

Théorie des Catégories

Notes de Cours

M1–Doctorat — 2025–2026

Yaë Ulrich Gaba

« J'ai pensé que la notion de catégorie était nécessaire pour axiomatiser les transformations naturelles. » — Saunders Mac Lane

Table des matières

Préface	7
Notations	9
1 Catégories, Foncteurs, Transformations Naturelles	11
1.1 Catégories	11
1.1.1 Définition d'une catégorie	11
1.1.2 Exemples fondamentaux	12
1.1.3 Petitesse et taille	13
1.1.4 Monomorphismes, épimorphismes, isomorphismes . . .	14
1.1.5 Objets initiaux, terminaux, nuls	15
1.2 Foncteurs	16
1.2.1 Définition et premiers exemples	16
1.2.2 Fidélité, plénitude, essentielle surjectivité	17
1.2.3 Composition de foncteurs	18
1.3 Transformations naturelles	18
1.3.1 Définition	18
1.3.2 Composition verticale et horizontale	19
1.3.3 Catégorie de foncteurs	20
1.4 Exercices	21
2 Dualité et Principe de Dualité	23
2.1 La catégorie opposée	23
2.2 Le principe de dualité	24
2.3 Exemples de dualisation	25
2.4 Dualités concrètes	25
2.4.1 Dualité de Pontryagin	25
2.4.2 Dualité de Stone	26
2.5 Le foncteur Hom	26
2.6 Exercices	28

3	Limites et Colimites	31
3.1	Diagrammes et catégories d'indices	32
3.2	Cônes et cocônes	32
3.3	Limites	34
3.4	Colimites	34
3.5	Produits et coproduits	35
3.6	Égaliseurs et coégaliseurs	36
3.7	Noyaux et conoyaux	37
3.8	Produits fibrés et sommes amalgamées	37
3.9	Théorème d'existence des limites finies	38
3.10	Hom préserve les limites	39
3.11	Limites filtrantes	40
3.12	Exercices	41
4	Adjonctions	43
4.1	Définition par bijection naturelle	43
4.2	Unité et counité	44
4.3	Identités triangulaires	45
4.4	Équivalence des définitions	45
4.5	Exemples fondamentaux	46
4.6	Adjointes et limites	48
4.7	Le théorème de Freyd (GAFT)	49
4.8	Adjonctions et catégories comma	51
4.9	Propriétés supplémentaires	51
4.10	Monades issues d'adjonctions	52
4.11	Exercices	52
5	Lemme de Yoneda et représentabilité	55
5.1	Préfaisceaux et foncteurs Hom	56
5.2	Le plongement de Yoneda	58
5.3	Le lemme de Yoneda	59
5.4	Corollaires du lemme de Yoneda	61
5.5	Foncteurs représentables	63
5.6	Tout préfaisceau est colimite de représentables	64
5.7	Exercices	65
6	Monades et algèbres	67
6.1	Définition et premiers exemples	68
6.2	Monades issues d'adjonctions	69
6.3	Algèbres d'Eilenberg–Moore	70
6.4	Catégorie de Kleisli	72

6.5	Théorème de monadicité de Beck	74
6.6	Applications : catégories algébriques	77
6.7	Exercices	79
7	Catégories abéliennes et suites exactes	81
7.1	Catégories pré-additives	82
7.2	Catégories additives et biproduits	82
7.3	Catégories abéliennes	84
7.4	Exemples de catégories abéliennes	86
7.5	Suites exactes	86
7.6	Foncteurs exacts	88
7.7	Le lemme du serpent	89
7.8	Le lemme des cinq	90
7.9	Objets injectifs et projectifs	92
7.10	Résolutions	94
7.11	Exercices	95
8	Catégories dérivées — Introduction	97
8.1	Complexes de chaînes	98
8.2	Homotopie de chaînes et catégorie homotopique	99
8.3	Quasi-isomorphismes et localisation	100
8.4	La catégorie dérivée	102
8.5	Le foncteur de décalage et le cône de mapping	103
8.6	Structure triangulée	104
8.7	Foncteurs dérivés	105
8.8	Suite exacte longue en cohomologie	107
8.9	Exercices	108
9	Catégories monoïdales et tressées	111
9.1	Catégories monoïdales	112
9.2	Exemples fondamentaux	113
9.3	Catégories monoïdales symétriques et tressées	114
9.4	Objets monoïdes	115
9.5	Catégories enrichies	115
9.6	Catégories fermées	116
9.7	Correspondance de Curry–Howard–Lambek	117
9.8	Exercices	118
10	Topos de Grothendieck — Introduction	119
10.1	Sites et topologies de Grothendieck	120
10.2	Préfaisceaux et faisceaux	121

