

Topologie Algébrique

Notes de Cours

Master M1 — 2025–2026

Yaë Ulrich Gaba

*« La topologie algébrique est l'art de transformer des
problèmes de géométrie en problèmes d'algèbre. »*

— Henri Poincaré

Table des matières

Table des notations	6
Préface	8
1 Rappels de topologie et motivations	10
1.1 Espaces topologiques, continuité, homéomorphismes	10
1.2 Connexité et connexité par arcs	11
1.3 Compacité et espaces de Hausdorff	12
1.4 Homotopie entre applications	13
1.5 Rétractes et rétractes par déformation	14
1.6 CW-complexes	15
1.7 La catégorie homotopique	17
1.8 Motivations : pourquoi des invariants algébriques ?	17
1.9 Exercices	19
2 Le groupe fondamental — définition et premières propriétés	20
2.1 Chemins et lacets	20
2.2 Homotopie de chemins	21
2.3 Structure de groupe sur les classes de lacets	21
2.4 Fonctorialité du groupe fondamental	24
2.5 Changement de point base	25
2.6 Invariance homotopique de π_1	25
2.7 Premiers calculs	26
2.7.1 Espaces simplement connexes	26
2.7.2 Le groupe fondamental du cercle	27
2.8 Applications du groupe fondamental	29
2.8.1 Théorème de Brouwer en dimension 2	29
2.8.2 Théorème de Borsuk–Ulam en dimension 1	29
2.8.3 Application à l’algèbre : théorème fondamental de l’algèbre	30
2.9 Le groupe fondamental du produit	30
2.10 Espaces simplement connexes et relèvement	31
2.11 Exercices	32
3 Théorème de Van Kampen	34
3.1 Produit libre de groupes	34
3.2 Produit libre amalgamé	35
3.3 Énoncé du théorème de Van Kampen	36
3.4 Preuve du théorème de Van Kampen	37
3.5 Applications	38

3.5.1	Bouquet de cercles	38
3.5.2	Plan projectif réel	39
3.5.3	Surfaces orientables de genre g	39
3.5.4	Bouteille de Klein	40
3.5.5	Attachement de cellules et CW-complexes	41
3.6	Exercices	42
	Résumé du chapitre	43
4	Revêtements et groupe fondamental	44
4.1	Définitions et premiers exemples	44
4.2	Relèvement des chemins	46
4.3	Relèvement des homotopies	46
4.4	Action de monodromie	47
4.5	Classification des revêtements connexes	48
4.6	Revêtement universel	50
4.7	Transformations de revêtement	52
4.8	Revêtements réguliers	52
4.9	Applications complémentaires	54
4.10	Exercices	55
	Résumé du chapitre	56
5	Homologie singulière — Définition et propriétés	57
5.1	Le simplexe standard et les simplexes singuliers	57
5.2	Chaînes singulières et opérateur bord	59
5.3	Le complexe de chaînes singulières	61
5.4	Cycles, bords et groupes d'homologie	61
5.5	Fonctorialité de l'homologie	62
5.6	Invariance homotopique	63
5.7	Homologie réduite	65
5.8	Calculs fondamentaux	65
5.9	Homologie relative	66
5.10	Commentaires historiques et perspectives	67
5.11	Exercices	68
	Résumé du chapitre	69
6	Suites exactes longues et excision	70
6.1	Suites exactes courtes de complexes de chaînes	70
6.2	Le morphisme de connexion	71
6.3	Théorème de la suite exacte longue	72
6.4	Suite exacte longue de la paire	73
6.5	Théorème d'excision	74
6.6	Subdivision barycentrique	74
6.7	Preuve du théorème d'excision	75
6.8	Théorème de Mayer–Vietoris (mention)	76
6.9	Équivalence entre homologie relative et homologie réduite du quotient	77
6.10	Applications	77
6.10.1	Calcul de $H_n(S^n)$ par excision	77
6.10.2	Degré d'une application	77
6.10.3	Théorème du point fixe de Brouwer	78

6.10.4	Invariance du domaine	79
6.10.5	Théorème de Borsuk–Ulam	79
6.11	Exercices	80
6.12	Remarques complémentaires	81
	Résumé du chapitre	82
7	Théorème de Mayer-Vietoris	83
	Introduction	83
7.1	Rappels : excision et suites exactes	83
7.2	La suite exacte de Mayer-Vietoris	84
7.3	Preuve du théorème de Mayer-Vietoris	85
7.4	Version réduite	86
7.5	Applications	86
7.5.1	Homologie des sphères	86
7.5.2	Homologie du tore	87
7.5.3	Homologie des surfaces orientables	87
7.5.4	Homologie de l'espace projectif réel	88
7.5.5	Homologie de la bouteille de Klein	89
7.6	Formule de Künneth	89
7.7	Caractéristique d'Euler	91
7.8	Exercices	92
	Résumé du chapitre	93
8	Cohomologie Singulière et Cup-Produit	94
	Introduction	94
8.1	Cochânes et opérateur cobord	94
8.2	Groupes de cohomologie	95
8.3	Théorème des coefficients universels	95
8.4	Cup-produit	96
8.5	Propriétés du cup-produit	97
8.6	L'anneau de cohomologie	98
8.7	Calculs de l'anneau de cohomologie	98
8.7.1	Cohomologie de la sphère S^n	98
8.7.2	Cohomologie du tore	99
8.7.3	Cohomologie de l'espace projectif réel	99
8.7.4	Cohomologie de l'espace projectif complexe	100
8.8	Cross-product et formule de Künneth en cohomologie	101
8.9	Applications : distinction par le cup-produit	101
8.10	Connexion avec la cohomologie de de Rham	102
8.11	Exercices	103
	Résumé du chapitre	104
9	Dualité de Poincaré	105
9.1	Variétés topologiques	105
9.2	Orientabilité et classes fondamentales	105
9.3	Cup-produit et cap-produit	107
9.4	Théorème de dualité de Poincaré	108
9.4.1	Esquisse de la preuve	109
9.5	Applications	109

9.5.1	Dualité pour les variétés classiques	109
9.5.2	Caractéristique d'Euler des variétés de dimension impaire	110
9.5.3	Forme d'intersection en dimension 4	110
9.6	Dualité de Poincaré–Lefschetz	111
9.7	Exercices	112
	Résumé du chapitre	112
10	Groupes d'homotopie supérieurs — Introduction	113
10.1	Définitions et premières propriétés	113
10.2	Fonctorialité et invariance homotopique	114
10.3	Suite exacte longue de la paire	115
10.4	Suite exacte de la fibration	115
10.5	Calculs fondamentaux	116
10.5.1	Groupes d'homotopie des sphères	116
10.6	Théorème de Hurewicz	117
10.7	Théorème de Whitehead	118
10.8	Exercices	119
	Résumé du chapitre	120
11	Théorie de l'obstruction et applications	121
11.1	Le problème d'extension	121
11.2	Classes d'obstruction	121
11.3	Applications classiques	123
11.3.1	Théorème de Borsuk–Ulam	123
11.3.2	Théorème de Lusternik–Schnirelman	123
11.3.3	Classes caractéristiques	124
11.4	Espaces d'Eilenberg–MacLane	125
11.5	Cohomologie et classes d'homotopie	126
11.6	Ouvertures	126
11.6.1	Homotopie stable et spectres	126
11.6.2	Connexions avec la physique mathématique	127
11.7	Exercices	127
	Résumé du chapitre	128
A	Rappels d'algèbre homologique	129
A.1	Complexes de chaînes	129
A.2	Suites exactes	130
A.3	Formule de Künneth	130
A.4	Foncteurs dérivés	131

Table des notations

Notation	Signification
X, Y, Z	Espaces topologiques
Top	Catégorie des espaces topologiques et applications continues
Top_*	Catégorie des espaces topologiques pointés
hTop	Catégorie homotopique
Grp	Catégorie des groupes
Ab	Catégorie des groupes abéliens
$[X, Y]$	Ensemble des classes d'homotopie d'applications $X \rightarrow Y$
$f \simeq g$	f est homotope à g
$X \simeq Y$	X et Y ont le même type d'homotopie
$\pi_1(X, x_0)$	Groupe fondamental de X en x_0
$\pi_n(X, x_0)$	n -ième groupe d'homotopie de X en x_0
$H_n(X)$	n -ième groupe d'homologie singulière de X
$H_n(X, A)$	Homologie singulière relative du couple (X, A)
$H^n(X)$	n -ième groupe de cohomologie singulière de X
$H^n(X; G)$	Cohomologie à coefficients dans G
∂_n	Opérateur bord $C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$
δ^n	Opérateur cobord $C^n(X) \rightarrow C^{n+1}(X)$
Δ^n	Simplexe standard de dimension n
$\sigma : \Delta^n \rightarrow X$	Simplexe singulier
$C_n(X)$	Groupe des chaînes singulières de dimension n
$Z_n(X)$	Groupe des cycles de dimension n
$B_n(X)$	Groupe des bords de dimension n
$\smile$	Produit cup en cohomologie
$\frown$	Produit cap
$\chi(X)$	Caractéristique d'Euler de X
S^n	Sphère de dimension n
D^n	Disque (boule fermée) de dimension n
T^n	Tore de dimension n
$\mathbb{RP}^n$	Espace projectif réel de dimension n
$\mathbb{CP}^n$	Espace projectif complexe de dimension n
$X \vee Y$	Bouquet (wedge sum) de X et Y
$X \times Y$	Produit cartésien
X/A	Espace quotient de X par A

Suite page suivante

Notation	Signification
$\tilde{X}$	Revêtement universel de X
f_*	Morphisme induit en homologie ou sur π_1
f^*	Morphisme induit en cohomologie
$\text{Hom}(G, H)$	Groupe des homomorphismes de G dans H
$\text{im } f$	Image de f
$\text{coker } f$	Conoyau de f
$\text{Aut}(G)$	Groupe des automorphismes de G
Id	Application identité

Préface

La topologie algébrique constitue l'une des branches les plus fécondes des mathématiques du vingtième siècle. Son ambition fondamentale est d'associer à chaque espace topologique des invariants algébriques — groupes, anneaux, modules — qui permettent de distinguer des espaces que la topologie ensembliste seule ne parvient pas à séparer. Ce passage du continu au discret, du géométrique à l'algébrique, est au cœur de la pensée mathématique moderne.

Les origines de cette discipline remontent aux travaux pionniers d'**Henri Poincaré**, qui introduisit en 1895 dans son *Analysis Situs* la notion de groupe fondamental et les premiers invariants homologiques. Poincaré comprit que pour classer les variétés, il fallait leur associer des quantités algébriques préservées par déformation continue. Ses intuitions, parfois formulées de manière informelle, ont guidé un siècle entier de développements.

La formalisation rigoureuse de l'homologie singulière est due en grande partie à **Emmy Noether**, qui, dans les années 1920–1930, reconnut que les « nombres de Betti » de Poincaré devaient être compris comme les rangs de *groupes* d'homologie, et non comme de simples entiers. Cette vision algébrique a transformé la topologie en une théorie structurelle profonde.

L'axiomatisation de la théorie fut achevée par **Eilenberg** et **Steenrod** dans leur ouvrage fondamental de 1952, *Foundations of Algebraic Topology*. Ils identifièrent un ensemble d'axiomes — exactitude, excision, homotopie, dimension — qui caractérisent essentiellement de façon unique la théorie de l'homologie sur la catégorie des couples de CW-complexes. Cette approche axiomatique a permis d'unifier les différentes constructions (simpliciale, singulière, cellulaire, de Čech) en un cadre conceptuel cohérent.

Le présent cours s'adresse aux étudiants de Master et de Doctorat. Il suppose acquises les bases de la topologie générale (espaces métriques, compacité, connexité) ainsi qu'une familiarité avec l'algèbre (groupes, anneaux, modules, suites exactes). Nous développerons la théorie selon le plan suivant :

- Le **groupe fondamental** $\pi_1(X, x_0)$, premier invariant algébrique, avec ses applications classiques (théorème de Brouwer, théorème de Borsuk–Ulam en dimension 2).
- La théorie des **revêtements**, intimement liée au groupe fondamental par la correspondance de Galois topologique.
- L'**homologie singulière** $H_n(X)$, invariant plus puissant, avec les axiomes d'Eilenberg–Steenrod, la suite exacte longue du couple et le théorème d'excision.
- La **cohomologie** $H^n(X; G)$ et la structure d'anneau donnée par le produit cup $\smile$.
- Les outils avancés : dualité de Poincaré, formule de Künneth, coefficients universels.

Notre approche sera résolument rigoureuse, dans la tradition de Godement, Serre et Spanier, tout en accordant une place importante aux exemples et aux exercices. Les

diagrammes commutatifs et les illustrations géométriques jalonnent le texte afin de cultiver l'intuition autant que la rigueur.

Bonne lecture.

Chapitre 1

Rappels de topologie et motivations

1.1 Espaces topologiques, continuité, homéomorphismes

Nous commençons par rappeler les notions fondamentales de la topologie générale qui seront utilisées de manière constante dans la suite.

Définition 1.1 (Espace topologique). Un **espace topologique** est un couple $(X, \mathcal{T})$ où X est un ensemble et $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ est une famille de sous-ensembles de X , appelés **ouverts**, vérifiant :

- (i) $\emptyset \in \mathcal{T}$ et $X \in \mathcal{T}$.
- (ii) $\mathcal{T}$ est stable par réunion quelconque : si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{T}$, alors $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.
- (iii) $\mathcal{T}$ est stable par intersection finie : si $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}$, alors $U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{T}$.

Définition 1.2 (Application continue). Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques. Une application $f : X \rightarrow Y$ est dite **continue** si pour tout ouvert $V \in \mathcal{T}_Y$, l'image réciproque $f^{-1}(V)$ est un ouvert de X :

$$\forall V \in \mathcal{T}_Y, \quad f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X.$$

Définition 1.3 (Homéomorphisme). Une application $f : X \rightarrow Y$ est un **homéomorphisme** si f est bijective, continue, et si son inverse $f^{-1} : Y \rightarrow X$ est également continue. On écrit alors $X \cong Y$.

Remarque 1.4. La relation « être homéomorphe » est une relation d'équivalence sur la classe des espaces topologiques. L'un des objectifs centraux de la topologie est de classer les espaces à homéomorphisme près. Cependant, cette classification est en général inaccessible directement, ce qui motive l'introduction d'invariants algébriques.

Exemple 1.5. L'application $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \tan(\pi t/2)$ est un homéomorphisme. Ainsi l'intervalle ouvert borné $]-1, 1[$ est homéomorphe à $\mathbb{R}$ tout

entier. De même, toute boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.

Exemple 1.6 (Topologie quotient). Soit X un espace topologique et $\sim$ une relation d'équivalence sur X . L'**espace quotient** $X/\sim$ est l'ensemble des classes d'équivalence muni de la topologie la plus fine rendant continue la projection canonique $\pi : X \rightarrow X/\sim$. Concrètement, $U \subseteq X/\sim$ est ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est ouvert dans X . Voici quelques exemples fondamentaux :

- (a) $[0, 1]/(0 \sim 1) \cong S^1$: on identifie les extrémités de l'intervalle.
- (b) $D^n/S^{n-1} \cong S^n$: on écrase le bord du disque en un point.
- (c) $S^n/(x \sim -x) \cong \mathbb{R}P^n$: on identifie les points antipodaux.

Définition 1.7 (Plongement topologique). Une application continue $f : X \rightarrow Y$ est un **plongement** si f induit un homéomorphisme de X sur $f(X)$ muni de la topologie induite.

Proposition 1.8. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue injective, avec X compact et Y de Hausdorff. Alors f est un plongement.

Démonstration. L'application $f : X \rightarrow f(X)$ est continue, bijective, X est compact et $f(X)$ est de Hausdorff (comme sous-espace d'un espace de Hausdorff). Par la efprop : compact-hausdorff, f est un homéomorphisme sur son image. $\square$

1.2 Connexité et connexité par arcs

Définition 1.9 (Espace connexe). Un espace topologique X est dit **connexe** s'il ne peut pas s'écrire comme réunion disjointe de deux ouverts non vides. Autrement dit, les seules parties de X qui sont à la fois ouvertes et fermées sont $\emptyset$ et X .

Définition 1.10 (Connexité par arcs). Un espace X est **connexe par arcs** si pour tous $x, y \in X$, il existe un chemin continu $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Proposition 1.11. Tout espace connexe par arcs est connexe.

Démonstration. Supposons X connexe par arcs et supposons par l'absurde que $X = U \cup V$ avec U, V ouverts non vides et $U \cap V = \emptyset$. Choisissons $x \in U$ et $y \in V$. Il existe un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Les ensembles $\gamma^{-1}(U)$ et $\gamma^{-1}(V)$ forment une partition de $[0, 1]$ en deux ouverts non vides, ce qui contredit la connexité de $[0, 1]$. $\square$

Remarque 1.12. La réciproque est fautive en général. Le « peigne du topologiste » fournit un exemple classique d'espace connexe qui n'est pas connexe par arcs. Cependant, pour les espaces localement connexes par arcs (en particulier les variétés topologiques

et les CW-complexes), les deux notions coïncident.

Définition 1.13 (Composantes connexes par arcs). Soit X un espace topologique. La relation « x et y sont reliés par un chemin » est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence sont appelées **composantes connexes par arcs** de X . On note $\pi_0(X)$ l'ensemble des composantes connexes par arcs de X .

Remarque 1.14. L'ensemble $\pi_0(X)$ est un invariant homotopique : si $f : X \rightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie, alors f induit une bijection $\pi_0(X) \cong \pi_0(Y)$. On peut voir π_0 comme un foncteur $\pi_0 : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ens}$.

Exemple 1.15. Le groupe orthogonal $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^T A = I_n\}$ a exactement deux composantes connexes par arcs : $SO(n) = \{A \in O(n) : \det A = 1\}$ et son complémentaire. Ainsi $\pi_0(O(n)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

1.3 Compacité et espaces de Hausdorff

Définition 1.16 (Espace compact). Un espace topologique X est **compact** si de tout recouvrement ouvert de X on peut extraire un sous-recouvrement fini : pour toute famille $(U_i)_{i \in I}$ d'ouverts telle que $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, il existe $i_1, \dots, i_n \in I$ tels que $X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.

Définition 1.17 (Espace de Hausdorff). Un espace topologique X est dit **de Hausdorff** (ou **séparé**) si pour tous points distincts $x, y \in X$, il existe des ouverts disjoints U et V tels que $x \in U$ et $y \in V$.

Proposition 1.18. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue bijective, avec X compact et Y de Hausdorff. Alors f est un homéomorphisme.

Démonstration. Il suffit de montrer que f est fermée. Soit $F \subseteq X$ un fermé. Comme X est compact, F est compact. L'image continue d'un compact étant compacte, $f(F)$ est compact dans Y . Or un compact dans un espace de Hausdorff est fermé, donc $f(F)$ est fermé dans Y . Ainsi f est une application fermée bijective, donc f^{-1} est continue. $\square$

Remarque 1.19. Cette proposition est un outil extrêmement utile en pratique : pour montrer qu'une bijection continue est un homéomorphisme, il suffit souvent de vérifier les conditions de compacité et de séparation.

Théorème 1.20 (Tychonov). Le produit $\prod_{i \in I} X_i$ d'espaces compacts (muni de la topologie produit) est compact.

Nous ne redémontrons pas ce théorème (qui requiert l'axiome du choix) mais l'utiliserons librement.

Exemple 1.21 (Espaces compacts fondamentaux). Voici les espaces compacts que nous rencontrerons constamment :

- (a) Le disque fermé $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$.
- (b) La sphère $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\} = \partial D^{n+1}$.
- (c) Le tore $T^n = (S^1)^n$ (produit fini de compacts).
- (d) L'espace projectif $\mathbb{RP}^n = S^n / (x \sim -x)$ (quotient d'un compact).
- (e) L'espace projectif complexe $\mathbb{CP}^n$ (quotient de S^{2n+1}).

Tous ces espaces sont compacts et de Hausdorff.

1.4 Homotopie entre applications

La notion d'homotopie est la pierre angulaire de la topologie algébrique. Elle formalise l'idée intuitive de « déformation continue » d'une application en une autre.

Définition 1.22 (Homotopie). Soient X, Y des espaces topologiques et $f, g : X \rightarrow Y$ deux applications continues. Une **homotopie** de f à g est une application continue $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ telle que

$$H(x, 0) = f(x) \quad \text{et} \quad H(x, 1) = g(x) \quad \text{pour tout } x \in X.$$

On note $f \simeq g$ et on dit que f et g sont **homotopes**. Si de plus il existe un sous-espace $A \subseteq X$ tel que $H(a, t) = f(a) = g(a)$ pour tout $a \in A$ et tout $t \in [0, 1]$, on parle d'**homotopie relative à A** et on note $f \simeq g \pmod{A}$ ou $f \simeq g \text{ rel } A$.

Proposition 1.23. La relation d'homotopie $\simeq$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathcal{C}(X, Y)$ des applications continues de X dans Y .

Démonstration. Réflexivité. L'homotopie constante $H(x, t) = f(x)$ montre $f \simeq f$.

Symétrie. Si $H : f \simeq g$, alors $\bar{H}(x, t) = H(x, 1 - t)$ réalise $g \simeq f$.

Transitivité. Si $H : f \simeq g$ et $K : g \simeq h$, alors

$$L(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ K(x, 2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

est continue par le lemme de recollement et réalise $f \simeq h$. □

Notation 1.24. On note $[X, Y]$ l'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues de X dans Y . C'est le quotient $\mathcal{C}(X, Y)/\simeq$.

Définition 1.25 (Équivalence d'homotopie). Une application continue $f : X \rightarrow Y$ est une **équivalence d'homotopie** s'il existe une application continue $g : Y \rightarrow X$ telle que $g \circ f \simeq \text{Id}_X$ et $f \circ g \simeq \text{Id}_Y$. On dit alors que X et Y ont le même **type**.

d'homotopie et on note $X \simeq Y$.

Définition 1.26 (Espace contractile). Un espace topologique X est **contractile** s'il a le type d'homotopie d'un point, c'est-à-dire si Id_X est homotope à une application constante.

Exemple 1.27. L'espace $\mathbb{R}^n$ est contractile : l'homotopie $H(x, t) = (1 - t)x$ réalise une contraction vers l'origine. De même, tout espace convexe de $\mathbb{R}^n$ est contractile.

Exemple 1.28 (Espaces non contractiles). La sphère S^n (pour $n \geq 1$) n'est pas contractile. En effet, nous montrerons que $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \neq 0$ et, pour $n \geq 2$, que $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z} \neq 0$. Si S^n était contractile, ces invariants seraient triviaux, d'où contradiction.

Proposition 1.29 (Homotopie et composition). Soient $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ et $g_0, g_1 : Y \rightarrow Z$ des applications continues avec $f_0 \simeq f_1$ et $g_0 \simeq g_1$. Alors $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$.

Démonstration. Par transitivité, il suffit de montrer : (a) $g_0 \circ f_0 \simeq g_0 \circ f_1$, et (b) $g_0 \circ f_1 \simeq g_1 \circ f_1$.

Pour (a), si $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ est une homotopie de f_0 à f_1 , alors $g_0 \circ H : X \times [0, 1] \rightarrow Z$ est une homotopie de $g_0 \circ f_0$ à $g_0 \circ f_1$.

Pour (b), si $K : Y \times [0, 1] \rightarrow Z$ est une homotopie de g_0 à g_1 , alors $L(x, t) = K(f_1(x), t)$ est une homotopie de $g_0 \circ f_1$ à $g_1 \circ f_1$. $\square$

1.5 Rétractes et rétractes par déformation

Définition 1.30 (Rétraction et rétracte). Soit $A \subseteq X$ un sous-espace. Une **rétraction** de X sur A est une application continue $r : X \rightarrow A$ telle que $r|_A = \text{Id}_A$, c'est-à-dire $r(a) = a$ pour tout $a \in A$. On dit alors que A est un **rétracte** de X .

Définition 1.31 (Rétracte par déformation). Un sous-espace $A \subseteq X$ est un **rétracte par déformation** de X s'il existe une application continue $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ telle que :

- (i) $H(x, 0) = x$ pour tout $x \in X$,
- (ii) $H(x, 1) \in A$ pour tout $x \in X$,
- (iii) $H(a, t) = a$ pour tout $a \in A$ et tout $t \in [0, 1]$.

L'application $r : x \mapsto H(x, 1)$ est alors une rétraction, et l'inclusion $\iota : A \hookrightarrow X$ est une équivalence d'homotopie d'inverse homotopique r .

Exemple 1.32. Le cercle S^1 est un rétracte par déformation de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ via $H(x, t) = (1-t)x + t \cdot x/\|x\|$. Plus généralement, S^{n-1} est un rétracte par déformation de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Proposition 1.33. Si A est un rétracte par déformation de X , alors l'inclusion $\iota : A \hookrightarrow X$ est une équivalence d'homotopie.

Démonstration. Soit $r : X \rightarrow A$ la rétraction associée. On a $r \circ \iota = \text{Id}_A$ et $\iota \circ r \simeq \text{Id}_X$ via l'homotopie de déformation H . $\square$

1.6 CW-complexes

Les CW-complexes, introduits par J. H. C. Whitehead, forment la classe d'espaces topologiques la mieux adaptée aux méthodes de la topologie algébrique.

Définition 1.34 (CW-complexe). Un **CW-complexe** est un espace topologique X muni d'une filtration

$$\emptyset = X^{-1} \subseteq X^0 \subseteq X^1 \subseteq X^2 \subseteq \dots \subseteq X = \bigcup_{n \geq 0} X^n,$$

où chaque **squelette** X^n est obtenu à partir de X^{n-1} par attachement de cellules de dimension n : il existe un ensemble d'indices J_n et pour chaque $\alpha \in J_n$ une **application caractéristique** $\Phi_\alpha : D^n \rightarrow X^n$ telle que :

- (i) $\Phi_\alpha|_{\mathring{D}^n}$ est un homéomorphisme sur son image e_α^n (la cellule ouverte),
- (ii) $\Phi_\alpha(S^{n-1}) \subseteq X^{n-1}$ (l'application d'attachement),
- (iii) X^n est l'espace quotient de $X^{n-1} \sqcup \bigsqcup_{\alpha \in J_n} D^n$ obtenu en identifiant chaque $x \in S^{n-1} \subseteq D_\alpha^n$ avec $\Phi_\alpha(x) \in X^{n-1}$.

L'espace X est muni de la topologie faible : un ensemble $A \subseteq X$ est fermé si et seulement si $A \cap X^n$ est fermé dans X^n pour tout n .

Exemple 1.35 (CW-structure de S^2). La sphère S^2 admet une CW-structure minimale avec une 0-cellule e^0 et une 2-cellule e^2 attachée via l'application constante $\varphi : S^1 \rightarrow e^0$. On a donc $S^2 = e^0 \cup e^2$.

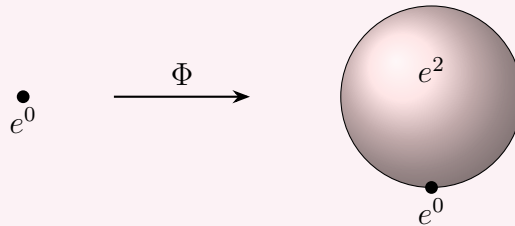


FIGURE 1.1 – CW-structure minimale de S^2 : un point et un disque.

Exemple 1.36 (CW-structure du tore T^2). Le tore $T^2 = S^1 \times S^1$ admet une CW-structure avec une 0-cellule e^0 , deux 1-cellules a et b , et une 2-cellule e^2 attachée via le mot $aba^{-1}b^{-1}$.

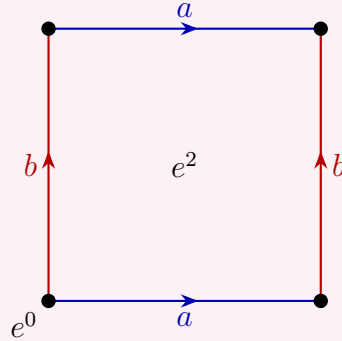


FIGURE 1.2 – CW-structure du tore : identification des bords du carré.

Exemple 1.37 (CW-structure de $\mathbb{RP}^2$). L'espace projectif réel $\mathbb{RP}^2$ s'obtient en identifiant les points antipodaux de S^1 sur le bord de D^2 . Sa CW-structure est : une 0-cellule e^0 , une 1-cellule e^1 (cercle obtenu par identification), et une 2-cellule e^2 dont l'application d'attachement $\varphi : S^1 \rightarrow X^1$ fait le tour de la 1-cellule deux fois.

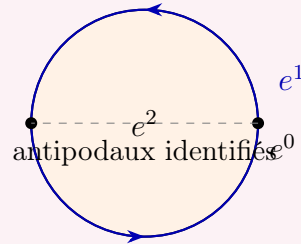


FIGURE 1.3 – CW-structure de $\mathbb{RP}^2$: le bord du disque est identifié par l'antipode.

Proposition 1.38. *Tout CW-complexe est un espace de Hausdorff, paracompact et localement contractile. En particulier, tout CW-complexe est localement connexe par arcs.*

Exemple 1.39 (CW-structure de $\mathbb{CP}^n$). L'espace projectif complexe $\mathbb{CP}^n$ admet une CW-structure avec exactement une cellule en chaque dimension paire $0, 2, 4, \dots, 2n$. En effet, la décomposition

$$\mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^0 \cup \mathbb{C}^1 \cup \dots \cup \mathbb{C}^n$$

(où chaque $\mathbb{C}^k$ est plongé via $[z_0 : \dots : z_k : 0 : \dots : 0]$ avec $z_k = 1$) fournit une cellule $e^{2k} \cong \mathbb{C}^k \cong \mathbb{R}^{2k}$ pour chaque $0 \leq k \leq n$. On a donc $\mathbb{CP}^n = e^0 \cup e^2 \cup e^4 \cup \dots \cup e^{2n}$.

Remarque 1.40 (Avantages des CW-complexes). Les CW-complexes présentent plusieurs avantages considérables :

- (i) L'**homologie cellulaire** offre un moyen de calcul très efficace : le complexe de chaînes $C_n^{CW}(X)$ est le groupe abélien libre engendré par les n -cellules.
- (ii) Le théorème de Whitehead affirme qu'une application continue entre CW-complexes qui induit un isomorphisme sur tous les groupes d'homotopie est une équivalence d'homotopie.
- (iii) Le théorème d'approximation CW affirme que tout espace topologique a le type d'homotopie d'un CW-complexe (sous des hypothèses légères).

Définition 1.41 (Sous-complexe). Un **sous-complexe** d'un CW-complexe X est un sous-espace fermé $A \subseteq X$ qui est réunion de cellules de X et tel que la fermeture de chaque cellule de A soit contenue dans A .

1.7 La catégorie homotopique

Définition 1.42 (Catégorie homotopique **hTop**). La **catégorie homotopique hTop** a pour objets les espaces topologiques et pour morphismes les classes d'homotopie d'applications continues :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{hTop}}(X, Y) = [X, Y].$$

La composition est induite par la composition des applications : si $[f] \in [X, Y]$ et $[g] \in [Y, Z]$, alors $[g] \circ [f] := [g \circ f]$. Cette opération est bien définie car la composition est compatible avec la relation d'homotopie.

Remarque 1.43. Les isomorphismes dans **hTop** sont précisément les classes d'équivalences d'homotopie. Autrement dit, X et Y sont isomorphes dans **hTop** si et seulement si $X \simeq Y$. Tout invariant de la topologie algébrique (groupe fondamental, groupes d'homologie, etc.) est un foncteur défini sur **hTop** ou sur une catégorie apparentée.

De même, on dispose de la catégorie pointée.

Définition 1.44 (Catégorie **hTop**_{*}). La catégorie **hTop**_{*} a pour objets les espaces topologiques pointés (X, x_0) et pour morphismes les classes d'homotopie pointée $[(X, x_0), (Y, y_0)]$, où les homotopies préservent le point base.

1.8 Motivations : pourquoi des invariants algébriques ?

La question fondamentale de la topologie est la suivante : étant donnés deux espaces topologiques X et Y , sont-ils homéomorphes ? Ou, de manière plus souple, ont-ils le même type d'homotopie ? Cette question est en général très difficile, et l'on a besoin d'outils permettant de *distinguer* les espaces.

Exemple 1.45 (Une question simple, une réponse non triviale). Les espaces $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ ne sont pas homéomorphes. Bien que l'énoncé paraisse évident, sa démonstration rigoureuse est délicate et repose sur des outils de topologie algébrique. En effet, si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ était un homéomorphisme, en ôtant un point on obtiendrait un homéomorphisme $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\} \cong \mathbb{R}^3 \setminus \{f(p)\}$. Or $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\} \simeq S^1$ et $\mathbb{R}^3 \setminus \{q\} \simeq S^2$, et ces espaces n'ont pas le même type d'homotopie (leurs groupes fondamentaux diffèrent : $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ tandis que $\pi_1(S^2) = 0$).

Exemple 1.46 (Sphère et tore). La sphère S^2 et le tore T^2 sont des surfaces compactes connexes orientées de genres respectifs 0 et 1. Elles ne sont pas homéomorphes, mais comment le prouver rigoureusement ? L'homologie fournit une réponse nette :

$$H_1(S^2) = 0 \quad \text{tandis que} \quad H_1(T^2) \cong \mathbb{Z}.$$

Exemple 1.47 (Bande de Möbius et cylindre). La bande de Möbius M et le cylindre $C = S^1 \times [0, 1]$ ont le même type d'homotopie (tous deux se rétractent par déformation sur S^1), donc $\pi_1(M) \cong \pi_1(C) \cong \mathbb{Z}$ et $H_*(M) \cong H_*(C)$. Pour les distinguer, il faut utiliser des invariants plus fins, par exemple l'orientabilité ou la cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ des compactifications.

Remarque 1.48. La stratégie générale de la topologie algébrique est la suivante :

- (1) Associer à chaque espace topologique X un objet algébrique $F(X)$ (groupe, anneau, module...).
- (2) S'assurer que cette construction est **fonctorielle** : une application continue $f : X \rightarrow Y$ induit un morphisme $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$ (ou dans le sens opposé pour la cohomologie), de manière compatible avec la composition.
- (3) Montrer que cet invariant est **homotopique** : si $f \simeq g$, alors $F(f) = F(g)$.
- (4) Utiliser ces invariants pour distinguer des espaces non homéomorphes ou pour démontrer des résultats de non-existence (pas de rétraction, pas de point fixe, etc.).

Le diagramme fonctoriel fondamental est le suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Top}_* & \xrightarrow{\pi_1} & \mathbf{Grp} \\ \text{quotient} \downarrow & \nearrow \pi_1 & \\ \mathbf{hTop}_* & & \end{array}$$

Le foncteur π_1 passe au quotient par la relation d'homotopie, ce qui sera démontré au efcap :pi1.

1.9 Exercices

Exercice 1.1 (**). Montrer que S^n est homéomorphe au bord ∂D^{n+1} du disque fermé $D^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| \leq 1\}$.

Exercice 1.2 (**). Montrer que le produit $X \times Y$ de deux espaces connexes par arcs est connexe par arcs. En déduire que le tore $T^n = (S^1)^n$ est connexe par arcs.

Exercice 1.3 (**). Montrer que S^1 est un rétracte par déformation de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. En déduire que S^1 n'est pas un rétracte de D^2 . (On pourra admettre que $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ et $\pi_1(D^2) = 0$.)

Exercice 1.4 (**). Montrer que tout espace contractile est connexe par arcs. En déduire que si X est contractile, alors $[Y, X]$ est réduit à un seul élément pour tout espace Y .

Exercice 1.5 (***). Décrire une CW-structure sur S^n avec exactement deux cellules (une de dimension 0 et une de dimension n). Décrire une CW-structure sur S^n avec exactement $2(n+1)$ cellules (deux en chaque dimension $0, 1, \dots, n$), obtenue en voyant S^n comme le bord du $(n+1)$ -cube $[-1, 1]^{n+1}$.

Exercice 1.6 (* * *). Montrer que $\mathbb{R}P^n$ admet une CW-structure avec exactement une cellule en chaque dimension $0, 1, \dots, n$. *Indication : considérer la décomposition $\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}P^{n-1} \cup e^n$ et procéder par récurrence.*

Exercice 1.7 (**). Soient $f_0 \simeq f_1 : X \rightarrow Y$ et $g_0 \simeq g_1 : Y \rightarrow Z$. Montrer que $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1 : X \rightarrow Z$. En déduire que la composition dans **hTop** est bien définie.

Exercice 1.8 (***). Montrer que la relation « avoir le même type d'homotopie » est une relation d'équivalence. *Attention : la transitivité n'est pas triviale.*

Exercice 1.9 (**). Le **cône** sur un espace X est l'espace $CX = (X \times [0, 1]) / (X \times \{1\})$. Montrer que CX est contractile pour tout espace X .

Exercice 1.10 (***). La **suspension** de X est $\Sigma X = CX / (X \times \{0\})$, ou de façon équivalente $\Sigma X = (X \times [0, 1]) / \sim$ où $(x, 0) \sim (x', 0)$ et $(x, 1) \sim (x', 1)$ pour tous x, x' . Montrer que $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$.

Chapitre 2

Le groupe fondamental — définition et premières propriétés

Le groupe fondamental est le premier et le plus accessible des invariants algébriques associés à un espace topologique. Introduit par Poincaré en 1895, il encode l'information sur les lacets que l'on peut tracer dans un espace, à déformation continue près.

2.1 Chemins et lacets

Définition 2.1 (Chemin). Un **chemin** dans un espace topologique X est une application continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$. Le point $\gamma(0)$ est l'**origine** et $\gamma(1)$ est l'**extrémité** du chemin. On dit que γ est un chemin **de** $\gamma(0)$ **à** $\gamma(1)$.

Définition 2.2 (Lacet). Un **lacet** basé en $x_0 \in X$ est un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tel que $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$. L'ensemble des lacets basés en x_0 est noté $\Omega(X, x_0)$.

Définition 2.3 (Chemin inverse et chemin constant). Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ un chemin.

- (i) Le **chemin inverse** de γ est $\bar{\gamma} : [0, 1] \rightarrow X$ défini par $\bar{\gamma}(t) = \gamma(1 - t)$.
- (ii) Le **chemin constant** en x_0 est $c_{x_0} : [0, 1] \rightarrow X$ défini par $c_{x_0}(t) = x_0$ pour tout t .

Définition 2.4 (Concaténation de chemins). Soient $\gamma, \delta : [0, 1] \rightarrow X$ deux chemins tels que $\gamma(1) = \delta(0)$. La **concaténation** (ou **produit**) de γ et δ est le chemin $\gamma \cdot \delta : [0, 1] \rightarrow X$ défini par

$$(\gamma \cdot \delta)(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \delta(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Ce chemin est continu par le lemme de recollement.

Remarque 2.5. Attention à la convention : $\gamma \cdot \delta$ signifie « parcourir d'abord γ , puis δ ». Certains auteurs utilisent la convention opposée. Notre convention est celle de Hatcher et de la plupart des ouvrages modernes.

Lemme 2.6 (Lemme de recollement). Soient $X = A \cup B$ où A et B sont des sous-ensembles fermés de X . Si $f : A \rightarrow Y$ et $g : B \rightarrow Y$ sont des applications continues telles que $f|_{A \cap B} = g|_{A \cap B}$, alors l'application $h : X \rightarrow Y$ définie par $h(x) = f(x)$ si $x \in A$ et $h(x) = g(x)$ si $x \in B$ est continue.

Démonstration. Soit $F \subseteq Y$ un fermé. Alors $h^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cup g^{-1}(F)$. Or $f^{-1}(F)$ est fermé dans A , et comme A est fermé dans X , $f^{-1}(F)$ est fermé dans X . De même pour $g^{-1}(F)$. La réunion de deux fermés étant fermée, $h^{-1}(F)$ est fermé. $\square$

Ce lemme justifie rigoureusement la continuité de la concaténation de chemins dans la efdef :concatenation, puisque $[0, \frac{1}{2}]$ et $[\frac{1}{2}, 1]$ sont fermés dans $[0, 1]$ et les deux morceaux coïncident en $t = \frac{1}{2}$.

2.2 Homotopie de chemins

Définition 2.7 (Homotopie de chemins à extrémités fixées). Soient $\gamma, \delta : [0, 1] \rightarrow X$ deux chemins ayant mêmes extrémités : $\gamma(0) = \delta(0) = x_0$ et $\gamma(1) = \delta(1) = x_1$. On dit que γ et δ sont **homotopes à extrémités fixées**, et on note $\gamma \simeq \delta \text{ rel } \partial$, s'il existe une application continue $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ vérifiant :

- (i) $H(s, 0) = \gamma(s)$ et $H(s, 1) = \delta(s)$ pour tout $s \in [0, 1]$,
- (ii) $H(0, t) = x_0$ et $H(1, t) = x_1$ pour tout $t \in [0, 1]$.

On note $[\gamma]$ la classe d'homotopie de γ à extrémités fixées.

Proposition 2.8. La relation $\simeq_{\partial}$ (homotopie de chemins à extrémités fixées) est une relation d'équivalence.

Démonstration. La vérification est analogue à celle de la efprop :homotopie-equivalence : la réflexivité utilise l'homotopie constante $H(s, t) = \gamma(s)$, la symétrie utilise $\overline{H}(s, t) = H(s, 1 - t)$, et la transitivité utilise la concaténation des homotopies en reparamétrant le paramètre t . Dans chaque cas, les conditions aux bords $H(0, t) = x_0$ et $H(1, t) = x_1$ sont préservées. $\square$

2.3 Structure de groupe sur les classes de lacets

Lemme 2.9 (Associativité à homotopie près). Soient γ, δ, ϵ trois chemins composables dans X . Alors

$$(\gamma \cdot \delta) \cdot \epsilon \simeq \gamma \cdot (\delta \cdot \epsilon) \text{ rel } \partial.$$

Démonstration. Posons $\alpha = (\gamma \cdot \delta) \cdot \epsilon$ et $\beta = \gamma \cdot (\delta \cdot \epsilon)$. On calcule explicitement :

$$\alpha(s) = \begin{cases} \gamma(4s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{4}, \\ \delta(4s-1) & \text{si } \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ \epsilon(2s-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \end{cases} \quad \beta(s) = \begin{cases} \gamma(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ \delta(4s-2) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq \frac{3}{4}, \\ \epsilon(4s-3) & \text{si } \frac{3}{4} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

L'homotopie est donnée par une reparamétrisation linéaire. Définissons $H : [0, 1]^2 \rightarrow X$ par

$$H(s, t) = \begin{cases} \gamma\left(\frac{4s}{t+1}\right) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{t+1}{4}, \\ \delta(4s-t-1) & \text{si } \frac{t+1}{4} \leq s \leq \frac{t+2}{4}, \\ \epsilon\left(\frac{4s-t-2}{2-t}\right) & \text{si } \frac{t+2}{4} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

On vérifie que H est continue (par le lemme de recollement, les trois morceaux coïncidant sur les segments de jonction), que $H(s, 0) = \alpha(s)$, $H(s, 1) = \beta(s)$, et que les extrémités sont fixées : $H(0, t) = \gamma(0)$ et $H(1, t) = \epsilon(1)$. $\square$

Lemme 2.10 (Élément neutre à homotopie près). *Pour tout chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ d'origine x_0 et d'extrémité x_1 ,*

$$c_{x_0} \cdot \gamma \simeq \gamma \simeq \gamma \cdot c_{x_1} \text{ rel } \partial.$$

Démonstration. L'homotopie pour $c_{x_0} \cdot \gamma \simeq \gamma$ est

$$H(s, t) = \begin{cases} x_0 & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1-t}{2}, \\ \gamma\left(\frac{2s-1+t}{1+t}\right) & \text{si } \frac{1-t}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

La construction pour $\gamma \cdot c_{x_1} \simeq \gamma$ est analogue. $\square$

Lemme 2.11 (Inverse à homotopie près). *Pour tout chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ d'origine x_0 et d'extrémité x_1 ,*

$$\gamma \cdot \bar{\gamma} \simeq c_{x_0} \text{ rel } \partial \quad \text{et} \quad \bar{\gamma} \cdot \gamma \simeq c_{x_1} \text{ rel } \partial.$$

Démonstration. L'homotopie pour $\gamma \cdot \bar{\gamma} \simeq c_{x_0}$ est définie par

$$H(s, t) = \begin{cases} \gamma(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{t}{2}, \\ \gamma(t) & \text{si } \frac{t}{2} \leq s \leq 1 - \frac{t}{2}, \\ \gamma(2-2s) & \text{si } 1 - \frac{t}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Au temps $t = 0$, $H(s, 0) = \gamma(0) = x_0$ pour tout s (chemin constant). Au temps $t = 1$, $H(s, 1)$ parcourt γ sur $[0, \frac{1}{2}]$ puis $\bar{\gamma}$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$. La seconde assertion se traite de manière symétrique. $\square$

Théorème 2.12 (Structure de groupe du groupe fondamental). *Soit (X, x_0) un espace topologique pointé. L'ensemble des classes d'homotopie (à extrémités fixées) de lacets basés en x_0 , muni de l'opération*

$$[\gamma] \cdot [\delta] := [\gamma \cdot \delta],$$

*est un groupe, appelé **groupe fondamental** de X en x_0 et noté $\pi_1(X, x_0)$.*

Démonstration. Nous devons vérifier les quatre axiomes de groupe.

Bonne définition. Si $\gamma \simeq \gamma'$ et $\delta \simeq \delta'$ (à extrémités fixées), alors $\gamma \cdot \delta \simeq \gamma' \cdot \delta'$ à extrémités fixées. En effet, si H est une homotopie de γ à γ' et K une homotopie de δ à δ' , alors

$$L(s, t) = \begin{cases} H(2s, t) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ K(2s - 1, t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

est une homotopie de $\gamma \cdot \delta$ à $\gamma' \cdot \delta'$ (les deux morceaux se recollent en $s = \frac{1}{2}$ car $H(1, t) = x_0 = K(0, t)$ pour les lacets basés en x_0).

