $\mathbb{R}^n$, 11
 - $\mathbb{R}^n$, 11
- variété topologique, 9
- variété à bord, 15, 49, 78
- voisinage tubulaire, 50, 125

Warner, [127](#)

Whitney, [127](#)

Whitney, Hassler, [7](#)

$\mathfrak{X}(M)$, [36](#)

équivalence d'homotopie, [84](#)

équivalence de courbes, [30](#)