10.3	Topos de Grothendieck	121
10.4	Topos élémentaire	122
10.5	Logique interne d'un topos	123
10.6	Morphismes géométriques	124
10.7	Théorème de Giraud	124
10.8	Exercices	125
11	Théorie des ∞-catégories — Aperçu	127
11.1	Motivation	127
11.2	Quasi-catégories	128
11.3	$(\infty, 1)$ -Catégories	130
11.4	Yoneda ∞ -catégorique	131
11.5	Adjonctions ∞ -catégoriques	131
11.6	Topos supérieurs	132
11.7	Exercices	133
A	Rappels d'algèbre et de topologie	135
A.1	Algèbre	135
A.2	Topologie	136

Préface

La théorie des catégories, née des travaux fondateurs d'Eilenberg et Mac Lane dans les années 1940, s'est imposée comme le langage unificateur des mathématiques modernes. Conçue initialement pour formaliser la notion de *transformation naturelle* en topologie algébrique, elle a trouvé des applications profondes dans pratiquement toutes les branches des mathématiques.

C'est avant tout dans l'œuvre monumentale d'Alexandre Grothendieck que la théorie des catégories a révélé sa pleine puissance. En refondant la géométrie algébrique sur des bases catégoriques — schémas, faisceaux, topos — Grothendieck a démontré qu'un cadre abstrait bien choisi permet non seulement d'unifier des théories existantes, mais de découvrir des structures invisibles dans les formulations classiques.

Ce cours s'adresse aux étudiants de Master souhaitant acquérir une maîtrise solide des concepts fondamentaux : catégories, foncteurs, transformations naturelles, limites, adjonctions, et au-delà. L'accent est mis sur la rigueur des définitions et la richesse des exemples, issus de l'algèbre, de la topologie et de l'analyse fonctionnelle.

Notations

Notation. *Tout au long de ce texte, on adopte les conventions suivantes :*

Set — *catégorie des ensembles et applications.*

Grp — *catégorie des groupes et homomorphismes.*

Ab — *catégorie des groupes abéliens et homomorphismes.*

Ring — *catégorie des anneaux (unitaires) et homomorphismes d'anneaux.*

Top — *catégorie des espaces topologiques et applications continues.*

Vect $_{\mathbb{K}}$ — *catégorie des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et applications linéaires.*

R -Mod — *catégorie des R -modules à gauche et homomorphismes de modules.*

Cat — *catégorie des petites catégories et foncteurs.*

$\mathcal{C}^{\text{op}}$ — *catégorie opposée de $\mathcal{C}$.*

$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ — *ensemble des morphismes de A vers B dans $\mathcal{C}$.*

id_A — *morphisme identité de l'objet A .*

$F \circ G$ — *composition de foncteurs.*

$\alpha : F \Rightarrow G$ — *transformation naturelle de F vers G .*

$[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ — *catégorie des foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$.*

Chapitre 1

Catégories, Foncteurs, Transformations Naturelles

1.1 Catégories

1.1.1 Définition d'une catégorie

Définition 1.1 (Catégorie). Une **catégorie** $\mathcal{C}$ est la donnée de :

- (i) une classe $\text{Ob}(\mathcal{C})$ dont les éléments sont appelés **objets** de $\mathcal{C}$;
- (ii) pour tout couple (A, B) d'objets, un ensemble $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ dont les éléments sont appelés **morphismes** (ou **flèches**) de A vers B ;
- (iii) pour tout triplet (A, B, C) d'objets, une loi de **composition**

$$\circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C), \quad (g, f) \longmapsto g \circ f;$$

- (iv) pour tout objet A , un morphisme $\text{id}_A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ appelé **identité** de A ;

satisfaisant les axiomes suivants :

- (C1) **Associativité** : pour tous morphismes $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, $h : C \rightarrow D$,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

- (C2) **Identité** : pour tout morphisme $f : A \rightarrow B$,

$$f \circ \text{id}_A = f = \text{id}_B \circ f.$$

On exige de plus que les ensembles $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ soient deux à deux disjoints pour des couples (A, B) distincts (condition de « typage » des morphismes).