Associativité. C'est le eflm :associativité.

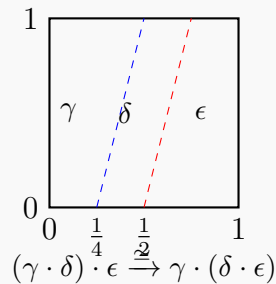
Élément neutre. La classe $[c_{x_0}]$ du lacet constant est l'élément neutre d'après le eflm :neutre.

Inverse. Pour tout lacet γ basé en x_0 , le lacet inverse $\bar{\gamma}$ vérifie $[\gamma] \cdot [\bar{\gamma}] = [c_{x_0}]$ et $[\bar{\gamma}] \cdot [\gamma] = [c_{x_0}]$ d'après le eflm :inverse. $\square$

Remarque 2.13. Le groupe $\pi_1(X, x_0)$ n'est en général *pas* abélien. Nous verrons que $\pi_1(S^1 \vee S^1)$ est le groupe libre à deux générateurs F_2 , qui est non abélien. En revanche, $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$ est abélien.

Remarque 2.14 (Interprétation géométrique des axiomes). La preuve de la structure de groupe sur $\pi_1(X, x_0)$ repose sur des reparamétrisations du paramètre $s \in [0, 1]$. Il est instructif de visualiser ces homotopies comme des déformations dans le carré $[0, 1]^2$:

Associativité : reparamétrisation



Le bord inférieur du carré correspond au découpage $(\gamma \cdot \delta) \cdot \epsilon$ et le bord supérieur au découpage $\gamma \cdot (\delta \cdot \epsilon)$. L'homotopie consiste à « glisser » continûment les points de coupure.

2.4 Fonctorialité du groupe fondamental

Définition 2.15 (Morphisme induit). Soit $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ une application continue pointée (i.e. $f(x_0) = y_0$). Le **morphisme induit** est l'application

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0), \quad [\gamma] \longmapsto [f \circ \gamma].$$

Proposition 2.16. *L'application f_* est bien définie et est un homomorphisme de groupes.*

Démonstration. Bonne définition. Si $\gamma \simeq \delta \text{ rel } \partial$ via une homotopie H , alors $f \circ H$ est une homotopie de $f \circ \gamma$ à $f \circ \delta$ à extrémités fixées.

Homomorphisme. Soient $[\gamma], [\delta] \in \pi_1(X, x_0)$. On a

$$f_*([\gamma] \cdot [\delta]) = f_*([\gamma \cdot \delta]) = [f \circ (\gamma \cdot \delta)].$$

Or $(f \circ (\gamma \cdot \delta))(s) = f((\gamma \cdot \delta)(s))$, et l'on vérifie immédiatement que $f \circ (\gamma \cdot \delta) = (f \circ \gamma) \cdot (f \circ \delta)$, ce qui donne $f_*([\gamma] \cdot [\delta]) = [f \circ \gamma] \cdot [f \circ \delta] = f_*([\gamma]) \cdot f_*([\delta])$. $\square$

Théorème 2.17 (Fonctorialité de π_1). *Le groupe fondamental π_1 définit un foncteur*

$$\pi_1 : \mathbf{Top}_* \longrightarrow \mathbf{Grp}$$

de la catégorie des espaces topologiques pointés vers la catégorie des groupes, au sens suivant :

- (i) $(\text{Id}_X)_* = \text{Id}_{\pi_1(X, x_0)}$ pour tout (X, x_0) .
- (ii) $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ pour toutes applications continues pointées $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ et $g : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$.

Démonstration. (i) Pour tout lacet γ basé en x_0 , $(\text{Id}_X)_*([\gamma]) = [\text{Id}_X \circ \gamma] = [\gamma]$.

(ii) Pour tout $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$,

$$(g \circ f)_*([\gamma]) = [(g \circ f) \circ \gamma] = [g \circ (f \circ \gamma)] = g_*([f \circ \gamma]) = g_*(f_*([\gamma])) = (g_* \circ f_*)([\gamma]). \quad \square$$

Le diagramme commutatif suivant résume la fonctorialité :

$$\begin{array}{ccccc} (X, x_0) & \xrightarrow{f} & (Y, y_0) & \xrightarrow{g} & (Z, z_0) \\ & \searrow^{g \circ f} & & & \\ & & (Z, z_0) & & \end{array} \quad \longmapsto \quad \begin{array}{ccccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, y_0) & \xrightarrow{g_*} & \pi_1(Z, z_0) \\ & \searrow^{(g \circ f)_*} & & & \\ & & \pi_1(Z, z_0) & & \end{array}$$

Corollaire 2.18. *Si $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ est un homéomorphisme, alors $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ est un isomorphisme de groupes.*

Démonstration. Si f est un homéomorphisme, f^{-1} est continue et $(f^{-1})_* \circ f_* = (f^{-1} \circ f)_* = (\text{Id}_X)_* = \text{Id}$. De même $f_* \circ (f^{-1})_* = \text{Id}$. $\square$

2.5 Changement de point base

Que se passe-t-il lorsqu'on change de point base ? Si X est connexe par arcs, les groupes fondamentaux en différents points base sont isomorphes, mais l'isomorphisme n'est pas canonique — il dépend du choix d'un chemin.

Théorème 2.19 (Isomorphisme de changement de point base). *Soit X un espace connexe par arcs et soient $x_0, x_1 \in X$. Pour tout chemin $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ de x_0 à x_1 , l'application*

$$\beta_\alpha : \pi_1(X, x_1) \longrightarrow \pi_1(X, x_0), \quad [\gamma] \longmapsto [\alpha \cdot \gamma \cdot \bar{\alpha}],$$

est un isomorphisme de groupes.

Démonstration. Homomorphisme. Soient $[\gamma], [\delta] \in \pi_1(X, x_1)$. On a

$$\begin{aligned} \beta_\alpha([\gamma] \cdot [\delta]) &= [\alpha \cdot (\gamma \cdot \delta) \cdot \bar{\alpha}] \\ &= [\alpha \cdot \gamma \cdot c_{x_1} \cdot \delta \cdot \bar{\alpha}] \\ &= [\alpha \cdot \gamma \cdot (\bar{\alpha} \cdot \alpha) \cdot \delta \cdot \bar{\alpha}] \\ &= [(\alpha \cdot \gamma \cdot \bar{\alpha}) \cdot (\alpha \cdot \delta \cdot \bar{\alpha})] \\ &= \beta_\alpha([\gamma]) \cdot \beta_\alpha([\delta]). \end{aligned}$$

Isomorphisme. L'application $\beta_{\bar{\alpha}} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ est un inverse : pour tout lacet γ basé en x_1 ,

$$\beta_{\bar{\alpha}}(\beta_\alpha([\gamma])) = [\bar{\alpha} \cdot (\alpha \cdot \gamma \cdot \bar{\alpha}) \cdot \alpha] = [(\bar{\alpha} \cdot \alpha) \cdot \gamma \cdot (\bar{\alpha} \cdot \alpha)] = [c_{x_1} \cdot \gamma \cdot c_{x_1}] = [\gamma].$$

Le calcul symétrique montre que $\beta_\alpha \circ \beta_{\bar{\alpha}} = \text{Id}$. □

Remarque 2.20. L'isomorphisme β_α dépend du choix du chemin α . Si $\alpha' : x_0 \rightarrow x_1$ est un autre chemin, alors $\beta_{\alpha'} = \iota_{[\alpha \cdot \bar{\alpha}']} \circ \beta_\alpha$ où ι_g désigne la conjugaison par g dans $\pi_1(X, x_0)$. En particulier, $\beta_\alpha = \beta_{\alpha'}$ si et seulement si $[\alpha \cdot \bar{\alpha}']$ est dans le centre de $\pi_1(X, x_0)$. Si $\pi_1(X, x_0)$ est abélien, l'isomorphisme est donc indépendant du chemin, et l'on peut parler de « $\pi_1(X)$ » sans ambiguïté.

Le diagramme suivant illustre le changement de point base :

$$\pi_1(X, x_0) \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta_{\bar{\alpha}}} \\ \xleftarrow{\beta_\alpha} \end{array} \pi_1(X, x_1)$$

2.6 Invariance homotopique de π_1

Théorème 2.21 (Invariance homotopique). *Soit $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ une application continue telle que f est une équivalence d'homotopie. Alors $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ est un isomorphisme de groupes (où $y_0 = f(x_0)$ et le point base au but est ajusté par un isomorphisme de changement de point base si nécessaire).*

Démonstration. Soit $g : Y \rightarrow X$ une inverse homotopique de f , de sorte que $g \circ f \simeq \text{Id}_X$ et $f \circ g \simeq \text{Id}_Y$.

Étape 1. Posons $x'_0 = g(f(x_0)) = g(y_0)$. L'homotopie $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ avec $H(\cdot, 0) = g \circ f$ et $H(\cdot, 1) = \text{Id}_X$ fournit un chemin $\alpha : t \mapsto H(x_0, t)$ de $x'_0 = g(y_0)$ à x_0 . Pour tout lacet γ basé en x_0 , le lacet $g \circ f \circ \gamma$ est basé en x'_0 , et la relation $g \circ f \simeq \text{Id}_X$ implique

$$[\alpha \cdot (g \circ f \circ \gamma) \cdot \bar{\alpha}] = [\gamma] \quad \text{dans } \pi_1(X, x_0).$$

Autrement dit, $\beta_\alpha \circ (g \circ f)_* = \text{Id}_{\pi_1(X, x_0)}$, soit encore $\beta_\alpha \circ g_* \circ f_* = \text{Id}$.

Étape 2. Un raisonnement identique appliqué à l'homotopie $f \circ g \simeq \text{Id}_Y$ fournit un chemin α' et l'égalité $\beta_{\alpha'} \circ f_* \circ g_* = \text{Id}_{\pi_1(Y, y_0)}$.

Étape 3. De l'étape 1, f_* est injective (car elle admet un inverse à gauche $\beta_\alpha \circ g_*$). De l'étape 2, f_* est surjective (car g_* admet un inverse à gauche $\beta_{\alpha'} \circ f_*$, donc g_* est injective, et l'étape 1 donne f_* surjective). Ainsi f_* est un isomorphisme. $\square$

Remarque 2.22. Le efthm :pi1-invariance-homotopique est un résultat extrêmement puissant. Il signifie que le groupe fondamental est un invariant du *type d'homotopie*, et pas seulement du type topologique. Pour calculer $\pi_1(X)$, on peut donc remplacer X par n'importe quel espace ayant le même type d'homotopie. Par exemple :

- $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \pi_1(S^{n-1})$, car S^{n-1} est un rétracte par déformation de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- $\pi_1(\text{cylindre plein}) = 0$, car le cylindre plein est contractile.
- $\pi_1(\text{bande de Möbius}) \cong \mathbb{Z}$, car la bande de Möbius se rétracte par déformation sur son cercle central.

Corollaire 2.23. *Si X est contractile, alors $\pi_1(X, x_0) = 0$ pour tout $x_0 \in X$.*

Démonstration. Un espace contractile a le type d'homotopie d'un point $\{*\}$. Or $\pi_1(\{*\}) = 0$. Par le efthm :pi1-invariance-homotopique, $\pi_1(X, x_0) \cong 0$. $\square$

2.7 Premiers calculs

2.7.1 Espaces simplement connexes

Définition 2.24 (Espace simplement connexe). Un espace topologique X est dit **simplement connexe** s'il est connexe par arcs et si $\pi_1(X, x_0) = 0$ pour un (donc pour tout) point $x_0 \in X$.

Proposition 2.25. *Pour tout $n \geq 1$, $\pi_1(\mathbb{R}^n) = 0$. Plus généralement, tout espace convexe de $\mathbb{R}^n$ est simplement connexe.*

Démonstration. $\mathbb{R}^n$ est contractile (efex :Rn-contractile), donc $\pi_1(\mathbb{R}^n) = 0$ par le efcor :contractile-pi1-trivial. $\square$

Proposition 2.26. *Pour $n \geq 2$, la sphère S^n est simplement connexe : $\pi_1(S^n) = 0$.*

Démonstration. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow S^n$ un lacet basé en le pôle nord N . Pour $n \geq 2$, l'image de γ ne peut remplir S^n tout entier (un argument de dimension ou de mesure le montre). Plus rigoureusement, on utilise le résultat suivant : si U_1, U_2 sont deux ouverts simplement connexes de X tels que $X = U_1 \cup U_2$ et $U_1 \cap U_2$ est connexe par arcs, alors X est simplement connexe (conséquence du théorème de van Kampen). On prend $U_1 = S^n \setminus \{S\}$ et $U_2 = S^n \setminus \{N\}$ (où S est le pôle sud). Chacun est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ (par projection stéréographique), donc simplement connexe. Leur intersection $S^n \setminus \{N, S\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1}$, qui est connexe par arcs pour $n \geq 2$. Par van Kampen, $\pi_1(S^n) = 0$. $\square$

2.7.2 Le groupe fondamental du cercle

Le résultat suivant est le premier calcul non trivial de groupe fondamental et l'un des théorèmes fondateurs de la topologie algébrique.

Théorème 2.27 (Groupe fondamental du cercle). *Le groupe fondamental du cercle est infini cyclique :*

$$\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}.$$

L'isomorphisme envoie la classe $[\omega_n]$ du lacet $\omega_n(t) = e^{2\pi i n t}$ (qui parcourt n fois le cercle) sur l'entier n .

La démonstration repose sur la théorie des revêtements, dont nous utilisons ici les éléments essentiels.

Définition 2.28 (Revêtement). Un **revêtement** d'un espace X est une application continue $p : \tilde{X} \rightarrow X$ telle que tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert U dont l'image réciproque $p^{-1}(U)$ est une réunion disjointe d'ouverts, chacun envoyé homéomorphiquement sur U par p .

Exemple 2.29. L'application $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ définie par $p(t) = e^{2\pi i t}$ est un revêtement. La fibre $p^{-1}(z)$ au-dessus de chaque point $z \in S^1$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Lemme 2.30 (Relèvement des chemins). *Soient $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement et $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ un chemin d'origine x_0 . Pour tout $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, il existe un unique chemin $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ tel que $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$ et $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.*

Idée de la preuve. Par compacité de $[0, 1]$, on peut trouver une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ telle que chaque $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ est contenu dans un ouvert trivialement recouvert. On relève alors le chemin morceau par morceau, en utilisant l'unicité sur chaque intervalle pour garantir la cohérence du recollement. $\square$

Lemme 2.31 (Relèvement des homotopies). *Soient $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement et $H : [0, 1]^2 \rightarrow X$ une homotopie à extrémités fixées entre deux chemins. Si $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(H(0, 0))$, alors il existe un unique relèvement $\tilde{H} : [0, 1]^2 \rightarrow \tilde{X}$ avec $\tilde{H}(0, 0) = \tilde{x}_0$ et $p \circ \tilde{H} = H$. De plus, $\tilde{H}$ est une homotopie à extrémités fixées.*

Preuve du efthm :pi1-S1. Considérons le revêtement $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $p(t) = e^{2\pi it}$, et posons $\tilde{x}_0 = 0 \in p^{-1}(1)$.

Construction de l'homomorphisme. Soit $[\gamma] \in \pi_1(S^1, 1)$. Par le eflem :relevement-chemins, il existe un unique relèvement $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\tilde{\gamma}(0) = 0$ et $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. Comme γ est un lacet, $\tilde{\gamma}(1) \in p^{-1}(1) = \mathbb{Z}$. On définit

$$\deg : \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad [\gamma] \longmapsto \tilde{\gamma}(1).$$

Bonne définition. Si $\gamma \simeq \delta \text{ rel } \partial$ via H , le eflem :relevement-homotopies fournit un relèvement $\tilde{H}$ qui est une homotopie à extrémités fixées entre $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\delta}$. En particulier, $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{H}(1, 0) = \tilde{H}(1, 1) = \tilde{\delta}(1)$.

Homomorphisme. Si $\tilde{\gamma}$ relève γ avec $\tilde{\gamma}(0) = 0$ et $\tilde{\gamma}(1) = m$, et $\tilde{\delta}$ relève δ avec $\tilde{\delta}(0) = 0$ et $\tilde{\delta}(1) = n$, alors le chemin

$$\widetilde{\gamma \cdot \delta}(t) = \begin{cases} \tilde{\gamma}(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ m + \tilde{\delta}(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

relève $\gamma \cdot \delta$ avec $\widetilde{\gamma \cdot \delta}(0) = 0$ et $\widetilde{\gamma \cdot \delta}(1) = m + n$. Donc $\deg([\gamma] \cdot [\delta]) = m + n = \deg([\gamma]) + \deg([\delta])$.

Surjectivité. Pour $n \in \mathbb{Z}$, le lacet $\omega_n(t) = e^{2\pi int}$ se relève en $\tilde{\omega}_n(t) = nt$, et $\deg([\omega_n]) = n$.

Injectivité. Supposons $\deg([\gamma]) = 0$, i.e. $\tilde{\gamma}(1) = 0 = \tilde{\gamma}(0)$. Le relèvement $\tilde{\gamma}$ est donc un lacet dans $\mathbb{R}$ basé en 0. Comme $\mathbb{R}$ est simplement connexe, $\tilde{\gamma} \simeq c_0 \text{ rel } \partial$ dans $\mathbb{R}$. En composant avec p , on obtient $\gamma = p \circ \tilde{\gamma} \simeq p \circ c_0 = c_1 \text{ rel } \partial$ dans S^1 . Donc $[\gamma] = [c_1]$ est l'élément neutre. $\square$

Remarque 2.32 (Signification géométrique). L'isomorphisme $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ a une signification géométrique limpide : un lacet sur le cercle est entièrement déterminé (à homotopie près) par son **nombre d'enroulement**, c'est-à-dire le nombre de fois qu'il fait le tour du cercle (compté avec signe). Le générateur $[\omega_1]$ correspond à un tour dans le sens trigonométrique, et $[\omega_{-1}]$ à un tour dans le sens horaire.

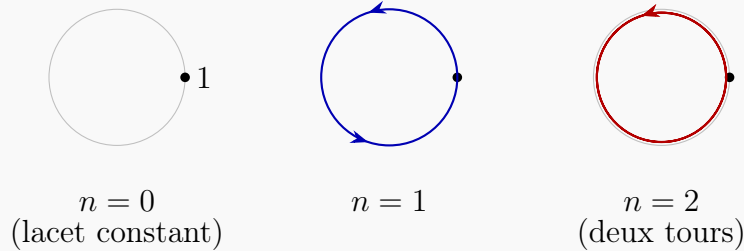


FIGURE 2.1 – Lacets sur le cercle classifiés par le nombre d'enroulement.

Corollaire 2.33. *Le cercle S^1 n'est pas simplement connexe. En particulier, S^1 n'est pas contractile.*

Démonstration. On a $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \neq 0$, donc S^1 n'est pas simplement connexe. Un espace contractile étant simplement connexe (efcor :contractile-pi1-trivial), S^1 n'est pas contractile. $\square$

2.8 Applications du groupe fondamental

2.8.1 Théorème de Brouwer en dimension 2

Théorème 2.34 (Pas de rétraction de D^2 sur S^1). *Il n'existe pas de rétraction continue $r : D^2 \rightarrow S^1$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe une rétraction $r : D^2 \rightarrow S^1$, i.e. une application continue telle que $r \circ \iota = \text{Id}_{S^1}$, où $\iota : S^1 \hookrightarrow D^2$ est l'inclusion. En appliquant le foncteur π_1 (avec point base $1 \in S^1$), on obtient le diagramme commutatif

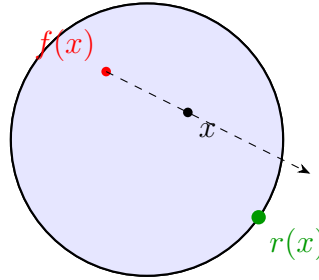
$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Id} & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \pi_1(S^1, 1) & \xrightarrow{\iota_*} & \pi_1(D^2, 1) & \xrightarrow{r_*} & \pi_1(S^1, 1) \end{array}$$

avec $r_* \circ \iota_* = (\text{Id}_{S^1})_* = \text{Id}$. Or $\pi_1(D^2, 1) = 0$ (car D^2 est contractile) et $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$. L'identité de $\mathbb{Z}$ se factorise donc à travers le groupe trivial, ce qui est impossible. $\square$

Théorème 2.35 (Théorème du point fixe de Brouwer en dimension 2). *Toute application continue $f : D^2 \rightarrow D^2$ possède un point fixe.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que $f(x) \neq x$ pour tout $x \in D^2$. On construit une rétraction $r : D^2 \rightarrow S^1$ de la manière suivante : pour chaque $x \in D^2$, on considère la demi-droite partant de $f(x)$ et passant par x ; cette demi-droite coupe le cercle S^1 en un unique point $r(x)$.

Plus explicitement, $r(x)$ est l'unique point de S^1 de la forme $x + t(x - f(x))$ avec $t \geq 0$ et $\|x + t(x - f(x))\| = 1$. Cette application est bien définie et continue (car $f(x) \neq x$), et si $x \in S^1$, la demi-droite sort immédiatement du disque, donc $r(x) = x$. Ainsi r est une rétraction de D^2 sur S^1 , ce qui contredit le thm :pas-retraction. $\square$



Construction de la rétraction

FIGURE 2.2 – Démonstration par l'absurde du théorème de Brouwer.

2.8.2 Théorème de Borsuk–Ulam en dimension 1

Théorème 2.36 (Borsuk–Ulam en dimension 1). *Pour toute application continue $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$, il existe un point $x \in S^1$ tel que $f(x) = f(-x)$.*

Démonstration. Posons $g(x) = f(x) - f(-x)$. Alors g est continue et $g(-x) = f(-x) - f(x) = -g(x)$. Si $g(x_0) = 0$ pour un x_0 , on a terminé. Sinon, g ne s'annule pas, et le signe

de g est opposé en deux points antipodaux. Par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à un arc reliant x_0 à $-x_0$, g doit s'annuler, contradiction. $\square$

Corollaire 2.37 (Ham sandwich en dimension 1). *Pour toute application continue $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$, il existe un diamètre du cercle dont les deux extrémités ont la même image par f . Autrement dit, il est toujours possible de couper un « sandwich unidimensionnel » en deux parts égales.*

Remarque 2.38. Le théorème de Borsuk–Ulam se généralise en toute dimension : pour toute application continue $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, il existe $x \in S^n$ tel que $f(x) = f(-x)$. La preuve en dimension supérieure fait appel à l'homologie ou à la cohomologie.

2.8.3 Application à l'algèbre : théorème fondamental de l'algèbre

Théorème 2.39 (Théorème fondamental de l'algèbre). *Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[z]$ de degré $n \geq 1$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.*

Esquisse de preuve via π_1 . On peut supposer $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ unitaire. Supposons par l'absurde que P ne s'annule pas. Pour $r > 0$, considérons le lacet $\gamma_r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ défini par $\gamma_r(t) = P(re^{2\pi it})$.

Pour r suffisamment grand, le terme dominant z^n l'emporte, et γ_r est homotope au lacet $t \mapsto r^n e^{2\pi i n t}$, qui a pour classe $n \in \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, P(r)) \cong \mathbb{Z}$ (non triviale car $n \geq 1$).

Pour $r = 0$, γ_0 est le lacet constant en $a_0 \neq 0$, de classe $0 \in \mathbb{Z}$.

Or la famille $r \mapsto \gamma_r$ fournit une homotopie continue (dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ par hypothèse), ce qui impliquerait $n = 0$ dans $\mathbb{Z}$, contradiction. $\square$

2.9 Le groupe fondamental du produit

Théorème 2.40. *Soient (X, x_0) et (Y, y_0) deux espaces topologiques pointés. Alors*

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

Démonstration. Les projections $p_X : X \times Y \rightarrow X$ et $p_Y : X \times Y \rightarrow Y$ induisent un homomorphisme

$$\Phi = ((p_X)_*, (p_Y)_*) : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

Réciproquement, si $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ est un lacet basé en x_0 et $\delta : [0, 1] \rightarrow Y$ est un lacet basé en y_0 , le lacet $(\gamma, \delta) : t \mapsto (\gamma(t), \delta(t))$ est un lacet basé en (x_0, y_0) dans $X \times Y$. L'application $\Psi : ([\gamma], [\delta]) \mapsto [(\gamma, \delta)]$ est un homomorphisme et on vérifie aisément que Φ et Ψ sont inverses l'un de l'autre. $\square$

Corollaire 2.41. *Le groupe fondamental du tore $T^2 = S^1 \times S^1$ est*

$$\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^2.$$

Plus généralement, $\pi_1(T^n) \cong \mathbb{Z}^n$.

Le diagramme commutatif suivant résume la situation pour le tore :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(T^2, (1, 1)) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ (p_1)_* \downarrow & & \downarrow \text{pr}_1 \\ \pi_1(S^1, 1) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z} \end{array}$$

Remarque 2.42. Pour un produit infini, on a encore $\pi_1(\prod_{i \in I} X_i) \cong \prod_{i \in I} \pi_1(X_i)$, pourvu que les espaces soient pointés et le produit muni de la topologie produit. Cependant, pour un bouquet infini $\bigvee_{i \in I} X_i$, le résultat est plus délicat et fait intervenir le produit libre (éventuellement non dénombrable) des groupes fondamentaux.

Exemple 2.43 (Groupe fondamental de la bouteille de Klein). La bouteille de Klein K est obtenue en identifiant les bords d'un carré via le mot $aba^{-1}b$ (au lieu de $aba^{-1}b^{-1}$ pour le tore). Par le théorème de van Kampen, on obtient la présentation

$$\pi_1(K) \cong \langle a, b \mid abab^{-1} = 1 \rangle.$$

Ce groupe est non abélien et contient $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ comme quotients. La bouteille de Klein n'est donc homéomorphe ni au tore (dont le groupe fondamental est $\mathbb{Z}^2$) ni à $\mathbb{RP}^2$ (dont le groupe fondamental est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

Exemple 2.44 (Résumé des groupes fondamentaux classiques). Voici un tableau récapitulatif des groupes fondamentaux des espaces les plus courants :

Espace X	$\pi_1(X)$	Commentaire
$\mathbb{R}^n$	0	contractile
D^n	0	contractile
S^1	$\mathbb{Z}$	engendré par $[\omega_1]$
S^n ($n \geq 2$)	0	simplement connexe
$T^n = (S^1)^n$	$\mathbb{Z}^n$	produit
$\mathbb{RP}^n$ ($n \geq 2$)	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	revêtement par S^n
$S^1 \vee S^1$	$\mathbb{Z} * \mathbb{Z} = F_2$	bouquet, groupe libre
Σ_g (genre g)	$\langle a_i, b_i \mid \prod [a_i, b_i] \rangle$	surface orientable

2.10 Espaces simplement connexes et relèvement

Proposition 2.45 (Critère de simple connexité). Soit X un espace connexe par arcs. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) X est simplement connexe.
- (ii) Deux chemins quelconques de mêmes extrémités dans X sont homotopes à extrémités fixées.
- (iii) Tout lacet dans X est homotope à un point.

(iv) Pour tout revêtement $p : \tilde{X} \rightarrow X$, toute application continue $f : [0, 1] \rightarrow X$ admet un relèvement (et celui-ci est unique une fois le point de départ fixé).

Démonstration. (i) $\Leftrightarrow$ (iii) est la définition (un lacet homotope à un point est précisément un élément trivial de π_1).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Un lacet γ et le chemin constant c_{x_0} sont deux chemins de mêmes extrémités x_0 , donc $\gamma \simeq c_{x_0}$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) : Si γ et δ vont de x_0 à x_1 , le lacet $\gamma \cdot \bar{\delta}$ est homotope au point, i.e. $\gamma \cdot \bar{\delta} \simeq c_{x_0}$. En composant à droite par δ , on obtient $\gamma \simeq \delta$.

(i) $\Rightarrow$ (iv) : C'est une conséquence du théorème de relèvement des chemins (eflem :relevement-chemins).

(iv) $\Rightarrow$ (i) : On considère le revêtement universel et on montre que la trivialité du relèvement implique $\pi_1 = 0$. $\square$

2.11 Exercices

Exercice 2.1 (★★). Soit $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble convexe. Montrer directement (sans utiliser la contractilité) que $\pi_1(C, x_0) = 0$ pour tout $x_0 \in C$. *Indication : utiliser l'homotopie rectiligne $H(s, t) = (1 - t)\gamma(s) + t\delta(s)$.*

Exercice 2.2 (★★). Soient X et Y deux espaces homéomorphes et $f : X \rightarrow Y$ un homéomorphisme. Montrer que $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ est un isomorphisme. En déduire que $\mathbb{R}$ et S^1 ne sont pas homéomorphes.

Exercice 2.3 (★★). Montrer que $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ ne sont pas homéomorphes en utilisant le groupe fondamental. *Indication : utiliser la technique de l'espace épointé (efex :motivation-R2-R3).*

Exercice 2.4 (★★). Soit A un rétracte de X . Montrer que $\iota_* : \pi_1(A, a_0) \rightarrow \pi_1(X, a_0)$ est injectif. En déduire que si $\pi_1(X, x_0) = 0$, alors $\pi_1(A, a_0) = 0$ pour tout rétracte A .

Exercice 2.5 (★★★). Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un lacet basé en 1. Le **nombre d'enroulement** de γ autour de 0 est l'entier

$$n(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt$$

(lorsque γ est de classe $\mathcal{C}^1$). Montrer que $n(\gamma, 0) = \deg([\gamma])$ où $\deg$ est l'isomorphisme du efthm :pi1-S1 (via la rétraction de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sur S^1).

Exercice 2.6 (★★★). Donner une preuve détaillée du efthm :pi1-produit. Vérifier soigneusement que Φ et Ψ sont des homomorphismes et qu'ils sont inverses l'un de l'autre.

Exercice 2.7 (★★). Soit $X \vee Y = (X \sqcup Y)/(x_0 \sim y_0)$ le bouquet de deux espaces pointés. Montrer que si X et Y sont des CW-complexes, le morphisme naturel

$$\pi_1(X, x_0) * \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1(X \vee Y, *)$$

est un isomorphisme (théorème de van Kampen appliqué au bouquet). En déduire que $\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, le groupe libre à deux générateurs.

Exercice 2.8 ($\star\star\star$). La surface orientable compacte Σ_g de genre $g \geq 1$ admet une CW-structure avec une 0-cellule, $2g$ arêtes $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$, et une 2-cellule attachée via le mot $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$. En utilisant le théorème de van Kampen, montrer que

$$\pi_1(\Sigma_g) \cong \left\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \left| \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1 \right. \right\rangle.$$

En déduire que $\pi_1(\Sigma_g)^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}^{2g}$, et que les surfaces Σ_g et Σ_h ne sont pas homéomorphes si $g \neq h$.

Exercice 2.9 ($\star\star\star$). En utilisant la CW-structure de $\mathbb{RP}^2$ décrite à l'ex :CW-RP2 et le théorème de van Kampen, montrer que $\pi_1(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En déduire que $\mathbb{RP}^2$ n'est pas simplement connexe et que la sphère S^2 est son revêtement universel.

Exercice 2.10 ($\star\star$). Soit $f : S^1 \rightarrow S^1$ une application continue. Le **degré** de f est l'entier $d \in \mathbb{Z}$ tel que $f_* : \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(S^1)$ soit la multiplication par d (via l'identification $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$). Montrer que :

- (a) Si f est un homéomorphisme, alors $\deg(f) = \pm 1$.
- (b) Si f n'est pas surjective, alors $\deg(f) = 0$.
- (c) $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$.
- (d) L'application antipodale $a : S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto -z$, est de degré 1.

Chapitre 3

Théorème de Van Kampen

Contents

1.1	Espaces topologiques, continuité, homéomorphismes	10
1.2	Connexité et connexité par arcs	11
1.3	Compacité et espaces de Hausdorff	12
1.4	Homotopie entre applications	13
1.5	Rétractes et rétractes par déformation	14
1.6	CW-complexes	15
1.7	La catégorie homotopique	17
1.8	Motivations : pourquoi des invariants algébriques ?	17
1.9	Exercices	19

Le théorème de Seifert–Van Kampen constitue l’outil fondamental pour le calcul effectif du groupe fondamental d’un espace topologique. Il exprime le groupe fondamental d’une réunion $X = U_1 \cup U_2$ d’ouverts en termes des groupes fondamentaux de U_1 , U_2 et $U_1 \cap U_2$. Pour énoncer ce théorème dans toute sa généralité, nous aurons besoin des notions de produit libre et de produit libre amalgamé de groupes.

3.1 Produit libre de groupes

Définition 3.1 (Produit libre). Soient $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de groupes. Le *produit libre* $\ast_{\alpha \in A} G_\alpha$ est un groupe G muni de morphismes $\iota_\alpha : G_\alpha \rightarrow G$ satisfaisant la *propriété universelle* suivante : pour tout groupe H et toute famille de morphismes $\varphi_\alpha : G_\alpha \rightarrow H$, il existe un unique morphisme $\Phi : G \rightarrow H$ tel que $\Phi \circ \iota_\alpha = \varphi_\alpha$ pour tout $\alpha \in A$.

La propriété universelle se résume par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 G_\alpha & \xrightarrow{\iota_\alpha} & \ast_{\alpha \in A} G_\alpha \\
 & \searrow \varphi_\alpha & \downarrow \exists! \Phi \\
 & & H
 \end{array}$$

Proposition 3.2 (Existence et unicité du produit libre). *Le produit libre existe et est unique à isomorphisme unique près.*

Démonstration. Unicité. Supposons que $(G, (\iota_\alpha))$ et $(G', (\iota'_\alpha))$ satisfassent tous deux la propriété universelle. En appliquant la propriété universelle de G à la famille (ι'_α) , on obtient $\Phi: G \rightarrow G'$. Symétriquement, on obtient $\Psi: G' \rightarrow G$. Alors $\Psi \circ \Phi: G \rightarrow G$ vérifie $(\Psi \circ \Phi) \circ \iota_\alpha = \iota_\alpha$ pour tout α . Par unicité dans la propriété universelle (appliquée à $H = G$ et $\varphi_\alpha = \iota_\alpha$), on a $\Psi \circ \Phi = \text{Id}_G$. De même $\Phi \circ \Psi = \text{Id}_{G'}$.

Existence. On considère l'ensemble des *mots réduits* en les éléments des G_α . Un mot est une suite finie $(g_1, g_2, \dots, g_n)$ où chaque $g_i \in G_{\alpha_i} \setminus \{e_{\alpha_i}\}$ et $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ pour tout i . Le mot vide représente l'élément neutre. La multiplication est donnée par concaténation suivie de réduction (si les dernières lettres du premier mot et les premières du second proviennent du même facteur, on les multiplie dans ce facteur, et on élimine le résultat s'il est trivial). On vérifie que cela définit une structure de groupe satisfaisant la propriété universelle. $\square$

Notation 3.3. Pour deux groupes G et H , on note $G * H$ leur produit libre. Plus généralement, pour une famille finie, on écrit $G_1 * G_2 * \dots * G_n$.

Exemple 3.4 (Produit libre $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$). Le produit libre $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ est le *groupe libre à deux générateurs*, noté F_2 . Ses éléments sont les mots réduits en $a^{\pm 1}$ et $b^{\pm 1}$, par exemple $a^2 b^{-1} a b^3$. Ce groupe est non abélien : $ab \neq ba$.

Exemple 3.5 (Produit libre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$). Le produit libre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est isomorphe au groupe modulaire $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$. Si a et b désignent les générateurs respectifs de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, les éléments de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sont les mots réduits alternant a et des puissances de b (c'est-à-dire b ou $b^2 = b^{-1}$).

Remarque 3.6 (Produit libre et abélianisation). L'abélianisé du produit libre est le produit direct : $\left(\ast_{\alpha} G_{\alpha} \right)^{\text{ab}} \cong \bigoplus_{\alpha} G_{\alpha}^{\text{ab}}$.

3.2 Produit libre amalgamé

Définition 3.7 (Produit libre amalgamé). Soient G_1, G_2 des groupes et K un groupe muni de morphismes $j_1: K \rightarrow G_1$ et $j_2: K \rightarrow G_2$. Le *produit libre amalgamé* de G_1 et G_2 au-dessus de K , noté $G_1 *_K G_2$, est le groupe défini par la propriété universelle suivante : c'est un groupe G muni de morphismes $\iota_1: G_1 \rightarrow G$ et $\iota_2: G_2 \rightarrow G$ tels que $\iota_1 \circ j_1 = \iota_2 \circ j_2$, et universel pour cette propriété. Autrement dit, pour tout groupe H et tous morphismes $\varphi_1: G_1 \rightarrow H$, $\varphi_2: G_2 \rightarrow H$ vérifiant $\varphi_1 \circ j_1 = \varphi_2 \circ j_2$, il existe un unique morphisme $\Phi: G \rightarrow H$ tel que $\Phi \circ \iota_i = \varphi_i$.

En langage catégorique, $G_1 *_K G_2$ est le *pushout* (colimite cocartésienne) dans la

catégorie des groupes :

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{j_1} & G_1 \\ j_2 \downarrow & \lrcorner & \downarrow \iota_1 \\ G_2 & \xrightarrow{\iota_2} & G_1 *_K G_2 \end{array}$$

Proposition 3.8 (Construction du produit libre amalgamé). *Le produit libre amalgamé $G_1 *_K G_2$ est isomorphe au quotient*

$$G_1 *_K G_2 \cong (G_1 * G_2) / N$$

où N est le sous-groupe normal engendré par les éléments $\{j_1(k) j_2(k)^{-1} \mid k \in K\}$.

Démonstration. Notons $G = (G_1 * G_2) / N$ et $\pi: G_1 * G_2 \rightarrow G$ la projection canonique. Posons $\iota_i = \pi \circ \iota'_i$ où $\iota'_i: G_i \hookrightarrow G_1 * G_2$ est l'inclusion canonique. Par construction, pour tout $k \in K$, on a $\iota_1(j_1(k)) = \iota_2(j_2(k))$ dans G .

Soit H un groupe et $\varphi_i: G_i \rightarrow H$ des morphismes avec $\varphi_1 \circ j_1 = \varphi_2 \circ j_2$. Par la propriété universelle du produit libre, il existe un unique $\Phi': G_1 * G_2 \rightarrow H$ avec $\Phi' \circ \iota'_i = \varphi_i$. Alors $\Phi'(j_1(k) j_2(k)^{-1}) = \varphi_1(j_1(k)) \varphi_2(j_2(k))^{-1} = e$, donc $N \subset \ker \Phi'$. Par passage au quotient, on obtient $\Phi: G \rightarrow H$ avec les propriétés requises. L'unicité découle de celle pour le produit libre. $\square$

Exemple 3.9 (Présentation par générateurs et relations). Si $G_1 = \langle S_1 \mid R_1 \rangle$ et $G_2 = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$ (avec $S_1 \cap S_2 = \emptyset$), et K est engendré par des éléments dont les images dans G_1 et G_2 sont $w_1^{(i)}$ et $w_2^{(i)}$ respectivement, alors

$$G_1 *_K G_2 = \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup \{w_1^{(i)} = w_2^{(i)}\} \rangle.$$

3.3 Énoncé du théorème de Van Kampen

Théorème 3.10 (Seifert–Van Kampen). *Soit X un espace topologique, et soient $U_1, U_2 \subset X$ des ouverts connexes par arcs tels que $X = U_1 \cup U_2$ et $U_0 = U_1 \cap U_2$ est connexe par arcs et non vide. Fixons un point base $x_0 \in U_0$, et notons $j_k: \pi_1(U_0, x_0) \rightarrow \pi_1(U_k, x_0)$ et $\iota_k: \pi_1(U_k, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ les morphismes induits par les inclusions. Alors le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U_0, x_0) & \xrightarrow{j_1} & \pi_1(U_1, x_0) \\ j_2 \downarrow & \lrcorner & \downarrow \iota_1 \\ \pi_1(U_2, x_0) & \xrightarrow{\iota_2} & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

est un carré cocartésien (pushout) dans la catégorie des groupes. Autrement dit,

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U_1, x_0) *_{\pi_1(U_0, x_0)} \pi_1(U_2, x_0).$$

Remarque 3.11 (Version groupoïde). R. Brown a donné une version du théorème en termes de groupoïdes fondamentaux. Si $A \subset X$ est un sous-ensemble qui rencontre chaque composante connexe par arcs de U_0 , U_1 , U_2 et X , alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(U_0, A \cap U_0) & \longrightarrow & \Pi_1(U_1, A \cap U_1) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \Pi_1(U_2, A \cap U_2) & \longrightarrow & \Pi_1(X, A) \end{array}$$

est un pushout dans la catégorie des groupoïdes. Cette version permet de traiter le cas où U_0 n'est pas connexe par arcs.

Corollaire 3.12. *Si U_0 est simplement connexe, alors $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$.*

Démonstration. Si $\pi_1(U_0, x_0) = \{e\}$, les morphismes j_1, j_2 sont triviaux, et le produit libre amalgamé au-dessus du groupe trivial est simplement le produit libre. $\square$

3.4 Preuve du théorème de Van Kampen

Preuve du théorème 3.10. Notons $G = \pi_1(U_1, x_0) *_{\pi_1(U_0, x_0)} \pi_1(U_2, x_0)$ le produit libre amalgamé. Par la propriété universelle du pushout, les morphismes ι_k induisent un unique morphisme

$$\Phi: G \longrightarrow \pi_1(X, x_0).$$

Nous devons montrer que Φ est un isomorphisme. La preuve comporte deux étapes : la surjectivité et l'injectivité.

Étape 1 : Surjectivité de Φ . Soit $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, où $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ est un lacet basé en x_0 . Comme $\{U_1, U_2\}$ est un recouvrement ouvert de X et $[0, 1]$ est compact, par le lemme du nombre de Lebesgue, il existe une subdivision

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$$

telle que, pour chaque i , l'image $\gamma([t_{i-1}, t_i])$ est contenue dans U_1 ou dans U_2 .

Pour chaque $i = 1, \dots, n-1$, le point $\gamma(t_i)$ appartient à U_1 ou U_2 . S'il n'appartient pas à U_0 , les segments adjacents $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ et $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ sont dans le même ouvert U_k , et on peut fusionner les intervalles. Quitte à raffiner, on peut donc supposer que $\gamma(t_i) \in U_0$ pour tout i .

Comme U_0 est connexe par arcs, on choisit un chemin α_i dans U_0 de x_0 à $\gamma(t_i)$ (avec $\alpha_0 = \alpha_n$ le chemin constant en x_0). Posons

$$\gamma_i = \alpha_{i-1}^{-1} \cdot \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]} \cdot \alpha_i^{-1}.$$

Alors γ_i est un lacet basé en x_0 contenu dans U_1 ou dans U_2 , et $[\gamma] = [\gamma_1] \cdot [\gamma_2] \cdots [\gamma_n]$ dans $\pi_1(X, x_0)$. Chaque $[\gamma_i]$ est dans l'image de ι_1 ou ι_2 , donc $[\gamma] \in \text{im}(\Phi)$.

Étape 2 : Injectivité de Φ . Supposons que $g = g_1 g_2 \cdots g_m \in G$ (écrit comme mot en des éléments de $\pi_1(U_1, x_0)$ et $\pi_1(U_2, x_0)$) satisfasse $\Phi(g) = e$ dans $\pi_1(X, x_0)$. Chaque

$g_i = [\gamma_i]$ est un lacet dans U_1 ou U_2 . Alors $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdots \gamma_m$ est homotope au lacet constant dans X , disons via une homotopie $H: [0, 1]^2 \rightarrow X$.

Par le lemme du nombre de Lebesgue appliqué au recouvrement ouvert $\{H^{-1}(U_1), H^{-1}(U_2)\}$ du carré compact $[0, 1]^2$, il existe un quadrillage du carré en petits rectangles dont chacun a son image dans U_1 ou dans U_2 .

On peut alors, par récurrence sur le nombre de petits carrés, décomposer l'homotopie en une suite de modifications élémentaires. Chaque modification élémentaire est de l'une des formes suivantes :

- (i) remplacement d'un facteur $g_i \in \pi_1(U_k, x_0)$ par un produit $g'_i g''_i$ dans $\pi_1(U_k, x_0)$ (avec $g'_i g''_i = g_i$ dans $\pi_1(U_k, x_0)$) ;
- (ii) insertion de $j_1(h) \cdot j_2(h)^{-1}$ (ou son inverse) pour $h \in \pi_1(U_0, x_0)$, ce qui est trivial dans le produit amalgamé par construction ;
- (iii) suppression d'un facteur trivial.

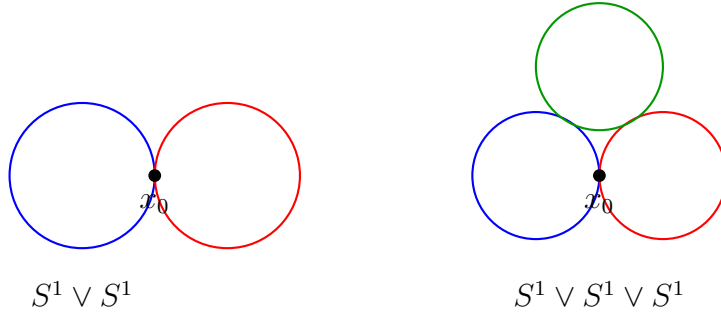
Chacune de ces opérations est triviale dans le produit libre amalgamé G . Donc $g = e$ dans G , ce qui prouve l'injectivité. $\square$

3.5 Applications

3.5.1 Bouquet de cercles

Définition 3.13 (Bouquet). Le *bouquet* (ou *wedge sum*) de deux espaces pointés (X, x_0) et (Y, y_0) est

$$X \vee Y = (X \sqcup Y) / (x_0 \sim y_0).$$



Théorème 3.14 (Groupe fondamental de $S^1 \vee S^1$). $\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, le groupe libre à deux générateurs. Plus généralement, $\pi_1(\bigvee_{i=1}^n S^1) \cong F_n$, le groupe libre de rang n .