Remarque. Si $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, on note aussi $f : A \rightarrow B$ ou $A \xrightarrow{f} B$. L'objet A est la **source** (ou domaine) de f et B est le **but** (ou codomaine).

1.1.2 Exemples fondamentaux

Exemple 1.2 (Catégories concrètes). (a) **Set** : objets = ensembles, morphismes = applications, composition usuelle.

(b) **Grp** : objets = groupes, morphismes = homomorphismes de groupes.

(c) **Ab** : objets = groupes abéliens, morphismes = homomorphismes de groupes.

(d) **Ring** : objets = anneaux unitaires, morphismes = homomorphismes d'anneaux (préservant l'unité).

(e) **Top** : objets = espaces topologiques, morphismes = applications continues.

- (f) **Vect $_{\mathbb{K}}$** : objets = $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, morphismes = applications $\mathbb{K}$ -linéaires.
- (g) **R-Mod** : objets = R -modules à gauche, morphismes = homomorphismes de R -modules.

Exemple 1.3 (Ensembles ordonnés comme catégories). Soit $(P, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné. On définit une catégorie $\mathcal{C}_P$ par :

- $\text{Ob}(\mathcal{C}_P) = P$;
- $\text{Hom}_{\mathcal{C}_P}(x, y) = \begin{cases} \{(x, y)\} & \text{si } x \leq y, \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$

La transitivité de $\leq$ assure l'existence de la composition, la réflexivité fournit les identités, et l'associativité est automatique (unicité des morphismes).

Exemple 1.4 (Monoïdes comme catégories). Tout monoïde $(M, \cdot, e)$ définit une catégorie $\mathcal{B}M$ à un seul objet $\star$:

$$\text{Hom}_{\mathcal{B}M}(\star, \star) = M, \quad g \circ f = g \cdot f, \quad \text{id}_{\star} = e.$$

Inversement, toute catégorie à un seul objet est (les données d'un) monoïde.

Exemple 1.5 (Groupes comme catégories). Un groupe G définit une catégorie $\mathcal{B}G$ à un seul objet où tous les morphismes sont inversibles. Réciproquement, une catégorie à un seul objet dont tous les morphismes sont inversibles est (les données d'un) groupe.

1.1.3 Petitesse et taille

Définition 1.6 (Petite catégorie, catégorie localement petite). (i)

Une catégorie $\mathcal{C}$ est **petite** si $\text{Ob}(\mathcal{C})$ est un ensemble (et non une classe propre).

- (ii) Une catégorie $\mathcal{C}$ est **localement petite** si pour tous objets A, B , l'ensemble $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ est un ensemble (au sens de la théorie des ensembles fixée).

Remarque. Les catégories **Set**, **Grp**, **Top**, etc. ne sont pas petites (la classe de tous les ensembles n'est pas un ensemble), mais elles sont localement petites. La catégorie des ensembles finis **FinSet** est un exemple de catégorie à la fois petite et localement petite.

1.1.4 Monomorphismes, épimorphismes, isomorphismes

Définition 1.7 (Monomorphisme). Un morphisme $f : A \rightarrow B$ dans $\mathcal{C}$ est un **monomorphisme** (ou **mono**) si pour tous morphismes $g, h : C \rightarrow A$,

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h.$$

On dit que f est annulable à gauche.

Définition 1.8 (Épimorphisme). Un morphisme $f : A \rightarrow B$ dans $\mathcal{C}$ est un **épimorphisme** (ou **épi**) si pour tous morphismes $g, h : B \rightarrow C$,

$$g \circ f = h \circ f \implies g = h.$$

On dit que f est annulable à droite.

Définition 1.9 (Isomorphisme). Un morphisme $f : A \rightarrow B$ est un **isomorphisme** s'il existe $g : B \rightarrow A$ tel que

$$g \circ f = \text{id}_A \quad \text{et} \quad f \circ g = \text{id}_B.$$

Un tel g est unique et noté f^{-1} . On écrit $A \cong B$ si un tel isomorphisme existe.

Proposition 1.10. Tout isomorphisme est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme.

Démonstration. Soit $f : A \rightarrow B$ un isomorphisme d'inverse f^{-1} . Si $f \circ g = f \circ h$, alors $g = f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ f \circ h = h$, donc f est mono. De même pour épi par composition à droite avec f^{-1} . $\square$

Remarque. La réciproque est fausse en général. Dans **Ring**, l'inclusion $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ est à la fois mono et épi, mais n'est pas un isomorphisme.

Proposition 1.11. (i) La composée de deux monomorphismes est un monomorphisme.
(ii) La composée de deux épimorphismes est un épimorphisme.
(iii) Si $g \circ f$ est mono, alors f est mono.
(iv) Si $g \circ f$ est épi, alors g est épi.

Démonstration. (i) Soient $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ monos. Si $(g \circ f) \circ h_1 = (g \circ f) \circ h_2$, alors $g \circ (f \circ h_1) = g \circ (f \circ h_2)$, d'où $f \circ h_1 = f \circ h_2$ (g mono), puis $h_1 = h_2$ (f mono).

(iii) Si $g \circ f$ est mono et $f \circ h_1 = f \circ h_2$, alors $(g \circ f) \circ h_1 = (g \circ f) \circ h_2$, d'où $h_1 = h_2$. Les points (ii) et (iv) sont duaux. $\square$

Lemme 1.12. L'inverse d'un isomorphisme est unique.

Démonstration. Si g et g' sont deux inverses de f , alors $g = g \circ \text{id}_B = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = \text{id}_A \circ g' = g'$. $\square$

1.1.5 Objets initiaux, terminaux, nuls

Définition 1.13 (Objet initial, terminal, nul). Soit $\mathcal{C}$ une catégorie.

- (i) Un objet I est **initial** si pour tout objet A , il existe un unique morphisme $I \rightarrow A$.
- (ii) Un objet T est **terminal** si pour tout objet A , il existe un unique morphisme $A \rightarrow T$.
- (iii) Un objet est **nul** (ou **zéro**) s'il est à la fois initial et terminal.

Proposition 1.14. Si I_1 et I_2 sont deux objets initiaux de $\mathcal{C}$, alors $I_1 \cong I_2$, et l'isomorphisme est unique. De même pour les objets terminaux.

Démonstration. Par la propriété universelle, il existe des morphismes uniques $f : I_1 \rightarrow I_2$ et $g : I_2 \rightarrow I_1$. Alors $g \circ f : I_1 \rightarrow I_1$ et $\text{id}_{I_1} : I_1 \rightarrow I_1$ sont deux morphismes de I_1 vers lui-même ; par unicité (car I_1 est initial), $g \circ f = \text{id}_{I_1}$. De même $f \circ g = \text{id}_{I_2}$. $\square$

Exemple 1.15 (Objets initiaux et terminaux). (a) Dans **Set** : $\emptyset$ est initial, tout singleton est terminal.

(b) Dans **Grp** et **Ab** : le groupe trivial $\{e\}$ est objet nul.

- (c) Dans **Ring** : $\mathbb{Z}$ est initial, l'anneau nul $\{0\}$ est terminal.
- (d) Dans **Top** : $\emptyset$ est initial, tout singleton (avec la topologie triviale) est terminal.
- (e) Dans **Vect** $_{\mathbb{K}}$: l'espace nul $\{0\}$ est objet nul.

1.2 Foncteurs

1.2.1 Définition et premiers exemples

Définition 1.16 (Foncteur (covariant)). Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un **foncteur** (covariant) $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est la donnée de :

- (i) une application $F : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$;
- (ii) pour tout couple (A, B) d'objets de $\mathcal{C}$, une application

$$F_{A,B} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$$

(on note simplement $F(f)$ pour $F_{A,B}(f)$) ;

satisfaisant :

- (F1) $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$ pour tout objet A de $\mathcal{C}$;
- (F2) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ pour tous morphismes composables f, g dans $\mathcal{C}$.