Démonstration. Identifions $S^1 \vee S^1$ avec deux cercles C_1, C_2 se touchant en un point x_0 . Posons $U_1 = X \setminus \{p_2\}$ et $U_2 = X \setminus \{p_1\}$, où p_i est le point antipodal à x_0 sur C_i . Alors :

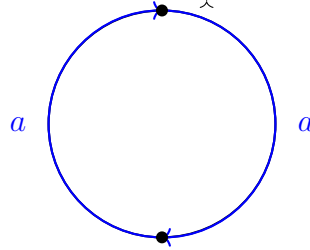
- U_1 se rétracte par déformation sur C_1 , donc $\pi_1(U_1, x_0) \cong \mathbb{Z}$;
- U_2 se rétracte par déformation sur C_2 , donc $\pi_1(U_2, x_0) \cong \mathbb{Z}$;
- $U_0 = U_1 \cap U_2$ est une croix (réunion de deux intervalles ouverts), qui est contractile : $\pi_1(U_0, x_0) = \{e\}$.

Par le corollaire 3.12, $\pi_1(S^1 \vee S^1, x_0) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = F_2$. Le cas de n cercles se traite par récurrence. $\square$

3.5.2 Plan projectif réel

Théorème 3.15 (Groupe fondamental de $\mathbb{RP}^2$). $\pi_1(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Démonstration. On réalise $\mathbb{RP}^2$ comme quotient du disque D^2 par l'identification antipodale sur le bord : $x \sim -x$ pour $x \in S^1 = \partial D^2$.



$\mathbb{RP}^2$: identification $a = a$

On peut aussi voir $\mathbb{RP}^2$ comme le CW-complexe obtenu en attachant une 2-cellule à S^1 par l'application $\varphi: S^1 \rightarrow S^1$ de degré 2 (l'application $z \mapsto z^2$). L'espace $X^{(1)} = S^1$ a pour groupe fondamental $\mathbb{Z}$, engendré par a . L'attachement de la 2-cellule ajoute la relation $a^2 = e$ (le bord de la cellule parcourt le générateur deux fois). Par Van Kampen (voir le théorème 3.22 ci-dessous),

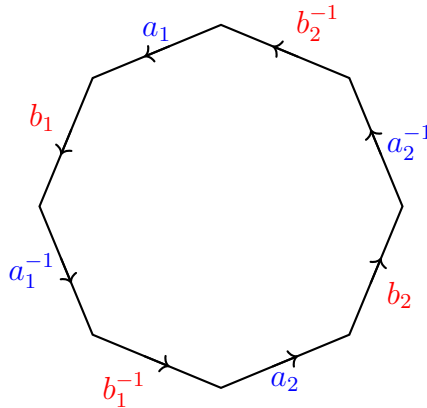
$$\pi_1(\mathbb{RP}^2) = \langle a \mid a^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

□

3.5.3 Surfaces orientables de genre g

Définition 3.16 (Surface orientable de genre g). La surface orientable fermée de genre g , notée Σ_g , est obtenue en identifiant les côtés d'un $4g$ -gone selon le mot

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}.$$



Présentation polygonale de Σ_2

Théorème 3.17 (Groupe fondamental de Σ_g). Pour $g \geq 1$,

$$\pi_1(\Sigma_g) \cong \left\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1 \right\rangle$$

où $[a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$ est le commutateur.

Démonstration. On voit Σ_g comme un CW-complexe avec un 0-squelette réduit à un point x_0 , un 1-squelette $X^{(1)} = \bigvee_{i=1}^{2g} S^1$ (bouquet de $2g$ cercles étiquetés $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$) et une unique 2-cellule e^2 attachée par l'application $\varphi: S^1 \rightarrow X^{(1)}$ qui parcourt le mot $\prod_{i=1}^g [a_i, b_i]$.

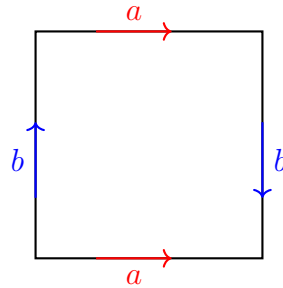
Par le théorème 3.14, $\pi_1(X^{(1)}) \cong F_{2g}$. L'attachement de la 2-cellule (théorème 3.22) ajoute la relation $\prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1$. $\square$

Corollaire 3.18. $H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \cong \pi_1(\Sigma_g)^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}^{2g}$.

Démonstration. L'abélianisé du groupe $\pi_1(\Sigma_g)$ est obtenu en rendant triviale la relation $\prod [a_i, b_i] = 1$, qui est déjà triviale dans un groupe abélien. Donc l'abélianisé est le groupe abélien libre de rang $2g$. $\square$

3.5.4 Bouteille de Klein

Définition 3.19 (Bouteille de Klein). La *bouteille de Klein* K est la surface non orientable obtenue en identifiant les côtés du carré selon le mot $aba^{-1}b$.



Bouteille de Klein : $aba^{-1}b$

Théorème 3.20 (Groupe fondamental de la bouteille de Klein). $\pi_1(K) \cong \langle a, b \mid abab^{-1} = 1 \rangle$.

Démonstration. La bouteille de Klein admet une structure de CW-complexe avec un 0-sommet, deux 1-cellules a, b et une 2-cellule attachée selon le mot $aba^{-1}b$. Le 1-squelette est un bouquet de deux cercles, de groupe fondamental $F_2 = \langle a, b \rangle$. L'attachement de la 2-cellule ajoute la relation $aba^{-1}b = 1$, soit $abab^{-1} = 1$ (en réécrivant $aba^{-1}b = 1$ comme $ab = b^{-1}a$). $\square$

Remarque 3.21. L'abélianisé est $\pi_1(K)^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En effet, dans un groupe abélien la relation $aba^{-1}b = 1$ devient $b^2 = 1$.

3.5.5 Attachement de cellules et CW-complexes

Théorème 3.22 (Effet de l'attachement d'une 2-cellule). *Soit X un espace connexe par arcs, $\varphi: S^1 \rightarrow X$ une application continue, et $Y = X \cup_{\varphi} D^2$ l'espace obtenu en attachant une 2-cellule via φ . Alors, pour tout point base $x_0 \in X$,*

$$\pi_1(Y, x_0) \cong \pi_1(X, x_0) / N([\varphi])$$

où $N([\varphi])$ est le sous-groupe normal engendré par la classe de φ dans $\pi_1(X, x_0)$ (à conjugaison près, dépendant du choix d'un chemin de x_0 à $\varphi(1)$).

Démonstration. On applique Van Kampen. Soit p le centre de la cellule D^2 dans Y . Posons $U_1 = X \cup_{\varphi} (D^2 \setminus \{p\})$ et $U_2 = \overset{\circ}{D}^2$ (l'intérieur de la cellule, vu dans Y). Alors $U_1 \cup U_2 = Y$, U_2 est contractile, et $U_1 \cap U_2 \cong S^1 \times (0, 1)$ se rétracte sur un cercle. De plus, U_1 se rétracte par déformation sur X .

Par Van Kampen : $\pi_1(Y) \cong \pi_1(U_1) *_{\pi_1(U_0)} \pi_1(U_2) \cong \pi_1(X) *_{\mathbb{Z}} \{e\}$. Le morphisme $\mathbb{Z} = \pi_1(U_0) \rightarrow \pi_1(U_1) \cong \pi_1(X)$ envoie le générateur sur $[\varphi]$. Le produit libre amalgamé $\pi_1(X) *_{\mathbb{Z}} \{e\}$ est le quotient de $\pi_1(X)$ par le sous-groupe normal engendré par l'image de $\mathbb{Z}$, soit $N([\varphi])$. $\square$

Corollaire 3.23. *L'attachement de cellules de dimension $n \geq 3$ ne modifie pas le groupe fondamental.*

Démonstration. Si $Y = X \cup_{\varphi} D^n$ avec $n \geq 3$, on applique Van Kampen de la même manière. L'intersection $U_0 \simeq S^{n-1}$ avec $n-1 \geq 2$ est simplement connexe (car $\pi_1(S^m) = 0$ pour $m \geq 2$). Donc j_1 et j_2 sont triviaux, et $\pi_1(Y) \cong \pi_1(X) * \{e\} = \pi_1(X)$. $\square$

Proposition 3.24 (Groupe fondamental d'un CW-complexe). *Soit X un CW-complexe connexe. Alors $\pi_1(X)$ ne dépend que du 2-squelette $X^{(2)}$, et admet la présentation*

$$\pi_1(X) \cong \langle 1\text{-cellules} \mid \text{relations données par les 2-cellules} \rangle.$$

Démonstration. Notons $X^{(n)}$ le n -squelette de X . Par le théorème 3.14, après avoir choisi un arbre maximal dans le 1-squelette $X^{(1)}$ et contracté celui-ci, on obtient un bouquet de cercles, un par 1-cellule hors de l'arbre maximal. D'où $\pi_1(X^{(1)})$ est un groupe libre.

Le passage de $X^{(1)}$ à $X^{(2)}$ se fait par attachement de 2-cellules. Par le théorème 3.22, chaque 2-cellule ajoute une relation (donnée par le mot de recollement lu sur les 1-cellules).

Le passage de $X^{(2)}$ à $X^{(3)}$ se fait par attachement de 3-cellules. Par le corollaire 3.23, cela ne modifie pas π_1 . Par récurrence, l'attachement des n -cellules pour $n \geq 3$ ne modifie pas le groupe fondamental. $\square$

Exemple 3.25 (Tout groupe de présentation finie est un π_1). Soit $G = \langle g_1, \dots, g_m \mid r_1, \dots, r_k \rangle$ un groupe de présentation finie. On construit un CW-complexe X_G avec :

- un unique 0-sommet x_0 ;
- m boucles $e_1^1, \dots, e_m^1$ (une par générateur), formant un bouquet $X^{(1)} = \bigvee_m S^1$;

— k cellules de dimension 2, la j -ème étant attachée selon le mot r_j lu dans les générateurs.

Alors $\pi_1(X_G) \cong G$. Ceci montre que tout groupe de présentation finie est le groupe fondamental d'un CW-complexe de dimension 2.

3.6 Exercices

Exercice 3.1. Retrouver $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$ en utilisant le théorème de Van Kampen appliqué à la décomposition standard du tore en carré identifié. **Difficulté : ★★**

Exercice 3.2. Montrer que $\pi_1(S^n) = 0$ pour $n \geq 2$ en utilisant Van Kampen. **Difficulté : ★★**

Exercice 3.3. Montrer par récurrence que $\pi_1(\bigvee_{i=1}^n S^1) \cong F_n$. **Difficulté : ★★**

Exercice 3.4. Calculer $\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ où les deux morphismes $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ sont donnés par $n \mapsto 2n$ et $n \mapsto 3n$ respectivement. Montrer que le groupe obtenu admet la présentation $\langle a, b \mid a^2 = b^3 \rangle$. **Difficulté : ★★**

Exercice 3.5. La surface non orientable fermée N_k de genre k est obtenue en identifiant les côtés d'un $2k$ -gone selon le mot $a_1^2 a_2^2 \cdots a_k^2$. Montrer que

$$\pi_1(N_k) \cong \langle a_1, \dots, a_k \mid a_1^2 a_2^2 \cdots a_k^2 = 1 \rangle.$$

Vérifier que $N_1 = \mathbb{RP}^2$ et $N_2 = K$ (bouteille de Klein). **Difficulté : ★★★**

Exercice 3.6. Soit $X = U_1 \cup U_2 \cup U_3$ avec U_i ouverts connexes par arcs, $U_i \cap U_j$ connexes par arcs, et $U_1 \cap U_2 \cap U_3$ connexe par arcs. Énoncer et démontrer une généralisation du théorème de Van Kampen à ce cas. **Difficulté : ★★★**

Exercice 3.7. Le *dunce hat* est le CW-complexe obtenu à partir d'un triangle en identifiant les trois arêtes selon le schéma $a \cdot a \cdot a^{-1}$. Calculer son groupe fondamental. **Difficulté : ★★★**

Exercice 3.8. L'espace lenticulaire $L(p, q)$ est le quotient de $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ par l'action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ donnée par $[k] \cdot (z_1, z_2) = (e^{2\pi i k/p} z_1, e^{2\pi i k q/p} z_2)$. Montrer que $\pi_1(L(p, q)) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. **Difficulté : ★★★**

Exercice 3.9. Soit $K \subset S^3$ un nœud (plongement de S^1 dans S^3). Montrer, en utilisant Van Kampen, que l'abélianisé du groupe du nœud $\pi_1(S^3 \setminus K)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. **Difficulté : ★★★**

Résumé du chapitre

Concept	Résultat principal
Produit libre $G_1 * G_2$	Groupe universel pour les morphismes depuis G_1 et G_2 .
Produit amalgamé $G_1 *_K G_2$	Pushout dans la catégorie des groupes ; quotient de $G_1 * G_2$ par les relations d'amalgamation.
Théorème de Van Kampen	$\pi_1(U_1 \cup U_2) \cong \pi_1(U_1) *_{\pi_1(U_0)} \pi_1(U_2)$ quand $U_0 = U_1 \cap U_2$ est connexe par arcs.
Bouquet de cercles	$\pi_1(\bigvee_n S^1) \cong F_n$.
Surfaces	$\pi_1(\Sigma_g) = \langle a_i, b_i \mid \prod [a_i, b_i] = 1 \rangle$.
Attachement de 2-cellule	$\pi_1(X \cup_\varphi D^2) \cong \pi_1(X)/N([\varphi])$.

Chapitre 4

Revêtements et groupe fondamental

Contents

2.1	Chemins et lacets	20
2.2	Homotopie de chemins	21
2.3	Structure de groupe sur les classes de lacets	21
2.4	Fonctorialité du groupe fondamental	24
2.5	Changement de point base	25
2.6	Invariance homotopique de π_1	25
2.7	Premiers calculs	26
2.7.1	Espaces simplement connexes	26
2.7.2	Le groupe fondamental du cercle	27
2.8	Applications du groupe fondamental	29
2.8.1	Théorème de Brouwer en dimension 2	29
2.8.2	Théorème de Borsuk–Ulam en dimension 1	29
2.8.3	Application à l’algèbre : théorème fondamental de l’algèbre	30
2.9	Le groupe fondamental du produit	30
2.10	Espaces simplement connexes et relèvement	31
2.11	Exercices	32

La théorie des revêtements établit un lien profond entre la topologie d’un espace et l’algèbre de son groupe fondamental. Dans ce chapitre, nous développons cette théorie en détail : propriétés de relèvement, action de monodromie, classification des revêtements connexes, revêtement universel, et transformations de revêtement.

4.1 Définitions et premiers exemples

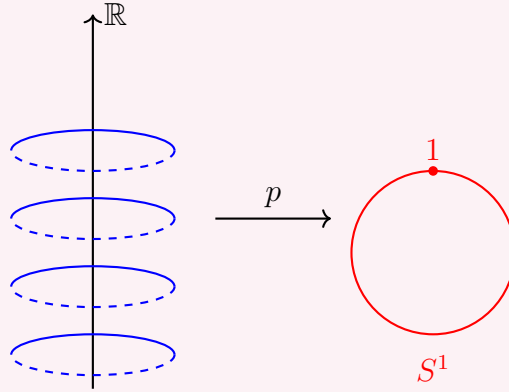
Définition 4.1 (Revêtement). Soit X un espace topologique connexe et localement connexe par arcs. Un *revêtement* de X est la donnée d’un espace topologique $\tilde{X}$ et d’une application continue surjective $p: \tilde{X} \rightarrow X$ telle que, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x (appelé *voisinage trivialisé*) vérifiant

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha \in A} V_{\alpha}$$

où chaque V_α est un ouvert de $\tilde{X}$ et $p|_{V_\alpha}: V_\alpha \xrightarrow{\sim} U$ est un homéomorphisme.

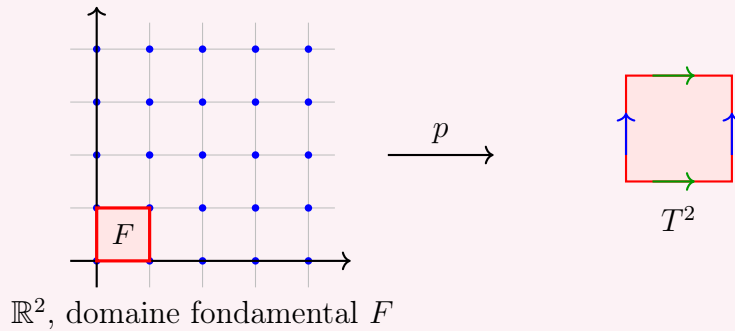
Définition 4.2 (Fibre, degré). Pour $x \in X$, l'ensemble $p^{-1}(x)$ est appelé la *fibre* au-dessus de x . Si toutes les fibres ont le même cardinal $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on dit que p est un revêtement de *degré* (ou *nombre de feuillets*) n , noté $\deg(p) = n$. Lorsque X est connexe, le cardinal des fibres est constant.

Exemple 4.3 (Revêtement exponentiel $\mathbb{R} \rightarrow S^1$). L'application $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ définie par $p(t) = e^{2\pi it}$ est un revêtement. Pour tout $z_0 = e^{2\pi it_0} \in S^1$, un voisinage trivialisé est $U = S^1 \setminus \{-z_0\}$, et $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} (t_0 - \frac{1}{2} + n, t_0 + \frac{1}{2} + n)$. C'est un revêtement de degré infini.



Exemple 4.4 (Revêtement $S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$). L'application quotient $p: S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n = S^n / \{x \sim -x\}$ est un revêtement à deux feuillets. Chaque fibre est $\{x, -x\}$.

Exemple 4.5 (Revêtement $\mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$). L'application quotient $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 \cong T^2$ est un revêtement de degré infini. La fibre au-dessus de $[x, y]$ est le réseau $\{(x + m, y + n) \mid (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$.



Exemple 4.6 (Revêtement cyclique $S^1 \rightarrow S^1$). L'application $p_n: S^1 \rightarrow S^1$ définie par $p_n(z) = z^n$ est un revêtement de degré n . La fibre au-dessus de $w \in S^1$ est l'ensemble des racines n -ièmes de w .

4.2 Relèvement des chemins

Théorème 4.7 (Relèvement des chemins). *Soit $p: \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement et $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ un chemin. Pour tout $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(\gamma(0))$, il existe un unique chemin $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ tel que $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ et $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$.*

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \exists! \tilde{\gamma} & \downarrow p \\ [0, 1] & \xrightarrow{\gamma} & X \end{array}$$

Démonstration. Existence. Par le lemme du nombre de Lebesgue, il existe une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ telle que chaque $\gamma([t_{i-1}, t_i])$ est contenu dans un voisinage trivialisé U_i de $\gamma(t_{i-1})$.

On construit $\tilde{\gamma}$ par récurrence sur i . Pour $i = 0$, on part de $\tilde{x}_0$. Supposons $\tilde{\gamma}$ construit sur $[0, t_i]$, avec $\tilde{\gamma}(t_i) = \tilde{x}_i$. L'ouvert U_{i+1} est trivialisé, donc $p^{-1}(U_{i+1}) = \bigsqcup_{\alpha} V_{\alpha}$, et $\tilde{x}_i$ appartient à un unique V_{α_0} . On définit $\tilde{\gamma}|_{[t_i, t_{i+1}]}$ comme $(p|_{V_{\alpha_0}})^{-1} \circ \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$. Ceci est bien défini, continu, et prolonge $\tilde{\gamma}$ continûment car $\tilde{\gamma}(t_i) = \tilde{x}_i \in V_{\alpha_0}$.

Unicité. Soient $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\gamma}'$ deux relèvements avec $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}'(0)$. L'ensemble $S = \{t \in [0, 1] \mid \tilde{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}'(t)\}$ est fermé par continuité. Montrons qu'il est ouvert. Si $t_0 \in S$, alors $\tilde{\gamma}(t_0) = \tilde{\gamma}'(t_0) \in V_{\alpha}$ pour un certain feuillet V_{α} au-dessus d'un voisinage trivialisé. Par continuité, $\tilde{\gamma}(t)$ et $\tilde{\gamma}'(t)$ sont dans V_{α} pour t proche de t_0 . Puisque $p|_{V_{\alpha}}$ est un homéomorphisme et que $p \circ \tilde{\gamma} = p \circ \tilde{\gamma}'$, on a $\tilde{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}'(t)$ au voisinage de t_0 . Comme $[0, 1]$ est connexe et $0 \in S$, on a $S = [0, 1]$. $\square$

4.3 Relèvement des homotopies

Théorème 4.8 (Relèvement des homotopies). *Soit $p: \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement et $H: [0, 1]^2 \rightarrow X$ une homotopie (c'est-à-dire une application continue). Pour tout relèvement $\tilde{H}_0: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ de $t \mapsto H(t, 0)$ (c'est-à-dire $p \circ \tilde{H}_0 = H(-, 0)$), il existe une unique application continue $\tilde{H}: [0, 1]^2 \rightarrow \tilde{X}$ telle que $p \circ \tilde{H} = H$ et $\tilde{H}(t, 0) = \tilde{H}_0(t)$ pour tout t .*

Démonstration. Par le lemme du nombre de Lebesgue, il existe des subdivisions $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = 1$ et $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ telles que chaque rectangle $[s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ est envoyé par H dans un voisinage trivialisé U_{ij} .

On construit $\tilde{H}$ par récurrence, en balayant les rectangles de gauche à droite, puis de bas en haut. Pour le rectangle $R_{11} = [s_0, s_1] \times [t_0, t_1]$, on connaît $\tilde{H}$ sur le bord inférieur $[s_0, s_1] \times \{t_0\}$ (donné par $\tilde{H}_0$) et sur le bord gauche $\{s_0\} \times [t_0, t_1]$ (relèvement du chemin $s \mapsto H(s_0, s)$ partant de $\tilde{H}_0(s_0)$). Puisque $H(R_{11}) \subset U_{11}$ et $p^{-1}(U_{11})$ est une union disjointe de feuillets, la continuité force $\tilde{H}(R_{11})$ à rester dans un unique feuillet V_{α} , et on définit $\tilde{H}|_{R_{11}} = (p|_{V_{\alpha}})^{-1} \circ H|_{R_{11}}$.

On procède de même pour les rectangles suivants, en utilisant les valeurs déjà définies sur les bords communs pour déterminer le feuillet. La compatibilité aux bords est garantie par la continuité et la discrétion des fibres.

Unicité. L'argument est identique à celui du théorème 4.7 : deux relèvements coïncidant sur $[0, 1] \times \{0\}$ coïncident partout, par un argument d'ouvert-fermé dans le connexe $[0, 1]^2$. $\square$

Corollaire 4.9 (Invariance homotopique du relèvement). *Soit $p: \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement, et soient $\gamma_0, \gamma_1: [0, 1] \rightarrow X$ des chemins homotopes à extrémités fixées : $\gamma_0 \simeq \gamma_1 \text{ rel}\{0, 1\}$. Si $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1$ sont les relèvements partant du même point $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(\gamma_0(0))$, alors $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1)$ et $\tilde{\gamma}_0 \simeq \tilde{\gamma}_1 \text{ rel}\{0, 1\}$.*

Démonstration. Soit H une homotopie de γ_0 à γ_1 relative à $\{0, 1\}$. Par le théorème 4.8, H se relève en $\tilde{H}: [0, 1]^2 \rightarrow \tilde{X}$ avec $\tilde{H}(t, 0) = \tilde{\gamma}_0(t)$. Puisque $H(0, s) = x_0$ pour tout s et $\tilde{H}(0, -): [0, 1] \rightarrow p^{-1}(x_0)$ est un chemin continu dans la fibre discrète $p^{-1}(x_0)$, c'est le chemin constant $\tilde{x}_0$. De même, $s \mapsto \tilde{H}(1, s)$ est constant, donc $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{H}(1, 0) = \tilde{H}(1, 1) = \tilde{\gamma}_1(1)$.

De plus, $\tilde{H}(-, 1) = \tilde{\gamma}_1$ par unicité du relèvement, et $\tilde{H}$ est une homotopie relative à $\{0, 1\}$ de $\tilde{\gamma}_0$ à $\tilde{\gamma}_1$. $\square$

Corollaire 4.10. *Le morphisme induit $p_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ est injectif.*

Démonstration. Soit $[\tilde{\gamma}] \in \ker(p_*)$. Alors $p \circ \tilde{\gamma}$ est un lacet homotope au lacet constant en x_0 . Par le corollaire 4.9, le relèvement de cette homotopie montre que $\tilde{\gamma}$ est homotope au relèvement du lacet constant, qui est le lacet constant en $\tilde{x}_0$. $\square$

4.4 Action de monodromie

Définition 4.11 (Action de monodromie). Soit $p: \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement et $x_0 \in X$. L'action de monodromie est l'action à droite de $\pi_1(X, x_0)$ sur la fibre $F = p^{-1}(x_0)$ définie comme suit : pour $\tilde{x} \in F$ et $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, on pose

$$\tilde{x} \cdot [\gamma] = \tilde{\gamma}(1)$$

où $\tilde{\gamma}$ est l'unique relèvement de γ partant de $\tilde{x}$.

Proposition 4.12. *L'action de monodromie est bien définie (ne dépend que de la classe d'homotopie de γ) et définit une action à droite de $\pi_1(X, x_0)$ sur F .*

Démonstration. Le fait que l'action ne dépende que de $[\gamma]$ résulte du corollaire 4.9. Vérifions que c'est une action à droite. Pour le lacet constant c_{x_0} , son relèvement partant de $\tilde{x}$ est le lacet constant en $\tilde{x}$, donc $\tilde{x} \cdot [c_{x_0}] = \tilde{x}$. Pour $[\gamma], [\delta] \in \pi_1(X, x_0)$, le relèvement de $\gamma \cdot \delta$ partant de $\tilde{x}$ est la concaténation du relèvement de γ partant de $\tilde{x}$ (dont l'extrémité est $\tilde{x} \cdot [\gamma]$) et du relèvement de δ partant de $\tilde{x} \cdot [\gamma]$. D'où $\tilde{x} \cdot ([\gamma][\delta]) = (\tilde{x} \cdot [\gamma]) \cdot [\delta]$. $\square$

Théorème 4.13 (Transitivité de la monodromie). *Soit $p: \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement*

avec $\tilde{X}$ connexe par arcs. Alors l'action de monodromie de $\pi_1(X, x_0)$ sur $F = p^{-1}(x_0)$ est transitive.

Démonstration. Soient $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in F$. Puisque $\tilde{X}$ est connexe par arcs, il existe un chemin $\tilde{\alpha}$ de $\tilde{x}_0$ à $\tilde{x}_1$ dans $\tilde{X}$. Alors $\gamma = p \circ \tilde{\alpha}$ est un lacet en x_0 (car $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1) = x_0$), et $\tilde{x}_0 \cdot [\gamma] = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{x}_1$. $\square$

Corollaire 4.14 (Stabilisateur et image de p_*). *Soit $p: \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement connexe avec $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Le stabilisateur de $\tilde{x}_0$ sous l'action de monodromie est exactement $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Autrement dit :*

$$\text{Stab}(\tilde{x}_0) = \{[\gamma] \in \pi_1(X, x_0) \mid \tilde{x}_0 \cdot [\gamma] = \tilde{x}_0\} = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)).$$

Démonstration. Le lacet γ se relève en un lacet basé en $\tilde{x}_0$ si et seulement si $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{x}_0$, c'est-à-dire si et seulement si $[\gamma]$ appartient au stabilisateur de $\tilde{x}_0$. Or $[\gamma] \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ signifie exactement que $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ pour un lacet $\tilde{\gamma}$ basé en $\tilde{x}_0$. $\square$

Exemple 4.15 (Monodromie du revêtement $z \mapsto z^3$). Considérons le revêtement $p_3: S^1 \rightarrow S^1$ défini par $p_3(z) = z^3$. La fibre au-dessus de $1 \in S^1$ est $F = \{1, \omega, \omega^2\}$ où $\omega = e^{2\pi i/3}$. Le générateur $[\gamma]$ de $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ (où $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$) agit sur F par permutation cyclique :

$$1 \cdot [\gamma] = \omega, \quad \omega \cdot [\gamma] = \omega^2, \quad \omega^2 \cdot [\gamma] = 1.$$

L'action de monodromie est donc la permutation cyclique $(1 \ \omega \ \omega^2)$. Le stabilisateur de chaque point est $3\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$, ce qui confirme que $p_{3*}(\pi_1(S^1)) = 3\mathbb{Z}$.

Corollaire 4.16 (Formule de l'indice). *Si $p: \tilde{X} \rightarrow X$ est un revêtement connexe, alors*

$$\deg(p) = |p^{-1}(x_0)| = [\pi_1(X, x_0) : p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))].$$

Démonstration. Par transitivité de l'action de monodromie, $F \cong \pi_1(X, x_0)/\text{Stab}(\tilde{x}_0)$ en tant qu'ensembles. Le cardinal de F est donc l'indice du stabilisateur. $\square$

4.5 Classification des revêtements connexes

Définition 4.17 (Morphisme de revêtements). Soient $p_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X$ et $p_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X$ deux revêtements. Un *morphisme de revêtements* est une application continue $f: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ telle que $p_2 \circ f = p_1$:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_1 & \xrightarrow{f} & \tilde{X}_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & X & \end{array}$$

Un tel morphisme est automatiquement un revêtement de $\tilde{X}_2$.

Lemme 4.18 (Critère de relèvement). *Soient $p: \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement, Y un espace connexe et localement connexe par arcs, et $f: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ une application continue. Il existe un relèvement $\tilde{f}: (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ (c'est-à-dire $p \circ \tilde{f} = f$ et $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$) si et seulement si*

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)).$$

De plus, si ce relèvement existe, il est unique.

$$\begin{array}{ccc} & & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \\ & \nearrow \exists! \tilde{f} & \downarrow p \\ (Y, y_0) & \xrightarrow{f} & (X, x_0) \end{array}$$

Démonstration. Nécessité. Si $\tilde{f}$ existe, alors $f_* = (p \circ \tilde{f})_* = p_* \circ \tilde{f}_*$, d'où $f_*(\pi_1(Y, y_0)) = p_*(\tilde{f}_*(\pi_1(Y, y_0))) \subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.

Suffisance et construction. Pour $y \in Y$, choisissons un chemin α de y_0 à y dans Y . Le chemin $f \circ \alpha$ dans X se relève de façon unique en $\tilde{f} \circ \alpha$ partant de $\tilde{x}_0$. On pose $\tilde{f}(y) = \tilde{f} \circ \alpha(1)$.

Il faut vérifier que cette définition ne dépend pas du choix de α . Si β est un autre chemin de y_0 à y , alors $\alpha \cdot \beta^{-1}$ est un lacet en y_0 et $f_*([\alpha \cdot \beta^{-1}]) \in f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Donc $f \circ (\alpha \cdot \beta^{-1})$ se relève en un lacet basé en $\tilde{x}_0$, ce qui implique que les relèvements de $f \circ \alpha$ et $f \circ \beta$ ont la même extrémité.

La continuité de $\tilde{f}$ s'obtient par la connexité locale par arcs de Y et la trivialité locale du revêtement. L'unicité découle du même argument que pour l'unicité du relèvement des chemins. $\square$

Théorème 4.19 (Correspondance de Galois des revêtements). *Soit X un espace connexe, localement connexe par arcs, et semi-localement simplement connexe, avec un point base x_0 . Il existe une bijection*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Revêtements connexes de } X \\ \text{à isomorphisme de revêtements près} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{l} \text{Sous-groupes de } \pi_1(X, x_0) \\ \text{à conjugaison près} \end{array} \right\}$$

donnée par $(p: \tilde{X} \rightarrow X, \tilde{x}_0) \mapsto p_(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.*

Si l'on fixe les points base, la correspondance devient : les revêtements connexes pointés $(p, \tilde{x}_0)$ de (X, x_0) sont en bijection avec les sous-groupes de $\pi_1(X, x_0)$.

Démonstration. Injectivité. Supposons que deux revêtements pointés $(p_1, \tilde{x}_0^{(1)})$ et $(p_2, \tilde{x}_0^{(2)})$ satisfassent $H_1 = p_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_0^{(1)})) = p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_0^{(2)})) = H_2$. Par le lemme 4.18, l'identité de X se relève en $f: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ (car $H_1 \subset H_2$) et $g: \tilde{X}_2 \rightarrow \tilde{X}_1$ (car $H_2 \subset H_1$). Les composées $g \circ f$ et $f \circ g$ sont des relèvements de l'identité, donc égales à l'identité par unicité. Donc f est un isomorphisme de revêtements.

Surjectivité. Soit $H \leq \pi_1(X, x_0)$. On construit $\tilde{X}_H$ comme suit. Considérons l'ensemble des chemins de x_0 dans X , muni de la relation d'équivalence : $\gamma \sim \gamma'$ si $\gamma(1) = \gamma'(1)$ et $[\gamma \cdot (\gamma')^{-1}] \in H$. On pose $\tilde{X}_H = \{\text{classes d'équivalence}\}$ et $p([\gamma]) = \gamma(1)$. Le point base est $\tilde{x}_0 = [c_{x_0}]$ (classe du chemin constant).

On munit $\tilde{X}_H$ d'une topologie : pour tout ouvert $U \subset X$ connexe par arcs et tout chemin γ de x_0 à un point de U , on définit $\tilde{U}_{[\gamma]} = \{[\gamma \cdot \alpha] \mid \alpha \text{ chemin dans } U\}$. Ces ensembles forment une base de topologie, et on vérifie que p est un revêtement avec $p_*(\pi_1(\tilde{X}_H, \tilde{x}_0)) = H$.

Le fait que X soit semi-localement simplement connexe garantit que $\tilde{X}_H$ est bien un revêtement (la trivialisation locale est assurée car les lacets locaux se relèvent en lacets). $\square$

Sous la correspondance de Galois, les propriétés des revêtements se traduisent en propriétés des sous-groupes :

Revêtement	Sous-groupe
Degré du revêtement	Indice du sous-groupe
Revêtement connexe	—
Revêtement universel	Sous-groupe trivial $\{e\}$
Revêtement régulier (normal)	Sous-groupe normal
$\tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ existe	$H_1 \leq H_2$

Remarque 4.20 (Analogie galoisienne). La correspondance ci-dessus est l'analogue topologique de la correspondance de Galois en théorie des corps : les extensions intermédiaires d'une extension galoisienne L/K correspondent aux sous-groupes du groupe de Galois $\text{Gal}(L/K)$, les extensions normales correspondant aux sous-groupes normaux. Le revêtement universel joue le rôle de la clôture algébrique.

Remarque 4.21 (Point de vue fonctoriel). La correspondance de Galois s'interprète en termes de la catégorie $\text{Rev}(X)$ des revêtements de X . Le *foncteur fibre* $\text{Fib}_{x_0} : \text{Rev}(X) \rightarrow \text{Ens}$, qui à un revêtement p associe la fibre $p^{-1}(x_0)$, est une équivalence entre $\text{Rev}(X)$ et la catégorie des $\pi_1(X, x_0)$ -ensembles (ensembles munis d'une action de $\pi_1(X, x_0)$). Les revêtements connexes correspondent aux actions transitives, et les classes d'isomorphisme de revêtements connexes aux classes de conjugaison de sous-groupes de $\pi_1(X, x_0)$.

4.6 Revêtement universel

Définition 4.22 (Espace semi-localement simplement connexe). Un espace X est *semi-localement simplement connexe* si tout point $x \in X$ admet un voisinage ouvert U tel que le morphisme $\pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ induit par l'inclusion est trivial. Cela signifie que tout lacet dans U est contractile dans X (pas nécessairement dans U).

Remarque 4.23. Localement simplement connexe implique semi-localement simplement connexe, mais la réciproque est fausse. Le peigne hawaïen (réunion de cercles de rayon $1/n$ tangents à l'origine) n'est pas semi-localement simplement connexe à l'origine.

Définition 4.24 (Revêtement universel). Un revêtement $p: \tilde{X} \rightarrow X$ est dit *universel* si $\tilde{X}$ est simplement connexe ($\pi_1(\tilde{X}) = \{e\}$).

Théorème 4.25 (Existence et unicité du revêtement universel). Soit X un espace connexe, localement connexe par arcs, et semi-localement simplement connexe. Alors X admet un revêtement universel $p: \tilde{X} \rightarrow X$, unique à isomorphisme de revêtements près.

Démonstration. Par le théorème 4.19, le sous-groupe trivial $H = \{e\} \leq \pi_1(X, x_0)$ correspond à un revêtement $\tilde{X}$ dont le groupe fondamental vérifie $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = \{e\}$. Puisque p_* est injective (corollaire 4.10), on a $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \{e\}$, donc $\tilde{X}$ est simplement connexe. L'unicité découle de l'injectivité de la correspondance de Galois. $\square$

Proposition 4.26 (Propriété universelle du revêtement universel). Le revêtement universel $\tilde{X}$ est initial dans la catégorie des revêtements connexes de X : pour tout revêtement connexe $q: Y \rightarrow X$ et tout choix de points base $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, $\tilde{y}_0 \in Y$ avec $p(\tilde{x}_0) = q(\tilde{y}_0)$, il existe un unique morphisme de revêtements $f: \tilde{X} \rightarrow Y$ avec $f(\tilde{x}_0) = \tilde{y}_0$.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y \\ & \searrow p \quad \swarrow q & \\ & X & \end{array}$$

Démonstration. On a $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = \{e\} \subset q_*(\pi_1(Y, \tilde{y}_0))$. Par le lemme 4.18, p se relève en $f: \tilde{X} \rightarrow Y$, et ce relèvement est unique. $\square$

Exemple 4.27 (Revêtements universels classiques). (i) $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ est le revêtement universel de S^1 (car $\mathbb{R}$ est contractile).

(ii) $S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ est le revêtement universel de $\mathbb{RP}^n$ pour $n \geq 2$ (car $\pi_1(S^n) = 0$ pour $n \geq 2$).

(iii) $\mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ est le revêtement universel du tore.

(iv) Le revêtement universel du bouquet $S^1 \vee S^1$ est l'arbre de Cayley du groupe libre F_2 : un arbre infini 4-régulier.

(v) $SU(2) \cong S^3 \rightarrow SO(3) \cong \mathbb{RP}^3$ est un revêtement universel à deux feuillets.

4.7 Transformations de revêtement

Définition 4.28 (Transformation de revêtement). Soit $p: \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement. Une *transformation de revêtement* (ou *deck transformation*, ou *automorphisme de revêtement*) est un homéomorphisme $\varphi: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ tel que $p \circ \varphi = p$.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{X} \\ & \searrow p & \swarrow p \\ & X & \end{array}$$

L'ensemble des transformations de revêtement forme un groupe pour la composition, noté $\text{Aut}(\tilde{X}/X)$ ou $\text{Deck}(\tilde{X}/X)$.

Proposition 4.29. Le groupe $\text{Aut}(\tilde{X}/X)$ agit librement sur chaque fibre $p^{-1}(x)$. En particulier, toute transformation de revêtement non triviale est sans point fixe.

Démonstration. Si $\varphi \in \text{Aut}(\tilde{X}/X)$ fixe un point $\tilde{x}$, alors φ et $\text{Id}_{\tilde{X}}$ sont deux relèvements de p coïncidant en $\tilde{x}$. Par unicité des relèvements (pour $Y = \tilde{X}$ connexe dans le lemme 4.18), $\varphi = \text{Id}$. $\square$

Théorème 4.30. Soit $p: \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement connexe avec $H = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \leq \pi_1(X, x_0)$. Alors

$$\text{Aut}(\tilde{X}/X) \cong N(H)/H$$

où $N(H) = \{g \in \pi_1(X, x_0) \mid gHg^{-1} = H\}$ est le normalisateur de H .

Démonstration. Soit $\varphi \in \text{Aut}(\tilde{X}/X)$. Posons $\tilde{x}_1 = \varphi(\tilde{x}_0)$. Comme $p(\tilde{x}_1) = x_0$, il existe un chemin $\tilde{\alpha}$ de $\tilde{x}_0$ à $\tilde{x}_1$ dans $\tilde{X}$. Posons $\gamma = p \circ \tilde{\alpha}$, un lacet en x_0 .

On vérifie que la classe $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ appartient à $N(H)$. En effet, $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) = [\gamma] \cdot H \cdot [\gamma]^{-1}$ (changement de point base dans le revêtement). Mais φ induit un isomorphisme $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$, donc $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) = H$ aussi, d'où $[\gamma]H[\gamma]^{-1} = H$.

L'application $\varphi \mapsto [\gamma]H \in N(H)/H$ est bien définie (indépendante du choix de $\tilde{\alpha}$), et c'est un isomorphisme de groupes. L'injectivité provient de la liberté de l'action sur la fibre. La surjectivité utilise le critère de relèvement : si $[\gamma] \in N(H)$, le point $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_0 \cdot [\gamma]$ vérifie $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) = H$, et le lemme 4.18 fournit un automorphisme φ envoyant $\tilde{x}_0$ sur $\tilde{x}_1$. $\square$

4.8 Revêtements réguliers

Définition 4.31 (Revêtement régulier). Un revêtement connexe $p: \tilde{X} \rightarrow X$ est dit *régulier* (ou *normal*, ou *galoisien*) si $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ est un sous-groupe normal de $\pi_1(X, x_0)$.

Proposition 4.32 (Caractérisations des revêtements réguliers). *Soit $p: \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement connexe. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) p est régulier ;
- (ii) $\text{Aut}(\tilde{X}/X)$ agit transitivement sur chaque fibre ;
- (iii) $\text{Aut}(\tilde{X}/X)$ agit transitivement sur $p^{-1}(x_0)$;
- (iv) pour tout lacet γ en x_0 , soit tous les relèvements de γ sont des lacets, soit aucun ne l'est.

Démonstration. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) : Par le théorème 4.30, $\text{Aut}(\tilde{X}/X) \cong N(H)/H$ où $H = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Le revêtement est régulier si et seulement si $N(H) = \pi_1(X, x_0)$, auquel cas $\text{Aut}(\tilde{X}/X) \cong \pi_1(X, x_0)/H$. L'action de $\text{Aut}(\tilde{X}/X)$ sur la fibre est libre et de cardinal $[G : H] = |F|$ si et seulement si elle est transitive.

(i) $\Leftrightarrow$ (iv) : Le relèvement de γ partant de $\tilde{x}$ est un lacet si et seulement si $[\gamma] \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$. Quand on change de point de départ $\tilde{x}$, le sous-groupe $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ est conjugué de H . La condition (iv) signifie que tous les conjugués de H coïncident, c'est-à-dire que H est normal. $\square$

Théorème 4.33 (Revêtement universel et groupe fondamental). *Soit X un espace connexe, localement connexe par arcs, et semi-localement simplement connexe, et soit $p: \tilde{X} \rightarrow X$ son revêtement universel. Alors :*

- (i) Le revêtement universel est régulier.
- (ii) $\text{Aut}(\tilde{X}/X) \cong \pi_1(X, x_0)$.
- (iii) $X \cong \tilde{X}/\text{Aut}(\tilde{X}/X)$, où l'action est proprement discontinue.

Démonstration. (i) Le sous-groupe $H = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = \{e\}$ est normal dans tout groupe.

(ii) Par le théorème 4.30, $\text{Aut}(\tilde{X}/X) \cong N(\{e\})/\{e\} = \pi_1(X, x_0)$.

(iii) L'action de $\text{Aut}(\tilde{X}/X)$ sur $\tilde{X}$ est libre et proprement discontinue (car le revêtement est un homéomorphisme local). Le quotient est X . $\square$

Corollaire 4.34 (Quotient par action de groupe). *Si un groupe G agit librement et proprement discontinûment sur un espace Y connexe et simplement connexe (localement connexe par arcs), alors la projection $Y \rightarrow Y/G$ est le revêtement universel et $\pi_1(Y/G) \cong G$.*

Exemple 4.35. (i) $\mathbb{Z}$ agit sur $\mathbb{R}$ par translations : $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$, d'où $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

(ii) $\mathbb{Z}^2$ agit sur $\mathbb{R}^2$ par translations : $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong T^2$, d'où $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$.

(iii) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit sur S^n par l'antipodie : $S^n/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{RP}^n$, d'où $\pi_1(\mathbb{RP}^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $n \geq 2$.

Théorème 4.36 (Correspondance pour les revêtements intermédiaires). *Soit $p: \tilde{X} \rightarrow X$ le revêtement universel. Pour tout sous-groupe $H \leq \pi_1(X, x_0) \cong \text{Aut}(\tilde{X}/X)$, l'espace $\tilde{X}/H$ est un revêtement connexe de X , et*

$$\pi_1(\tilde{X}/H) \cong H.$$

Le revêtement $\tilde{X}/H \rightarrow X$ est régulier si et seulement si $H \trianglelefteq \pi_1(X, x_0)$, auquel cas

$$\text{Aut}((\tilde{X}/H)/X) \cong \pi_1(X, x_0)/H.$$

Démonstration. Puisque H agit librement et proprement discontinûment sur $\tilde{X}$ (en tant que sous-groupe du groupe des deck transformations), la projection $\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/H$ est un revêtement. La composée $\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/H \rightarrow X$ est p , donc $\tilde{X}/H \rightarrow X$ est un revêtement. Le revêtement $\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/H$ est universel (car $\tilde{X}$ est simplement connexe), donc $\pi_1(\tilde{X}/H) \cong \text{Aut}(\tilde{X}/(\tilde{X}/H)) = H$.

Le revêtement est régulier si et seulement si H est normal dans $\pi_1(X, x_0)$, par le théorème 4.30, et dans ce cas $\text{Aut}((\tilde{X}/H)/X) \cong N(H)/H = \pi_1(X, x_0)/H$. $\square$

4.9 Applications complémentaires

Proposition 4.37 (Revêtements du cercle). *Les revêtements connexes de S^1 sont (à isomorphisme près) :*

- (i) $p_n: S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^n$, pour $n \geq 1$ (degré n , correspondant au sous-groupe $n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$);
- (ii) $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi it}$ (revêtement universel, correspondant au sous-groupe $\{0\} \leq \mathbb{Z}$).

Démonstration. Les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont $n\mathbb{Z}$ pour $n \geq 0$. Par la correspondance de Galois, $n\mathbb{Z}$ avec $n \geq 1$ donne un revêtement de degré $[\mathbb{Z} : n\mathbb{Z}] = n$, qui est $z \mapsto z^n$. Le sous-groupe trivial $\{0\}$ donne le revêtement universel $\mathbb{R} \rightarrow S^1$. $\square$

Proposition 4.38 (Revêtements du tore). *Les revêtements connexes de T^2 correspondent aux sous-groupes de $\mathbb{Z}^2$, qui sont de la forme $H \cong \mathbb{Z}^k$ avec $k = 0, 1, 2$ (car les sous-groupes de $\mathbb{Z}^2$ sont libres de rang ≤ 2). Les cas sont :*

- (i) $k = 0$: le revêtement universel $\mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$;
- (ii) $k = 1$: $H \cong \mathbb{Z}$, donnant un revêtement par un cylindre $\mathbb{R} \times S^1 \rightarrow T^2$;
- (iii) $k = 2$: $H \cong \mathbb{Z}^2$ d'indice fini n dans $\mathbb{Z}^2$, donnant un revêtement $T^2 \rightarrow T^2$ de degré n .

Théorème 4.39 (Borsuk–Ulam en dimension 2). *Pour toute application continue $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, il existe $x \in S^2$ tel que $f(x) = f(-x)$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que $f(x) \neq f(-x)$ pour tout x . Définissons

$g: S^2 \rightarrow S^1$ par $g(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{\|f(x)-f(-x)\|}$. Alors $g(-x) = -g(x)$ pour tout x .

La restriction de g à l'équateur $S^1 \subset S^2$ donne une application $h: S^1 \rightarrow S^1$ vérifiant $h(-z) = -h(z)$. Cette application a un degré impair (car elle est équivariante pour l'action antipodale), en particulier de degré non nul.

Mais h se prolonge au disque supérieur D_+^2 (hémisphère nord de S^2), donc h est homotopiquement triviale. Ceci contredit le fait que son degré est non nul. $\square$

4.10 Exercices

Exercice 4.1. Montrer que tout revêtement de degré 2 est régulier. **Difficulté : ★★**

Exercice 4.2. Soit $p: \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement avec $\tilde{X}$ connexe par arcs. Montrer que si $\pi_1(X, x_0)$ est abélien, alors tout revêtement connexe de X est régulier. **Difficulté : ★★**

Exercice 4.3. Soit $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ le revêtement exponentiel. Montrer qu'une application continue $f: S^1 \rightarrow S^1$ se relève en $\tilde{f}: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ si et seulement si f est homotope à une application constante. **Difficulté : ★★**

Exercice 4.4. Décrire (par un dessin) le revêtement de $S^1 \vee S^1$ correspondant au sous-groupe $\langle aba^{-1}b^{-1} \rangle$ de $F_2 = \langle a, b \rangle$. Quel est le degré de ce revêtement ? Est-il régulier ? **Difficulté : ★★★**

Exercice 4.5. En utilisant le revêtement $SU(2) \rightarrow SO(3)$, montrer que $\pi_1(SO(3)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. **Difficulté : ★★**

Exercice 4.6. Soit G un groupe agissant par homéomorphismes sur un espace topologique Y .

- (a) Montrer que si l'action est libre et proprement discontinue, alors la projection $Y \rightarrow Y/G$ est un revêtement.
- (b) Montrer que la réciproque est vraie : si $Y \rightarrow Y/G$ est un revêtement, alors l'action est libre et proprement discontinue.

Difficulté : ★★★

Exercice 4.7. Soit Σ_g la surface orientable de genre $g \geq 1$.

- (a) Montrer que Σ_g admet un revêtement connexe de degré n pour tout $n \geq 1$.
- (b) Pour $g = 1$ (le tore), décrire explicitement les revêtements connexes de degré 2 et montrer qu'il y en a exactement 3 à isomorphisme près.
- (c) Montrer que le revêtement universel de Σ_g (pour $g \geq 2$) est homéomorphe au plan $\mathbb{R}^2$. *Indication : utiliser le théorème d'uniformisation.*

Difficulté : ★★★

Exercice 4.8. Soient X, Y des espaces admettant des revêtements universels $\tilde{X}, \tilde{Y}$. Montrer que toute application continue $f: X \rightarrow Y$ se relève en $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ (non nécessairement de façon unique). Montrer que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{Y} \\ p_X \downarrow & & \downarrow p_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

En déduire que f est π_1 -compatible : $\tilde{f} \circ \varphi = f_*(\varphi) \circ \tilde{f}$ pour tout $\varphi \in \text{Aut}(\tilde{X}/X) \cong \pi_1(X)$, où l'on identifie $f_*(\varphi)$ à l'élément correspondant de $\text{Aut}(\tilde{Y}/Y)$. **Difficulté : ★★★**

Exercice 4.9. Soient $p_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X_1$ et $p_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X_2$ des revêtements. Montrer que $p_1 \times p_2: \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2 \rightarrow X_1 \times X_2$ est un revêtement. En déduire que si $\tilde{X}_1$ et $\tilde{X}_2$ sont les revêtements universels, alors $\tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2$ est le revêtement universel de $X_1 \times X_2$. **Difficulté : ★★**

Résumé du chapitre

Concept	Résultat principal
Revêtement $p: \tilde{X} \rightarrow X$	Homéomorphisme local, fibres discrètes de cardinal constant.
Relèvement des chemins	Existence et unicité du relèvement, invariance par homotopie.
Injectivité de p_*	$p_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \hookrightarrow \pi_1(X, x_0)$.
Action de monodromie	$\pi_1(X, x_0) \curvearrowright p^{-1}(x_0)$, transitive si $\tilde{X}$ connexe.
Correspondance de Galois	Revêtements connexes $\leftrightarrow$ sous-groupes de π_1 (à conjugaison près).
Revêtement universel	$\tilde{X}$ simplement connexe ; $\text{Aut}(\tilde{X}/X) \cong \pi_1(X, x_0)$.
Revêtement régulier	Sous-groupe normal ; $\text{Aut}(\tilde{X}/X) \cong \pi_1(X)/H$.
Quotient par action	$G \curvearrowright Y$ libre proprement discontinue $\Rightarrow Y \rightarrow Y/G$ revêtement.

Chapitre 5

Homologie singulière — Définition et propriétés

Contents

3.1	Produit libre de groupes	34
3.2	Produit libre amalgamé	35
3.3	Énoncé du théorème de Van Kampen	36
3.4	Preuve du théorème de Van Kampen	37
3.5	Applications	38
3.5.1	Bouquet de cercles	38
3.5.2	Plan projectif réel	39
3.5.3	Surfaces orientables de genre g	39
3.5.4	Bouteille de Klein	40
3.5.5	Attachement de cellules et CW-complexes	41
3.6	Exercices	42
	Résumé du chapitre	43

L'homologie singulière constitue l'un des invariants algébriques les plus puissants de la topologie. Contrairement au groupe fondamental, qui ne capture que des phénomènes essentiellement unidimensionnels, l'homologie singulière associe à chaque espace topologique X une suite de groupes abéliens $H_n(X)$, $n \geq 0$, qui détectent les « trous » de toute dimension. L'idée maîtresse, remontant à Poincaré et systématisée par Eilenberg et Steenrod, consiste à sonder l'espace X au moyen de simplexes continus, puis à extraire l'information homologique par un procédé algébrique canonique.

5.1 Le simplexe standard et les simplexes singuliers

Définition 5.1 (Simplexe standard). Pour tout entier $n \geq 0$, le n -simplexe standard est le sous-espace de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par

$$\Delta^n = \left\{ (t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_i \geq 0 \text{ pour tout } i, \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\}.$$

On note $e_0, e_1, \dots, e_n$ les sommets de Δ^n , où e_i est le $(i+1)$ -ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Remarque 5.2. En petite dimension : Δ^0 est un point, Δ^1 est un segment, Δ^2 est un triangle plein, Δ^3 est un tétraèdre plein.

Exemple 5.3 (Coordonnées barycentriques). Les coordonnées $(t_0, \dots, t_n)$ d'un point de Δ^n sont ses *coordonnées barycentriques* par rapport aux sommets $e_0, \dots, e_n$. Le point de coordonnées $(t_0, \dots, t_n)$ est le barycentre $\sum_{i=0}^n t_i e_i$, et la condition $\sum t_i = 1$ avec $t_i \geq 0$ exprime que ce point est une combinaison convexe des sommets. Par exemple, le barycentre (centre de gravité) de Δ^n a pour coordonnées $(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1})$.

Proposition 5.4 (Relations entre applications face). *Pour $i < j$, on a la relation de commutation :*

$$\delta_j \circ \delta_i = \delta_i \circ \delta_{j-1} : \Delta^{n-2} \longrightarrow \Delta^n.$$

Ces relations, dites relations cosimpliciales, jouent un rôle essentiel dans la preuve que $\partial^2 = 0$.

Démonstration. Les deux membres sont des applications affines $\Delta^{n-2} \rightarrow \Delta^n$, et il suffit de vérifier qu'elles coïncident sur les sommets. Pour $e_k \in \Delta^{n-2}$:

- Si $k < i$: $\delta_j(\delta_i(e_k)) = \delta_j(e_k) = e_k$ (car $k < i < j$) et $\delta_i(\delta_{j-1}(e_k)) = \delta_i(e_k) = e_k$ (car $k < i \leq j-1$).
- Si $i \leq k < j-1$: $\delta_j(\delta_i(e_k)) = \delta_j(e_{k+1}) = e_{k+1}$ (car $k+1 < j$) et $\delta_i(\delta_{j-1}(e_k)) = \delta_i(e_{k+1}) = e_{k+1}$ (car $k \geq i$, puis $k+1 \leq j-1$, donc pas de décalage par δ_i ni δ_{j-1} au-delà).

Un examen cas par cas complet sur les sommets confirme l'égalité.

□

Définition 5.5 (Applications face). Pour $0 \leq i \leq n$, la i -ième *application face* est l'inclusion affine

$$\delta_i : \Delta^{n-1} \longrightarrow \Delta^n$$

définie par $\delta_i(e_j) = e_j$ si $j < i$ et $\delta_i(e_j) = e_{j+1}$ si $j \geq i$. Autrement dit, δ_i est l'unique application affine qui envoie Δ^{n-1} sur la face de Δ^n opposée au sommet e_i .

Définition 5.6 (Simplexe singulier). Soit X un espace topologique. Un n -*simplexe singulier* dans X est une application continue

$$\sigma : \Delta^n \longrightarrow X.$$

On note $\text{Sing}_n(X)$ l'ensemble de tous les n -simplexes singuliers dans X .

Remarque 5.7. Le terme « singulier » souligne qu'aucune condition d'injectivité n'est imposée : l'application σ peut écraser Δ^n sur un point, ou identifier des faces entre elles. Cette liberté totale est la clef de la fonctorialité et de la puissance de la théorie.

Exemple 5.8 (Simplexes singuliers en petite dimension). (i) Un 0-simplexe singulier dans X est simplement un point de X (une application $\Delta^0 = \{e_0\} \rightarrow X$).
 (ii) Un 1-simplexe singulier $\sigma: \Delta^1 \rightarrow X$ est un chemin dans X , d'origine $\sigma(e_0)$ et d'extrémité $\sigma(e_1)$. La face $\sigma \circ \delta_0 = \sigma(e_1)$ est le point terminal et $\sigma \circ \delta_1 = \sigma(e_0)$ est le point initial.
 (iii) Un 2-simplexe singulier $\sigma: \Delta^2 \rightarrow X$ est une application continue d'un triangle plein dans X , dont les trois côtés sont les 1-simplexes singuliers $\sigma \circ \delta_0$, $\sigma \circ \delta_1$, $\sigma \circ \delta_2$.

Définition 5.9 (Applications de dégénérescence). Pour $0 \leq i \leq n$, l'application de dégénérescence $s_i: \Delta^{n+1} \rightarrow \Delta^n$ est la surjection affine définie par $s_i(e_j) = e_j$ si $j \leq i$ et $s_i(e_j) = e_{j-1}$ si $j > i$. Intuitivement, s_i « écrase » l'arête $[e_i, e_{i+1}]$ en le sommet e_i . Un simplexe singulier de la forme $\sigma \circ s_i$ est dit *dégénéré*.

5.2 Chaînes singulières et opérateur bord

Définition 5.10 (Groupe des chaînes singulières). Pour $n \geq 0$, le groupe des n -chaînes singulières de X est le groupe abélien libre engendré par l'ensemble $\text{Sing}_n(X)$:

$$C_n(X) = \mathbb{Z}[\text{Sing}_n(X)] = \bigoplus_{\sigma \in \text{Sing}_n(X)} \mathbb{Z} \cdot \sigma.$$

Un élément de $C_n(X)$ est donc une combinaison linéaire formelle finie $\sum_i n_i \sigma_i$ avec $n_i \in \mathbb{Z}$ et $\sigma_i: \Delta^n \rightarrow X$ continues. Pour $n < 0$, on pose $C_n(X) = 0$.

Remarque 5.11. Le groupe $C_n(X)$ est en général énormément grand, même pour des espaces simples : dès que X n'est pas discret, l'ensemble $\text{Sing}_n(X)$ est de cardinal au moins celui du continu pour $n \geq 1$. Ce n'est pas un obstacle, car l'information essentielle est contenue dans le quotient $H_n(X) = \ker \partial_n / \text{im } \partial_{n+1}$, qui s'avère de taille raisonnable pour les espaces « ordinaires ».

Exemple 5.12 (Le bord d'un 1-simplexe). Soit $\sigma: \Delta^1 \rightarrow X$ un chemin. Son bord est

$$\partial_1(\sigma) = \sigma \circ \delta_0 - \sigma \circ \delta_1 = \sigma(e_1) - \sigma(e_0),$$

c'est-à-dire le point terminal moins le point initial (vus comme 0-chaînes).

Exemple 5.13 (Le bord d'un 2-simplexe). Soit $\sigma: \Delta^2 \rightarrow X$ un 2-simplexe singulier. Son bord est

$$\partial_2(\sigma) = \sigma \circ \delta_0 - \sigma \circ \delta_1 + \sigma \circ \delta_2.$$

Géométriquement, c'est la somme alternée des trois côtés du triangle : le côté opposé à e_0 (de e_1 à e_2), moins le côté opposé à e_1 (de e_0 à e_2), plus le côté opposé à e_2 (de e_0 à e_1). Les signes sont choisis pour que ces chemins « s'enchaînent » de manière cohérente, formant un cycle parcouru dans le sens positif.

Définition 5.14 (Opérateur bord). L'opérateur bord $\partial_n: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ est l'unique homomorphisme de groupes abéliens défini sur les générateurs par

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \circ \delta_i,$$

où $\delta_i: \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$ est la i -ième application face. On étend ∂_n par linéarité à tout $C_n(X)$.

Théorème 5.15 ($\partial^2 = 0$). Pour tout $n \geq 1$, on a $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, c'est-à-dire $\partial^2 = 0$.

Démonstration. Soit $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ un n -simplexe singulier. On calcule :

$$\begin{aligned} \partial_{n-1}(\partial_n(\sigma)) &= \partial_{n-1}\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \circ \delta_i\right) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \sigma \circ \delta_i \circ \delta_j. \end{aligned}$$

La relation fondamentale entre les applications face est $\delta_i \circ \delta_j = \delta_{j+1} \circ \delta_i$ pour $i \leq j$. En effet, ces deux applications affines coïncident sur les sommets de Δ^{n-2} .

Décomposons la somme double en deux parties selon que $j \geq i$ ou $j < i$.

Pour les termes avec $j \geq i$, on applique $\delta_i \circ \delta_j = \delta_{j+1} \circ \delta_i$:

$$\sum_{0 \leq i \leq j \leq n-1} (-1)^{i+j} \sigma \circ \delta_{j+1} \circ \delta_i.$$

En posant $k = j + 1$ (de sorte que k va de $i + 1$ à n) :

$$\sum_{0 \leq i < k \leq n} (-1)^{i+k-1} \sigma \circ \delta_k \circ \delta_i.$$

Pour les termes avec $j < i$, on a directement :

$$\sum_{0 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} \sigma \circ \delta_i \circ \delta_j.$$

En renommant (i, j) en (k, i) dans cette dernière somme (c'est-à-dire $k = i$, $i = j$), on obtient :

$$\sum_{0 \leq i < k \leq n} (-1)^{i+k} \sigma \circ \delta_k \circ \delta_i.$$

Les deux expressions sont opposées (elles diffèrent par un facteur $(-1)^{-1} = -1$), donc leur somme est nulle. Par linéarité, on conclut $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$. $\square$

5.3 Le complexe de chaînes singulières

Définition 5.16 (Complexe de chaînes). Le *complexe de chaînes singulières* de X est la suite de groupes abéliens et d'homomorphismes

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0,$$

que l'on note $(C_*(X), \partial)$. La condition $\partial^2 = 0$ assure que $\text{im } \partial_{n+1} \subset \ker \partial_n$ pour tout n .

On représente schématiquement un complexe de chaînes par le diagramme :

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \longrightarrow 0$$

5.4 Cycles, bords et groupes d'homologie

Définition 5.17 (Cycles et bords). Soit $(C_*(X), \partial)$ le complexe de chaînes singulières de X . Pour tout $n \geq 0$:

- (i) Le groupe des n -cycles est $Z_n(X) = \ker(\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X))$.
- (ii) Le groupe des n -bords est $B_n(X) = \text{im}(\partial_{n+1} : C_{n+1}(X) \rightarrow C_n(X))$.
- (iii) Puisque $\partial^2 = 0$, on a $B_n(X) \subset Z_n(X)$.

Définition 5.18 (Groupes d'homologie singulière). Le n -ième groupe d'homologie singulière de X est le groupe quotient

$$H_n(X) = \frac{Z_n(X)}{B_n(X)} = \frac{\ker \partial_n}{\text{im } \partial_{n+1}}.$$

La classe d'un cycle $z \in Z_n(X)$ dans $H_n(X)$ est notée $[z]$ et s'appelle la *classe d'homologie* de z . Deux cycles z, z' sont *homologues* si $[z] = [z']$, c'est-à-dire si $z - z' \in B_n(X)$.

Remarque 5.19. Intuitivement, $H_n(X)$ mesure les « trous n -dimensionnels » de X : un n -cycle est une chaîne fermée (sans bord), et il est trivial en homologie s'il borde une $(n+1)$ -chaîne. Le rang de $H_n(X)$ (en tant que groupe abélien) s'appelle le n -ième nombre de Betti $\beta_n(X)$.

5.5 Fonctorialité de l'homologie

Définition 5.20 (Morphisme de chaînes induit). Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue. Pour tout n -simplexe singulier $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$, on pose $f_\#(\sigma) = f \circ \sigma: \Delta^n \rightarrow Y$. On étend par linéarité pour obtenir un homomorphisme

$$f_\#: C_n(X) \longrightarrow C_n(Y).$$

Proposition 5.21 (Morphisme de complexes de chaînes). *Le morphisme $f_\#$ commute avec les opérateurs bord, c'est-à-dire $\partial_n \circ f_\# = f_\# \circ \partial_n$ pour tout n . Autrement dit, $f_\#$ est un morphisme de complexes de chaînes.*

Démonstration. Pour un générateur $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$:

$$\partial_n(f_\#(\sigma)) = \partial_n(f \circ \sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (f \circ \sigma) \circ \delta_i = \sum_{i=0}^n (-1)^i f \circ (\sigma \circ \delta_i) = f_\# \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \circ \delta_i \right) = f_\#(\partial_n(\sigma)).$$

Le résultat s'étend par linéarité. $\square$

Le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_n(X) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(X) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f_\# & & \downarrow f_\# & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_n(Y) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(Y) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Corollaire 5.22 (Morphisme induit en homologie). *Toute application continue $f: X \rightarrow Y$ induit un homomorphisme*

$$f_*: H_n(X) \longrightarrow H_n(Y), \quad [z] \longmapsto [f_\#(z)],$$

bien défini pour tout $n \geq 0$.

Démonstration. Le morphisme $f_\#$ envoie cycles sur cycles (car il commute au bord) et bords sur bords (car $f_\#(\partial c) = \partial(f_\#(c))$), donc il passe au quotient. $\square$

Théorème 5.23 (Fonctorialité de l'homologie). *L'homologie singulière définit un foncteur covariant*

$$H_n: \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

de la catégorie des espaces topologiques vers la catégorie des groupes abéliens, pour chaque $n \geq 0$. Précisément :

(i) $(\text{Id}_X)_* = \text{Id}_{H_n(X)}$.

(ii) Si $f: X \rightarrow Y$ et $g: Y \rightarrow Z$ sont continues, alors $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Démonstration. (i) est immédiat car $(\text{Id}_X)_\# = \text{Id}_{C_n(X)}$. (ii) découle de $(g \circ f)_\#(\sigma) = g \circ f \circ \sigma = g_\#(f_\#(\sigma))$, donc $(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$, et le passage au quotient est compatible. $\square$

Corollaire 5.24. *Si $f: X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme, alors $f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ est un isomorphisme pour tout n .*

Démonstration. Si $g = f^{-1}$, alors $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = (\text{Id}_X)_* = \text{Id}$ et de même $f_* \circ g_* = \text{Id}$. $\square$

5.6 Invariance homotopique

Le résultat fondamental suivant renforce considérablement le *efcor* :homeo-iso-homologie : non seulement les homéomorphismes, mais même les équivalences d'homotopie, induisent des isomorphismes en homologie.

Théorème 5.25 (Invariance homotopique de l'homologie). *Si $f, g: X \rightarrow Y$ sont deux applications continues homotopes ($f \simeq g$), alors $f_* = g_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ pour tout $n \geq 0$.*

En conséquence, si X et Y ont le même type d'homotopie, alors $H_n(X) \cong H_n(Y)$ pour tout n .

La preuve repose sur la construction d'un *opérateur de prisme*, dont voici le mécanisme.

Définition 5.26 (Opérateur de prisme). Soit $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ une homotopie entre $f = F(-, 0)$ et $g = F(-, 1)$. On définit un homomorphisme $P_n: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y)$, appelé *opérateur de prisme*, de la manière suivante. Pour un n -simplexe singulier $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$, le « prisme » $\Delta^n \times [0, 1]$ se décompose en $(n+1)$ -simplexes. Plus précisément, on pose

$$P_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i F \circ (\sigma \times \text{Id}) \circ p_i,$$

où $p_i: \Delta^{n+1} \rightarrow \Delta^n \times [0, 1]$ est l'application affine définie par

$$p_i(e_j) = \begin{cases} (e_j, 0) & \text{si } j \leq i, \\ (e_{j-1}, 1) & \text{si } j > i. \end{cases}$$

Lemme 5.27 (Relation fondamentale du prisme). *L'opérateur de prisme satisfait la relation d'homotopie de chaînes :*

$$\partial_{n+1} \circ P_n + P_{n-1} \circ \partial_n = g_{\#} - f_{\#}: C_n(X) \rightarrow C_n(Y).$$

Démonstration. On vérifie la relation sur un générateur $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$. Le calcul de $\partial_{n+1}(P_n(\sigma))$ fait apparaître, par développement, des termes correspondant aux faces du prisme $\Delta^n \times [0, 1]$. Les faces « verticales » (celles qui n'impliquent ni $t = 0$ ni $t = 1$) se simplifient en paires de signes opposés avec les termes de $P_{n-1}(\partial_n(\sigma))$. Il ne subsiste que les faces « supérieure » ($t = 1$) et « inférieure » ($t = 0$), qui donnent respectivement $g_{\#}(\sigma)$ et $-f_{\#}(\sigma)$.

En détail, écrivons $\partial_{n+1}(P_n(\sigma)) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{i+k} F \circ (\sigma \times \text{Id}) \circ p_i \circ \delta_k$. L'analyse des cas $k \leq i$ et $k > i$ combinée aux identités entre les p_i et les δ_k fournit, après télescopage, exactement $g_{\#}(\sigma) - f_{\#}(\sigma) - P_{n-1}(\partial_n(\sigma))$. $\square$

Preuve du efthm :invariance-homotopique. Soit $[z] \in H_n(X)$ avec $z \in Z_n(X)$, c'est-à-dire $\partial_n(z) = 0$. Alors :

$$g_{\#}(z) - f_{\#}(z) = \partial_{n+1}(P_n(z)) + P_{n-1}(\partial_n(z)) = \partial_{n+1}(P_n(z)).$$

Ainsi $g_{\#}(z) - f_{\#}(z) \in B_n(Y)$, d'où $[g_{\#}(z)] = [f_{\#}(z)]$, c'est-à-dire $g_*[z] = f_*[z]$. $\square$

Corollaire 5.28. *Si X est contractile, alors $H_n(X) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.*

Démonstration. Un espace contractile X est homotopiquement équivalent à un point $\{*\}$. Par invariance homotopique, $H_n(X) \cong H_n(\{*\})$ pour tout n . D'après le

efthm :homologie-point, $H_0(\{*\}) = \mathbb{Z}$ et $H_n(\{*\}) = 0$ pour $n \geq 1$. $\square$

Corollaire 5.29. *Si $f: X \rightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie, alors $f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ est un isomorphisme pour tout $n \geq 0$.*

Démonstration. Soit $g: Y \rightarrow X$ une inverse homotopique de f , c'est-à-dire $g \circ f \simeq \text{Id}_X$ et $f \circ g \simeq \text{Id}_Y$. Par le efthm :invariance-homotopique, $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = (\text{Id}_X)_* = \text{Id}_{H_n(X)}$ et de même $f_* \circ g_* = \text{Id}_{H_n(Y)}$. Donc f_* est un isomorphisme d'inverse g_* . $\square$

Exemple 5.30 (Espaces contractiles classiques). Les espaces suivants sont contractiles et ont donc la même homologie qu'un point :

- (i) L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ (homotopie de contraction $F(x, t) = (1 - t)x$).
- (ii) Le disque fermé D^n (même argument).
- (iii) Tout sous-espace convexe de $\mathbb{R}^n$.
- (iv) Le cône $CX = (X \times [0, 1]) / (X \times \{1\})$ sur un espace quelconque X .

Remarque 5.31 (Homotopie de chaînes et algèbre homologique). La notion d'homotopie de chaînes (un opérateur P tel que $\partial P + P \partial = g_{\#} - f_{\#}$) est purement algébrique et ne fait intervenir aucune topologie. Elle joue un rôle central en algèbre homologique, bien au-delà du cadre topologique. On dit que P est une *homotopie de chaînes* entre $f_{\#}$ et $g_{\#}$, et que ces deux morphismes de complexes sont *homotopes* au sens de l'algèbre homologique. Le résultat clef est qu'une homotopie de chaînes implique l'égalité des morphismes induits en homologie.

5.7 Homologie réduite

Définition 5.32 (Morphisme d'augmentation). Le *morphisme d'augmentation* est l'homomorphisme $\varepsilon: C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ défini par $\varepsilon(\sigma) = 1$ pour tout 0-simplexe singulier σ et étendu par linéarité. On a $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$, de sorte que le *complexe augmenté* est

$$\cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Définition 5.33 (Homologie réduite). Les *groupes d'homologie réduite* de X (pour $X \neq \emptyset$) sont les groupes d'homologie du complexe augmenté :

$$\tilde{H}_n(X) = \begin{cases} H_n(X) & \text{si } n \geq 1, \\ \ker \varepsilon / \operatorname{im} \partial_1 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

On a une suite exacte courte $0 \rightarrow \tilde{H}_0(X) \rightarrow H_0(X) \xrightarrow{\varepsilon_*} \mathbb{Z} \rightarrow 0$, de sorte que $H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$.

Remarque 5.34. La motivation de l'homologie réduite est d'éliminer la « copie parasite » de $\mathbb{Z}$ en degré 0 due au fait que tout espace non vide a $H_0 \neq 0$. L'homologie réduite est plus naturelle pour formuler certains résultats, notamment la suspension et le théorème de Mayer–Vietoris. En particulier, $\tilde{H}_n(\{*\}) = 0$ pour tout n .

Remarque 5.35 (Homologie réduite via le complexe augmenté). On peut voir le complexe augmenté comme un complexe de chaînes indexé en degré ≥ -1 , avec $C_{-1}(X) = \mathbb{Z}$ et $\partial_0 = \varepsilon$. Les groupes d'homologie de ce complexe étendu sont exactement les $\tilde{H}_n(X)$ pour $n \geq 0$, et $\tilde{H}_{-1}(X) = 0$ pour tout espace non vide.

Proposition 5.36. Si X possède k composantes connexes par arcs $X_1, \dots, X_k$, alors $H_0(X) \cong \mathbb{Z}^k$ et $\tilde{H}_0(X) \cong \mathbb{Z}^{k-1}$.

Démonstration. Deux 0-simplexes $\sigma, \tau: \Delta^0 \rightarrow X$ (c'est-à-dire deux points de X) sont homologues si et seulement s'ils sont dans la même composante connexe par arcs, car un chemin γ de σ à τ fournit un 1-simplexe γ avec $\partial_1(\gamma) = \tau - \sigma$. Ainsi $H_0(X)$ est le groupe abélien libre engendré par les composantes connexes par arcs. $\square$

5.8 Calculs fondamentaux

Théorème 5.37 (Homologie d'un point). Soit $\{*\}$ l'espace réduit à un point. Alors

$$H_n(\{*\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Démonstration. Pour chaque $n \geq 0$, il existe un unique n -simplexe singulier $\sigma_n: \Delta^n \rightarrow \{*\}$ (l'application constante). Ainsi $C_n(\{*\}) \cong \mathbb{Z}$ pour tout $n \geq 0$, engendré par σ_n . L'opérateur bord donne

$$\partial_n(\sigma_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \sigma_{n-1} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Le complexe de chaînes est donc

$$\cdots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{Id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{Id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

d'où $H_0 = \mathbb{Z}/0 = \mathbb{Z}$ et $H_n = 0$ pour $n \geq 1$ (car les morphismes alternent entre 0 et Id). $\square$

Théorème 5.38 (Homologie des sphères). *Pour tout $n \geq 0$, on a*

$$H_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0 \text{ ou } k = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En homologie réduite : $\tilde{H}_k(S^n) \cong \mathbb{Z}$ si $k = n$, et 0 sinon.

Nous donnons la preuve par récurrence, en utilisant la suite exacte de Mayer–Vietoris (démontrée au echap :suites-exactes).

Démonstration. Initialisation. $S^0 = \{-1, +1\}$ a deux composantes connexes par arcs, donc $H_0(S^0) \cong \mathbb{Z}^2$ et $H_k(S^0) = 0$ pour $k \geq 1$. En homologie réduite, $\tilde{H}_0(S^0) \cong \mathbb{Z}$.

Hérédité. Supposons le résultat pour S^{n-1} . Décomposons S^n en deux hémisphères ouverts $U = S^n \setminus \{N\}$ et $V = S^n \setminus \{S\}$ (pôle nord et pôle sud). Les deux ouverts sont contractiles (homéomorphes à $\mathbb{R}^n$ par projection stéréographique), et $U \cap V$ est homotopiquement équivalent à S^{n-1} (c'est l'équateur épaissi).

Par la suite de Mayer–Vietoris (efthm :mayer-vietoris-mention) :

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_k(U) \oplus \tilde{H}_k(V) \longrightarrow \tilde{H}_k(S^n) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_{k-1}(U \cap V) \longrightarrow \cdots$$

Puisque $\tilde{H}_k(U) = \tilde{H}_k(V) = 0$ pour tout k , la suite exacte fournit des isomorphismes $\tilde{H}_k(S^n) \cong \tilde{H}_{k-1}(U \cap V) \cong \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1})$ pour tout k . L'hypothèse de récurrence donne le résultat. $\square$

5.9 Homologie relative

Définition 5.39 (Chaînes relatives). Soit $A \subset X$ un sous-espace. L'inclusion $\iota: A \hookrightarrow X$ induit une injection $\iota_\#: C_n(A) \hookrightarrow C_n(X)$. Le *groupe des n -chaînes relatives* est le quotient

$$C_n(X, A) = C_n(X) / C_n(A).$$

Proposition 5.40. *L'opérateur bord ∂_n de $C_*(X)$ passe au quotient en un opérateur bord $\bar{\partial}_n: C_n(X, A) \rightarrow C_{n-1}(X, A)$ satisfaisant $\bar{\partial}^2 = 0$.*

Démonstration. Comme $\partial_n(C_n(A)) \subset C_{n-1}(A)$ (car l'inclusion $A \hookrightarrow X$ est un morphisme de complexes), l'opérateur bord passe au quotient. La relation $\bar{\partial}^2 = 0$ découle de $\partial^2 = 0$ par passage au quotient. $\square$

Définition 5.41 (Groupes d'homologie relative). Les *groupes d'homologie relative* de la paire (X, A) sont

$$H_n(X, A) = \ker \bar{\partial}_n / \operatorname{im} \bar{\partial}_{n+1}, \quad n \geq 0.$$

Un élément de $H_n(X, A)$ est représenté par une chaîne $c \in C_n(X)$ dont le bord $\partial_n(c)$ est dans $C_{n-1}(A)$ (un « cycle relatif »), modulo les chaînes de la forme $\partial_{n+1}(d) + a$ avec $d \in C_{n+1}(X)$ et $a \in C_n(A)$.

Remarque 5.42. La suite exacte courte de complexes de chaînes

$$0 \longrightarrow C_*(A) \xrightarrow{\iota_\#} C_*(X) \xrightarrow{\pi} C_*(X, A) \longrightarrow 0$$

engendre, par le théorème algébrique de la suite exacte longue (efthm :suite-exacte-longue), la suite exacte longue de la paire (X, A) (efsec :suite-exacte-paire).

Proposition 5.43 (Fonctorialité de l'homologie relative). Si $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ est une application de paires (c'est-à-dire $f: X \rightarrow Y$ continue avec $f(A) \subset B$), alors f induit un homomorphisme $f_*: H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$ pour tout n , et l'homologie relative est fonctorielle : $(\operatorname{Id})_* = \operatorname{Id}$ et $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Démonstration. L'application $f_\#: C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ envoie $C_n(A)$ dans $C_n(B)$ (car $f(A) \subset B$), donc passe au quotient en $\bar{f}_\#: C_n(X, A) \rightarrow C_n(Y, B)$. Ce morphisme commute aux bords et induit donc un morphisme en homologie. Les propriétés de fonctorialité se vérifient par passage au quotient. $\square$

Exemple 5.44 (Homologie relative de $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$). En utilisant l'excision et le fait que $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ est une bonne paire, on obtient (cf. efthm :relative-quotient) :

$$H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \tilde{H}_k(\mathbb{R}^n / (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})) \cong \tilde{H}_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce groupe est appelé le *groupe d'orientation locale* de $\mathbb{R}^n$ en l'origine.

5.10 Commentaires historiques et perspectives

Remarque 5.45 (Perspective historique). La notion d'homologie a été introduite par Henri Poincaré dans son *Analysis Situs* (1895), sous une forme géométrique assez différente de la présentation algébrique moderne. Poincaré travaillait avec des variétés triangulées et définissait les « cycles » comme des combinaisons de cellules sans bord.

La formulation en termes de simplexes singuliers est due à Samuel Eilenberg (1944), qui a montré que cette approche produit les mêmes groupes d'homologie que les définitions simpliciale et cellulaire pour les espaces raisonnables (CW-complexes), tout en étant définie pour *tout* espace topologique.

La caractérisation axiomatique de l'homologie par Eilenberg et Steenrod (1952) a ensuite montré que toute théorie d'homologie satisfaisant un petit nombre d'axiomes (fonctorialité, invariance homotopique, excision, axiome de la dimension) coïncide avec l'homologie singulière sur les CW-complexes finis.

Remarque 5.46 (Homologie à coefficients). La construction s'étend immédiatement à des coefficients dans un groupe abélien G quelconque : on pose $C_n(X; G) = C_n(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G$ et on étend ∂ par $\partial \otimes \text{Id}_G$. Les groupes d'homologie $H_n(X; G)$ sont particulièrement utiles pour $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (homologie modulo p), $G = \mathbb{Q}$ (homologie rationnelle) et $G = \mathbb{R}$ (lié à la cohomologie de de Rham pour les variétés).

5.11 Exercices

Exercice 5.1 (★★). Soit $X = \mathbb{R}^2$ et $\sigma: \Delta^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ le 2-simplexe singulier défini par $\sigma(t_0, t_1, t_2) = (t_1, t_2)$. Calculer explicitement $\partial_2(\sigma)$ comme combinaison de 1-simplexes singuliers. Vérifier que $\partial_1(\partial_2(\sigma)) = 0$.

Exercice 5.2 (★★). Montrer directement (sans utiliser la propriété H0-composantes) que si X est connexe par arcs, alors $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$. *Indication : montrer que l'augmentation $\varepsilon: C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ induit un isomorphisme $H_0(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$.*

Exercice 5.3 (★★). Soit X un ensemble discret de cardinal m . Calculer $H_n(X)$ pour tout $n \geq 0$.

Exercice 5.4 (★★). Soit $A \subset X$ un rétracte, c'est-à-dire qu'il existe une application continue $r: X \rightarrow A$ telle que $r \circ \iota = \text{Id}_A$ où $\iota: A \hookrightarrow X$. Montrer que $\iota_*: H_n(A) \rightarrow H_n(X)$ est injective pour tout n .

Exercice 5.5 (★★★). Soient $f_{\#}, g_{\#}: C_*(X) \rightarrow C_*(Y)$ deux morphismes de complexes de chaînes. Montrer que s'il existe une *homotopie de chaînes* $P_n: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y)$ satisfaisant $\partial_{n+1}P_n + P_{n-1}\partial_n = g_{\#} - f_{\#}$ pour tout n , alors $f_* = g_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$.

Exercice 5.6 (★★★). Soient X et Y deux espaces topologiques. Montrer que $H_0(X \times Y) \cong H_0(X) \otimes_{\mathbb{Z}} H_0(Y)$. *Indication : relier les composantes connexes par arcs de $X \times Y$ à celles de X et Y .*

Exercice 5.7 (★★). Montrer que $\tilde{H}_n(\{*\}) = 0$ pour tout $n \geq 0$.

Exercice 5.8 (★★★). Soit $x_0 \in X$. Montrer qu'il existe une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_n(X) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(\{x_0\}) \longrightarrow 0$$

pour tout $n \geq 0$, et que cette suite est scindée. En déduire que $H_n(X) \cong \tilde{H}_n(X) \oplus H_n(\{x_0\})$.

Exercice 5.9 (★★★). Compléter les détails de la preuve du lemme relation-prisme en vérifiant l'annulation des termes correspondant aux faces verticales du prisme $\Delta^n \times [0, 1]$.

Résumé du chapitre

1. Le n -simplexe standard Δ^n est l'enveloppe convexe de $n + 1$ sommets dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Un n -simplexe singulier dans X est une application continue $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$.
2. Le groupe des n -chaînes singulières $C_n(X)$ est le groupe abélien libre engendré par les n -simplexes singuliers. L'opérateur bord ∂_n est défini par somme alternée des faces.
3. La propriété $\partial^2 = 0$ fait de $(C_*(X), \partial)$ un complexe de chaînes. Les groupes d'homologie $H_n(X) = \ker \partial_n / \operatorname{im} \partial_{n+1}$ mesurent les trous n -dimensionnels.
4. L'homologie est un foncteur $H_n: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ab}$, invariant par homotopie.
5. $H_*(\{*\})$ est $\mathbb{Z}$ en degré 0 et trivial ailleurs. Pour les sphères, $\tilde{H}_k(S^n) \cong \mathbb{Z}$ si $k = n$ et 0 sinon.
6. L'homologie relative $H_n(X, A)$ provient du complexe quotient $C_*(X)/C_*(A)$ et intervient dans la suite exacte longue de la paire.

Chapitre 6

Suites exactes longues et excision

Contents

4.1 Définitions et premiers exemples	44
4.2 Relèvement des chemins	46
4.3 Relèvement des homotopies	46
4.4 Action de monodromie	47
4.5 Classification des revêtements connexes	48
4.6 Revêtement universel	50
4.7 Transformations de revêtement	52
4.8 Revêtements réguliers	52
4.9 Applications complémentaires	54
4.10 Exercices	55
Résumé du chapitre	56

Le présent chapitre développe la machinerie algébrique et les résultats géométriques qui confèrent à l'homologie singulière sa puissance de calcul. La suite exacte longue associée à une paire (X, A) relie l'homologie de X , de A et de la paire, tandis que le théorème d'excision permet de localiser les calculs homologiques. Combinés, ces outils conduisent à des applications remarquables : calcul de l'homologie des sphères, notion de degré, théorèmes de point fixe de Brouwer et invariance du domaine.

6.1 Suites exactes courtes de complexes de chaînes

Définition 6.1 (Suite exacte courte de complexes). Soient (A_*, ∂^A) , (B_*, ∂^B) , (C_*, ∂^C) trois complexes de chaînes de groupes abéliens. Une *suite exacte courte de complexes de chaînes* est une suite

$$0 \longrightarrow A_* \xrightarrow{i} B_* \xrightarrow{p} C_* \longrightarrow 0,$$

où i et p sont des morphismes de complexes de chaînes tels que, pour chaque n ,

$$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{i_n} B_n \xrightarrow{p_n} C_n \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte de groupes abéliens.

Le diagramme complet de la situation est le suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{i} & B_{n+1} & \xrightarrow{p} & C_{n+1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial^A & & \downarrow \partial^B & & \downarrow \partial^C \\ 0 & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{i} & B_n & \xrightarrow{p} & C_n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial^A & & \downarrow \partial^B & & \downarrow \partial^C \\ 0 & \longrightarrow & A_{n-1} & \xrightarrow{i} & B_{n-1} & \xrightarrow{p} & C_{n-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

où tous les carrés commutent.

6.2 Le morphisme de connexion

Définition 6.2 (Morphisme de connexion). Soit $0 \rightarrow A_* \xrightarrow{i} B_* \xrightarrow{p} C_* \rightarrow 0$ une suite exacte courte de complexes de chaînes. Le *morphisme de connexion* (ou *opérateur bord*)

$$\partial_* : H_n(C_*) \longrightarrow H_{n-1}(A_*)$$

est construit par la procédure suivante de *chasse au diagramme*.

Proposition 6.3 (Construction de ∂_*). Soit $[c] \in H_n(C_*)$ représenté par un cycle $c \in C_n$ (*c'est-à-dire* $\partial^C(c) = 0$).

- (i) Comme p_n est surjectif, il existe $b \in B_n$ tel que $p_n(b) = c$.
- (ii) On a $p_{n-1}(\partial^B(b)) = \partial^C(p_n(b)) = \partial^C(c) = 0$, donc $\partial^B(b) \in \ker p_{n-1} = \operatorname{im} i_{n-1}$.
- (iii) Il existe un unique $a \in A_{n-1}$ tel que $i_{n-1}(a) = \partial^B(b)$.
- (iv) Cet élément a est un cycle : $i_{n-2}(\partial^A(a)) = \partial^B(i_{n-1}(a)) = \partial^B(\partial^B(b)) = 0$, et comme i_{n-2} est injectif, $\partial^A(a) = 0$.
- (v) On pose $\partial_*[c] = [a] \in H_{n-1}(A_*)$.

Le diagramme ci-dessous illustre la chasse :

$$\begin{array}{ccccc}
 & b & \xrightarrow{p_n} & c & \\
 & \downarrow \partial^B & & \downarrow \partial^C & \\
 a & \xrightarrow{i_{n-1}} & \partial^B(b) & \xrightarrow{p_{n-1}} & 0
 \end{array}$$

Lemme 6.4 (Bonne définition de ∂_*). *Le morphisme ∂_* est bien défini, c'est-à-dire que la classe $[a]$ ne dépend ni du choix du relèvement b de c , ni du choix du représentant c de la classe $[c]$.*

Démonstration. Indépendance du relèvement. Si b' est un autre relèvement, $p_n(b-b') = 0$, donc $b-b' = i_n(a')$ pour un certain $a' \in A_n$. Alors $i_{n-1}(\partial^A(a')) = \partial^B(i_n(a')) = \partial^B(b) - \partial^B(b')$, d'où les deux éléments a obtenus diffèrent par $\partial^A(a')$, un bord.

Indépendance du représentant. Si $c' = c + \partial^C(c'')$ avec $c'' \in C_{n+1}$, choisissons $b'' \in B_{n+1}$ avec $p_{n+1}(b'') = c''$. Alors $b + \partial^B(b'')$ est un relèvement de c' , et $\partial^B(b + \partial^B(b'')) = \partial^B(b)$, d'où le même a . $\square$

6.3 Théorème de la suite exacte longue

Théorème 6.5 (Suite exacte longue en homologie). *Soit $0 \rightarrow A_* \xrightarrow{i} B_* \xrightarrow{p} C_* \rightarrow 0$ une suite exacte courte de complexes de chaînes. Il existe une suite exacte longue de groupes abéliens :*

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & H_n(A_*) & \xrightarrow{i_*} & H_n(B_*) & \xrightarrow{p_*} & H_n(C_*) \longrightarrow \\
 & & & & \searrow \partial_* & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & \swarrow & & \\
 & & & & H_{n-1}(A_*) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(B_*) \xrightarrow{p_*} H_{n-1}(C_*) \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

c'est-à-dire

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_n(A_*) \xrightarrow{i_*} H_n(B_*) \xrightarrow{p_*} H_n(C_*) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A_*) \xrightarrow{i_*} \cdots$$

De plus, la suite exacte longue est naturelle : un morphisme de suites exactes courtes de complexes induit un morphisme de suites exactes longues.

Démonstration. Il y a six exactitudes à vérifier. Nous les démontrons toutes.

1. Exactitude en $H_n(B_*)$: $\text{im } i_* \subset \ker p_*$. Pour $[a] \in H_n(A_*)$, on a $p_*(i_*[a]) = [p(i(a))] = [0] = 0$ car $p \circ i = 0$.