Définition 1.17 (Foncteur contravariant). Un **foncteur contravariant** $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est un foncteur $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$, c'est-à-dire qu'il renverse les flèches :

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g).$$

Exemple 1.18 (Foncteurs classiques). (a) **Foncteur d'oubli** $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$: à un groupe G associe l'ensemble sous-jacent, à un homomorphisme l'application sous-jacente.

(b) **Foncteur libre** $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Grp}$: à un ensemble X associe le groupe libre $F(X)$.

(c) **Foncteur abélianisation** $\text{ab} : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Ab} : G \mapsto G/[G, G]$.

(d) **Foncteur espace dual** $(-)^* : \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{op}} : V \mapsto V^* = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$, contravariant.

- (e) **Foncteur** $\pi_1 : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$, le groupe fondamental.
- (f) **Foncteur identité** $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} : A \mapsto A, f \mapsto f$.
- (g) **Foncteur constant** $\Delta_{\mathcal{D}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D} : \text{tout objet sur } D, \text{ tout morphisme sur } \mathrm{id}_D$.

Proposition 1.19. *Tout foncteur préserve les isomorphismes : si f est un isomorphisme dans $\mathcal{C}$, alors $F(f)$ est un isomorphisme dans $\mathcal{D}$, d'inverse $F(f^{-1})$.*

Démonstration. $F(f) \circ F(f^{-1}) = F(f \circ f^{-1}) = F(\mathrm{id}_B) = \mathrm{id}_{F(B)}$ et de même pour l'autre composition. $\square$

1.2.2 Fidélité, plénitude, essentielle surjectivité

Définition 1.20 (Foncteur fidèle, plein, pleinement fidèle). *Un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est :*

- (i) **fidèle** si pour tous $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, l'application $F_{A,B} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ est injective ;
- (ii) **plein** si chaque $F_{A,B}$ est surjective ;
- (iii) **pleinement fidèle** s'il est à la fois plein et fidèle (chaque $F_{A,B}$ est bijective).

Définition 1.21 (Essentiellement surjectif). *Un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est **essentiellement surjectif** si pour tout objet $D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, il existe $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ tel que $F(C) \cong D$.*

Exemple 1.22. (a) *Le foncteur d'oubli $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ est fidèle mais pas plein.*

(b) *L'inclusion $\mathbf{Ab} \hookrightarrow \mathbf{Grp}$ est pleinement fidèle.*

(c) *Le foncteur $\mathrm{ab} : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Ab}$ est plein et essentiellement surjectif (mais pas fidèle).*

Proposition 1.23. *Un foncteur fidèle reflète les monomorphismes : si F est fidèle et $F(f)$ est mono, alors f est mono.*

Démonstration. Si $f \circ g = f \circ h$, alors $F(f) \circ F(g) = F(f \circ g) = F(f \circ h) = F(f) \circ F(h)$, donc $F(g) = F(h)$ car $F(f)$ est mono. Par fidélité, $g = h$. $\square$

1.2.3 Composition de foncteurs

Proposition 1.24. *Si $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ sont des foncteurs, alors $G \circ F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ défini par $(G \circ F)(A) = G(F(A))$ et $(G \circ F)(f) = G(F(f))$ est un foncteur.*

Démonstration. $(G \circ F)(\text{id}_A) = G(F(\text{id}_A)) = G(\text{id}_{F(A)}) = \text{id}_{G(F(A))}$ et $(G \circ F)(g \circ f) = G(F(g \circ f)) = G(F(g) \circ F(f)) = G(F(g)) \circ G(F(f))$. $\square$

1.3 Transformations naturelles

1.3.1 Définition

Définition 1.25 (Transformation naturelle). *Soient $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ deux foncteurs. Une **transformation naturelle** $\alpha : F \Rightarrow G$ est la donnée, pour chaque objet A de $\mathcal{C}$, d'un morphisme*

$$\alpha_A : F(A) \longrightarrow G(A)$$

*dans $\mathcal{D}$, appelé **composante** de α en A , tel que pour tout morphisme $f : A \rightarrow B$ dans $\mathcal{C}$, le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\alpha_A} & G(A) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(B) & \xrightarrow{\alpha_B} & G(B) \end{array}$$

Autrement dit : $\alpha_B \circ F(f) = G(f) \circ \alpha_A$ pour tout $f : A \rightarrow B$.