2. Exactitude en $H_n(B_*)$: $\ker p_* \subset \text{im } i_*$. Soit $[b] \in H_n(B_*)$ avec $p_*[b] = 0$. Alors $p(b) = \partial^C(c')$ pour un certain $c' \in C_{n+1}$. On choisit $b' \in B_{n+1}$ avec $p(b') = c'$. Posons $b'' = b - \partial^B(b')$. Alors $p(b'') = p(b) - \partial^C(p(b')) = p(b) - \partial^C(c') = 0$, donc $b'' \in \ker p = \text{im } i$. Il existe $a \in A_n$ avec $i(a) = b''$, et a est un cycle car $i(\partial^A(a)) = \partial^B(i(a)) = \partial^B(b'') = \partial^B(b) - \partial^B\partial^B(b') = 0$ et i est injectif. Alors $i_*[a] = [b''] = [b]$.

3. Exactitude en $H_n(C_*)$: $\text{im } p_* \subset \ker \partial_*$. Pour $[b] \in H_n(B_*)$, on a $\partial_*(p_*[b]) = \partial_*[p(b)]$. On peut relever $p(b)$ à b même, et $\partial^B(b) = 0$, donc $a = 0$ dans la construction, d'où $\partial_*[p(b)] = 0$.

4. Exactitude en $H_n(C_*)$: $\ker \partial_* \subset \operatorname{im} p_*$. Soit $[c] \in H_n(C_*)$ avec $\partial_*[c] = 0$. On relève c à $b \in B_n$, et $\partial^B(b) = i(a)$ avec $[a] = 0$ dans $H_{n-1}(A_*)$. Alors $a = \partial^A(a')$ pour un certain $a' \in A_n$, d'où $\partial^B(b - i(a')) = i(a) - i(\partial^A(a')) = 0$. Donc $b - i(a')$ est un cycle et $p(b - i(a')) = p(b) = c$, d'où $[c] = p_*[b - i(a')]$.

5. Exactitude en $H_{n-1}(A_*)$: $\operatorname{im} \partial_* \subset \ker i_*$. Si $\partial_*[c] = [a]$, alors $i(a) = \partial^B(b)$ par construction, donc $i_*[a] = [\partial^B(b)] = 0$.

6. Exactitude en $H_{n-1}(A_*)$: $\ker i_* \subset \operatorname{im} \partial_*$. Soit $[a] \in H_{n-1}(A_*)$ avec $i_*[a] = 0$. Alors $i(a) = \partial^B(b)$ pour un certain $b \in B_n$. Posons $c = p(b) \in C_n$. Alors $\partial^C(c) = \partial^C(p(b)) = p(\partial^B(b)) = p(i(a)) = 0$, donc c est un cycle. Par construction, $\partial_*[c] = [a]$. $\square$

6.4 Suite exacte longue de la paire

Théorème 6.6 (Suite exacte longue de la paire). *Soit $A \subset X$ un sous-espace. La suite exacte courte de complexes $0 \rightarrow C_*(A) \xrightarrow{\iota_*} C_*(X) \xrightarrow{\pi} C_*(X, A) \rightarrow 0$ induit une suite exacte longue :*

$$\begin{aligned} \cdots &\xrightarrow{\partial_*} H_n(A) \xrightarrow{\iota_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A) \xrightarrow{\iota_*} \cdots \\ \cdots &\xrightarrow{j_*} H_1(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_0(A) \xrightarrow{\iota_*} H_0(X) \xrightarrow{j_*} H_0(X, A) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Démonstration. C'est une application directe du efthm :suite-exacte-longue à la suite exacte courte de complexes $0 \rightarrow C_*(A) \rightarrow C_*(X) \rightarrow C_*(X, A) \rightarrow 0$. $\square$

Remarque 6.7 (Naturalité). Si $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ est une application de paires (c'est-à-dire $f(A) \subset B$), alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_n(A) & \xrightarrow{\iota_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_n(B) & \xrightarrow{\iota_*} & H_n(Y) & \xrightarrow{j_*} & H_n(Y, B) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(B) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Exemple 6.8 (La paire (D^n, S^{n-1})). Considérons la paire (D^n, S^{n-1}) pour $n \geq 1$. Comme D^n est contractile, $\tilde{H}_k(D^n) = 0$ pour tout k . La suite exacte longue réduite donne :

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_k(D^n) \rightarrow H_k(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}) \rightarrow \tilde{H}_{k-1}(D^n) \rightarrow \cdots$$

Puisque les termes en D^n sont nuls, on obtient des isomorphismes

$$H_k(D^n, S^{n-1}) \cong \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1})$$

pour tout k . En particulier, $H_k(D^n, S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ si $k = n$, et 0 sinon.

6.5 Théorème d'excision

Le théorème d'excision est l'un des résultats techniques les plus importants de l'homologie singulière. Il affirme que l'on peut « exciser » un sous-espace qui est loin du bord sans changer l'homologie relative.

Théorème 6.9 (Excision). *Soient $Z \subset A \subset X$ des sous-espaces tels que $\overline{Z} \subset \mathring{A}$ (c'est-à-dire l'adhérence de Z est contenue dans l'intérieur de A). Alors l'inclusion $(X \setminus Z, A \setminus Z) \hookrightarrow (X, A)$ induit un isomorphisme*

$$H_n(X \setminus Z, A \setminus Z) \xrightarrow{\sim} H_n(X, A)$$

pour tout $n \geq 0$.

De manière équivalente, si $X = \mathring{A} \cup \mathring{B}$ (c'est-à-dire A et B sont des sous-espaces dont les intérieurs recouvrent X), alors l'inclusion $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ induit un isomorphisme $H_n(B, A \cap B) \cong H_n(X, A)$ pour tout n .

La preuve repose sur la technique de subdivision barycentrique, que nous développons ci-dessous.

Remarque 6.10 (Formes équivalentes de l'excision). Les deux formulations du thm :excision sont équivalentes. Pour passer de la première à la seconde, on pose $B = X \setminus Z$, de sorte que $X \setminus Z = B$ et $A \setminus Z = A \cap B$. La condition $\overline{Z} \subset \mathring{A}$ est équivalente à $X = \mathring{A} \cup \mathring{B}$, car $X \setminus \mathring{A} \subset X \setminus \overline{Z} = \mathring{B}$.

Remarque 6.11 (L'excision ne vaut pas pour l'homotopie). Il est important de noter que le théorème d'excision est propre à l'homologie et *ne vaut pas* pour les groupes d'homotopie. L'absence d'une propriété d'excision pour les groupes d'homotopie supérieurs est l'une des raisons principales de la difficulté du calcul de $\pi_n(S^m)$ pour $n > m$. Le théorème de Blakers–Massey fournit un substitut partiel (excision homotopique) sous des hypothèses de connectivité.

6.6 Subdivision barycentrique

Définition 6.12 (Barycentre). Le *barycentre* du n -simplexe standard est le point

$$\hat{b}_n = \frac{1}{n+1}(e_0 + e_1 + \cdots + e_n) = \left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1} \right) \in \Delta^n.$$

Définition 6.13 (Opérateur de subdivision barycentrique). On définit un opérateur $\text{sd} : C_n(X) \rightarrow C_n(X)$, appelé *subdivision barycentrique*, de la manière suivante. Pour un n -simplexe singulier $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$:

- Si $n = 0$: $\text{sd}(\sigma) = \sigma$.
- Si $n \geq 1$: on itère la construction. On considère le barycentre $\hat{b}$ de Δ^n et on

décompose Δ^n en $(n+1)!$ petits simplexes obtenus en joignant $\hat{b}$ aux subdivisions barycentriques des faces.

Formellement, on utilise l'opérateur cône. Si b est un point intérieur et $\alpha = \sum_j n_j \tau_j$ est une $(n-1)$ -chaîne dont les simplexes sont à valeurs dans un convexe contenant b , on pose $b \cdot \tau_j$ le simplexe affine qui envoie $e_0 \mapsto b$ et $e_{i+1} \mapsto \tau_j(e_i)$, puis $b \cdot \alpha = \sum_j n_j (b \cdot \tau_j)$. La subdivision est alors

$$\text{sd}(\sigma) = \sigma(\hat{b}_n) \cdot \text{sd}(\partial \lambda_n),$$

où $\lambda_n: \Delta^n \rightarrow \Delta^n$ est l'identité vue comme n -simplexe et l'opérateur cône utilise le barycentre $\sigma(\hat{b}_n)$.

Lemme 6.14 (Propriétés de la subdivision). (i) *sd est un morphisme de chaînes :*
 $\partial \circ \text{sd} = \text{sd} \circ \partial$.

(ii) *sd est homotope à l'identité comme morphisme de chaînes :* il existe $T_n: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X)$ tel que $\partial T + T \partial = \text{sd} - \text{Id}$.

(iii) *En itérant la subdivision, le diamètre des simplexes tend vers zéro :* le diamètre de chaque simplexe de $\text{sd}^k(\sigma)$ est au plus $\left(\frac{n}{n+1}\right)^k \text{diam}(\sigma(\Delta^n))$.

Esquisse de preuve. (i) se vérifie par récurrence, en utilisant la formule $\partial(b \cdot \alpha) = \alpha - b \cdot \partial \alpha$ pour l'opérateur cône. (ii) L'homotopie T se construit également par récurrence, en utilisant l'opérateur cône. (iii) C'est un résultat classique de géométrie convexe : la subdivision barycentrique d'un n -simplexe produit des simplexes dont le diamètre est au plus $\frac{n}{n+1}$ fois le diamètre original. $\square$

6.7 Preuve du théorème d'excision

Preuve du efthm :excision. Soit $\mathcal{U} = \{A, B\}$ avec $B = X \setminus Z$. La condition $\overline{Z} \subset \mathring{A}$ équivaut à $X = \mathring{A} \cup B$. Notons $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ le sous-groupe de $C_n(X)$ engendré par les simplexes singuliers dont l'image est contenue soit dans A , soit dans B .

Étape 1 : L'inclusion $C_*^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow C_*(X)$ est une équivalence d'homotopie de chaînes.

Par le lemme de Lebesgue, tout simplexe singulier $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ peut être « raffiné » par subdivision barycentrique itérée : il existe $k \geq 0$ tel que chaque simplexe de $\text{sd}^k(\sigma)$ a son image dans A ou dans B . Le eflem :proprietes-subdivision(ii) fournit une homotopie de chaînes entre sd^k et l'identité.

Étape 2 : Isomorphisme.

La suite exacte courte $0 \rightarrow C_*(A) \rightarrow C_*^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow C_*^{\mathcal{U}}(X)/C_*(A) \rightarrow 0$ et l'identification $C_*^{\mathcal{U}}(X)/C_*(A) \cong C_*(B)/C_*(A \cap B) = C_*(B, A \cap B)$ montrent, via l'équivalence d'homotopie de l'étape 1, que l'inclusion $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ induit un isomorphisme en homologie.

En posant $B = X \setminus Z$, on obtient $H_n(X \setminus Z, A \setminus Z) \xrightarrow{\sim} H_n(X, A)$. $\square$

Remarque 6.15 (Rôle du lemme de Lebesgue). Le lemme de Lebesgue intervient comme suit. Le recouvrement ouvert $\{\mathring{A}, \mathring{B}\}$ de X induit, par image réciproque via $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$, un recouvrement ouvert de Δ^n . Comme Δ^n est compact métrique, le

lemme de Lebesgue garantit l'existence d'un nombre de Lebesgue $\lambda > 0$ tel que toute partie de Δ^n de diamètre $< \lambda$ soit contenue dans l'un des ouverts du recouvrement. La propriété (iii) du eflem :proprietes-subdivision assure qu'après un nombre fini k de subdivisions barycentriques, chaque simplexe a un diamètre inférieur à λ , donc son image par σ est contenue dans A ou dans B .

6.8 Théorème de Mayer–Vietoris (mention)

Théorème 6.16 (Mayer–Vietoris). *Soient $A, B \subset X$ des sous-espaces tels que $X = \mathring{A} \cup \mathring{B}$. Il existe une suite exacte longue :*

$$\cdots \rightarrow H_n(A \cap B) \xrightarrow{(\iota_{A*}, \iota_{B*})} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{j_{A*} - j_{B*}} H_n(X) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \cdots$$

où ι_A, ι_B sont les inclusions de $A \cap B$ dans A et B , et j_A, j_B les inclusions de A et B dans X .

Remarque 6.17. La preuve complète du théorème de Mayer–Vietoris sera donnée au chapitre 7. Elle repose sur l'excision et la suite exacte longue. Le théorème de Mayer–Vietoris est l'outil de calcul par excellence en homologie singulière.

Remarque 6.18 (Mayer–Vietoris en homologie réduite). Il existe une version réduite de la suite de Mayer–Vietoris :

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_n(A \cap B) \rightarrow \tilde{H}_n(A) \oplus \tilde{H}_n(B) \rightarrow \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \cdots$$

valable sous les mêmes hypothèses. Cette version est souvent plus commode car elle évite les termes $\mathbb{Z}$ parasites en degré 0.

Exemple 6.19 (Application : homologie de la suspension). Soit $SX = (X \times [-1, 1]) / (X \times \{-1\} \cup X \times \{1\})$ la *suspension* de X . On décompose SX en les deux cônes $A = (X \times [-1, 0]) / (X \times \{-1\})$ et $B = (X \times [0, 1]) / (X \times \{1\})$, tous deux contractiles. Leur intersection est $A \cap B \cong X$ (identifié à $X \times \{0\}$). Par Mayer–Vietoris réduit :

$$\tilde{H}_n(SX) \cong \tilde{H}_{n-1}(X) \quad \text{pour tout } n.$$

Comme $S^n \cong S(S^{n-1})$ (la sphère S^n est la suspension de S^{n-1}), on retrouve par récurrence $\tilde{H}_k(S^n) \cong \mathbb{Z}$ si $k = n$ et 0 sinon.

6.9 Équivalence entre homologie relative et homologie réduite du quotient

Définition 6.20 (Bonne paire). Une paire (X, A) est dite *bonne* (ou *paire CW*, ou paire vérifiant la propriété d'extension d'homotopie) si A est un sous-espace fermé et possède un voisinage V dans X tel que A soit un rétracte par déformation de V .

Théorème 6.21. Si (X, A) est une bonne paire avec $A \neq \emptyset$, alors la projection $q: (X, A) \rightarrow (X/A, A/A)$ induit un isomorphisme

$$q_*: H_n(X, A) \xrightarrow{\sim} H_n(X/A, \{*\}) \cong \tilde{H}_n(X/A)$$

pour tout $n \geq 0$.

Esquisse de preuve. On considère le voisinage V de A tel que $A \hookrightarrow V$ soit une équivalence d'homotopie. Par excision, $H_n(X, A) \cong H_n(X, V)$ (en excisant un sous-ensemble approprié). Le morphisme de projection q induit un homéomorphisme $X \setminus A \rightarrow X/A \setminus \{*\}$. En utilisant l'invariance homotopique et l'excision dans X/A , on conclut. $\square$

Exemple 6.22. La paire (D^n, S^{n-1}) est une bonne paire, et $D^n/S^{n-1} \cong S^n$. Donc $H_k(D^n, S^{n-1}) \cong \tilde{H}_k(S^n)$, ce qui est cohérent avec l'efex :paire-disque-sphere.

6.10 Applications

6.10.1 Calcul de $H_n(S^n)$ par excision

Proposition 6.23. Pour tout $n \geq 1$, on a $\tilde{H}_k(S^n) \cong \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1})$ pour tout k .

Démonstration. Écrivons $S^n = D_+^n \cup D_-^n$ comme réunion des hémisphères supérieur et inférieur, avec $D_+^n \cap D_-^n = S^{n-1}$ (l'équateur). Les deux hémisphères sont contractiles. Par la suite exacte longue de la paire (D_+^n, S^{n-1}) :

$$\tilde{H}_k(D_+^n) \rightarrow H_k(D_+^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}) \rightarrow \tilde{H}_{k-1}(D_+^n).$$

Comme D_+^n est contractile, on obtient $H_k(D_+^n, S^{n-1}) \cong \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1})$. Par le efthm :relative-quotient, $H_k(D_+^n, S^{n-1}) \cong \tilde{H}_k(D_+^n/S^{n-1}) \cong \tilde{H}_k(S^n)$. $\square$

6.10.2 Degré d'une application

Définition 6.24 (Degré). Soit $f: S^n \rightarrow S^n$ une application continue, $n \geq 1$. Le morphisme induit $f_*: H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$ est un endomorphisme de $\mathbb{Z} \cong H_n(S^n)$, donc de la forme $f_*([\alpha]) = d \cdot [\alpha]$ pour un unique entier $d \in \mathbb{Z}$. Cet entier est le *degré* de f , noté $\deg(f)$.

Proposition 6.25 (Propriétés du degré). (i) $\deg(\text{Id}_{S^n}) = 1$.

(ii) $\deg(g \circ f) = \deg(g) \cdot \deg(f)$.

(iii) Si $f \simeq g$, alors $\deg(f) = \deg(g)$.

(iv) Si f n'est pas surjective, alors $\deg(f) = 0$.

(v) La réflexion $r: S^n \rightarrow S^n$ définie par $r(x_0, x_1, \dots, x_n) = (-x_0, x_1, \dots, x_n)$ a pour degré -1 .

(vi) L'antipodie $a: S^n \rightarrow S^n$, $a(x) = -x$, a pour degré $(-1)^{n+1}$.

Démonstration. (i)–(iii) découlent directement de la fonctorialité et de l'invariance homotopique.

(iv) Si f n'est pas surjective, disons $y_0 \notin \text{im}(f)$, alors f se factorise par $S^n \setminus \{y_0\} \cong \mathbb{R}^n$, qui est contractile. Donc $f_* = 0$.

(v) On décompose S^n en hémisphères séparés par l'hyperplan $x_0 = 0$. La réflexion r permute les deux hémisphères en inversant l'orientation, d'où $\deg(r) = -1$ par un calcul direct en homologie relative.

(vi) L'antipodie est la composée de $n + 1$ réflexions (une par coordonnée), donc $\deg(a) = (-1)^{n+1}$. $\square$

Corollaire 6.26. L'antipodie $a: S^n \rightarrow S^n$ est homotope à l'identité si et seulement si n est impair.

Démonstration. Si n est impair, disons $n = 2m + 1$, on peut écrire $S^n \subset \mathbb{R}^{2m+2} = \mathbb{C}^{m+1}$ et l'homotopie $F(z, t) = e^{i\pi t} z$ relie continûment l'identité ($t = 0$) à l'antipodie ($t = 1$). Réciproquement, si n est pair, $\deg(a) = (-1)^{n+1} = -1 \neq 1 = \deg(\text{Id})$, donc a n'est pas homotope à l'identité par invariance homotopique du degré. $\square$

Remarque 6.27. La condition $\deg(f) = \deg(g)$ est nécessaire mais en général pas suffisante pour que $f \simeq g$. Le théorème de Hopf affirme toutefois que pour les sphères, le degré classe complètement les classes d'homotopie : $[S^n, S^n] \cong \mathbb{Z}$ via le degré.

6.10.3 Théorème du point fixe de Brouwer

Théorème 6.28 (Point fixe de Brouwer). Toute application continue $f: D^n \rightarrow D^n$ du disque fermé dans lui-même possède au moins un point fixe, pour tout $n \geq 1$.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Supposons que $f(x) \neq x$ pour tout $x \in D^n$. On définit alors $r: D^n \rightarrow S^{n-1}$ en envoyant x sur le point d'intersection de la demi-droite issue de $f(x)$ passant par x avec la sphère S^{n-1} . Cette application r est continue et vérifie $r(x) = x$ pour tout $x \in S^{n-1}$ (car si $x \in S^{n-1}$, la demi-droite de $f(x)$ à x atteint S^{n-1} en x même). Ainsi r est une rétraction de D^n sur S^{n-1} .

Notons $\iota: S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ l'inclusion. Alors $r \circ \iota = \text{Id}_{S^{n-1}}$, d'où $r_* \circ \iota_* = \text{Id}: H_{n-1}(S^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(S^{n-1})$. En particulier, r_* est surjectif. Or $H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ (pour $n \geq 2$) et $H_{n-1}(D^n) = 0$ (car D^n est contractile), de sorte que ι_* se factorise par 0, contradiction. Pour $n = 1$, l'argument utilise H_0 . $\square$

Lemme 6.29 (Pas de rétraction). *Il n'existe aucune rétraction $r: D^n \rightarrow S^{n-1}$ pour $n \geq 1$.*

Démonstration. C'est exactement l'argument de la preuve ci-dessus, sans l'hypothèse sur f . La suite exacte longue de la paire (D^n, S^{n-1}) montre que $\iota_*: H_{n-1}(S^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(D^n)$ est le morphisme nul (car $H_{n-1}(D^n) = 0$), mais si une rétraction r existait, $r_* \circ \iota_* = \text{Id}$ imposerait ι_* injectif, contradiction puisque $H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z} \neq 0$. $\square$

6.10.4 Invariance du domaine

Théorème 6.30 (Invariance du domaine de Brouwer). *Si $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert et $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une injection continue, alors $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f est un homéomorphisme de U sur $f(U)$.*

Esquisse de preuve. Il suffit de montrer que $f(U)$ est ouvert. Soit $x \in U$. On choisit une boule fermée $\overline{B}(x, \varepsilon) \subset U$. Par compacité, $f|_{\overline{B}(x, \varepsilon)}$ est un homéomorphisme sur son image. Il faut montrer que $f(x)$ est intérieur à $f(\overline{B}(x, \varepsilon))$.

On utilise l'homologie. Notons $B = \overline{B}(x, \varepsilon)$ et $S = \partial B \cong S^{n-1}$. Supposons par l'absurde que $f(x) \notin f(B)$. Alors il existe un rétracte de $\mathbb{R}^n \setminus \{f(x)\}$ sur $f(S)$. Cela contredit le fait que l'inclusion $f(S) \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{f(x)\}$ n'est pas nulle en H_{n-1} , ce qui se démontre en utilisant l'excision et le calcul de $H_{n-1}(S^{n-1})$. $\square$

Corollaire 6.31 (Invariance de la dimension). *Si $\mathbb{R}^m$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$, alors $m = n$.*

Démonstration. Un homéomorphisme $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^n$ donne par restriction un homéomorphisme $\mathbb{R}^m \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Or $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ a le type d'homotopie de S^{k-1} , donc $S^{m-1} \simeq S^{n-1}$, d'où $H_{m-1}(S^{m-1}) \cong H_{n-1}(S^{n-1})$. Puisque $\tilde{H}_k(S^j) \neq 0$ seulement pour $k = j$, on conclut $m - 1 = n - 1$. $\square$

Remarque 6.32 (Portée du théorème d'invariance du domaine). Le théorème d'invariance du domaine est remarquable en ce qu'il ne suppose que la continuité et l'injectivité de f — aucune hypothèse de différentiabilité n'est requise. En dimension 1, le résultat est élémentaire (toute injection continue d'un intervalle ouvert dans $\mathbb{R}$ est un homéomorphisme sur son image, par le théorème des valeurs intermédiaires). En dimension supérieure, des outils d'homologie sont indispensables.

6.10.5 Théorème de Borsuk–Ulam

Le théorème de Borsuk–Ulam est l'une des applications les plus spectaculaires de l'homologie.

Théorème 6.33 (Borsuk–Ulam). *Pour toute application continue $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, il existe un point $x \in S^n$ tel que $f(x) = f(-x)$.*

Esquisse de preuve. Supposons par l'absurde que $f(x) \neq f(-x)$ pour tout x . On définit alors $g: S^n \rightarrow S^{n-1}$ par

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}.$$

Cette application est continue et vérifie $g(-x) = -g(x)$ (elle est *impaire* ou *antipodale-équivariante*). On peut montrer, par un argument de degré utilisant l'homologie, qu'une telle application impaire $S^n \rightarrow S^{n-1}$ ne peut pas exister, car elle induirait un morphisme non trivial en homologie qui est incompatible avec les degrés. La preuve complète utilise le degré modulo 2 ou la cohomologie de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ des espaces projectifs. $\square$

Corollaire 6.34 (Corollaire géographique). *À tout instant, il existe deux points diamétralement opposés sur la surface de la Terre ayant la même température et la même pression atmosphérique.*

Démonstration. La surface de la Terre est (approximativement) S^2 . L'application $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x) = (\text{température}(x), \text{pression}(x))$ est continue. Par le *efthm* :borsuk-ulam, il existe x tel que $f(x) = f(-x)$. $\square$

Corollaire 6.35 (Recouvrement de S^n). *Si $S^n = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{n+1}$ est un recouvrement par $n+1$ ensembles fermés, alors l'un des F_i contient une paire de points antipodaux $\{x, -x\}$.*

6.11 Exercices

Exercice 6.1 ($\star\star$). Soit $X = A \cup B$ avec A, B des sous-espaces. Écrire la suite exacte longue de la paire (X, A) et identifier les termes en utilisant l'excision lorsque c'est possible.

Exercice 6.2 ($\star\star$). Calculer le degré des applications suivantes $S^1 \rightarrow S^1$:

- (a) $z \mapsto z^n$ (où $S^1 \subset \mathbb{C}$),
- (b) $z \mapsto \bar{z}$ (conjugaison complexe),
- (c) $z \mapsto z^2 \bar{z}$.

Exercice 6.3 ($\star\star$). Soit $f: S^{2n} \rightarrow S^{2n}$ continue. Montrer qu'il existe $x \in S^{2n}$ tel que $f(x) = x$ ou $f(x) = -x$. *Indication : utiliser le degré de l'antipodie sur les sphères de dimension paire.*

Exercice 6.4 ($\star\star\star$). (*Théorème de la boule chevelue.*) Montrer qu'il n'existe pas de champ de vecteurs continu non nul sur S^{2n} . Précisément, montrer qu'il n'existe pas d'application continue $v: S^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ telle que $v(x) \neq 0$ et $\langle v(x), x \rangle = 0$ pour tout $x \in S^{2n}$. *Indication : si un tel v existe, construire une homotopie entre l'identité et l'antipodie.*

Exercice 6.5 ($\star\star$). Utiliser la suite de Mayer–Vietoris pour calculer les groupes d'homologie du tore $T^2 = S^1 \times S^1$, en décomposant T^2 en deux cylindres.

Exercice 6.6 ($\star\star\star$). (*Théorème de Borsuk–Ulam en dimension 2.*) Montrer que pour toute application continue $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, il existe $x \in S^2$ tel que $f(x) = f(-x)$. *Indication : supposer le contraire et en déduire une application $S^2 \rightarrow S^1$ de degré impair, ce qui est impossible.*

Exercice 6.7 (***). Vérifier directement l'énoncé d'excision dans le cas suivant : $X = [0, 2]$, $A = [0, 1]$, $Z = [0, 1/2[$. Identifier $H_n(X \setminus Z, A \setminus Z)$ et $H_n(X, A)$, et construire explicitement l'isomorphisme.

Exercice 6.8 (**). (*Suite exacte longue d'un triple.*) Soient $B \subset A \subset X$. Montrer qu'il existe une suite exacte longue :

$$\cdots \rightarrow H_n(A, B) \rightarrow H_n(X, B) \rightarrow H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A, B) \rightarrow \cdots$$

Indication : considérer la suite exacte courte $0 \rightarrow C_(A)/C_*(B) \rightarrow C_*(X)/C_*(B) \rightarrow C_*(X)/C_*(A) \rightarrow 0$.*

Exercice 6.9 (***). Soit $X = \bigvee_{i=1}^k S^{n_i}$ un bouquet de sphères ($n_i \geq 1$). Montrer, en utilisant l'excision et le efthm :relative-quotient, que

$$\tilde{H}_m(X) \cong \bigoplus_{i=1}^k \tilde{H}_m(S^{n_i})$$

pour tout $m \geq 0$.

Exercice 6.10 (**). Soit $f: S^n \rightarrow S^n$ de degré d . La *suspension* de f est l'application $Sf: S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ définie par $Sf(x, t) = (f(x)\sqrt{1-t^2}, t)$ pour $(x, t) \in S^n \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^{n+2}$ (en identifiant S^{n+1} à la suspension de S^n). Montrer que $\deg(Sf) = \deg(f) = d$.

Exercice 6.11 (***). Utiliser la suite exacte longue de la paire $(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^{n-1})$ et le fait que $\mathbb{R}P^n/\mathbb{R}P^{n-1} \cong S^n$ pour calculer par récurrence les groupes $H_k(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z})$. On montrera que $H_0(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}$, $H_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $H_k(\mathbb{R}P^2) = 0$ pour $k \geq 2$.

6.12 Remarques complémentaires

Remarque 6.36 (Théorie des faisceaux et excision). Le théorème d'excision peut être vu comme une manifestation de la nature « locale » de l'homologie singulière. En langage moderne (cohomologie des faisceaux, développée par Leray, Cartan et Godement), l'excision est essentiellement équivalente à la propriété que le préfaisceau des chaînes singulières est un *faisceau mou*. Cette perspective sera approfondie dans les chapitres sur la cohomologie.

Remarque 6.37 (Axiomes d'Eilenberg–Steenrod). Les résultats de ce chapitre et du précédent établissent que l'homologie singulière satisfait les axiomes d'Eilenberg–Steenrod pour une théorie d'homologie :

- (ES1) **Fonctorialité** : H_n est un foncteur covariant de la catégorie des paires d'espaces vers celle des groupes abéliens.
- (ES2) **Invariance homotopique** : des applications de paires homotopes induisent les mêmes morphismes en homologie.
- (ES3) **Suite exacte longue** : toute paire (X, A) donne lieu à une suite exacte longue naturelle reliant $H_*(A)$, $H_*(X)$ et $H_*(X, A)$.
- (ES4) **Excision** : si $\bar{Z} \subset \overset{\circ}{A}$, l'inclusion induit un isomorphisme $H_n(X \setminus Z, A \setminus Z) \cong$

$$H_n(X, A).$$

(ES5) **Axiome de la dimension** : $H_n(\{*\}) = 0$ pour $n \neq 0$.

Le théorème d'Eilenberg–Steenrod affirme que ces cinq axiomes caractérisent l'homologie singulière de manière unique sur la catégorie des CW-complexes finis (et plus généralement des paires compactes).

Résumé du chapitre

1. Toute suite exacte courte de complexes de chaînes $0 \rightarrow A_* \rightarrow B_* \rightarrow C_* \rightarrow 0$ induit une suite exacte longue en homologie $\cdots \rightarrow H_n(A_*) \rightarrow H_n(B_*) \rightarrow H_n(C_*) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A_*) \rightarrow \cdots$
2. Le morphisme de connexion ∂_* est construit par chasse au diagramme et est naturel.
3. La suite exacte longue de la paire (X, A) relie $H_*(A)$, $H_*(X)$ et $H_*(X, A)$.
4. Le théorème d'excision affirme que l'on peut retirer un sous-espace « intérieur » à A sans changer l'homologie relative $H_*(X, A)$. La preuve utilise la subdivision barycentrique.
5. Pour une bonne paire, $H_n(X, A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$.
6. Le degré d'une application $f: S^n \rightarrow S^n$ est l'entier d tel que $f_* = d \cdot \text{Id}$ sur $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$.
7. Le théorème du point fixe de Brouwer ($D^n \rightarrow D^n$ a un point fixe) se déduit de l'inexistence d'une rétraction $D^n \rightarrow S^{n-1}$, elle-même conséquence de l'homologie.
8. L'invariance du domaine de Brouwer montre que toute injection continue d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme sur son image.

Chapitre 7

Théorème de Mayer-Vietoris

Introduction

La suite exacte de Mayer-Vietoris est l'un des outils de calcul les plus puissants en homologie singulière. Elle permet de déterminer l'homologie d'un espace topologique X à partir de celles de deux sous-espaces dont X est la réunion, à condition de connaître l'homologie de leur intersection. Analogie en homologie du théorème de Seifert-van Kampen pour le groupe fondamental, cette suite exacte longue repose de manière essentielle sur le théorème d'excision.

Dans ce chapitre, nous établissons la suite de Mayer-Vietoris, puis l'appliquons systématiquement au calcul de l'homologie des sphères, des surfaces compactes, des espaces projectifs et d'autres espaces classiques. Nous terminons par une version simplifiée de la formule de Künneth et ses conséquences pour la caractéristique d'Euler.

7.1 Rappels : excision et suites exactes

Nous rappelons brièvement les résultats fondamentaux qui servent de fondement à la construction de Mayer-Vietoris.

Théorème 7.1 (Excision). *Soit X un espace topologique et soient $Z \subset A \subset X$ tels que $\bar{Z} \subset \mathring{A}$. Alors l'inclusion $(X \setminus Z, A \setminus Z) \hookrightarrow (X, A)$ induit des isomorphismes*

$$H_n(X \setminus Z, A \setminus Z) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A) \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Théorème 7.2 (Suite exacte longue d'une paire). *Soit (X, A) une paire d'espaces topologiques. Il existe une suite exacte longue*

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

où $i: A \hookrightarrow X$ et $j: (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$ sont les inclusions, et ∂_n est l'opérateur bord de connexion.

Remarque 7.3. De manière équivalente, l'excision peut s'énoncer ainsi : si $A, B \subset X$ sont tels que $X = \mathring{A} \cup \mathring{B}$, alors l'inclusion $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ induit un isomorphisme en homologie. C'est cette formulation qui sera la plus commode pour dériver Mayer-Vietoris.

Définition 7.4 (Paire excisive). On dit que le couple (A, B) est une *paire excisive* pour $X = A \cup B$ si les intérieurs $\mathring{A}$ et $\mathring{B}$ recouvrent X :

$$X = \mathring{A} \cup \mathring{B}.$$

7.2 La suite exacte de Mayer-Vietoris

Théorème 7.5 (Mayer-Vietoris). Soit X un espace topologique et soient $A, B \subset X$ tels que $X = \mathring{A} \cup \mathring{B}$. On note $i_A: A \cap B \hookrightarrow A$, $i_B: A \cap B \hookrightarrow B$, $j_A: A \hookrightarrow X$, $j_B: B \hookrightarrow X$ les inclusions. Alors il existe une suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow H_n(A \cap B) \xrightarrow{\Phi_n} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\Psi_n} H_n(X) \xrightarrow{\Delta_n} H_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \cdots$$

qui se termine par

$$\cdots \longrightarrow H_0(A) \oplus H_0(B) \xrightarrow{\Psi_0} H_0(X) \longrightarrow 0,$$

où les morphismes sont définis par

$$\Phi_n(\alpha) = ((i_A)_*(\alpha), -(i_B)_*(\alpha)), \quad (7.1)$$

$$\Psi_n(\alpha, \beta) = (j_A)_*(\alpha) + (j_B)_*(\beta), \quad (7.2)$$

et $\Delta_n: H_n(X) \rightarrow H_{n-1}(A \cap B)$ est l'opérateur de connexion.

Le diagramme suivant résume la suite de Mayer-Vietoris :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_n(A \cap B) & \xrightarrow{\Phi_n} & H_n(A) \oplus H_n(B) & \xrightarrow{\Psi_n} & H_n(X) \\ & & & & & \searrow \Delta_n & \\ & & & & & & \nearrow \\ & & H_{n-1}(A \cap B) & \xrightarrow{\Phi_{n-1}} & H_{n-1}(A) \oplus H_{n-1}(B) & \xrightarrow{\Psi_{n-1}} & H_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Remarque 7.6 (Description de l'opérateur de connexion). L'opérateur de connexion $\Delta_n: H_n(X) \rightarrow H_{n-1}(A \cap B)$ admet la description suivante. Soit $[\gamma] \in H_n(X)$ une classe d'homologie, représentée par un cycle $\gamma \in C_n(X)$. Par le théorème des petites chaînes, on peut supposer (quitte à subdiviser) que $\gamma = \alpha + \beta$ avec $\alpha \in C_n(A)$ et $\beta \in C_n(B)$. Alors $\partial\alpha = -\partial\beta$ est un $(n-1)$ -cycle dans $C_{n-1}(A \cap B)$ (car $\partial\alpha \in C_{n-1}(A)$ et $-\partial\beta \in C_{n-1}(B)$, et ces deux chaînes sont égales). On pose

$$\Delta_n([\gamma]) = [\partial\alpha] = -[\partial\beta] \in H_{n-1}(A \cap B).$$

La vérification que cette classe est bien définie (indépendante du choix de γ et de la décomposition $\gamma = \alpha + \beta$) est un exercice standard de *diagram chasing*.

Remarque 7.7 (Naturalité de Mayer-Vietoris). La suite de Mayer-Vietoris est *naturelle* au sens suivant. Si $f: X \rightarrow X'$ est une application continue telle que $f(A) \subset A'$ et $f(B) \subset B'$ (où $X' = A' \cup B'$ est une autre décomposition excisive), alors il existe un morphisme de suites exactes longues :

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(A \cap B) & \xrightarrow{\Phi_n} & H_n(A) \oplus H_n(B) & \xrightarrow{\Psi_n} & H_n(X) & \xrightarrow{\Delta_n} & H_{n-1}(A \cap B) \\ f_* \downarrow & & f_* \oplus f_* \downarrow & & f_* \downarrow & & f_* \downarrow \\ H_n(A' \cap B') & \xrightarrow{\Phi'_n} & H_n(A') \oplus H_n(B') & \xrightarrow{\Psi'_n} & H_n(X') & \xrightarrow{\Delta'_n} & H_{n-1}(A' \cap B') \end{array}$$

Ce diagramme commute dans chaque carré.

7.3 Preuve du théorème de Mayer-Vietoris

Démonstration. La démonstration procède en deux étapes.

Étape 1 : la suite exacte courte de complexes de chaînes.

On considère la suite

$$0 \longrightarrow C_*(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} C_*(A) \oplus C_*(B) \xrightarrow{\psi} C_*(A) + C_*(B) \longrightarrow 0, \quad (7.3)$$

où, pour tout n -simplexe singulier σ de $A \cap B$,

$$\varphi(\sigma) = (\sigma, -\sigma), \quad \psi(\sigma_A, \sigma_B) = \sigma_A + \sigma_B.$$

Ici $C_*(A) + C_*(B)$ désigne le sous-complexe de $C_*(X)$ engendré par les chaînes singulières à image dans A ou dans B .

Injectivité de φ . Si $\varphi(\sigma) = (0, 0)$, alors $\sigma = 0$.

Surjectivité de ψ . Tout élément de $C_*(A) + C_*(B)$ s'écrit par définition comme $\sigma_A + \sigma_B$ avec $\sigma_A \in C_*(A)$ et $\sigma_B \in C_*(B)$.

Exactitude en $C_(A) \oplus C_*(B)$.* On a $\psi \circ \varphi = 0$ car $\psi(\sigma, -\sigma) = \sigma - \sigma = 0$. Réciproquement, si $\psi(\sigma_A, \sigma_B) = \sigma_A + \sigma_B = 0$, alors $\sigma_A = -\sigma_B$ est une chaîne dans $C_*(A) \cap C_*(B) = C_*(A \cap B)$, et $(\sigma_A, \sigma_B) = \varphi(-\sigma_B)$.

La suite (7.3) est donc exacte courte.

Étape 2 : passage à l'homologie et rôle de l'excision.

Le théorème du serpent (ou théorème de la suite exacte longue en homologie) appliqué à (7.3) fournit une suite exacte longue

$$\cdots \rightarrow H_n(A \cap B) \xrightarrow{\Phi_n} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\Psi_n} H_n(C_*(A) + C_*(B)) \xrightarrow{\Delta_n} H_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \cdots$$

Il reste à identifier $H_n(C_*(A) + C_*(B))$ avec $H_n(X)$. L'inclusion $\iota: C_*(A) + C_*(B) \hookrightarrow C_*(X)$ induit un morphisme $\iota_*: H_n(C_*(A) + C_*(B)) \rightarrow H_n(X)$.

Or la condition $X = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ signifie exactement que le recouvrement $\{A, B\}$ est admissible. Le *théorème des petites chaînes* (conséquence directe de l'excision) affirme que ι_* est un isomorphisme. Plus précisément, toute chaîne singulière de X est homologue à une chaîne dans $C_*(A) + C_*(B)$ par subdivision barycentrique itérée, car les intérieurs de A et B recouvrent X .

En composant avec cet isomorphisme, on obtient la suite exacte longue de Mayer-Vietoris avec les morphismes Φ_n , Ψ_n et Δ_n tels que décrits dans l'énoncé du théorème. $\square$

7.4 Version réduite

Théorème 7.8 (Mayer-Vietoris réduite). *Sous les mêmes hypothèses que le efthm :mayer-vietoris, et en supposant de plus que $A \cap B \neq \emptyset$, on dispose d'une suite exacte longue en homologie réduite :*

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_n(A \cap B) \xrightarrow{\Phi_n} \tilde{H}_n(A) \oplus \tilde{H}_n(B) \xrightarrow{\Psi_n} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{\Delta_n} \tilde{H}_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \cdots$$

qui se termine par

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_0(A) \oplus \tilde{H}_0(B) \xrightarrow{\Psi_0} \tilde{H}_0(X) \longrightarrow 0.$$

Démonstration. On utilise la chaîne augmentée $\tilde{C}_*(-)$ et le fait que l'augmentation $\varepsilon: C_0(-) \rightarrow \mathbb{Z}$ est compatible avec les inclusions. La suite exacte courte augmentée

$$0 \rightarrow \tilde{C}_*(A \cap B) \rightarrow \tilde{C}_*(A) \oplus \tilde{C}_*(B) \rightarrow \tilde{C}_*(A) + \tilde{C}_*(B) \rightarrow 0$$

donne, par le même argument que précédemment, la suite exacte longue annoncée. $\square$

Remarque 7.9. La version réduite est souvent plus commode pour les calculs car elle évite les copies parasites de $\mathbb{Z}$ en degré 0 qui proviennent des composantes connexes.

7.5 Applications

7.5.1 Homologie des sphères

Théorème 7.10 (Homologie de S^n). *Pour tout $n \geq 0$, l'homologie réduite de la sphère S^n est donnée par*

$$\tilde{H}_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. On procède par récurrence sur n .

Cas de base : $n = 0$. La sphère $S^0 = \{-1, +1\}$ est un espace discret à deux points. On a $\tilde{H}_0(S^0) \cong \mathbb{Z}$ et $\tilde{H}_k(S^0) = 0$ pour $k \neq 0$.

Étape de récurrence. Supposons le résultat vrai pour S^{n-1} . On décompose S^n en

$$A = S^n \setminus \{N\}, \quad B = S^n \setminus \{S\},$$

où $N = (0, \dots, 0, 1)$ et $S = (0, \dots, 0, -1)$ sont les pôles nord et sud. Alors A et B sont homéomorphes à $\mathbb{R}^n$ (par projection stéréographique), donc contractiles, et

$$A \cap B = S^n \setminus \{N, S\} \simeq S^{n-1}$$

par une rétraction par déformation radiale sur l'équateur.

On a $\mathring{A} = A$ et $\mathring{B} = B$ (car A et B sont ouverts), donc $S^n = \mathring{A} \cup \mathring{B}$ et la suite de Mayer-Vietoris réduite s'applique :

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_k(A) \oplus \tilde{H}_k(B) \rightarrow \tilde{H}_k(S^n) \xrightarrow{\Delta_k} \tilde{H}_{k-1}(A \cap B) \rightarrow \tilde{H}_{k-1}(A) \oplus \tilde{H}_{k-1}(B) \rightarrow \cdots$$

Puisque A et B sont contractiles, $\tilde{H}_k(A) = \tilde{H}_k(B) = 0$ pour tout k . La suite donne donc des isomorphismes

$$\Delta_k: \tilde{H}_k(S^n) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}) \quad \text{pour tout } k.$$

Par hypothèse de récurrence, $\tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ si $k-1 = n-1$ (soit $k = n$) et 0 sinon. D'où le résultat. $\square$

7.5.2 Homologie du tore

Théorème 7.11 (Homologie de T^2). *L'homologie du tore $T^2 = S^1 \times S^1$ est*

$$H_k(T^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0 \text{ ou } k = 2, \\ \mathbb{Z}^2 & \text{si } k = 1, \\ 0 & \text{si } k \geq 3. \end{cases}$$

Démonstration. On représente le tore comme un quotient du carré $[0, 1]^2$ par les identifications habituelles. On choisit la décomposition suivante : soit $p \in T^2$ un point et posons

$$A = T^2 \setminus \{p\}, \quad B = D$$

où D est un petit disque ouvert autour de p . Alors $B \simeq *$ est contractile, et $A \cap B = D \setminus \{p\} \simeq S^1$.

L'espace $A = T^2 \setminus \{p\}$ se rétracte par déformation sur un bouquet $S^1 \vee S^1$, donc $\tilde{H}_1(A) \cong \mathbb{Z}^2$, $\tilde{H}_k(A) = 0$ pour $k \neq 1$.

La suite de Mayer-Vietoris réduite donne :

$$\tilde{H}_2(A) \oplus \tilde{H}_2(B) \rightarrow \tilde{H}_2(T^2) \xrightarrow{\Delta_2} \tilde{H}_1(A \cap B) \xrightarrow{\Phi_1} \tilde{H}_1(A) \oplus \tilde{H}_1(B)$$

soit

$$0 \rightarrow \tilde{H}_2(T^2) \xrightarrow{\Delta_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\Phi_1} \mathbb{Z}^2 \oplus 0.$$

Le morphisme Φ_1 envoie le générateur de $\tilde{H}_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ sur la classe de l'inclusion du cercle $S^1 \simeq \partial D \setminus \{p\}$ dans $A \simeq S^1 \vee S^1$. Ce cercle est homotope au commutateur $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ des deux générateurs de $\pi_1(S^1 \vee S^1)$, qui est trivial en H_1 (car H_1 est l'abélianisé du groupe fondamental). Ainsi $\Phi_1 = 0$.

Par exactitude, Δ_2 est un isomorphisme, donc $\tilde{H}_2(T^2) \cong \mathbb{Z}$.

Pour H_1 , la suite donne

$$0 \rightarrow \tilde{H}_1(A) \oplus \tilde{H}_1(B) \rightarrow \tilde{H}_1(T^2) \rightarrow \tilde{H}_0(A \cap B) \rightarrow \cdots$$

soit $0 \rightarrow \mathbb{Z}^2 \rightarrow \tilde{H}_1(T^2) \rightarrow 0$, d'où $\tilde{H}_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$. $\square$

7.5.3 Homologie des surfaces orientables

Théorème 7.12 (Homologie de Σ_g). Soit Σ_g la surface compacte orientable de genre $g \geq 0$. Alors

$$H_k(\Sigma_g) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0 \text{ ou } k = 2, \\ \mathbb{Z}^{2g} & \text{si } k = 1, \\ 0 & \text{si } k \geq 3. \end{cases}$$

Démonstration. On procède par récurrence sur g .

Cas $g = 0$: $\Sigma_0 = S^2$, et le résultat découle du

efthm :homologie-spheres.

Cas $g = 1$: $\Sigma_1 = T^2$, traité au efthm :homologie-tore.

Cas $g \geq 2$: On décompose Σ_g en retirant un point p et en prenant un petit disque D autour de p . L'espace $A = \Sigma_g \setminus \{p\}$ se rétracte par déformation sur un bouquet de $2g$ cercles

$$A \simeq \bigvee_{i=1}^{2g} S^1,$$

obtenu à partir du polygone fondamental à $4g$ côtés en identifiant un point sur le bord.

On a $B = D \simeq *$ et $A \cap B \simeq S^1$.

La suite de Mayer-Vietoris réduite donne, comme dans le cas du tore :

$$0 \rightarrow \tilde{H}_2(\Sigma_g) \xrightarrow{\Delta_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\Phi_1} \mathbb{Z}^{2g}.$$

Le morphisme Φ_1 est nul car le bord du disque D représente le mot de relateur $[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g]$, qui est trivial en homologie. Donc $\tilde{H}_2(\Sigma_g) \cong \mathbb{Z}$.

De même, $\tilde{H}_1(\Sigma_g) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ par le reste de la suite. $\square$

7.5.4 Homologie de l'espace projectif réel

Théorème 7.13 (Homologie de $\mathbb{RP}^2$). L'homologie de l'espace projectif réel $\mathbb{RP}^2$ est donnée par

$$H_k(\mathbb{RP}^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } k = 1, \\ 0 & \text{si } k \geq 2. \end{cases}$$

Démonstration. On utilise la structure CW de $\mathbb{RP}^2$ obtenue en identifiant les points antipodaux du bord de D^2 . On décompose $\mathbb{RP}^2 = A \cup B$ avec :

- B un voisinage ouvert du point central (homéomorphe à un disque), donc $B \simeq *$;
- $A = \mathbb{RP}^2 \setminus \{p\}$, qui se rétracte par déformation sur le cercle $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$;
- $A \cap B \simeq S^1$.

La suite de Mayer-Vietoris réduite en basse dimension donne :

$$0 \rightarrow \tilde{H}_2(\mathbb{RP}^2) \xrightarrow{\Delta_2} \tilde{H}_1(S^1) \xrightarrow{\Phi_1} \tilde{H}_1(A) \oplus 0 \xrightarrow{\Psi_1} \tilde{H}_1(\mathbb{RP}^2) \rightarrow 0.$$

Ici $\tilde{H}_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ et $\tilde{H}_1(A) \cong \tilde{H}_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. Le morphisme Φ_1 envoie le générateur du cercle $A \cap B$ vers $A \simeq S^1$. Le cercle ∂D dans $\mathbb{RP}^2$ parcourt le cercle $\mathbb{RP}^1$ deux fois (car

l'identification antipodale double le tour), donc Φ_1 est la multiplication par 2 :

$$\Phi_1: \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}.$$

Ce morphisme est injectif, donc $\tilde{H}_2(\mathbb{RP}^2) = \ker(\Phi_1) = 0$, soit $H_2(\mathbb{RP}^2) = 0$. De plus, $\tilde{H}_1(\mathbb{RP}^2) \cong \operatorname{coker}(\Phi_1) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. $\square$

Proposition 7.14 (Homologie de $\mathbb{RP}^n$). *Pour $n \geq 1$, l'homologie de $\mathbb{RP}^n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ est*

$$H_k(\mathbb{RP}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0, \\ \mathbb{Z} & \text{si } k = n \text{ et } n \text{ est impair,} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } k \text{ est impair, } 0 < k < n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Ce résultat se démontre par récurrence via l'homologie cellulaire de la structure CW standard de $\mathbb{RP}^n$ (une cellule en chaque dimension $0, 1, \dots, n$), en calculant les opérateurs bord cellulaires. $\square$

7.5.5 Homologie de la bouteille de Klein

Théorème 7.15 (Homologie de la bouteille de Klein). *Soit K la bouteille de Klein. Alors*

$$H_k(K) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0, \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } k = 1, \\ 0 & \text{si } k \geq 2. \end{cases}$$

Démonstration. La bouteille de Klein admet une structure CW avec une 0-cellule, deux 1-cellules a et b , et une 2-cellule attachée le long du mot $aba^{-1}b$.

L'homologie cellulaire donne les complexes de chaînes :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

L'opérateur d_1 est nul (car l'espace a une seule 0-cellule). Pour d_2 , le mot d'attachement $aba^{-1}b$ fournit :

$$d_2(1) = (1 - 1, 1 + 1) = (0, 2) \in \mathbb{Z}^2$$

(la cellule a apparaît avec exposants $+1$ et -1 , la cellule b avec $+1$ et $+1$). Ainsi $\operatorname{im}(d_2) = \{(0, 2m) : m \in \mathbb{Z}\}$ et

$$H_2(K) = \ker(d_2) = 0, \quad H_1(K) = \mathbb{Z}^2 / \langle (0, 2) \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad H_0(K) = \mathbb{Z}.$$

L'absence de classe fondamentale en degré 2 reflète le fait que la bouteille de Klein est non orientable. $\square$

7.6 Formule de Künneth

Pour calculer l'homologie d'un produit d'espaces, on dispose du puissant outil qu'est la formule de Künneth. Elle exprime $H_*(X \times Y)$ en termes de $H_*(X)$ et $H_*(Y)$ via le produit tensoriel.

Définition 7.16 (Produit tensoriel de complexes). Si (C_*, ∂^C) et (D_*, ∂^D) sont deux complexes de chaînes de groupes abéliens, leur *produit tensoriel* est le complexe $(C \otimes D)_*$ défini par

$$(C \otimes D)_n = \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes_{\mathbb{Z}} D_q,$$

muni de la différentielle $\partial(c \otimes d) = \partial^C c \otimes d + (-1)^p c \otimes \partial^D d$ pour $c \in C_p$.

Théorème 7.17 (Eilenberg–Zilber). *Il existe des équivalences d’homotopie de chaînes, naturelles en X et Y ,*

$$\text{EZ}: C_*(X) \otimes C_*(Y) \rightleftarrows C_*(X \times Y) : \text{AW},$$

appelées respectivement shuffle map (Eilenberg–Zilber) et Alexander–Whitney map. En particulier, $H_(C_*(X) \otimes C_*(Y)) \cong H_*(X \times Y)$.*

Théorème 7.18 (Formule de Künneth pour l’homologie). *Soient X et Y des espaces topologiques. Supposons que les groupes d’homologie $H_n(Y; \mathbb{Z})$ sont libres de type fini pour tout n . Alors il existe un isomorphisme naturel*

$$H_n(X \times Y; \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{p+q=n} H_p(X; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H_q(Y; \mathbb{Z}).$$

Remarque 7.19. Lorsque l’hypothèse de liberté n’est pas satisfaite, il faut ajouter un terme de torsion. La formule complète est :

$$0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p(X) \otimes H_q(Y) \rightarrow H_n(X \times Y) \rightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_p(X), H_q(Y)) \rightarrow 0,$$

et cette suite exacte courte est scindée (non naturellement).

Exemple 7.20. Retrouvons l’homologie de $T^2 = S^1 \times S^1$ par Künneth. Puisque $H_0(S^1) \cong \mathbb{Z}$ et $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ (tous deux libres), on peut appliquer le efthm :kunneth-homologie :

$$\begin{aligned} H_0(T^2) &\cong H_0(S^1) \otimes H_0(S^1) \cong \mathbb{Z}, \\ H_1(T^2) &\cong (H_0(S^1) \otimes H_1(S^1)) \oplus (H_1(S^1) \otimes H_0(S^1)) \cong \mathbb{Z}^2, \\ H_2(T^2) &\cong H_1(S^1) \otimes H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ce résultat coïncide avec le efthm :homologie-tore.

Exemple 7.21. Plus généralement, le tore $T^n = (S^1)^n$ satisfait

$$H_k(T^n) \cong \mathbb{Z}^{\binom{n}{k}},$$

ce qui se montre par récurrence à l'aide de la formule de Künneth.

7.7 Caractéristique d'Euler

Définition 7.22 (Caractéristique d'Euler). Soit X un espace topologique dont l'homologie $H_*(X; \mathbb{Z})$ est de type fini et nulle à partir d'un certain rang. La *caractéristique d'Euler* de X est l'entier

$$\chi(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \text{rang } H_n(X; \mathbb{Z}).$$

Proposition 7.23 (Additivité de la caractéristique d'Euler). Si $X = A \cup B$ avec (A, B) paire excisive et $A, B, A \cap B$ d'homologie de type fini, alors

$$\chi(X) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B).$$

Démonstration. Par la suite exacte de Mayer-Vietoris, la somme alternée des rangs est nulle dans toute suite exacte longue de groupes abéliens de type fini (propriété d'Euler–Poincaré). On obtient :

$$\sum_n (-1)^n [\text{rang } H_n(A \cap B) - \text{rang}(H_n(A) \oplus H_n(B)) + \text{rang } H_n(X)] = 0,$$

ce qui donne $\chi(X) - \chi(A) - \chi(B) + \chi(A \cap B) = 0$. □

Proposition 7.24 (Multiplicativité). Si X et Y sont d'homologie de type fini avec $H_*(Y)$ libre, alors

$$\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y).$$

Démonstration. Par la formule de Künneth (efthm :kunneth-homologie),

$$\begin{aligned} \chi(X \times Y) &= \sum_n (-1)^n \text{rang } H_n(X \times Y) = \sum_n (-1)^n \sum_{p+q=n} \text{rang}(H_p(X) \otimes H_q(Y)) \\ &= \sum_n (-1)^n \sum_{p+q=n} \text{rang } H_p(X) \cdot \text{rang } H_q(Y) \\ &= \left(\sum_p (-1)^p \text{rang } H_p(X) \right) \left(\sum_q (-1)^q \text{rang } H_q(Y) \right) = \chi(X) \chi(Y). \end{aligned} \quad \square$$

Exemple 7.25. Pour les surfaces compactes :

- $\chi(S^2) = 1 - 0 + 1 = 2$.
- $\chi(T^2) = 1 - 2 + 1 = 0$, et plus généralement $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$.
- $\chi(\mathbb{RP}^2) = 1 - 0 + 0 = 1$ (en utilisant les rangs libres uniquement).
- $\chi(K) = 1 - 1 + 0 = 0$ (la bouteille de Klein).

Exemple 7.26. Vérifions l'additivité pour le tore. On a $T^2 = A \cup B$ avec $A = T^2 \setminus \{p\} \simeq S^1 \vee S^1$ et $B = D \simeq *$, $A \cap B \simeq S^1$. Alors

$$\begin{aligned}\chi(A) &= \chi(S^1 \vee S^1) = 1 - 2 = -1, \\ \chi(B) &= 1, \\ \chi(A \cap B) &= \chi(S^1) = 0,\end{aligned}$$

et $\chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B) = -1 + 1 - 0 = 0 = \chi(T^2)$.

Pour la multiplicativité, $\chi(S^1 \times S^1) = \chi(S^1) \cdot \chi(S^1) = 0 \cdot 0 = 0$. Plus intéressant : $\chi(\Sigma_g \times S^1) = (2 - 2g) \cdot 0 = 0$ pour tout g .

Remarque 7.27. Si X admet une structure CW finie avec c_k cellules de dimension k , alors

$$\chi(X) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k c_k.$$

Ce résultat, qui se démontre par récurrence sur le nombre de cellules en utilisant l'additivité, justifie le lien classique entre la caractéristique d'Euler et la formule combinatoire $V - E + F$ d'Euler pour les polyèdres (où V , E , F désignent les nombres de sommets, arêtes et faces).

7.8 Exercices

Exercice 7.1 (★★). En utilisant la suite de Mayer-Vietoris avec la décomposition $S^2 = A \cup B$ où A et B sont les hémisphères nord et sud (légèrement agrandis), retrouver directement l'homologie de S^2 .

Exercice 7.2 (★★). Soient X et Y des espaces topologiques bien pointés (c'est-à-dire que le point de base admet un voisinage contractile). Montrer que

$$\tilde{H}_n(X \vee Y) \cong \tilde{H}_n(X) \oplus \tilde{H}_n(Y) \quad \text{pour tout } n.$$

Indication : utiliser Mayer-Vietoris avec des voisinages appropriés.

Exercice 7.3 (★★). Soit ΣX la suspension de X . En utilisant Mayer-Vietoris, montrer que

$$\tilde{H}_n(\Sigma X) \cong \tilde{H}_{n-1}(X) \quad \text{pour tout } n.$$

En déduire une autre preuve de l'homologie de S^n (puisque $S^n \cong \Sigma S^{n-1}$).

Exercice 7.4 (★★). Calculer l'homologie de la surface Σ_2 de genre 2 directement par Mayer-Vietoris, en décomposant Σ_2 comme union de deux tores épointés recollés le long d'un cercle.

Exercice 7.5 (★★). Vérifier la formule $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$ pour $X = S^1$, $Y = \Sigma_g$.

Exercice 7.6 (★★★). Soit $T = S^1 \times D^2$ le tore plein. Calculer l'homologie de T et celle de son bord $\partial T = S^1 \times S^1 = T^2$, puis vérifier la compatibilité avec la suite exacte de la paire $(T, \partial T)$.

Exercice 7.7 (★★★). Soit $p: S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ le revêtement double. En utilisant la suite exacte longue associée à cette application de revêtement et le théorème de transfert, retrouver l'homologie de $\mathbb{RP}^n$ pour $n = 2, 3$.

Exercice 7.8 (★★★). Soit $f: X \rightarrow X$ un homéomorphisme et soit T_f le tore d'application (mapping torus) :

$$T_f = \frac{X \times [0, 1]}{(x, 0) \sim (f(x), 1)}.$$

En décomposant T_f en deux exemplaires de $X \times (0, 1)$ qui se recouvrent, établir une suite exacte de Mayer-Vietoris reliant $H_*(T_f)$ à $H_*(X)$ et au morphisme $\text{Id}_* - f_*: H_*(X) \rightarrow H_*(X)$.

Exercice 7.9 (★★★). En utilisant une décomposition de la bouteille de Klein K en bande de Möbius et cylindre, retrouver $H_*(K)$ par la suite de Mayer-Vietoris.

Résumé du chapitre

- La **suite de Mayer-Vietoris** est une suite exacte longue associée à une décomposition $X = A \cup B$ avec $X = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$:

$$\cdots \rightarrow H_n(A \cap B) \xrightarrow{\Phi} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\Psi} H_n(X) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \cdots$$

- Elle se déduit de l'excision via le théorème des petites chaînes.
- **Applications principales** : homologie des sphères ($\tilde{H}_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$), du tore ($H_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$), des surfaces Σ_g , des espaces projectifs, de la bouteille de Klein.
- La **formule de Künneth** : $H_n(X \times Y) \cong \bigoplus_{p+q=n} H_p(X) \otimes H_q(Y)$ lorsque $H_*(Y)$ est libre.
- La **caractéristique d'Euler** $\chi(X) = \sum (-1)^n \text{rang } H_n(X)$ est additive (via Mayer-Vietoris) et multiplicative (via Künneth).

Chapitre 8

Cohomologie Singulière et Cup-Produit

Introduction

Si l'homologie singulière capture des informations fondamentales sur la topologie d'un espace, la *cohomologie* la enrichit d'une structure algébrique supplémentaire : le *cup-produit*. Grâce à cette opération, les groupes de cohomologie $H^n(X; R)$ s'assemblent en un *anneau gradué*, l'anneau de cohomologie $H^*(X; R)$, qui est un invariant strictement plus fin que les groupes d'homologie seuls.

Ce chapitre développe la théorie de la cohomologie singulière à partir des cochaînes, établit le théorème des coefficients universels, puis construit le cup-produit et ses propriétés. Nous calculons l'anneau de cohomologie de plusieurs espaces fondamentaux et montrons comment cette structure distingue des espaces que l'homologie seule ne peut séparer.

8.1 Cochaînes et opérateur cobord

Définition 8.1 (Groupe de cochaînes singulières). Soit X un espace topologique et G un groupe abélien. Le *groupe des n -cochaînes singulières* de X à coefficients dans G est le groupe

$$C^n(X; G) = \text{Hom}(C_n(X), G),$$

où $C_n(X)$ est le groupe des n -chaînes singulières de X . Un élément $\varphi \in C^n(X; G)$ est donc un homomorphisme de groupes abéliens $\varphi: C_n(X) \rightarrow G$, autrement dit une fonction qui attribue à chaque n -simplexe singulier $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ un élément $\varphi(\sigma) \in G$.

Définition 8.2 (Opérateur cobord). L'*opérateur cobord* $\delta^n: C^n(X; G) \rightarrow C^{n+1}(X; G)$ est le dual de l'opérateur bord $\partial_{n+1}: C_{n+1}(X) \rightarrow C_n(X)$, défini par

$$(\delta^n \varphi)(\sigma) = \varphi(\partial_{n+1} \sigma)$$

pour tout $(n+1)$ -simplexe singulier σ et toute n -cochaîne φ .

De manière explicite, si $\sigma: \Delta^{n+1} \rightarrow X$, alors

$$(\delta^n \varphi)(\sigma) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \varphi(\sigma \circ d_i),$$

où $d_i: \Delta^n \rightarrow \Delta^{n+1}$ est la i -ème coface (face du simplexe standard).

Lemme 8.3. On a $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$ pour tout n .

Démonstration. Pour tout $\varphi \in C^n(X; G)$ et tout $(n+2)$ -simplexe σ ,

$$(\delta^{n+1} \delta^n \varphi)(\sigma) = (\delta^n \varphi)(\partial_{n+2} \sigma) = \varphi(\partial_{n+1} \partial_{n+2} \sigma) = \varphi(0) = 0,$$

car $\partial_{n+1} \circ \partial_{n+2} = 0$. □

Ainsi $(C^*(X; G), \delta)$ est un complexe de cochaînes :

$$0 \rightarrow C^0(X; G) \xrightarrow{\delta^0} C^1(X; G) \xrightarrow{\delta^1} C^2(X; G) \xrightarrow{\delta^2} \dots$$

8.2 Groupes de cohomologie

Définition 8.4 (Groupes de cohomologie singulière). Le n -ième *groupe de cohomologie singulière* de X à coefficients dans G est le quotient

$$H^n(X; G) = \frac{\ker(\delta^n: C^n(X; G) \rightarrow C^{n+1}(X; G))}{\operatorname{im}(\delta^{n-1}: C^{n-1}(X; G) \rightarrow C^n(X; G))} = \frac{Z^n(X; G)}{B^n(X; G)},$$

où $Z^n(X; G) = \ker \delta^n$ est le groupe des n -cocycles et $B^n(X; G) = \operatorname{im} \delta^{n-1}$ est le groupe des n -cobords.

Remarque 8.5. La cohomologie est un foncteur *contravariant* : si $f: X \rightarrow Y$ est continue, on obtient un morphisme induit $f^*: H^n(Y; G) \rightarrow H^n(X; G)$ défini par $f^*(\varphi) = \varphi \circ f_\#$, où $f_\#: C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ est le morphisme de chaînes induit par f .

Proposition 8.6. Si $f, g: X \rightarrow Y$ sont homotopes, alors $f^* = g^*: H^n(Y; G) \rightarrow H^n(X; G)$ pour tout n . En particulier, les groupes de cohomologie sont des invariants d'homotopie.

Démonstration. C'est le dual de l'invariance par homotopie de l'homologie. L'homotopie de chaînes $P: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y)$ satisfaisant $\partial P + P\partial = g_\# - f_\#$ induit, par dualisation, $P^*: C^{n+1}(Y; G) \rightarrow C^n(X; G)$ vérifiant $\delta P^* + P^* \delta = g^* - f^*$ au niveau des cochaînes, ce qui implique $f^* = g^*$ en cohomologie. □

8.3 Théorème des coefficients universels

Théorème 8.7 (Coefficients universels pour la cohomologie). Soit X un espace topologique et G un groupe abélien. Pour tout $n \geq 0$, il existe une suite exacte courte naturelle

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_{n-1}(X), G) \longrightarrow H^n(X; G) \xrightarrow{h} \operatorname{Hom}(H_n(X), G) \longrightarrow 0.$$

De plus, cette suite est scindée (non naturellement).

Remarque 8.8. Rappelons les valeurs utiles de $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1$:

- $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}, G) = 0$ pour tout G ;
- $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, G) \cong G/mG$ pour tout G ;
- $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1$ est additif en le premier argument.

En particulier, si $H_*(X)$ est sans torsion, le terme Ext s'annule et $H^n(X; G) \cong \text{Hom}(H_n(X), G)$.

Esquisse de preuve. On considère la suite exacte courte de complexes de cochaînes

$$0 \rightarrow Z_n \hookrightarrow C_n \xrightarrow{\partial} B_{n-1} \rightarrow 0,$$

où $Z_n = \ker \partial_n$ est le groupe des cycles et $B_{n-1} = \text{im } \partial_n$ est le groupe des bords. En appliquant le foncteur $\text{Hom}(-, G)$, on obtient une suite exacte longue en cohomologie faisant intervenir les foncteurs dérivés Ext^k . Puisque B_{n-1} est un sous-groupe de C_{n-1} , qui est libre, B_{n-1} est libre, et donc $\text{Ext}^k(B_{n-1}, G) = 0$ pour $k \geq 1$. L'analyse de la suite exacte longue donne alors la suite exacte courte annoncée. Le scindage provient du fait que $\text{Hom}(H_n(X), G)$ est un quotient du groupe $\text{Hom}(Z_n, G)$. $\square$

Corollaire 8.9. Si $H_n(X)$ est libre de type fini pour tout n , alors

$$H^n(X; \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(H_n(X), \mathbb{Z}) \cong H_n(X).$$

Démonstration. Le terme $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}) = 0$ car $H_{n-1}(X)$ est libre. De plus, $\text{Hom}(\mathbb{Z}^r, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^r$ pour tout r . $\square$

Corollaire 8.10. Si k est un corps, alors

$$H^n(X; k) \cong \text{Hom}_k(H_n(X; k), k),$$

c'est-à-dire que la cohomologie à coefficients dans un corps est le dual de l'homologie.

Exemple 8.11. Pour $\mathbb{RP}^2$, on a $H_0 = \mathbb{Z}$, $H_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $H_k = 0$ pour $k \geq 2$. Le théorème des coefficients universels donne :

$$\begin{aligned} H^0(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}) &\cong \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \\ H^1(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}) &\cong \text{Hom}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}^1(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0 \oplus 0 = 0, \\ H^2(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}) &\cong \text{Hom}(0, \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

On observe que les groupes de cohomologie ne coïncident pas avec ceux d'homologie en présence de torsion.

8.4 Cup-produit

Nous arrivons à la structure algébrique centrale de ce chapitre. Pour simplifier la présentation, nous travaillons avec un anneau commutatif R comme coefficients.

Définition 8.12 (Cup-produit sur les cochaînes). Soient $\varphi \in C^p(X; R)$ et $\psi \in C^q(X; R)$. Le *cup-produit* $\varphi \cup \psi \in C^{p+q}(X; R)$ est défini, pour tout $(p+q)$ -simplexe singulier $\sigma: \Delta^{p+q} \rightarrow X$, par

$$(\varphi \cup \psi)(\sigma) = \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_p]}) \cdot \psi(\sigma|_{[v_p, \dots, v_{p+q}]}) ,$$

où $\sigma|_{[v_{i_0}, \dots, v_{i_k}]}$ désigne la restriction de σ à la face engendrée par les sommets $v_{i_0}, \dots, v_{i_k}$, et le produit est celui de R .

Lemme 8.13 (Formule de Leibniz). Pour toutes cochaînes $\varphi \in C^p(X; R)$ et $\psi \in C^q(X; R)$, on a

$$\delta(\varphi \cup \psi) = (\delta\varphi) \cup \psi + (-1)^p \varphi \cup (\delta\psi).$$

Démonstration. Soit $\sigma: \Delta^{p+q+1} \rightarrow X$ un $(p+q+1)$ -simplexe singulier. On a

$$\delta(\varphi \cup \psi)(\sigma) = (\varphi \cup \psi)(\partial\sigma) = \sum_{i=0}^{p+q+1} (-1)^i (\varphi \cup \psi)(\sigma \circ d_i).$$

En séparant les termes selon que $i \leq p$ ou $i > p$ et en réarrangeant, on retrouve exactement

$$(\delta\varphi)(\sigma|_{[v_0, \dots, v_{p+1}]}) \cdot \psi(\sigma|_{[v_{p+1}, \dots, v_{p+q+1}]}) + (-1)^p \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_p]}) \cdot (\delta\psi)(\sigma|_{[v_p, \dots, v_{p+q+1}]}) ,$$

ce qui donne la formule annoncée. $\square$

Corollaire 8.14. Le cup-produit passe au quotient et définit une opération bilinéaire

$$\cup: H^p(X; R) \times H^q(X; R) \longrightarrow H^{p+q}(X; R).$$

Démonstration. Soient $[\varphi] \in H^p(X; R)$ et $[\psi] \in H^q(X; R)$ des classes de cocycles, donc $\delta\varphi = 0$ et $\delta\psi = 0$. Par le lemme 8.13, $\delta(\varphi \cup \psi) = 0$, donc $\varphi \cup \psi$ est un cocycle.

De plus, si $\varphi = \delta\alpha$, alors

$$\varphi \cup \psi = (\delta\alpha) \cup \psi = \delta(\alpha \cup \psi) - (-1)^{p-1} \alpha \cup (\delta\psi) = \delta(\alpha \cup \psi),$$

donc $[\varphi \cup \psi] = 0$. Le même argument vaut si ψ est un cobord. $\square$

8.5 Propriétés du cup-produit

Théorème 8.15 (Propriétés du cup-produit). Le cup-produit possède les propriétés suivantes :

(i) **Associativité.** Pour $\alpha \in H^p$, $\beta \in H^q$, $\gamma \in H^r$:

$$(\alpha \cup \beta) \cup \gamma = \alpha \cup (\beta \cup \gamma).$$

(ii) **Élément unité.** La classe $1 \in H^0(X; R) \cong R$ (envoyant chaque 0-simplexe sur 1_R) satisfait

$$1 \cup \alpha = \alpha \cup 1 = \alpha \quad \text{pour tout } \alpha \in H^*(X; R).$$

(iii) **Anti-commutativité graduée.** Pour $\alpha \in H^p(X; R)$ et $\beta \in H^q(X; R)$:

$$\alpha \cup \beta = (-1)^{pq} \beta \cup \alpha.$$

(iv) **Fonctorialité.** Si $f: X \rightarrow Y$ est continue, alors

$$f^*(\alpha \cup \beta) = f^*(\alpha) \cup f^*(\beta) \quad \text{pour tous } \alpha, \beta \in H^*(Y; R).$$

Esquisse de preuve. L'associativité (i) et l'élément unité (ii) se vérifient directement au niveau des cochaînes.

Pour l'anti-commutativité graduée (iii), la preuve au niveau des cochaînes ne donne pas directement le signe $(-1)^{pq}$, car la définition du cup-produit n'est pas symétrique (on utilise la face avant et la face arrière du simplexe). On construit une homotopie de chaînes explicite entre les deux ordres, ce qui requiert l'approximation d'Eilenberg–Zilber ou la méthode des modèles acycliques. Cette homotopie introduit le signe $(-1)^{pq}$ en cohomologie.

La fonctorialité (iv) découle immédiatement de la définition. $\square$

8.6 L'anneau de cohomologie

Définition 8.16 (Anneau de cohomologie). Soit X un espace topologique et R un anneau commutatif. L'*anneau de cohomologie* de X à coefficients dans R est la R -algèbre graduée

$$H^*(X; R) = \bigoplus_{n \geq 0} H^n(X; R),$$

munie du cup-produit comme multiplication. C'est une R -algèbre graduée *anti-commutative* (au sens gradué) :

$$\alpha \cup \beta = (-1)^{|\alpha||\beta|} \beta \cup \alpha,$$

où $|\alpha|$ et $|\beta|$ désignent les degrés de α et β .

Remarque 8.17. L'anneau de cohomologie est un invariant *strictement plus fin* que la collection des groupes de cohomologie. Deux espaces peuvent avoir les mêmes groupes H^n pour tout n mais des structures d'anneau différentes, comme nous le verrons dans les calculs qui suivent.

8.7 Calculs de l'anneau de cohomologie

8.7.1 Cohomologie de la sphère S^n

Théorème 8.18. L'anneau de cohomologie de S^n ($n \geq 1$) à coefficients dans $\mathbb{Z}$ est

$$H^*(S^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^2),$$

où $\alpha \in H^n(S^n; \mathbb{Z})$ est un générateur, de sorte que $\alpha^2 = 0$ pour des raisons de degré

(puisque $H^{2n}(S^n) = 0$ pour $n \geq 1$).

En termes de groupes : $H^0(S^n) \cong \mathbb{Z}$, $H^n(S^n) \cong \mathbb{Z}$, et le cup-produit est trivial (c'est-à-dire que tout produit de classes de degré strictement positif est nul).

Démonstration. Les groupes de cohomologie se déduisent de l'homologie de S^n (efthm :homologie-spheres) et du théorème des coefficients universels. L'homologie étant libre, on a $H^k(S^n; \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(H_k(S^n), \mathbb{Z})$. Pour le cup-produit, si $n \geq 1$, le seul produit non trivial possible serait $\alpha \cup \alpha \in H^{2n}(S^n) = 0$. $\square$

8.7.2 Cohomologie du tore

Théorème 8.19 (Anneau de cohomologie de T^2). *L'anneau de cohomologie du tore T^2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$ est*

$$H^*(T^2; \mathbb{Z}) \cong \Lambda_{\mathbb{Z}}[\alpha, \beta],$$

l'algèbre extérieure sur deux générateurs $\alpha, \beta \in H^1(T^2; \mathbb{Z})$. Explicitement :

- $H^0(T^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, engendré par 1 ;
- $H^1(T^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$, engendré par α et β ;
- $H^2(T^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, engendré par $\alpha \cup \beta$;

avec les relations $\alpha^2 = \beta^2 = 0$ et $\alpha \cup \beta = -\beta \cup \alpha$.

Démonstration. Puisque $T^2 = S^1 \times S^1$ et $H^*(S^1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\gamma]/(\gamma^2)$ avec $\gamma \in H^1$, la formule de Künneth en cohomologie (efthm :kunneth-cohomologie ci-dessous) donne

$$H^*(T^2; \mathbb{Z}) \cong H^*(S^1; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H^*(S^1; \mathbb{Z})$$

en tant qu'algèbre graduée. Posons $\alpha = \gamma \otimes 1$ et $\beta = 1 \otimes \gamma$. Alors $\alpha, \beta \in H^1$ et

$$\alpha \cup \beta = (\gamma \otimes 1) \cup (1 \otimes \gamma) = \gamma \otimes \gamma,$$

qui est un générateur de $H^2(T^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. De plus, $\alpha^2 = \gamma^2 \otimes 1 = 0$ et $\beta^2 = 1 \otimes \gamma^2 = 0$, et l'anti-commutativité graduée donne $\beta \cup \alpha = (-1)^{1 \cdot 1} \alpha \cup \beta = -\alpha \cup \beta$. C'est bien l'algèbre extérieure sur $\{\alpha, \beta\}$. $\square$

8.7.3 Cohomologie de l'espace projectif réel

Théorème 8.20 (Anneau de cohomologie de $\mathbb{RP}^n$). *L'anneau de cohomologie de $\mathbb{RP}^n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est*

$$H^*(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[\alpha]/(\alpha^{n+1}),$$

où $\alpha \in H^1(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est un générateur. Autrement dit, les groupes de cohomologie sont

$$H^k(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et le cup-produit est donné par $\alpha^k \cup \alpha^\ell = \alpha^{k+\ell}$ si $k + \ell \leq n$, et 0 sinon.

Esquisse de preuve. On procède par récurrence sur n en utilisant la suite de Gysin associée au fibré en sphères $S^0 \rightarrow S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$, ou bien par la méthode de l'homologie cellulaire sur la structure CW de $\mathbb{R}P^n$ (une cellule en chaque dimension $0, 1, \dots, n$). L'identification des opérateurs cobords cellulaires à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ montre que tous sont nuls, d'où $H^k \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $0 \leq k \leq n$.

La structure multiplicative $\alpha^k \neq 0$ se démontre par récurrence sur k en utilisant la naturalité du cup-produit par rapport aux inclusions $\mathbb{R}P^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}P^n$. $\square$

Remarque 8.21. Le choix des coefficients $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est crucial ici. À coefficients entiers, la cohomologie de $\mathbb{R}P^n$ est plus subtile (avec de la 2-torsion) et la structure d'anneau est plus complexe.

8.7.4 Cohomologie de l'espace projectif complexe

Théorème 8.22 (Anneau de cohomologie de $\mathbb{C}P^n$). *L'anneau de cohomologie de $\mathbb{C}P^n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ est*

$$H^*(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\beta]/(\beta^{n+1}),$$

où $\beta \in H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$ est un générateur. Les groupes de cohomologie sont

$$H^k(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k \in \{0, 2, 4, \dots, 2n\}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Esquisse de preuve. L'espace $\mathbb{C}P^n$ possède une structure CW avec une cellule en chaque dimension paire $0, 2, 4, \dots, 2n$. Puisqu'il n'y a pas de cellules en dimensions impaires adjacentes, tous les opérateurs bords sont nuls et l'homologie cellulaire donne les groupes annoncés.

Pour la structure multiplicative, on utilise la suite de Gysin du fibré $S^1 \rightarrow S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ et la classe d'Euler $e \in H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$. Le cup-produit avec la classe d'Euler réalise l'isomorphisme de Gysin $H^k(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{\cong} H^{k+2}(\mathbb{C}P^n)$ pour $0 \leq k \leq 2n-2$, ce qui force $\beta^k \neq 0$ pour $k \leq n$ et $\beta^{n+1} = 0$. $\square$

Le diagramme suivant illustre les anneaux de cohomologie calculés :

	H^0	H^1	H^2	H^3	H^4	Structure
S^n ———	$\mathbb{Z}$	0	$\dots$	$\mathbb{Z}_{(\deg n)}$	$\dots$	$\mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^2)$
T^2 ———	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^2$	$\mathbb{Z}$	0		$\Lambda_{\mathbb{Z}}[\alpha, \beta]$
$\mathbb{R}P^n$ ($\mathbb{Z}/2$) —	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\dots$	$\mathbb{Z}/2$	$\dots$	$(\mathbb{Z}/2)[\alpha]/(\alpha^{n+1})$
$\mathbb{C}P^n$ ———	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}[\beta]/(\beta^{n+1})$

8.8 Cross-product et formule de Künneth en cohomologie

Définition 8.23 (Cross-product). Soient X et Y des espaces topologiques. Le *cross-product* (ou produit extérieur) est le morphisme

$$\times : H^p(X; R) \otimes_R H^q(Y; R) \longrightarrow H^{p+q}(X \times Y; R)$$

défini par

$$\alpha \times \beta = \pi_X^*(\alpha) \cup \pi_Y^*(\beta),$$

où $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$ et $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$ sont les projections canoniques.

Théorème 8.24 (Künneth en cohomologie). *Supposons que R est un corps, ou que $R = \mathbb{Z}$ et $H^*(Y; \mathbb{Z})$ est sans torsion et de type fini. Alors le cross-product induit un isomorphisme d'algèbres graduées*

$$H^*(X; R) \otimes_R H^*(Y; R) \xrightarrow{\cong} H^*(X \times Y; R),$$

où le membre de gauche est muni du produit tensoriel gradué :

$$(\alpha \otimes \beta) \cdot (\alpha' \otimes \beta') = (-1)^{|\beta||\alpha'|} (\alpha \cup \alpha') \otimes (\beta \cup \beta').$$

Remarque 8.25. Lorsque $R = k$ est un corps, le théorème de Künneth en cohomologie est toujours valable sans condition sur l'homologie de Y .

Corollaire 8.26. *L'anneau de cohomologie du tore T^n est l'algèbre extérieure*

$$H^*(T^n; \mathbb{Z}) \cong \Lambda_{\mathbb{Z}}[\alpha_1, \dots, \alpha_n], \quad \alpha_i \in H^1, \quad \dim_{\mathbb{Z}} H^k(T^n; \mathbb{Z}) = \binom{n}{k}.$$

8.9 Applications : distinction par le cup-produit

Théorème 8.27. *Le tore T^2 et le bouquet $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ ne sont pas homotopiquement équivalents, bien qu'ils aient les mêmes groupes d'homologie :*

$$H_0 \cong \mathbb{Z}, \quad H_1 \cong \mathbb{Z}^2, \quad H_2 \cong \mathbb{Z}, \quad H_k = 0 \ (k \geq 3).$$

Démonstration. Calculons les anneaux de cohomologie et comparons-les.

Pour T^2 : on a $H^*(T^2; \mathbb{Z}) \cong \Lambda_{\mathbb{Z}}[\alpha, \beta]$ (efthm : cohomologie-tore), et en particulier $\alpha \cup \beta \neq 0$ dans H^2 .

Pour $W = S^1 \vee S^1 \vee S^2$: les générateurs de $H^1(W; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$ proviennent des deux facteurs S^1 , et le générateur de $H^2(W; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ provient du facteur S^2 .

Or, si $\alpha', \beta' \in H^1(W; \mathbb{Z})$ sont les générateurs provenant des deux cercles, alors $\alpha' \cup \beta' = 0 \in H^2(W; \mathbb{Z})$. En effet, par fonctorialité du cup-produit, l'inclusion $S^1 \vee S^1 \hookrightarrow W$ est un

facteur par lequel α' et β' se factorisent, et dans $H^2(S^1 \vee S^1) = 0$, tout cup-produit est nul.

Puisque tout cup-produit de classes de degré 1 est nul dans $H^*(W)$ mais pas dans $H^*(T^2)$, les deux anneaux de cohomologie ne sont pas isomorphes, et $T^2 \not\cong W$. $\square$

Le diagramme suivant illustre la distinction :

$$\begin{array}{ccc} H^1(T^2) \otimes H^1(T^2) & \xrightarrow{\cup} & H^2(T^2) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} & \xrightarrow{\neq 0} & \mathbb{Z} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} H^1(W) \otimes H^1(W) & \xrightarrow{\cup} & H^2(W) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} & \xrightarrow{=0} & \mathbb{Z} \end{array}$$

Corollaire 8.28. *De même, $\mathbb{CP}^2$ n'est pas homotopiquement équivalent à $S^2 \vee S^4$, bien que leurs groupes d'homologie coïncident ($H_0 = H_2 = H_4 = \mathbb{Z}$, le reste nul). En effet, dans $H^*(\mathbb{CP}^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\beta]/(\beta^3)$, on a $\beta^2 \neq 0$, tandis que dans $H^*(S^2 \vee S^4; \mathbb{Z})$, le cup-produit de deux classes de degré 2 est nul.*

Exemple 8.29. L'anneau de cohomologie de la surface Σ_g à coefficients dans $\mathbb{Z}$ est

$$H^*(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \cong \Lambda_{\mathbb{Z}}[\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g] / \mathcal{I},$$

où $\alpha_i, \beta_i \in H^1$ et $\mathcal{I}$ est l'idéal engendré par les relations $\alpha_i \cup \alpha_j = \beta_i \cup \beta_j = 0$ pour tous i, j et $\alpha_i \cup \beta_j = \delta_{ij} \mu$ où $\mu \in H^2(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ est la classe fondamentale. La forme d'intersection

$$Q: H^1(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \times H^1(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

est la forme symplectique standard de rang $2g$.

8.10 Connexion avec la cohomologie de de Rham

Remarque 8.30 (Théorème de de Rham). Pour une variété différentiable M , la cohomologie de de Rham $H_{\text{dR}}^*(M)$, définie comme le quotient des formes différentielles fermées par les formes exactes, est reliée à la cohomologie singulière par un isomorphisme naturel d'algèbres graduées :

$$H_{\text{dR}}^*(M) \cong H^*(M; \mathbb{R}).$$

Cet isomorphisme est réalisé par l'intégration

$$I: \Omega^p(M) \longrightarrow C^p(M; \mathbb{R}), \quad I(\omega)(\sigma) = \int_{\sigma} \omega = \int_{\Delta^p} \sigma^* \omega,$$

qui envoie une p -forme fermée ω sur la p -cochaîne singulière qui à un p -simplexe singulier lisse $\sigma: \Delta^p \rightarrow M$ associe $\int_{\sigma} \omega$. Le théorème de Stokes assure que I est un morphisme de complexes :

$$I(d\omega)(\sigma) = \int_{\sigma} d\omega = \int_{\partial\sigma} \omega = (I(\omega))(\partial\sigma) = (\delta I(\omega))(\sigma),$$

de sorte que $I \circ d = \delta \circ I$.

Remarque 8.31 (Compatibilité des produits). Le produit extérieur de formes $\omega \wedge \eta$ correspond au cup-produit $[\omega] \cup [\eta]$ via l'isomorphisme de de Rham. Plus précisément, l'application I n'est pas strictement multiplicative au niveau des cochaînes, mais elle l'est à homotopie de chaînes près, ce qui suffit pour obtenir un isomorphisme d'algèbres graduées en cohomologie :

$$I: (H_{\text{dR}}^*(M), \wedge) \xrightarrow{\cong} (H^*(M; \mathbb{R}), \cup).$$

Ce pont entre analyse (formes différentielles) et topologie algébrique (cochaînes singulières) est l'un des résultats les plus profonds de la géométrie différentielle. Il fournit notamment des outils de calcul puissants : on peut déterminer la structure multiplicative de $H^*(M; \mathbb{R})$ en calculant des intégrales de formes différentielles.

Exemple 8.32. Sur le tore $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, les 1-formes $d\theta_1$ et $d\theta_2$ (projections des formes coordonnées de $\mathbb{R}^2$) sont fermées et non exactes. Elles engendrent $H_{\text{dR}}^1(T^2) \cong \mathbb{R}^2$, et leur produit extérieur $d\theta_1 \wedge d\theta_2$ engendre $H_{\text{dR}}^2(T^2) \cong \mathbb{R}$. Via l'isomorphisme de de Rham, cela correspond au fait que le cup-produit des classes α et β dans $H^1(T^2; \mathbb{R})$ est non nul.

8.11 Exercices

Exercice 8.1 (★★). Calculer directement $H^*(S^1; \mathbb{Z})$ à partir de la définition des cochaînes et du cobord, en utilisant la structure simpliciale minimale de S^1 (un sommet, une arête).

Exercice 8.2 (★★). En utilisant le théorème des coefficients universels et l'homologie de la bouteille de Klein, calculer $H^*(K; \mathbb{Z})$ et $H^*(K; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Exercice 8.3 (★★). Soit T^2 le tore, représenté comme quotient du carré $[0, 1]^2$. Construire explicitement des 1-cocycles simpliciales α et β (sur une triangulation du tore) dont le cup-produit $\alpha \cup \beta$ est un 2-cocycle non nul.

Exercice 8.4 (★★). Montrer que tout cup-produit $H^1(X; \mathbb{Z}) \otimes H^1(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X; \mathbb{Z})$ est nul lorsque $X = S^1 \vee S^1$. En déduire que le cup-produit est nul dans $H^*(X; \mathbb{Z})$ pour tout bouquet de cercles.

Exercice 8.5 (★★). En utilisant la formule de Künneth en cohomologie, calculer l'anneau de cohomologie de $S^2 \times S^3$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et montrer que le cup-produit est entièrement trivial en degrés positifs.

Exercice 8.6 (★★★). Montrer que la cohomologie de $\mathbb{RP}^2$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ est :

$$H^0(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}, \quad H^1(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}) = 0, \quad H^2(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad H^k(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}) = 0 \quad (k \geq 3).$$

Expliquer pourquoi $H^1 = 0$ alors que $H_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 8.7 (★★★). Montrer que l'espace projectif réel infini $\mathbb{RP}^\infty = \varinjlim \mathbb{RP}^n$ satisfait

$$H^*(\mathbb{RP}^\infty; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[\alpha],$$

l'anneau de polynômes en une variable α de degré 1 (sans troncation).

Exercice 8.8 (★★★). Montrer que $H^*(\mathbb{CP}^\infty; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\beta]$, l'anneau de polynômes en un générateur β de degré 2. *Indication* : utiliser $\mathbb{CP}^\infty = \varinjlim \mathbb{CP}^n$ et la compatibilité des cup-produits avec les inclusions.

Exercice 8.9 (★★★). Les espaces lenticulaires $L(5, 1)$ et $L(5, 2)$ ont les mêmes groupes d'homologie. Montrer que leurs anneaux de cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ permettent de les distinguer. *Indication* : étudier le cup-produit $H^1 \otimes H^1 \rightarrow H^2$ et identifier le carré du générateur.

Exercice 8.10 (★★★). Soit $\eta: S^3 \rightarrow S^2$ la fibration de Hopf. Le cône d'application (mapping cone) C_η a les mêmes groupes d'homologie que $\mathbb{CP}^2$. Montrer que l'anneau de cohomologie de C_η est isomorphe à celui de $\mathbb{CP}^2$. Comparer avec le cône d'application de l'application constante $S^3 \rightarrow S^2$.

Résumé du chapitre

- La **cohomologie singulière** est définie par dualisation : $C^n(X; G) = \text{Hom}(C_n(X), G)$, le cobord δ est le dual de ∂ , et $H^n(X; G) = \ker \delta^n / \text{im } \delta^{n-1}$.
- Le **théorème des coefficients universels** : $0 \rightarrow \text{Ext}^1(H_{n-1}(X), G) \rightarrow H^n(X; G) \rightarrow \text{Hom}(H_n(X), G) \rightarrow 0$.
- Le **cup-produit** $\cup: H^p(X; R) \times H^q(X; R) \rightarrow H^{p+q}(X; R)$ munit $H^*(X; R)$ d'une structure de R -algèbre graduée anti-commutative.
- **Calculs fondamentaux** :
 - $H^*(S^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^2)$, cup-produit trivial.
 - $H^*(T^2; \mathbb{Z}) \cong \Lambda_{\mathbb{Z}}[\alpha, \beta]$, cup-produit non trivial.
 - $H^*(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[\alpha]/(\alpha^{n+1})$.
 - $H^*(\mathbb{CP}^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\beta]/(\beta^{n+1})$.
- Le cup-produit permet de **distinguer des espaces** ayant les mêmes groupes d'homologie, par exemple $T^2 \neq S^1 \vee S^1 \vee S^2$ et $\mathbb{CP}^2 \neq S^2 \vee S^4$.
- La **formule de Künneth en cohomologie** : $H^*(X \times Y; R) \cong H^*(X; R) \otimes_R H^*(Y; R)$ comme algèbre graduée (sous hypothèses de liberté ou lorsque R est un corps).
- La cohomologie singulière à coefficients réels s'identifie à la **cohomologie de de Rham** pour les variétés différentiables, le cup-produit correspondant au produit extérieur de formes.

Chapitre 9

Dualité de Poincaré

La dualité de Poincaré constitue l'un des résultats les plus profonds et les plus élégants de la topologie algébrique. Elle établit un isomorphisme remarquable entre la cohomologie et l'homologie d'une variété orientable compacte, mettant en lumière une symétrie cachée dans la structure algébrique de ces espaces. Ce chapitre développe la théorie complète de cette dualité, depuis la notion d'orientabilité jusqu'aux applications en topologie des variétés de dimension 4.

9.1 Variétés topologiques

Définition 9.1 (Variété topologique). Une *variété topologique de dimension n* est un espace topologique M séparé, à base dénombrable, tel que tout point $x \in M$ possède un voisinage ouvert homéomorphe à $\mathbb{R}^n$. Un tel homéomorphisme $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est appelé une *carte* au voisinage de x .

Remarque 9.2. Toute variété topologique de dimension n est localement compacte, localement connexe par arcs, et métrisable (par le théorème de Smirnov, puisqu'elle est paracompacte et localement métrisable). De plus, elle est localement contractile, ce qui garantit que tout revêtement admet un relèvement local.

Exemple 9.3. (i) La sphère S^n est une variété compacte de dimension n .
(ii) Le tore $T^n = (S^1)^n$ est une variété compacte de dimension n .
(iii) L'espace projectif réel $\mathbb{R}P^n$ est une variété compacte de dimension n .
(iv) L'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$ est une variété compacte de dimension $2n$.
(v) Toute surface compacte connexe est une variété de dimension 2.

9.2 Orientabilité et classes fondamentales

Pour définir l'orientabilité, nous devons comprendre la structure de l'homologie locale d'une variété.

Proposition 9.4 (Homologie locale). *Soit M une variété topologique de dimension n et $x \in M$. Alors :*

$$H_k(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Un générateur $\mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z})$ est appelé une orientation locale en x .

Démonstration. Par excision, si U est un voisinage ouvert de x homéomorphe à $\mathbb{R}^n$, on a

$$H_k(M, M \setminus \{x\}) \cong H_k(U, U \setminus \{x\}) \cong H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Par la suite exacte longue de la paire $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ et le fait que $\mathbb{R}^n$ est contractile, on obtient $H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1})$, d'où le résultat. $\square$

Définition 9.5 (Orientation). Soit M une variété topologique de dimension n . Une *orientation* de M est le choix, pour tout $x \in M$, d'un générateur $\mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z})$, vérifiant la condition de *cohérence locale* suivante : pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert $U \ni x$ homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ et une classe $\mu_U \in H_n(M, M \setminus U; \mathbb{Z})$ telle que, pour tout $y \in U$, l'image de μ_U par le morphisme naturel $H_n(M, M \setminus U) \rightarrow H_n(M, M \setminus \{y\})$ soit μ_y .

Définition 9.6 (Variété orientable). Une variété topologique M est dite *orientable* si elle admet une orientation. Une variété munie d'une orientation est dite *orientée*.

- Exemple 9.7.**
- (i) Les sphères S^n sont orientables pour tout $n \geq 0$.
 - (ii) Le tore T^n est orientable.
 - (iii) L'espace projectif réel $\mathbb{R}P^n$ est orientable si et seulement si n est impair.
 - (iv) La bouteille de Klein n'est pas orientable.
 - (v) Toute variété simplement connexe est orientable.

Théorème 9.8 (Classe fondamentale). *Soit M une variété topologique compacte, connexe et orientée de dimension n . Alors :*

- (i) $H_n(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.
- (ii) Il existe une unique classe $[M] \in H_n(M; \mathbb{Z})$, appelée classe fondamentale de M , telle que pour tout $x \in M$, l'image de $[M]$ par le morphisme $H_n(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z})$ soit l'orientation locale μ_x .
- (iii) Si M n'est pas orientable, alors $H_n(M; \mathbb{Z}) = 0$, mais $H_n(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et il existe une classe fondamentale à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Démonstration. La preuve repose sur une analyse détaillée du faisceau d'orientations $\mathcal{O}_M$, dont la fibre en x est $H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Ce faisceau est localement constant de fibre $\mathbb{Z}$, et M est orientable si et seulement si $\mathcal{O}_M$ est trivial. On montre alors que $H_n(M; \mathbb{Z}) \cong \Gamma_c(M; \mathcal{O}_M)$ (sections à support compact du faisceau d'orientations). Lorsque M est orientable et compacte, on obtient $H_n(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, et la classe fondamentale est la

section globale déterminée par l'orientation. Lorsque M n'est pas orientable, $\Gamma(M; \mathcal{O}_M) = 0$, d'où $H_n(M; \mathbb{Z}) = 0$. Pour les coefficients $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, le faisceau d'orientations est toujours trivial, ce qui donne l'assertion (iii). $\square$

Proposition 9.9 (Critère d'orientabilité). *Soit M une variété topologique connexe de dimension n . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) M est orientable.
- (ii) Le faisceau d'orientations $\mathcal{O}_M$ est trivial.
- (iii) Le revêtement d'orientations $\widetilde{M} \rightarrow M$ (revêtement double associé à l'homomorphisme $\pi_1(M) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}) = \{\pm 1\}$ déterminé par l'action de la monodromie sur les orientations locales) est trivial.
- (iv) La première classe de Stiefel–Whitney $w_1(M) \in H^1(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est nulle.

Démonstration. L'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) résulte de la définition : une orientation est une section globale non nulle d'un faisceau localement constant de fibre $\mathbb{Z}$, et un tel faisceau admet une section non nulle si et seulement s'il est trivial (puisque $\mathbb{Z}$ n'a pas d'automorphisme d'ordre fini préservant un générateur, si ce n'est l'identité). L'équivalence (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) est la correspondance classique entre faisceaux localement constants et revêtements. L'équivalence (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) traduit le fait que $w_1(M)$ est précisément la classe caractéristique du revêtement double d'orientations, vue dans $H^1(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. $\square$

Lemme 9.10 (Orientabilité des revêtements). *Si M est une variété et $p: \widetilde{M} \rightarrow M$ est un revêtement fini de degré impair, alors M est orientable si et seulement si $\widetilde{M}$ est orientable.*

9.3 Cup-produit et cap-produit

Avant de définir le cap-produit, rappelons brièvement le cup-produit qui joue un rôle central en cohomologie.

Définition 9.11 (Cup-produit). Le *cup-produit* est le morphisme bilinéaire

$$\smile: H^p(X; R) \times H^q(X; R) \longrightarrow H^{p+q}(X; R)$$

défini au niveau des cochaînes par $(\varphi \smile \psi)(\sigma) = \varphi(\sigma \circ [e_0, \dots, e_p]) \cdot \psi(\sigma \circ [e_p, \dots, e_{p+q}])$ pour $\sigma: \Delta^{p+q} \rightarrow X$.

Proposition 9.12 (Anneau de cohomologie). *Le cup-produit munit $H^*(X; R) = \bigoplus_{n \geq 0} H^n(X; R)$ d'une structure d'anneau gradué, associatif et unitaire. De plus, il est gradué-commutatif :*

$$\alpha \smile \beta = (-1)^{pq} \beta \smile \alpha$$

pour $\alpha \in H^p(X; R)$ et $\beta \in H^q(X; R)$.

Le cap-produit est l'opération bilinéaire fondamentale qui relie la cohomologie et l'homologie, et qui permet de formuler la dualité de Poincaré.

Le cap-produit est l'opération bilinéaire fondamentale qui relie la cohomologie et l'homologie, et qui permet de formuler la dualité de Poincaré.

Définition 9.13 (Cap-produit). Soit R un anneau commutatif. Le *cap-produit* est le morphisme bilinéaire

$$\frown : H^p(X; R) \times H_n(X; R) \longrightarrow H_{n-p}(X; R)$$

défini au niveau des chaînes et cochaînes comme suit. Soit $\varphi \in C^p(X; R)$ et $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ un n -simplexe singulier. On pose

$$\varphi \frown \sigma = \varphi(\sigma \circ [e_0, \dots, e_p]) \cdot (\sigma \circ [e_p, \dots, e_n]),$$

où $[e_0, \dots, e_p]$ désigne la face avant et $[e_p, \dots, e_n]$ la face arrière. Cette opération passe aux classes de (co)homologie.

Proposition 9.14 (Propriétés du cap-produit). *Le cap-produit satisfait les propriétés suivantes :*

- (i) **Associativité** : $(\alpha \smile \beta) \frown \sigma = \alpha \frown (\beta \frown \sigma)$ pour $\alpha \in H^p$, $\beta \in H^q$, $\sigma \in H_n$ ($p + q \leq n$).
- (ii) **Unitarité** : $1 \frown \sigma = \sigma$ où $1 \in H^0(X; R)$ est l'élément augmenté.
- (iii) **Naturalité** : si $f : X \rightarrow Y$ est continue, alors $f_*(f^*(\alpha) \frown \sigma) = \alpha \frown f_*(\sigma)$.
- (iv) **Formule du bord** : $\partial(\varphi \frown \sigma) = (-1)^p(\delta\varphi \frown \sigma - \varphi \frown \partial\sigma)$ au niveau des chaînes.

Démonstration. Les vérifications sont directes au niveau des chaînes et cochaînes. Pour (i), on utilise la formule d'Alexander–Whitney pour le cup-produit et le cap-produit. Pour (iii), on observe que $f^*(\alpha)(\sigma \circ [e_0, \dots, e_p]) = \alpha(f \circ \sigma \circ [e_0, \dots, e_p])$. Les détails sont laissés en exercice. $\square$

9.4 Théorème de dualité de Poincaré

Théorème 9.15 (Dualité de Poincaré). *Soit M une variété topologique compacte, connexe et orientée de dimension n , et soit $[M] \in H_n(M; R)$ l'image de la classe fondamentale. Alors, pour tout $0 \leq p \leq n$, le morphisme*

$$D_M : H^p(M; R) \longrightarrow H_{n-p}(M; R), \quad \alpha \longmapsto \alpha \frown [M]$$

est un isomorphisme.

Remarque 9.16. Si M n'est pas orientable, la dualité de Poincaré subsiste à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, en utilisant la classe fondamentale $[M]_2 \in H_n(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

9.4.1 Esquisse de la preuve

La démonstration procède par induction sur le nombre de cartes d'un recouvrement ouvert fini de M , exploitant la suite de Mayer–Vietoris.

Preuve (esquisse rigoureuse). **Étape 1 : Cas $M = \mathbb{R}^n$.** Pour une variété ouverte homéomorphe à $\mathbb{R}^n$, on utilise la cohomologie à support compact. L'isomorphisme $H_c^p(\mathbb{R}^n; R) \cong H_{n-p}(\mathbb{R}^n; R)$ se vérifie directement : les deux côtés ne sont non nuls que pour $p = n$ (à gauche) et $n - p = 0$ (à droite), et l'application cap-produit donne l'isomorphisme $R \cong R$.

Étape 2 : Mayer–Vietoris. Supposons que $M = U \cup V$ avec U, V ouverts, et que le théorème vaut pour U , V et $U \cap V$. Le diagramme suivant, où les lignes horizontales sont les suites de Mayer–Vietoris, est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & H^p(M) & \longrightarrow & H^p(U) \oplus H^p(V) & \longrightarrow & H^p(U \cap V) \longrightarrow H^{p+1}(M) \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow D_M & & \downarrow D_U \oplus D_V & & \downarrow D_{U \cap V} & & \downarrow D_M \\
 \cdots & \longrightarrow & H_{n-p}(M) & \longrightarrow & H_{n-p}(U) \oplus H_{n-p}(V) & \longrightarrow & H_{n-p}(U \cap V) \longrightarrow H_{n-p-1}(M) \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

Par le lemme des cinq, D_M est un isomorphisme.

Étape 3 : Induction. Soit $\{U_1, \dots, U_k\}$ un recouvrement ouvert fini de M par des ouverts homéomorphes à $\mathbb{R}^n$ (ou plus généralement tels que toutes les intersections finies vérifient la dualité). On pose $A = U_1 \cup \dots \cup U_{k-1}$ et $B = U_k$. Par hypothèse d'induction, la dualité vaut pour A , pour B (étape 1) et pour $A \cap B = (U_1 \cap U_k) \cup \dots \cup (U_{k-1} \cap U_k)$ (induction avec $k - 1$ ouverts). L'étape 2 conclut.

Étape 4 : Compacité. La compacité de M garantit l'existence d'un recouvrement fini, ce qui rend l'induction possible. La preuve complète nécessite en outre de travailler avec la cohomologie à support compact pour les ouverts non compacts et de vérifier la compatibilité des classes fondamentales dans la suite de Mayer–Vietoris. $\square$

9.5 Applications

9.5.1 Dualité pour les variétés classiques

Exemple 9.17 (Sphères). Pour S^n (orientable, compacte, de dimension n), la dualité donne $H^p(S^n; \mathbb{Z}) \cong H_{n-p}(S^n; \mathbb{Z})$. On retrouve le fait que $H^0(S^n) \cong H^n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ et $H^p(S^n) = 0$ pour $0 < p < n$.

Exemple 9.18 (Tores). Pour $T^n = (S^1)^n$ (orientable, compacte, de dimension n), on a $H^p(T^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{\binom{n}{p}}$, et la dualité $H^p(T^n) \cong H_{n-p}(T^n)$ se traduit par la symétrie $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ des coefficients binomiaux.

Exemple 9.19 (Espaces projectifs réels). L'espace $\mathbb{RP}^n$ est orientable si et seulement si n est impair. Pour $n = 2k + 1$, la dualité de Poincaré à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ donne $H^p(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong H_{n-p}(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour tout $0 \leq p \leq n$.

9.5.2 Caractéristique d'Euler des variétés de dimension impaire

Corollaire 9.20. *Soit M une variété orientable compacte de dimension impaire $n = 2k + 1$. Alors la caractéristique d'Euler de M est nulle : $\chi(M) = 0$.*

Démonstration. Par la dualité de Poincaré (à coefficients dans un corps $\mathbb{F}$), $\dim H^p(M; \mathbb{F}) = \dim H^{n-p}(M; \mathbb{F})$, c'est-à-dire que les nombres de Betti vérifient $b_p = b_{n-p}$. Donc

$$\chi(M) = \sum_{p=0}^n (-1)^p b_p = \sum_{p=0}^n (-1)^p b_{n-p} = (-1)^n \sum_{p=0}^n (-1)^{n-p} b_{n-p} = (-1)^n \chi(M) = -\chi(M),$$

puisque n est impair. Donc $2\chi(M) = 0$, d'où $\chi(M) = 0$ (car $\chi(M) \in \mathbb{Z}$). $\square$

9.5.3 Forme d'intersection en dimension 4

Définition 9.21 (Forme d'intersection). Soit M une variété orientable compacte de dimension 4. La *forme d'intersection* est la forme bilinéaire symétrique

$$Q_M : H^2(M; \mathbb{Z}) \times H^2(M; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

définie par $Q_M(\alpha, \beta) = \langle \alpha \smile \beta, [M] \rangle$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne l'évaluation (kronecker) $H^4(M; \mathbb{Z}) \times H_4(M; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$.

Théorème 9.22. *Si M est une 4-variété orientable compacte connexe, la forme d'intersection Q_M est unimodulaire, c'est-à-dire que l'application $H^2(M; \mathbb{Z})/\text{torsion} \rightarrow \text{Hom}(H^2(M; \mathbb{Z})/\text{torsion}, \mathbb{Z})$ induite par Q_M est un isomorphisme.*

Démonstration. C'est une conséquence directe de la dualité de Poincaré. Le morphisme cap-produit $D_M : H^2(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(M; \mathbb{Z})$ est un isomorphisme. Modulo la torsion, l'identification de $\text{Hom}(H_2(M; \mathbb{Z})/\text{torsion}, \mathbb{Z})$ avec $H^2(M; \mathbb{Z})/\text{torsion}$ via le théorème des coefficients universels montre que Q_M définit un isomorphisme entre $H^2(M; \mathbb{Z})/\text{torsion}$ et son dual, c'est-à-dire une forme unimodulaire. $\square$

Exemple 9.23. (i) Pour $M = S^4 : H^2(S^4; \mathbb{Z}) = 0$, donc $Q_{S^4} = 0$.

(ii) Pour $M = \mathbb{CP}^2 : H^2(\mathbb{CP}^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, engendré par la classe α d'un hyperplan. On a $Q_{\mathbb{CP}^2} = (1)$ (la forme de rang 1 et de signature +1).

(iii) Pour $M = S^2 \times S^2 : H^2(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$, et la forme d'intersection est $Q_M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, la forme hyperbolique.

(iv) Pour $M = \mathbb{CP}^2 \# \overline{\mathbb{CP}^2} : Q_M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Remarque 9.24. La forme d'intersection joue un rôle central dans la classification des 4-variétés. Le théorème de Freedman (1982) classe les 4-variétés topologiques simplement connexes par leur forme d'intersection. Le théorème de Donaldson (1983)

impose des contraintes supplémentaires pour les variétés différentielles : si Q_M est définie positive, alors elle est diagonalisable sur $\mathbb{Z}$.

9.6 Dualité de Poincaré–Lefschetz

Théorème 9.25 (Dualité de Poincaré–Lefschetz). *Soit M une variété orientable compacte de dimension n , à bord ∂M . Alors il existe un isomorphisme*

$$D: H^p(M, \partial M; R) \xrightarrow{\sim} H_{n-p}(M; R)$$

donné par le cap-produit avec la classe fondamentale relative $[M, \partial M] \in H_n(M, \partial M; R)$. De même, on a un isomorphisme

$$D': H^p(M; R) \xrightarrow{\sim} H_{n-p}(M, \partial M; R).$$

Ces isomorphismes se combinent avec les suites exactes longues de la paire $(M, \partial M)$ pour produire le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H^p(\partial M) & \longrightarrow & H^{p+1}(M, \partial M) & \longrightarrow & H^{p+1}(M) & \longrightarrow & H^{p+1}(\partial M) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \cong \downarrow D_{\partial M} & & \cong \downarrow D & & \cong \downarrow D' & & \cong \downarrow D_{\partial M} & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_{n-1-p}(\partial M) & \longrightarrow & H_{n-p-1}(M) & \longrightarrow & H_{n-p-1}(M, \partial M) & \longrightarrow & H_{n-2-p}(\partial M) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Exemple 9.26 (Dualité pour le disque). Soit D^2 le disque fermé, avec $\partial D^2 = S^1$. On a $H^0(D^2, S^1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ et $H^p(D^2, S^1; \mathbb{Z}) = 0$ pour $p \neq 0, 2$, $H^2(D^2, S^1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. La dualité donne :

$$\begin{aligned} H^0(D^2, S^1) &\cong H_2(D^2) = 0, \\ H^1(D^2, S^1) &\cong H_1(D^2) = 0, \\ H^2(D^2, S^1) &\cong H_0(D^2) \cong \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

On vérifie bien que les deux lignes à gauche et à droite sont cohérentes.

Proposition 9.27 (Dualité et suite exacte longue). *Pour une variété à bord $(M, \partial M)$, le diagramme de dualité de Poincaré–Lefschetz est compatible avec les suites exactes longues de cohomologie et d’homologie de la paire, ce qui fournit un puissant outil de calcul. En combinant ce diagramme avec le théorème des coefficients universels, on peut souvent déterminer complètement les groupes d’homologie et de cohomologie de variétés à bord.*

Remarque 9.28 (Connexion avec la dualité de Hodge). Lorsque M est une variété riemannienne compacte orientée de dimension n , l’opérateur étoile de Hodge $\star: \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{n-p}(M)$ induit un isomorphisme entre les espaces de formes harmoniques $\mathcal{H}^p(M) \cong \mathcal{H}^{n-p}(M)$. Par le théorème de Hodge, $\mathcal{H}^p(M) \cong H_{\text{dR}}^p(M; \mathbb{R})$, de sorte

que la dualité de Hodge fournit une réalisation analytique de la dualité de Poincaré à coefficients réels.

9.7 Exercices

Exercice 9.1. Soit M une variété compacte orientée de dimension n . Montrer que les nombres de Betti satisfont $b_p(M) = b_{n-p}(M)$ pour tout $0 \leq p \leq n$.

Exercice 9.2. Calculer la forme d'intersection Q_M pour $M = \mathbb{CP}^2 \# \mathbb{CP}^2$ (somme connexe de deux copies de $\mathbb{CP}^2$). Quelle est sa signature ?

Exercice 9.3. Montrer que toute variété compacte orientée de dimension 3 a $b_0 = b_3 = 1$ et $b_1 = b_2$. En déduire que $\chi(M) = 0$.

Exercice 9.4. Soit Σ_g la surface orientable compacte de genre g . Vérifier directement la dualité de Poincaré : $H^0(\Sigma_g) \cong H_2(\Sigma_g) \cong \mathbb{Z}$, $H^1(\Sigma_g) \cong H_1(\Sigma_g) \cong \mathbb{Z}^{2g}$, $H^2(\Sigma_g) \cong H_0(\Sigma_g) \cong \mathbb{Z}$.

Exercice 9.5. Soit K la bouteille de Klein. Montrer que la dualité de Poincaré échoue à coefficients entiers, mais vaut à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 9.6. Soit M^4 une 4-variété compacte orientée simplement connexe avec $Q_M \cong E_8$ (la forme d'intersection exceptionnelle de rang 8). Calculer tous les nombres de Betti et la caractéristique d'Euler de M .

Exercice 9.7. Montrer que pour une variété compacte orientée de dimension paire $n = 2k$, la forme bilinéaire $Q: H^k(M; \mathbb{R}) \times H^k(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $Q(\alpha, \beta) = \langle \alpha \smile \beta, [M] \rangle$ est symétrique si k est pair et antisymétrique si k est impair.

Exercice 9.8. (Dualité de Poincaré–Lefschetz.) Soit D^2 le disque fermé, vu comme variété à bord $\partial D^2 = S^1$. Vérifier la dualité $H^p(D^2, S^1) \cong H_{2-p}(D^2)$ pour tout p .

Exercice 9.9. Soit M une 3-variété compacte orientée à bord Σ_g (surface de genre g). En utilisant la dualité de Poincaré–Lefschetz et la suite exacte longue de la paire, montrer que $\text{rang } H_1(M; \mathbb{Z}) \geq g$.

Résumé du chapitre

- Une variété topologique de dimension n est orientable lorsqu'on peut choisir de manière cohérente des orientations locales $\mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\})$.
- Une variété orientable compacte connexe de dimension n possède une unique classe fondamentale $[M] \in H_n(M; \mathbb{Z})$.
- Le cap-produit $\smile: H^p(M) \times H_n(M) \rightarrow H_{n-p}(M)$ est l'opération clé reliant cohomologie et homologie.
- **Dualité de Poincaré :** $\alpha \mapsto \alpha \smile [M]$ donne $H^p(M) \cong H_{n-p}(M)$ pour M variété orientable compacte de dimension n .
- La forme d'intersection Q_M sur $H^2(M^4)$ est unimodulaire et joue un rôle central dans la classification des 4-variétés.
- La dualité de Poincaré–Lefschetz étend le résultat aux variétés à bord.

Chapitre 10

Groupes d'homotopie supérieurs — Introduction

Le groupe fondamental $\pi_1(X, x_0)$, étudié dans les chapitres précédents, capture les propriétés de lacets dans un espace. La généralisation naturelle consiste à remplacer les lacets (images de S^1) par des sphères de dimension supérieure. Les *groupes d'homotopie supérieurs* $\pi_n(X, x_0)$, introduits par Čech en 1932 et développés par Hurewicz, forment une famille d'invariants algébriques d'une richesse considérable, dont le calcul explicite demeure l'un des problèmes centraux de la topologie algébrique.

10.1 Définitions et premières propriétés

Définition 10.1 (Groupes d'homotopie). Soit (X, x_0) un espace topologique pointé et $n \geq 0$ un entier. Le n -ième groupe d'homotopie de (X, x_0) est l'ensemble

$$\pi_n(X, x_0) = [S^n, X]_0 = \{f : (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)\} / \simeq$$

des classes d'homotopie d'applications pointées de (S^n, s_0) dans (X, x_0) , où $s_0 \in S^n$ est un point base fixé.

Remarque 10.2. De manière équivalente, on peut définir $\pi_n(X, x_0)$ comme l'ensemble des classes d'homotopie d'applications $(I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$, ou encore comme l'ensemble des classes d'homotopie d'applications $(D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, x_0)$.

Définition 10.3 (Structure de groupe). Pour $n \geq 1$, on munit $\pi_n(X, x_0)$ d'une loi de groupe comme suit. Étant données $f, g : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$, on définit $f \cdot g : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ par

$$(f \cdot g)(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{si } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2}, \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1. \end{cases}$$

L'élément neutre est la classe de l'application constante, et l'inverse de $[f]$ est la classe de $\bar{f}(t_1, \dots, t_n) = f(1 - t_1, t_2, \dots, t_n)$.

Théorème 10.4 (Commutativité). *Pour $n \geq 2$, le groupe $\pi_n(X, x_0)$ est abélien.*

Démonstration. La preuve utilise l'argument d'Eckmann–Hilton. Pour $n \geq 2$, on peut définir deux lois de composition sur $\pi_n(X, x_0)$: la concaténation selon la première coordonnée (notée $\cdot_1$) et la concaténation selon la deuxième coordonnée (notée $\cdot_2$). Ces deux opérations satisfont la relation d'échange

$$(f \cdot_1 g) \cdot_2 (h \cdot_1 k) = (f \cdot_2 h) \cdot_1 (g \cdot_2 k)$$

(car la composition dans les deux directions est indépendante). En prenant $f = \alpha$, $g = e$, $h = e$, $k = \beta$ (où e est l'élément neutre), on obtient

$$\alpha \cdot_2 \beta = (\alpha \cdot_1 e) \cdot_2 (e \cdot_1 \beta) = (\alpha \cdot_2 e) \cdot_1 (e \cdot_2 \beta) = \alpha \cdot_1 \beta.$$

Ainsi $\cdot_1 = \cdot_2$. En prenant ensuite $f = e$, $g = \beta$, $h = \alpha$, $k = e$:

$$\beta \cdot_1 \alpha = (e \cdot_1 \beta) \cdot_2 (\alpha \cdot_1 e) = (e \cdot_2 \alpha) \cdot_1 (\beta \cdot_2 e) = \alpha \cdot_1 \beta.$$

Donc la loi de groupe est commutative. □

10.2 Fonctorialité et invariance homotopique

Proposition 10.5. *Pour tout $n \geq 0$, l'assignation $(X, x_0) \mapsto \pi_n(X, x_0)$ est un foncteur de la catégorie des espaces pointés vers la catégorie des groupes (abéliens pour $n \geq 2$, ensembles pointés pour $n = 0$). Plus précisément, toute application continue pointée $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ induit un homomorphisme $f_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ par $f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$.*

Théorème 10.6 (Invariance homotopique). *Si $f, g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ sont homotopes relativement à x_0 , alors $f_* = g_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$. En particulier, une équivalence d'homotopie pointée induit un isomorphisme sur tous les groupes d'homotopie.*

Remarque 10.7. Pour un espace connexe par arcs, le choix du point base est inoffensif : un chemin de x_0 à x_1 induit un isomorphisme $\pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(X, x_1)$. Pour $n \geq 2$, cet isomorphisme est canonique (ne dépend que de la classe d'homotopie du chemin), tandis que pour $n = 1$, il dépend du chemin à conjugaison près.

Proposition 10.8 (Groupes d'homotopie et produits). *Pour tout $n \geq 0$ et tous espaces pointés (X, x_0) , (Y, y_0) , on a un isomorphisme naturel*

$$\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0),$$

induit par les projections pr_X et pr_Y .

Démonstration. Une application $f : S^n \rightarrow X \times Y$ est déterminée par ses composantes $\text{pr}_X \circ f$ et $\text{pr}_Y \circ f$, et une homotopie de f est déterminée par les homotopies de ses

composantes. Donc l'application $(\text{pr}_{X*}, \text{pr}_{Y*}) : \pi_n(X \times Y) \rightarrow \pi_n(X) \times \pi_n(Y)$ est bijective. C'est un homomorphisme de groupes pour $n \geq 1$ car les projections sont des morphismes de groupes. $\square$

Corollaire 10.9. *Pour le k -tore $T^k = (S^1)^k$, on a $\pi_1(T^k) \cong \mathbb{Z}^k$ et $\pi_n(T^k) = 0$ pour tout $n \geq 2$.*

10.3 Suite exacte longue de la paire

Définition 10.10 (Groupes d'homotopie relatifs). Soit (X, A, x_0) un triplet topologique pointé avec $x_0 \in A \subset X$. Pour $n \geq 1$, le *groupe d'homotopie relatif* est

$$\pi_n(X, A, x_0) = \{f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)\} / \simeq.$$

Pour $n \geq 2$, c'est un groupe ; pour $n \geq 3$, il est abélien.

Théorème 10.11 (Suite exacte longue). *Soit $x_0 \in A \subset X$. Il existe une suite exacte longue*

$$\cdots \rightarrow \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \rightarrow \cdots \rightarrow \pi_0(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X, x_0)$$

où $i : A \hookrightarrow X$ est l'inclusion, j est induit par l'inclusion des paires, et ∂ est l'opérateur bord (restriction au bord de la boule).

Démonstration. L'exactitude en $\pi_n(X)$ signifie que $\ker j_* = \text{im } i_*$, c'est-à-dire que $[\alpha] \in \pi_n(X)$ provient de A si et seulement si α est homotope, relativement au bord, à une application à valeurs dans A . L'exactitude en $\pi_n(X, A)$ signifie que $\ker \partial = \text{im } j_*$: la restriction de f à S^{n-1} est homotopiquement triviale dans A si et seulement si f s'étend (à homotopie près) depuis X tout entier. Les vérifications sont analogues au cas $n = 1$, en utilisant les homotopies dans I^n plutôt que dans I . $\square$

10.4 Suite exacte de la fibration

Définition 10.12 (Fibration de Serre). Une application continue $p : E \rightarrow B$ est une *fibration de Serre* si elle possède la propriété de relèvement des homotopies pour tous les cubes I^n ($n \geq 0$). La fibre au-dessus de $b_0 \in B$ est $F = p^{-1}(b_0)$.

Théorème 10.13 (Suite exacte d'une fibration). *Soit $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ une fibration de Serre avec B connexe par arcs. Alors il existe une suite exacte longue*

$$\cdots \rightarrow \pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F) \rightarrow \cdots \rightarrow \pi_1(B) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F) \rightarrow \pi_0(E) \rightarrow 0.$$

Démonstration. On identifie $\pi_n(B, b_0)$ avec $\pi_n(E, F, e_0)$ via la propriété de relèvement : toute application $(D^n, S^{n-1}) \rightarrow (B, b_0)$ se relève en une application $(D^n, S^{n-1}) \rightarrow (E, F)$,

et cette correspondance passe aux classes d'homotopie. Le théorème découle alors de la suite exacte de la paire (E, F) . $\square$

Exemple 10.14 (Fibration de Hopf). La *fibration de Hopf* est la fibration $S^1 \hookrightarrow S^3 \xrightarrow{p} S^2$ définie par $p(z_0, z_1) = z_0/z_1 \in \mathbb{CP}^1 \cong S^2$ (en coordonnées homogènes). La suite exacte longue associée donne

$$\cdots \rightarrow \pi_n(S^1) \rightarrow \pi_n(S^3) \rightarrow \pi_n(S^2) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(S^1) \rightarrow \cdots$$

Puisque $\pi_n(S^1) = 0$ pour $n \geq 2$ (car $\mathbb{R}$ est le revêtement universel de S^1), on obtient $\pi_n(S^3) \cong \pi_n(S^2)$ pour $n \geq 3$. En particulier, $\pi_3(S^2) \cong \pi_3(S^3) \cong \mathbb{Z}$.

Exemple 10.15. D'autres fibrations classiques incluent :

- (i) Le revêtement $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R} \rightarrow S^1$ (fibration triviale à fibre discrète).
- (ii) La fibration $S^0 \hookrightarrow S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ (revêtement double).
- (iii) La fibration $S^3 \hookrightarrow S^7 \rightarrow S^4$ (fibration de Hopf quaternionique).
- (iv) La fibration des espaces de lacets : $\Omega B \hookrightarrow PB \rightarrow B$ où PB est l'espace des chemins.

10.5 Calculs fondamentaux

10.5.1 Groupes d'homotopie des sphères

Théorème 10.16 (Approximation cellulaire). *Toute application continue entre CW-complexes est homotope à une application cellulaire (envoyant le n -squelette dans le n -squelette).*

Corollaire 10.17. *Pour $n < m$, on a $\pi_n(S^m) = 0$.*

Démonstration. Par le théorème d'approximation cellulaire, toute application $f: S^n \rightarrow S^m$ est homotope à une application cellulaire $g: S^n \rightarrow S^m$. Or, la structure CW standard de S^m consiste en un 0-squelette réduit à un point et une seule m -cellule. Puisque $n < m$, l'image de g est contenue dans le $(m-1)$ -squelette, qui est réduit à un point. Donc g , et donc f , est homotope à l'application constante. $\square$

Théorème 10.18. *Pour tout $n \geq 1$, on a $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$, engendré par la classe de l'identité $[\text{Id}_{S^n}]$.*

L'isomorphisme est donné par le *degré* : à toute application $f: S^n \rightarrow S^n$ on associe l'entier $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ tel que $f_*: H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$ soit la multiplication par $\deg(f)$.

Remarque 10.19 (Degré et homotopie). Le degré fournit un isomorphisme $\deg: \pi_n(S^n) \rightarrow \mathbb{Z}$. Deux applications continues $f, g: S^n \rightarrow S^n$ sont homotopes si et seulement si $\deg(f) = \deg(g)$. Pour $n = 1$, ceci se démontre par relèvement au revêtement universel $\mathbb{R} \rightarrow S^1$. Pour $n \geq 2$, on utilise le théorème de Hurewicz : l'isomorphisme $\pi_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ est précisément le degré.

Rappelons quelques propriétés du degré :

- (i) $\deg(\text{Id}_{S^n}) = 1$.
- (ii) $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$.
- (iii) L'antipode $a: S^n \rightarrow S^n$, $a(x) = -x$, a pour degré $(-1)^{n+1}$.
- (iv) Si f n'est pas surjective, $\deg(f) = 0$.

Théorème 10.20 ($\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$). *Le groupe $\pi_3(S^2)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, engendré par la classe de la fibration de Hopf $\eta: S^3 \rightarrow S^2$.*

Démonstration. C'est une conséquence de la suite exacte de la fibration de Hopf (Exemple 10.14) : $\pi_3(S^1) \rightarrow \pi_3(S^3) \rightarrow \pi_3(S^2) \rightarrow \pi_2(S^1)$. Puisque $\pi_3(S^1) = \pi_2(S^1) = 0$, on obtient $\pi_3(S^2) \cong \pi_3(S^3) \cong \mathbb{Z}$. $\square$

Remarque 10.21. Le calcul des groupes d'homotopie des sphères $\pi_n(S^m)$ pour $n > m$ est un problème extrêmement difficile, loin d'être résolu en toute généralité. Quelques résultats remarquables :

$\pi_n(S^m)$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$
$n = 1$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0
$n = 2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0
$n = 3$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	0	0
$n = 4$	0	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}$	0	0
$n = 5$	0	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}$	0
$n = 6$	0	$\mathbb{Z}/12$	$\mathbb{Z}/12$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}$

10.6 Théorème de Hurewicz

Le théorème de Hurewicz établit un lien fondamental entre les groupes d'homotopie et les groupes d'homologie.

Définition 10.22 (Morphisme de Hurewicz). Le *morphisme de Hurewicz* est l'homomorphisme

$$h: \pi_n(X, x_0) \longrightarrow H_n(X; \mathbb{Z})$$

défini par $h([f]) = f_*(\iota_n)$, où $\iota_n \in H_n(S^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ est le générateur fondamental.

Théorème 10.23 (Hurewicz, cas $n = 1$). *Si X est connexe par arcs, le morphisme de Hurewicz $h: \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X; \mathbb{Z})$ est surjectif, et son noyau est le sous-groupe des commutateurs $[\pi_1, \pi_1]$. Autrement dit,*

$$H_1(X; \mathbb{Z}) \cong \pi_1(X, x_0)^{\text{ab}}.$$

Démonstration. Pour un CW-complexe, $H_1(X; \mathbb{Z})$ est engendré par les 1-cellules modulo les relations données par les 2-cellules. Le morphisme de Hurewicz envoie un lacet γ sur le cycle singulier correspondant. La surjectivité résulte du fait que tout 1-cycle est une combinaison de lacets. Pour le noyau, si $h([\gamma]) = 0$ dans H_1 , le cycle γ est un bord, ce qui signifie que $[\gamma]$ est un produit de commutateurs dans π_1 . La preuve détaillée utilise la présentation de π_1 par générateurs et relations via le théorème de Van Kampen et la comparaison avec la présentation de H_1 . $\square$

Théorème 10.24 (Hurewicz, cas général). *Soit X un espace connexe par arcs tel que $\pi_i(X) = 0$ pour tout $1 \leq i < n$ (on dit que X est $(n-1)$ -connexe). Alors $H_i(X; \mathbb{Z}) = 0$ pour $1 \leq i < n$, et le morphisme de Hurewicz*

$$h: \pi_n(X) \xrightarrow{\sim} H_n(X; \mathbb{Z})$$

est un isomorphisme.

Esquisse de preuve. On procède par induction sur n . Le cas $n = 1$ est traité ci-dessus (dans ce cas, 0-connexe signifie connexe par arcs, et h est l'abélianisation, qui est un isomorphisme si π_1 est déjà abélien — mais ici la 0-connexité ne suffit pas pour un isomorphisme ; on a besoin de 1-connexité, qui est la simple connexité). Pour $n \geq 2$, on utilise la fibration des chemins $\Omega X \hookrightarrow PX \rightarrow X$, où PX est contractile. La suite exacte longue donne $\pi_i(\Omega X) \cong \pi_{i+1}(X)$, de sorte que ΩX est $(n-2)$ -connexe. Par hypothèse d'induction, $\pi_{n-1}(\Omega X) \cong H_{n-1}(\Omega X)$. On conclut par la *suspension de l'homologie* (théorème de suspension de Freudenthal) et des arguments de théorie spectrale. $\square$

10.7 Théorème de Whitehead

Théorème 10.25 (Whitehead). *Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue entre CW-complexes connexes. Si f induit un isomorphisme $f_*: \pi_n(X) \xrightarrow{\sim} \pi_n(Y)$ pour tout $n \geq 0$, alors f est une équivalence d'homotopie.*

Esquisse de preuve. On construit une inverse homotopique $g: Y \rightarrow X$ par induction sur les cellules de Y . L'hypothèse que f est un isomorphisme sur tous les π_n garantit que chaque étape de la construction est possible : pour relever une n -cellule de Y , on a besoin de la surjectivité de $f_*: \pi_{n-1}(X) \rightarrow \pi_{n-1}(Y)$ (pour l'existence) et de l'injectivité (pour l'unicité à homotopie près). Les détails techniques utilisent le cylindre d'application (*mapping cylinder*) et la théorie de l'obstruction. $\square$

Remarque 10.26. L'hypothèse que X et Y sont des CW-complexes est essentielle. Il existe des espaces topologiques qui ont les mêmes groupes d'homotopie sans être homotopiquement équivalents (par exemple, le « peigne de Varsovie » et le segment).

Corollaire 10.27. *Un CW-complexe connexe dont tous les groupes d'homotopie sont triviaux est contractile.*

Démonstration. L'application constante $X \rightarrow \{*\}$ induit un isomorphisme sur tous les π_n (les deux côtés étant triviaux). Par le théorème de Whitehead, c'est une équivalence d'homotopie, donc X est contractile. $\square$

Corollaire 10.28 (Équivalences faibles entre CW-complexes). *Soit $f: X \rightarrow Y$ une application entre CW-complexes connexes. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) f est une équivalence d'homotopie.
- (ii) $f_*: \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$ est un isomorphisme pour tout n .
- (iii) $f_*: H_n(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(Y; \mathbb{Z})$ est un isomorphisme pour tout n , et f induit un isomorphisme sur π_1 .

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) est clair. (ii) $\Rightarrow$ (i) est le théorème de Whitehead. (ii) $\Rightarrow$ (iii) résulte du théorème de Hurewicz appliqué au cylindre d'application. (iii) $\Rightarrow$ (ii) se démontre par une version relative du théorème de Hurewicz : en passant aux revêtements universels et en utilisant l'hypothèse sur π_1 , l'isomorphisme en homologie entraîne l'isomorphisme sur les groupes d'homotopie supérieurs. $\square$

Exemple 10.29 (Application du théorème de Whitehead). Soit $f: S^1 \vee S^3 \rightarrow S^1 \times S^3$ l'inclusion naturelle. Cette application induit un isomorphisme sur π_1 (les deux sont isomorphes à $\mathbb{Z}$), mais *pas* sur π_3 : en effet, $\pi_3(S^1 \vee S^3)$ contient des éléments provenant de l'attachement de Whitehead, tandis que $\pi_3(S^1 \times S^3) \cong \pi_3(S^3) \cong \mathbb{Z}$. Cet exemple illustre le fait que le théorème de Whitehead requiert un isomorphisme sur *tous* les π_n .

10.8 Exercices

Exercice 10.1. Montrer que $\pi_n(X \times Y) \cong \pi_n(X) \times \pi_n(Y)$ pour tout $n \geq 0$.

Exercice 10.2. Calculer $\pi_n(T^k)$ pour tout $n \geq 1$ et $k \geq 1$, où $T^k = (S^1)^k$ est le k -tore.

Exercice 10.3. Montrer que $\pi_n(X, x_0) \cong \pi_{n-1}(\Omega X, c_{x_0})$ pour tout $n \geq 1$, où $\Omega X = \{\gamma: [0, 1] \rightarrow X \mid \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\}$ est l'espace de lacets et c_{x_0} le lacet constant.

Exercice 10.4. Utiliser la fibration de Hopf quaternionique $S^3 \hookrightarrow S^7 \rightarrow S^4$ pour calculer $\pi_n(S^4)$ pour $n \leq 6$.

Exercice 10.5. Soit $X = S^1 \vee S^2$ le bouquet d'un cercle et d'une 2-sphère.

- (a) Calculer $\pi_1(X)$.
- (b) Montrer que le revêtement universel $\tilde{X}$ est homotopiquement équivalent à $\bigvee_{k \in \mathbb{Z}} S^2$ (un bouquet dénombrable de 2-sphères).

(c) En déduire $\pi_2(X) \cong \mathbb{Z}[\mathbb{Z}] = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ comme $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$ -module.

Exercice 10.6. Donner une preuve directe (sans utiliser la suite exacte de la fibration) que $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$ en utilisant le théorème de Hurewicz.

Exercice 10.7. Soit $f: S^3 \rightarrow S^2$ la fibration de Hopf. Montrer que f n'est pas homotope à l'application constante, c'est-à-dire que $[f] \neq 0$ dans $\pi_3(S^2)$. *Indication* : considérer l'espace obtenu en attachant une 4-cellule à S^2 via f .

Exercice 10.8. (Théorème de suspension de Freudenthal.) Le morphisme de suspension $\Sigma: \pi_n(S^k) \rightarrow \pi_{n+1}(S^{k+1})$ est un isomorphisme pour $n < 2k - 1$ et un épimorphisme pour $n = 2k - 1$. Vérifier ce résultat pour les premiers cas $k = 1, 2, 3$ à l'aide de la table de la Remarque 10.21.

Exercice 10.9. Soit X un CW-complexe simplement connexe. Montrer que si $H_n(X; \mathbb{Z}) = 0$ pour tout $n \geq 1$, alors X est contractile. *Indication* : utiliser le théorème de Hurewicz et le théorème de Whitehead.

Résumé du chapitre

- Le n -ième groupe d'homotopie $\pi_n(X, x_0) = [S^n, X]_0$ est un groupe pour $n \geq 1$, abélien pour $n \geq 2$ (argument d'Eckmann–Hilton).
- La suite exacte longue de la paire $\cdots \rightarrow \pi_n(A) \rightarrow \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(X, A) \rightarrow \pi_{n-1}(A) \rightarrow \cdots$ est l'outil central de calcul.
- La suite exacte d'une fibration $F \rightarrow E \rightarrow B$ relie les groupes d'homotopie de la fibre, de l'espace total et de la base.
- Résultats clés : $\pi_n(S^m) = 0$ pour $n < m$; $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$; $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ (fibration de Hopf).
- **Hurewicz** : si $\pi_i(X) = 0$ pour $i < n$, alors $\pi_n(X) \cong H_n(X; \mathbb{Z})$.
- **Whitehead** : une application entre CW-complexes induisant des isomorphismes sur tous les π_n est une équivalence d'homotopie.

Chapitre 11

Théorie de l'obstruction et applications

La théorie de l'obstruction fournit un cadre systématique pour répondre aux problèmes d'extension et de relèvement d'applications continues. L'idée fondamentale est que les obstacles à l'extension d'une application sont détectés par des classes de cohomologie à valeurs dans les groupes d'homotopie de l'espace cible. Ce chapitre présente les résultats principaux de cette théorie, puis en développe les applications, des classes caractéristiques aux espaces d'Eilenberg–MacLane.

11.1 Le problème d'extension

Définition 11.1 (Problème d'extension). Soit $A \subset X$ un sous-espace d'un CW-complexe et Y un espace topologique. Étant donnée une application continue $f: A \rightarrow Y$, le *problème d'extension* consiste à déterminer si f admet une extension continue $\tilde{f}: X \rightarrow Y$ telle que $\tilde{f}|_A = f$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ X & & \end{array}$$

La stratégie de la théorie de l'obstruction est d'étendre f cellule par cellule. Supposons que f a été étendue au n -squelette $X^{(n)}$. Pour chaque $(n+1)$ -cellule e_α^{n+1} de $X \setminus A$, l'application d'attachement $\varphi_\alpha: S^n \rightarrow X^{(n)}$ composée avec l'extension partielle donne un élément

$$[f \circ \varphi_\alpha] \in \pi_n(Y).$$

L'extension à e_α^{n+1} est possible si et seulement si cet élément est nul.

11.2 Classes d'obstruction

Définition 11.2 (Cochaîne d'obstruction). Soit $f^{(n)}: X^{(n)} \cup A \rightarrow Y$ une extension partielle de f au n -squelette. La *cochaîne d'obstruction* est l'élément

$$\mathfrak{o}^{n+1}(f^{(n)}) \in C^{n+1}(X, A; \pi_n(Y))$$

défini sur chaque $(n+1)$ -cellule orientée e_α^{n+1} par $\mathfrak{o}^{n+1}(f^{(n)})(e_\alpha^{n+1}) = [f^{(n)} \circ \varphi_\alpha] \in \pi_n(Y)$.

Théorème 11.3. La cochaîne d'obstruction $\mathfrak{o}^{n+1}(f^{(n)})$ est un cocycle : $\delta \mathfrak{o}^{n+1}(f^{(n)}) = 0$ dans $C^{n+2}(X, A; \pi_n(Y))$.

Démonstration. Pour toute $(n+2)$ -cellule e^{n+2} , le bord ∂e^{n+2} est une $(n+1)$ -sphère, et l'image de $\mathfrak{o}^{n+1}$ sur ce bord est la classe d'homotopie de la restriction de $f^{(n)}$ à la sphère ∂e^{n+2} . Or cette restriction s'étend au disque D^{n+2} (qui est contractile), donc sa classe dans π_{n+1} est triviale. Le calcul de δ reproduit exactement cette situation. $\square$

Définition 11.4 (Classe d'obstruction). La *classe d'obstruction* est la classe de cohomologie

$$[\mathfrak{o}^{n+1}(f^{(n)})] \in H^{n+1}(X, A; \pi_n(Y)).$$

Elle ne dépend pas du choix de l'extension $f^{(n)}$ au n -squelette (parmi toutes celles qui coïncident avec une extension fixée au $(n-1)$ -squelette).

Théorème 11.5 (Théorème d'obstruction principal). Soit $A \subset X$ une paire CW et Y un espace connexe par arcs. Soit $f: A \rightarrow Y$ une application continue, et supposons que f a été étendue en $f^{(n)}: X^{(n)} \cup A \rightarrow Y$.

- (i) L'extension $f^{(n)}$ se prolonge au $(n+1)$ -squelette si et seulement si $\mathfrak{o}^{n+1}(f^{(n)}) = 0$ dans $C^{n+1}(X, A; \pi_n(Y))$.
- (ii) Il existe une extension $g^{(n)}$ de f au n -squelette, coïncidant avec $f^{(n)}$ sur le $(n-1)$ -squelette, et se prolongeant au $(n+1)$ -squelette, si et seulement si la classe de cohomologie $[\mathfrak{o}^{n+1}(f^{(n)})] = 0$ dans $H^{n+1}(X, A; \pi_n(Y))$.
- (iii) En particulier, si $H^{n+1}(X, A; \pi_n(Y)) = 0$ pour tout n , toute application $f: A \rightarrow Y$ s'étend à X .

Remarque 11.6. Dans la pratique, on rencontre des *obstructions successives* : même si la première obstruction s'annule, il peut exister des obstructions dans les degrés de cohomologie supérieurs. L'analyse complète nécessite parfois l'utilisation de suites spectrales ou de la théorie de Postnikov.

Corollaire 11.7. Soit X un CW-complexe de dimension $\leq n$ et Y un espace $(n-1)$ -connexe (c'est-à-dire $\pi_k(Y) = 0$ pour $k < n$). Alors toute application continue $f: A \rightarrow Y$ définie sur un sous-complexe $A \subset X$ admet une extension $\tilde{f}: X \rightarrow Y$.

Démonstration. L'extension de f au $(k+1)$ -squelette rencontre une obstruction dans $H^{k+1}(X, A; \pi_k(Y))$. Pour $k < n$, $\pi_k(Y) = 0$, donc ces obstructions s'annulent trivialement.

Pour $k \geq n$, le groupe $H^{k+1}(X, A; \pi_k(Y)) = 0$ puisque $\dim X \leq n \leq k$. Donc toutes les obstructions sont nulles et l'extension existe. $\square$

Proposition 11.8 (Unicité de l'extension). *Dans le cadre du théorème d'obstruction, l'obstruction à l'unicité de l'extension au n -squelette (c'est-à-dire l'obstruction à ce que deux extensions soient homotopes) vit dans $H^n(X, A; \pi_n(Y))$. Ainsi, si $H^n(X, A; \pi_n(Y)) = 0$ pour tout n , l'extension est unique à homotopie près.*

Exemple 11.9 (Extension des applications vers les sphères). Considérons le problème d'étendre une application $f: S^n \rightarrow S^n$ à la boule D^{n+1} . L'unique obstruction vit dans $H^{n+1}(D^{n+1}, S^n; \pi_n(S^n)) \cong \pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$, et elle est précisément le degré de f . Ainsi, f s'étend à D^{n+1} si et seulement si $\deg(f) = 0$.

11.3 Applications classiques

11.3.1 Théorème de Borsuk–Ulam

Théorème 11.10 (Borsuk–Ulam). *Pour toute application continue $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, il existe un point $x \in S^n$ tel que $f(x) = f(-x)$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que $f(x) \neq f(-x)$ pour tout x . Alors l'application $g: S^n \rightarrow S^{n-1}$ définie par

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}$$

est bien définie, continue, et vérifie $g(-x) = -g(x)$ (elle est impaire). Une application impaire $S^n \rightarrow S^{n-1}$ induit un morphisme non trivial en cohomologie modulo 2 : la classe $g^*(u) = v$ où u engendre $H^1(\mathbb{RP}^{n-1}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et v engendre $H^1(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Mais alors $v^n = g^*(u^n) \neq 0$, ce qui est impossible car $u^n = 0$ dans $H^n(\mathbb{RP}^{n-1}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ (puisque $\mathbb{RP}^{n-1}$ est de dimension $n-1$). Contradiction. $\square$

11.3.2 Théorème de Lusternik–Schnirelman

Théorème 11.11 (Lusternik–Schnirelman). *Si $S^n = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{n+1}$, où les F_i sont des fermés, alors au moins un F_i contient une paire de points antipodaux $(x, -x)$.*

Démonstration. Supposons que chaque F_i ne contient aucune paire antipodale. Posons $U_i = S^n \setminus F_i$. Alors $\{U_1, \dots, U_{n+1}\}$ est un recouvrement ouvert de S^n (car $F_1 \cup \dots \cup F_{n+1} = S^n$ implique que les U_i ne recouvrent pas, contradiction). On rectifie : on définit $g_i(x) = d(x, F_i)$ et $g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x)) \in \mathbb{R}^n$, où l'on utilise seulement les n premiers F_i . Par le théorème de Borsuk–Ulam, il existe x tel que $g(x) = g(-x)$, c'est-à-dire $d(x, F_i) = d(-x, F_i)$ pour $i = 1, \dots, n$. Puisque ni x ni $-x$ n'est dans le même F_i et que $x \in S^n = \bigcup F_i$, on a $x \in F_{n+1}$, et de même $-x \in F_{n+1}$, ce qui contredit l'hypothèse sur F_{n+1} . $\square$

11.3.3 Classes caractéristiques

Remarque 11.12. La théorie de l'obstruction fournit un cadre naturel pour la classification des fibrés vectoriels. Étant donné un fibré vectoriel réel ξ de rang k sur un CW-complexe X , les obstructions à la trivialisation de ξ vivent dans les groupes $H^n(X; \pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})))$, ou de manière équivalente, dans $H^n(X; \pi_{n-1}(O(k)))$ (en choisissant une métrique riemannienne).

Les principales classes caractéristiques sont :

- (i) **Classes de Stiefel–Whitney** $w_i(\xi) \in H^i(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ pour les fibrés vectoriels réels. La classe w_1 mesure l'orientabilité ($w_1 = 0$ si et seulement si ξ est orientable), et w_2 est l'obstruction à l'existence d'une structure spin.
- (ii) **Classes de Chern** $c_i(\xi) \in H^{2i}(X; \mathbb{Z})$ pour les fibrés vectoriels complexes. La première classe de Chern c_1 classe les fibrés en droites complexes.
- (iii) **Classes de Pontriaguine** $p_i(\xi) \in H^{4i}(X; \mathbb{Z})$ pour les fibrés vectoriels réels, définies par $p_i(\xi) = (-1)^i c_{2i}(\xi \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$.
- (iv) **Classe d'Euler** $e(\xi) \in H^k(X; \mathbb{Z})$ pour un fibré orienté de rang k , reliée à la caractéristique d'Euler par $\langle e(TM), [M] \rangle = \chi(M)$ (théorème de Gauss–Bonnet–Chern).

Proposition 11.13 (Axiomes des classes de Chern). *Les classes de Chern sont caractérisées de manière unique par les axiomes suivants :*

- (i) **Naturalité** : $c_i(f^*\xi) = f^*(c_i(\xi))$ pour toute application continue f .
- (ii) **Formule de Whitney** : $c(\xi \oplus \eta) = c(\xi) \smile c(\eta)$, où $c(\xi) = 1 + c_1(\xi) + c_2(\xi) + \dots$ est la classe de Chern totale.
- (iii) **Normalisation** : pour le fibré tautologique γ^1 sur $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$, on a $\langle c_1(\gamma^1), [\mathbb{CP}^1] \rangle = -1$ (ou $+1$, selon la convention).
- (iv) **Dimension** : $c_i(\xi) = 0$ pour $i > \mathrm{rang}(\xi)$.

Exemple 11.14. (i) Le fibré tangent $T\mathbb{CP}^n$ satisfait $c(T\mathbb{CP}^n) = (1 + h)^{n+1}$ dans $H^*(\mathbb{CP}^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[h]/(h^{n+1})$, où h est le générateur de $H^2(\mathbb{CP}^n; \mathbb{Z})$.

(ii) Pour le fibré de Hopf η sur $S^2 \cong \mathbb{CP}^1$: $c_1(\eta) = h \in H^2(S^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

(iii) La classe de Chern totale d'un fibré trivial est $c(\varepsilon^k) = 1$.

Théorème 11.15 (Classification des fibrés). *Les fibrés vectoriels réels de rang k sur un espace paracompact X sont classifiés par les classes d'homotopie d'applications $X \rightarrow BO(k)$, où $BO(k)$ est l'espace classifiant du groupe orthogonal $O(k)$. Les classes de Stiefel–Whitney sont les images réciproques des classes universelles dans $H^*(BO(k); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.*

11.4 Espaces d'Eilenberg–MacLane

Définition 11.16 (Espace d'Eilenberg–MacLane). Soit G un groupe (abélien si $n \geq 2$) et $n \geq 1$. Un espace topologique X est un *espace d'Eilenberg–MacLane de type $K(G, n)$* si

$$\pi_k(X) \cong \begin{cases} G & \text{si } k = n, \\ 0 & \text{si } k \neq n. \end{cases}$$

Théorème 11.17 (Existence et unicité). *Pour tout groupe G (abélien si $n \geq 2$) et tout $n \geq 1$, il existe un CW -complexe de type $K(G, n)$, unique à équivalence d'homotopie près.*

Esquisse de preuve. Existence : on construit $K(G, n)$ par étapes.

1. On part d'un bouquet $\bigvee_{\alpha} S^n$ indexé par un système de générateurs de G .
2. On attache des $(n+1)$ -cellules pour tuer les relations dans G , obtenant un espace X avec $\pi_n(X) \cong G$ et $\pi_k(X) = 0$ pour $k < n$.
3. On attache des cellules de dimension $\geq n+2$ pour tuer les groupes d'homotopie $\pi_k(X)$ pour $k > n$, ce qui est possible par construction.

Unicité : si X et Y sont deux $K(G, n)$, on construit une application $f: X \rightarrow Y$ induisant un isomorphisme sur π_n , et donc (par Hurewicz et Whitehead) une équivalence d'homotopie. $\square$

Exemple 11.18. (i) $K(\mathbb{Z}, 1) \simeq S^1$ (car $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ et $\pi_n(S^1) = 0$ pour $n \geq 2$).
(ii) $K(\mathbb{Z}, 2) \simeq \mathbb{CP}^\infty$, l'espace projectif complexe de dimension infinie.
(iii) $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1) \simeq \mathbb{RP}^\infty$.
(iv) $K(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, 1)$ est un espace de lentilles de dimension infinie.

Remarque 11.19 (Relation avec les espaces de lacets). Pour tout groupe abélien G et tout $n \geq 1$, on a une équivalence d'homotopie $\Omega K(G, n+1) \simeq K(G, n)$. En effet, la suite exacte d'homotopie de la fibration des chemins $\Omega K(G, n+1) \hookrightarrow PK(G, n+1) \rightarrow K(G, n+1)$, combinée avec la contractibilité de $PK(G, n+1)$, donne $\pi_k(\Omega K(G, n+1)) \cong \pi_{k+1}(K(G, n+1))$. Or $\pi_{k+1}(K(G, n+1)) = G$ si $k+1 = n+1$ (c'est-à-dire $k = n$) et 0 sinon. Donc $\Omega K(G, n+1)$ est un $K(G, n)$.

Proposition 11.20 (Propriétés de la cohomologie des espaces $K(G, n)$). (i) $H^n(K(G, n); G) \cong \text{Hom}(G, G)$ contient un élément distingué ι_n (correspondant à l'identité de G), appelé classe fondamentale.
(ii) L'anneau $H^*(K(\mathbb{Z}, 2); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c]$ est un anneau de polynômes en un générateur c de degré 2 (cohomologie de $\mathbb{CP}^\infty$).
(iii) L'algèbre $H^*(K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[w]$ est un anneau de polynômes en un générateur w de degré 1 (cohomologie de $\mathbb{RP}^\infty$).

11.5 Cohomologie et classes d'homotopie

Théorème 11.21 (Représentabilité de la cohomologie). *Soit G un groupe abélien et $n \geq 1$. Pour tout CW-complexe X , il existe une bijection naturelle*

$$[X, K(G, n)] \xrightarrow{\sim} H^n(X; G)$$

qui, à la classe d'homotopie d'une application $f: X \rightarrow K(G, n)$, associe $f^(\iota_n)$, où $\iota_n \in H^n(K(G, n); G)$ est la classe fondamentale.*

Esquisse de preuve. La surjectivité résulte de la construction d'une application $f: X \rightarrow K(G, n)$ cellule par cellule, à partir d'un cocycle représentant une classe de cohomologie donnée. L'injectivité se démontre en montrant que deux applications induisant la même classe en cohomologie sont homotopes, par un argument d'obstruction (les obstructions vivent dans des groupes de cohomologie à coefficients dans $\pi_k(K(G, n)) = 0$ pour $k \neq n$). Ce théorème est un cas particulier du *théorème de représentabilité de Brown*, qui s'applique à tout foncteur cohomologique vérifiant les axiomes de Mayer–Vietoris et de wedge. $\square$

Remarque 11.22. Le théorème de représentabilité implique que les *opérations cohomologiques* naturelles $H^n(-; G) \rightarrow H^m(-; G')$ correspondent bijectivement aux éléments de $H^m(K(G, n); G') = [K(G, n), K(G', m)]$. Par exemple, les *carrés de Steenrod* $Sq^i: H^n(-; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^{n+i}(-; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ correspondent à des classes dans $H^{n+i}(K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

11.6 Ouvertures

11.6.1 Homotopie stable et spectres

Le théorème de suspension de Freudenthal montre que les morphismes de suspension $\pi_n(S^k) \rightarrow \pi_{n+1}(S^{k+1})$ se stabilisent pour $n < 2k - 1$. Les *groupes d'homotopie stables* $\pi_n^s = \varinjlim_k \pi_{n+k}(S^k)$ forment un anneau gradué (via le produit de composition), dont le calcul est l'un des problèmes centraux de la topologie algébrique moderne.

Définition 11.23 (Spectre). Un *spectre* est une suite d'espaces pointés $(E_n)_{n \geq 0}$ munis d'applications $\sigma_n: \Sigma E_n \rightarrow E_{n+1}$ (ou de manière équivalente, d'applications $\tilde{\sigma}_n: E_n \rightarrow \Omega E_{n+1}$). Un spectre définit une théorie de cohomologie généralisée par $E^n(X) = \varinjlim_k [\Sigma^k X, E_{n+k}]$.

- Exemple 11.24.**
- (i) Le *spectre de sphères* $\mathbb{S} = (S^0, S^1, S^2, \dots)$ représente l'homotopie stable.
 - (ii) Le *spectre d'Eilenberg–MacLane* $HG = (K(G, 0), K(G, 1), K(G, 2), \dots)$ représente la cohomologie singulière.
 - (iii) Le *spectre de Thom* $MO = (MO(0), MO(1), MO(2), \dots)$ représente le cobordisme non orienté.

11.6.2 Connexions avec la physique mathématique

Remarque 11.25. Les concepts de ce chapitre trouvent des applications profondes en physique théorique, notamment en *théorie de jauge* :

- (i) Un champ de jauge (connexion) sur un espace-temps M est une connexion sur un fibré principal $P \rightarrow M$ de groupe de structure G (par exemple $G = SU(2)$ ou $G = SU(3)$).
- (ii) Les classes caractéristiques (classes de Chern) du fibré mesurent les *charges topologiques* ; par exemple, la deuxième classe de Chern $c_2(P)$ est le *nombre d'instantons*.
- (iii) Les *anomalies* en théorie quantique des champs correspondent à des obstructions topologiques à la trivialisations de certains fibrés déterminants.
- (iv) La classification des phases topologiques de la matière utilise la K -théorie et le cobordisme.

11.7 Exercices

Exercice 11.1. Soit X un CW-complexe de dimension $\leq n$ et Y un espace $(n-1)$ -connexe. Montrer que toute application $f: A \rightarrow Y$ (où A est un sous-complexe de X) s'étend à X .

Exercice 11.2. Montrer que tout fibré vectoriel de rang k sur une sphère S^n est trivial si $n < k$. *Indication* : utiliser le fait que la fibre du fibré en repères est $(k-2)$ -connexe.

Exercice 11.3. Soit ξ un fibré vectoriel réel de rang 2 sur un CW-complexe de dimension 2. Montrer que ξ est trivial si et seulement si $w_1(\xi) = 0$ et $e(\xi) = 0$ (où e est la classe d'Euler).

Exercice 11.4. En utilisant le théorème de représentabilité de Brown, montrer que pour tout groupe abélien G , la première classe de cohomologie $H^1(X; G)$ est en bijection avec $\text{Hom}(\pi_1(X), G)$ lorsque X est connexe par arcs.

Exercice 11.5. Montrer que $K(\mathbb{Z}, n)$ a le type d'homotopie de $\Omega K(\mathbb{Z}, n+1)$. En déduire que la cohomologie singulière vérifie l'axiome de la suite de Mayer-Vietoris.

Exercice 11.6. Calculer les premiers groupes de cohomologie de $K(\mathbb{Z}, 2) \simeq \mathbb{CP}^\infty$ et retrouver l'anneau de cohomologie $H^*(\mathbb{CP}^\infty; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c]$, $\deg c = 2$.

Exercice 11.7. (Application du théorème de Borsuk-Ulam.) Montrer qu'il n'existe pas de plongement topologique de $\mathbb{RP}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. *Indication* : supposer qu'un tel plongement existe, considérer le complémentaire et utiliser la dualité d'Alexander.

Exercice 11.8. La catégorie de Lusternik-Schnirelman $\text{cat}(X)$ est le plus petit entier k tel que X puisse être recouvert par $k+1$ ouverts contractiles dans X . Montrer que $\text{cat}(S^n) = 1$ et que $\text{cat}(T^n) = n$.

Exercice 11.9. Montrer que pour tout CW-complexe fini X et tout groupe abélien G , l'ensemble $[X, K(G, n)]$ est un groupe abélien, et que ce groupe est isomorphe à $H^n(X; G)$. Expliciter cet isomorphisme pour $X = S^n$ et $G = \mathbb{Z}$.

Exercice 11.10. (Tour de Postnikov.) Soit X un CW-complexe connexe. Montrer qu'il existe des espaces X_n et des fibrations $X_n \rightarrow X_{n-1}$ de fibre $K(\pi_n(X), n)$, tels que $\pi_k(X_n) \cong \pi_k(X)$ pour $k \leq n$ et $\pi_k(X_n) = 0$ pour $k > n$. Les obstructions à relever des applications vers X_{n-1} en applications vers X_n vivent dans $H^{n+1}(-; \pi_n(X))$.

Résumé du chapitre

- La théorie de l'obstruction analyse l'extension d'applications cellule par cellule. L'obstruction à l'extension au $(n+1)$ -squelette est un cocycle à valeurs dans $\pi_n(Y)$.
- La classe de cohomologie $[\mathfrak{o}^{n+1}] \in H^{n+1}(X, A; \pi_n(Y))$ est l'obstruction fondamentale.
- Le théorème de Borsuk–Ulam et le théorème de Lusternik–Schnirelman sont des applications classiques de ces méthodes.
- Les classes caractéristiques (Stiefel–Whitney, Chern, Pontriaguine, Euler) mesurent les obstructions à la trivialisation des fibrés vectoriels.
- Les espaces $K(G, n)$ représentent la cohomologie : $[X, K(G, n)] \cong H^n(X; G)$.
- La théorie des spectres fournit le cadre moderne pour les théories cohomologiques généralisées.

Annexe A

Rappels d'algèbre homologique

Cet appendice rassemble les notions fondamentales d'algèbre homologique utilisées tout au long du cours. Les preuves sont omises ou seulement esquissées ; le lecteur pourra se reporter aux ouvrages de Weibel [11] ou de Cartan–Eilenberg [12] pour les détails.

A.1 Complexes de chaînes

Définition A.1 (Complexe de chaînes). Un *complexe de chaînes* $(C_\bullet, \partial)$ sur un anneau R est une suite de R -modules et de morphismes

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

telle que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ pour tout n . Dualement, un *complexe de cochaînes* est une suite $(C^\bullet, \delta)$ avec $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$.

Définition A.2 (Homologie). Le n -ième *groupe d'homologie* du complexe $(C_\bullet, \partial)$ est

$$H_n(C_\bullet) = \ker \partial_n / \operatorname{im} \partial_{n+1} = Z_n(C_\bullet) / B_n(C_\bullet),$$

où $Z_n = \ker \partial_n$ est le module des *cycles* et $B_n = \operatorname{im} \partial_{n+1}$ celui des *bords*.

Définition A.3 (Morphisme de complexes). Un *morphisme de complexes* $f: C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ est une famille de morphismes $f_n: C_n \rightarrow D_n$ commutant avec les différentielles : $\partial_n^D \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial_n^C$. Un tel morphisme induit des morphismes en homologie $f_*: H_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(D_\bullet)$.

Définition A.4 (Homotopie de chaînes). Deux morphismes $f, g: C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ sont *homotopes* (noté $f \simeq g$) s'il existe des morphismes $s_n: C_n \rightarrow D_{n+1}$ tels que $f_n - g_n = \partial_{n+1}^D \circ s_n + s_{n-1} \circ \partial_n^C$. Dans ce cas, $f_* = g_*$ en homologie.

A.2 Suites exactes

Définition A.5 (Suite exacte). Une suite de morphismes de R -modules $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ est dite *exacte en B* si $\ker g = \operatorname{im} f$. Une *suite exacte courte* est une suite exacte $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$.

Théorème A.6 (Suite exacte longue en homologie). *Toute suite exacte courte de complexes de chaînes $0 \rightarrow A_\bullet \rightarrow B_\bullet \rightarrow C_\bullet \rightarrow 0$ induit une suite exacte longue en homologie :*

$$\cdots \rightarrow H_n(A) \rightarrow H_n(B) \rightarrow H_n(C) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A) \rightarrow H_{n-1}(B) \rightarrow \cdots$$

Le morphisme $\partial_*: H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A)$ est appelé morphisme connectant. Sa construction repose sur le lemme du serpent.

Théorème A.7 (Lemme des cinq). *Soit le diagramme commutatif à lignes exactes :*

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5 \end{array}$$

Si f_1, f_2, f_4, f_5 sont des isomorphismes, alors f_3 est un isomorphisme.

A.3 Formule de Künneth

Théorème A.8 (Künneth). *Soient $C_\bullet$ et $D_\bullet$ des complexes de chaînes de R -modules libres, où R est un anneau principal. Alors il existe une suite exacte courte naturelle*

$$0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p(C) \otimes_R H_q(D) \rightarrow H_n(C \otimes_R D) \rightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \operatorname{Tor}_1^R(H_p(C), H_q(D)) \rightarrow 0,$$

scindée (non naturellement). En particulier, si R est un corps, on a $H_n(C \otimes_R D) \cong \bigoplus_{p+q=n} H_p(C) \otimes_R H_q(D)$.

Corollaire A.9 (Künneth topologique). *Pour des espaces topologiques X et Y et un corps $\mathbb{F}$:*

$$H_n(X \times Y; \mathbb{F}) \cong \bigoplus_{p+q=n} H_p(X; \mathbb{F}) \otimes_{\mathbb{F}} H_q(Y; \mathbb{F}).$$

A.4 Foncteurs dérivés

Définition A.10 (Module projectif, module injectif). Un R -module P est *projectif* si pour tout épimorphisme $B \twoheadrightarrow C$ et tout morphisme $P \rightarrow C$, il existe un relèvement $P \rightarrow B$. Un R -module I est *injectif* si pour tout monomorphisme $A \hookrightarrow B$ et tout morphisme $A \rightarrow I$, il existe une extension $B \rightarrow I$.

Définition A.11 (Résolution projective). Une *résolution projective* d'un R -module M est une suite exacte $\cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ où chaque P_n est projectif.

Définition A.12 (Foncteurs Ext et Tor). Soit M un R -module et $P_\bullet \rightarrow M \rightarrow 0$ une résolution projective.

- (i) $\mathrm{Tor}_n^R(M, N) = H_n(P_\bullet \otimes_R N)$.
- (ii) $\mathrm{Ext}_R^n(M, N) = H^n(\mathrm{Hom}_R(P_\bullet, N))$.

Ces foncteurs sont indépendants du choix de la résolution (à isomorphisme canonique près).

Théorème A.13 (Théorème des coefficients universels). Pour un espace topologique X et un groupe abélien G :

$$0 \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_{n-1}(X; \mathbb{Z}), G) \rightarrow H^n(X; G) \rightarrow \mathrm{Hom}(H_n(X; \mathbb{Z}), G) \rightarrow 0.$$

Cette suite exacte est scindée (non naturellement).

Exemple A.14. Quelques calculs fondamentaux :

- (i) $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/\mathrm{gcd}(m, n)\mathbb{Z}$.
- (ii) $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/\mathrm{gcd}(m, n)\mathbb{Z}$.
- (iii) $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, G) \cong \{g \in G \mid mg = 0\}$ pour tout groupe abélien G .
- (iv) $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}, G) = 0$ pour tout groupe abélien G (car $\mathbb{Z}$ est libre, donc projectif).
- (v) Si P est un module projectif, $\mathrm{Ext}_R^n(P, M) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et tout R -module M .

Remarque A.15 (Suites spectrales). Pour les calculs avancés en topologie algébrique, les *suites spectrales* constituent un outil indispensable. Une suite spectrale est une suite de pages $(E_r^{p,q}, d_r)_{r \geq 0}$ de bimodules différentiels, avec $E_{r+1} = H(E_r, d_r)$, qui « converge » vers un objet gradué associé à une filtration de l'objet final. Les plus utilisées sont :

- (i) La suite spectrale de *Serre* pour une fibration $F \rightarrow E \rightarrow B$: $E_2^{p,q} = H^p(B; H^q(F)) \Rightarrow H^{p+q}(E)$.
- (ii) La suite spectrale de *Mayer–Vietoris* pour un recouvrement ouvert.
- (iii) La suite spectrale des *coefficients universels* pour le calcul de la cohomologie à coefficients.

Nous renvoyons à McCleary [11] pour une introduction détaillée.

Bibliographie

- [1] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [2] E. H. Spanier, *Algebraic Topology*, Springer-Verlag, 1966 ; réédition corrigée, 1981.
- [3] G. E. Bredon, *Topology and Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 139, Springer, 1993.
- [4] J. P. May, *A Concise Course in Algebraic Topology*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, 1999.
- [5] T. tom Dieck, *Algebraic Topology*, EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society, 2008.
- [6] S. Eilenberg et N. E. Steenrod, *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton University Press, 1952.
- [7] R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1958.
- [8] J.-P. Serre, « Homologie singulière des espaces fibrés. Applications », *Annals of Mathematics*, 54 (1951), 425–505.
- [9] R. Bott et L. W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Graduate Texts in Mathematics 82, Springer, 1982.
- [10] J. W. Milnor et J. D. Stasheff, *Characteristic Classes*, Annals of Mathematics Studies 76, Princeton University Press, 1974.
- [11] C. A. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 38, Cambridge University Press, 1994.
- [12] H. Cartan et S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1956.
- [13] G. W. Whitehead, *Elements of Homotopy Theory*, Graduate Texts in Mathematics 61, Springer, 1978.
- [14] R. M. Switzer, *Algebraic Topology : Homotopy and Homology*, Classics in Mathematics, Springer, 2002.
- [15] A. Dold, *Lectures on Algebraic Topology*, Classics in Mathematics, Springer, 1995.

Index

- K , bouteille de Klein, 89
- $K(\mathbb{Z}, 1)$, 126
- $K(\mathbb{Z}, 2)$, 126
- $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1)$, 126
- $[X, Y]$, 13
- $\mathbb{CP}^2$
 - vs bouquet, 102
- $\mathbb{CP}^\infty$
 - cohomologie, 104
- $\mathbb{CP}^n$
 - cohomologie, 100
- $\Omega(X, x_0)$, 20
- $\mathbb{RP}^2$
 - cohomologie, 96
- $\mathbb{RP}^\infty$
 - cohomologie, 104
- $\mathbb{RP}^n$
 - cohomologie, 100
 - homologie, 88, 89
 - structure CW, 100
- Σ_g , 88
- hTop**, 17
- $\pi_0(X)$, 12
- $\pi_1(S^1)$, 27
- $\pi_1(X, x_0)$, 23
- $\simeq$, 13
- action
 - proprement discontinue, 55
- action de groupe
 - et revêtement, 53
- Alexander–Whitney, 90
- algèbre extérieure, 99
- algèbre graduée anti-commutative, 98
- algèbre homologique, 130–133
- anneau de cohomologie, 98, 108
- anneau de polynômes tronqué, 100
- anomalie (physique), 128
- anti-commutativité graduée, 98
- application caractéristique, 15
- application continue, 10
- application de dégénérescence, 59
- application face, 58
 - relations, 58
- approximation cellulaire, 117
- arbre de Cayley, 52
- argument d’Eckmann–Hilton, 115
- associativité des chemins, 21
- associativité du cup-produit, 98
- attachement de cellule, 41
- augmentation, 64
- bande de Möbius, 18
- barycentre, 74
- bien pointé, 92
- bonne paire, 77
- bord, 61, 130
 - carré nul, 60
 - opérateur, 60
- Borsuk–Ulam, 80
 - théorème, 79
- Borsuk–Ulam, théorème de, 124
- Bott, 134
- bouquet, 6, 32, 87, 92
 - de cercles, 38
- bouteille de Klein, 31, 40, 107
 - cohomologie, 103
 - dualité, 113
 - homologie, 89
- Bredon, 134
- Brouwer
 - invariance du domaine, 79
 - théorème du point fixe, 78
- Brown, théorème de représentabilité de, 127
- Brown, théorème de représentabilité de, 127
- cap-produit, 108–109
 - associativité, 109
- caractéristique d’Euler, 6, 91
 - additivité, 91
 - des surfaces, 91
 - dimension impaire, 111
 - et décomposition cellulaire, 92

- multiplicativité, 91
 - vérification, 92
- carrés de Steenrod, 127
- Cartan, 134
- carte, 106
- catégorie de Lusternik–Schnirelman, 128
- catégorie homotopique, 17
- catégorie homotopique pointée, 17
- cellule, 15
- cercle
 - groupe fondamental, 27
- changement de point base, 25
- chasse au diagramme, 71
- chaîne singulière, 59, 94
- chaînes relatives, 66
- chemin, 20
 - constant, 20
 - inverse, 20
- chemin constant, 22
- chemin inverse, 22
- classe d'Euler, 100, 125
- classe d'homologie, 61
- classe fondamentale, 107
 - d'un espace $K(G, n)$, 127
- classes caractéristiques, 125
- classes d'obstruction, 123
- classes de Chern, 125
 - axiomes, 125
- classes de Pontriaguine, 125
- classes de Stiefel–Whitney, 125
- classification
 - des revêtements, 49
- cobord, 95
- cobord, opérateur, 94
 - définition, 94
- cochaîne singulière, 94
- cocycle, 95
- coefficients universels, théorème des
 - pour la cohomologie, 96
- coface, 95
- cohomologie, 8
 - à coefficients entiers, 96
- cohomologie singulière, 6, 94
 - groupes de, 95
- compacité, 12
- complexe augmenté, 65
- complexe de chaînes, 61, 130
- complexe de cochaînes, 95, 130
- composantes connexes par arcs, 12, 65
- concaténation de chemins, 20
- connexité, 11
- connexité par arcs, 11
- coordonnées barycentriques, 58
- correspondance de Galois
 - analogie avec la théorie de Galois, 50
 - des revêtements, 49
- cross-product, 101
 - définition, 101
- cup-produit, 94, 108
 - applications, 102
 - définition, 97
 - fonctorialité, 98
 - formule de Leibniz, 97
 - propriétés, 98
 - élément unité, 98
- CW-complexe, 15
 - attachement de cellule, 41
 - groupe fondamental, 41
- cycle, 61, 130
- cylindre, 18
- cône, 19
- de Rham
 - cohomologie du tore, 103
 - compatibilité des produits, 103
- de Rham, cohomologie de, 103
- deck transformation, *voir* transformation de revêtement
- degré, 33
 - d'une application, 77
 - et suspension, 81
 - propriétés, 78
- degré d'une application, 117
 - et homotopie, 118
- Dold, 134
- Donaldson, théorème de, 111
- dualité de Hodge, 112
- dualité de Poincaré, 106–113
 - pour $\mathbb{RP}^n$, 110
 - pour les sphères, 110
 - pour les tores, 110
 - théorème, 109
- dualité de Poincaré–Lefschetz, 112
- dunce hat, 42
- Eckmann–Hilton, argument, 115
- Eilenberg, 134

- Eilenberg, Samuel, 8
- Eilenberg–MacLane, espaces d', 126
 - existence et unicité, 126
- Eilenberg–Steenrod, 68
 - axiomes, 81
- Eilenberg–Zilber, approximation d', 98
- Eilenberg–Zilber, théorème d', 90
- espace $(n - 1)$ -connexe, 119
- espace classifiant, 125
- espace contractile, 14, 64
 - exemples, 64
- espace de Hausdorff, 12
- espace de lacets, 120
 - et $K(G, n)$, 126
- espace de lentilles, 126
- espace lenticulaire, 42, 104
- espace projectif
 - homologie, 81
- espace projectif complexe, 6, 106
 - cohomologie, 100
 - CW-structure, 16
- espace projectif réel, 6, 106
 - CW-structure, 16
 - groupe fondamental, 33
 - homologie, 88
- espace quotient, 6
- espace topologique, 10
- Euler–Poincaré, 91
- excision, 70
 - formes équivalentes, 74
 - théorème, 74
- excision, théorème d', 83
- Ext, 132
- Ext, 96
- faisceau, 81
- fibration, 116–117
 - de Serre, 116
- fibration de Hopf, 104, 117
 - quaternionique, 117
- fibre d'un revêtement, 45
- fibré vectoriel
 - classification, 125
- foncteur
 - π_1 , 24
- foncteur fibre, 50
- foncteurs dérivés, 132–133
- fonctorialité
 - de la cohomologie, 95
 - des revêtements, 56
 - homologie, 62
 - homologie relative, 67
- forme d'intersection, 102, 111–112
 - unimodularité, 111
- formule de Euler
 - $V - E + F$, 92
- formule de Künneth, 131
- formule de Whitney, 125
- Freedman, théorème de, 111
- Godement, 134
- groupe
 - de présentation finie, 42
- groupe des chaînes, 59
- groupe fondamental, 6, 8
 - de la bouteille de Klein, 40
 - des surfaces orientables, 40
 - du bouquet de cercles, 38
 - du plan projectif réel, 39
 - produit, 30
 - structure de groupe, 23
- groupe libre, 32, 35
- groupe modulaire, 35
- groupes d'homotopie
 - commutativité, 115
 - des sphères, 117
 - définition, 114
 - fonctorialité, 115
 - invariance homotopique, 115
 - relatifs, 116
 - structure de groupe, 114
- groupes d'homotopie supérieurs, 114–121
- groupoïde fondamental, 37
- Gysin, suite de, 100
- Hatcher, 134
- homologie
 - d'un complexe, 130
 - d'un point, 65
 - des sphères, 66
 - histoire, 67
 - à coefficients, 68
- homologie cellulaire, 17, 89
- homologie relative, 66
 - et quotient, 77
 - groupes, 67
- homologie réduite, 65, 86
 - Mayer–Vietoris, 86

- homologie singulière, 6, 8, 57
 - groupes, 61
 - invariance homotopique, 63
- homologue, 61
- homotopie, 13
 - et composition, 14
- homotopie de chaînes, 63, 64, 130
- homotopie de chemins, 21
- homotopie stable, 127
- homéomorphisme, 10
- Hopf, fibration de, 104
- Hurewicz, théorème de, 118–119
 - cas général, 119
 - pour les sphères, 117
- instanton, 128
- intégration des formes, 103
- invariance de la dimension, 79
- invariance du domaine, 79
- invariance homotopique, 63
 - π_1 , 25
- invariance par homotopie
 - cohomologie, 95
- K-théorie, 128
- Künneth, formule de, 89
 - en cohomologie, 101
- lacet, 20
- lemme
 - du nombre de Lebesgue, 37, 46
- lemme de Lebesgue, 75, 76
- lemme de recollement, 21
- lemme des cinq, 131
- lemme du serpent, 72, 131
- Lusternik–Schnirelman, théorème de, 124
- Lusternik–Schnirelmann, 80
- May, 134
- Mayer–Vietoris, 66
 - homologie réduite, 76
 - théorème, 76
- Mayer–Vietoris
 - naturalité, 85
 - version réduite, 86
- Mayer–Vietoris, suite exacte de, 84
- Mayer–Vietoris, théorème de, 83
- Milnor, 134
- module injectif, 132
- module projectif, 132
- modèles acycliques, 98
- monodromie
 - action de, 47
 - exemple, 48
 - stabilisateur, 48
 - transitivité, 48
- morphisme connectant, 131
- morphisme d’augmentation, 64
- morphisme de complexes de chaînes, 62
- morphisme de connexion, 71
- morphisme de Hurewicz, 118
- morphisme induit, 62
 - groupe fondamental, 24
- morphismes homotopes, 64
- mot d’attachement, 89
- mot réduit, 35
- naturalité, 73
- Noether, Emmy, 8
- nombre d’enroulement, 28, 32
- nombre de Betti, 61
- non orientable, 89
- opérateur bord, 6, 60, 83
- opérateur cône, 75
- opérateur de connexion, 71
 - de Mayer–Vietoris, 84
 - description explicite, 84
- opérateur de prisme, 63
- opérations cohomologiques, 127
- orientabilité, 106–108
 - critère, 108
- orientation, 107
- orientation locale, 67, 107
- ouvert, 10
- paire excisive, 84
- peigne de Varsovie, 120
- peigne du topologiste, 12
- peigne hawaïen, 51
- petites chaînes, théorème des, 85
- physique mathématique, 128
- plan projectif réel, 39
- plongement, 11
- Poincaré, Henri, 8
- polygone fondamental, 88
- problème d’extension, 122
 - unicité, 124
- produit cap, 6

- produit cup, 6
- produit d'espaces
 - formule de Künneth, 89
- produit extérieur de formes, 103
- produit libre
 - de groupes, 34
 - exemples, 35
 - existence, 35
 - notation, 35
- produit libre amalgamé, 35
- produit tensoriel
 - de complexes de chaînes, 90
- produit tensoriel gradué, 101
- présentation
 - de groupe, 36
- pushout
 - de groupes, 35
- relation du prisme, 63
- relations cosimpliciales, 58
- relèvement
 - critère de, 49
 - des chemins, 46
 - des homotopies, 46
 - invariance homotopique, 47
- relèvement des chemins, 27
- relèvement des homotopies, 27
- représentabilité de la cohomologie, 127
- revêtement, 8, 27, 44
 - cyclique, 45
 - de l'espace projectif, 45
 - degré, 45
 - du cercle, 54
 - du tore, 45, 54
 - définition, 44
 - exponentiel, 45
 - intermédiaire, 54
 - morphisme de, 48
 - morphisme induit, 47
 - régulier
 - caractérisations, 53
 - régulier (normal), 53
 - universel, 51
 - et groupe fondamental, 53
 - exemples, 51
 - existence, 51
 - propriété universelle, 51
- revêtement double, 93
- revêtement universel, 7
- résolution projective, 132
- rétracte, 14
- rétracte par déformation, 14
- rétraction, 14
 - D^2 sur S^1 , 29
 - inexistence, 79
- Seifert–van Kampen, théorème de, 83
- semi-localement simplement connexe, 51
- Serre, 134
- shuffle map, 90
- simplement connexe, 26
 - critère, 31
- simplexe dégénéré, 59
- simplexe singulier, 6, 58
- simplexe standard, 6, 57
- sous-complexe, 17
- Spanier, 134
- spectre (topologie), 127
- spectre d'Eilenberg–MacLane, 127
- spectre de sphères, 127
- spectre de Thom, 127
- sphère, 6, 19, 106
 - S^2 , 92
 - cohomologie de la, 99
 - CW-structure, 15
 - homologie, 66
 - homologie de la, 86
- squelette, 15
- Stasheff, 134
- Steenrod, 134
- Steenrod, Norman, 8
- Stokes, théorème de, 103
- structure CW, 88
- subdivision barycentrique, 74, 85
 - opérateur, 74
- suite exacte, 131
 - courte, 131
 - de Mayer-Vietoris, 83
 - longue d'une paire, 83
- suite exacte courte
 - de complexes de chaînes, 71, 85
- suite exacte longue, 70
 - d'une fibration, 116
 - d'une paire (homotopie), 116
 - de la paire, 73
 - en homologie, 72, 131
 - homotopie, 116
- suite spectrale

- de Mayer–Vietoris, 132
- de Serre, 132
- suites spectrales, 132
- surface
 - de genre 2, 92
 - non orientable, 42
 - orientable
 - cohomologie, 102
 - homologie, 87
 - orientable de genre g , 39
- surface de genre g , 33
- surface de genre g , 87
- suspension, 19, 92
 - homologie, 76, 92
- suspension de Freudenthal, 121
- Switzer, 134
- terme de torsion de Künneth, 90
- théorie de jauge, 128
- théorie de l’obstruction, 122–129
- théorème
 - de Borsuk–Ulam, 55
 - de Van Kampen, 34, 36
 - version groupoïde, 37
- théorème d’excision, 74
- théorème d’obstruction principal, 123
- théorème de Borsuk–Ulam, 29
- théorème de de Rham, 103
- théorème de la boule chevelue, 80
- théorème de Tychonov, 13
- théorème des coefficients universels, 132
- théorème du point fixe, 78
- théorème du point fixe de Brouwer, 29
- théorème du serpent, 85
- théorème fondamental de l’algèbre, 30
- tom Dieck, 134
- topologie quotient, 11
- Tor, 132
- tore, 6, 106
 - n -dimensionnel, 90
 - cohomologie, 101
 - cohomologie du, 99
 - CW-structure, 16
 - groupe fondamental, 30
 - homologie du, 87
 - via Künneth, 90
- tore d’application, 93
- tore plein, 92
- tour de Postnikov, 128
- transformation de revêtement, 52
 - action libre, 52
 - et sous-groupes, 52
- Tu, 134
- type d’homotopie, 14
- van Kampen, 27
- variété
 - orientable, 107
- variété topologique, 106
 - de dimension n , 106
- voisinage trivialisé, 44
- wedge sum, 38
- Weibel, 134
- Whitehead, G. W., 134
- Whitehead, J.H.C., 15
- Whitehead, théorème de, 119
- équivalence d’homotopie, 14