Définition 1.26 (Isomorphisme naturel). *Une transformation naturelle $\alpha : F \Rightarrow G$ est un **isomorphisme naturel** si chaque composante α_A est un isomorphisme dans $\mathcal{D}$. On écrit alors $F \cong G$.*

Exemple 1.27 (Double dual). *Soit $\mathbb{K}$ un corps. Le morphisme canonique $\eta_V : V \rightarrow V^{**}$, $v \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(v))$, définit une transformation naturelle $\eta : \text{Id}_{\text{Vect}_{\mathbb{K}}} \Rightarrow (-)^{**}$.*

*Pour $f : V \rightarrow W$ linéaire, la naturalité revient à $f^{**} \circ \eta_V = \eta_W \circ f$, ce qui se vérifie : pour $v \in V$ et $\psi \in W^*$,*

$$(f^{**}(\eta_V(v)))(\psi) = \eta_V(v)(\psi \circ f) = (\psi \circ f)(v) = \psi(f(v)) = \eta_W(f(v))(\psi).$$

En dimension finie, η est un isomorphisme naturel.

Exemple 1.28 (Déterminant). *Le déterminant $\det : \mathbf{GL}_n \Rightarrow (-)^\times$ est une transformation naturelle entre foncteurs $\mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Grp}$, où $\mathbf{GL}_n(R)$ est le groupe des matrices inversibles et $(-)^\times$ associe le groupe des unités. La naturalité exprime que pour tout homomorphisme d'anneaux $\varphi : R \rightarrow S$, on a $\det \circ \mathbf{GL}_n(\varphi) = \varphi^\times \circ \det$.*

Exemple 1.29 (Abélianisation). *La projection canonique $\pi_G : G \rightarrow G/[G, G]$ définit une transformation naturelle $\pi : U \Rightarrow U \circ \text{ab}$ (ici $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ est l'oubli), ou plus précisément $\pi : \text{Id}_{\mathbf{Grp}} \Rightarrow \iota \circ \text{ab}$ où $\iota : \mathbf{Ab} \hookrightarrow \mathbf{Grp}$.*

1.3.2 Composition verticale et horizontale

Définition 1.30 (Composition verticale). *Soient $\alpha : F \Rightarrow G$ et $\beta : G \Rightarrow H$ des transformations naturelles entre foncteurs $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$. La **composition verticale** $\beta \circ \alpha : F \Rightarrow H$ est définie par*

$$(\beta \circ \alpha)_A = \beta_A \circ \alpha_A.$$

$$\begin{array}{ccccc} & & (\beta \circ \alpha)_A & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ F(A) & \xrightarrow{\alpha_A} & G(A) & \xrightarrow{\beta_A} & H(A) \end{array}$$

Proposition 1.31. *La composition verticale $\beta \circ \alpha$ est bien une transformation naturelle.*

Démonstration. Pour $f : A \rightarrow B$ dans $\mathcal{C}$: $(\beta \circ \alpha)_B \circ F(f) = \beta_B \circ \alpha_B \circ F(f) = \beta_B \circ G(f) \circ \alpha_A = H(f) \circ \beta_A \circ \alpha_A = H(f) \circ (\beta \circ \alpha)_A$. $\square$

Définition 1.32 (Composition horizontale). *Soient $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ et $H, K : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ des foncteurs, avec $\alpha : F \Rightarrow G$ et $\beta : H \Rightarrow K$. La **composition horizontale** $\beta * \alpha : H \circ F \Rightarrow K \circ G$ est définie par*

$$(\beta * \alpha)_A = \beta_{G(A)} \circ H(\alpha_A) = K(\alpha_A) \circ \beta_{F(A)}.$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} & \xrightarrow{H} & \mathcal{E} \\ & \Downarrow \alpha & & \Downarrow \beta & \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{G} & \mathcal{D} & \xrightarrow{K} & \mathcal{E} \end{array}$$

Proposition 1.33 (Loi d'échange). Soient $\alpha : F \Rightarrow G$, $\alpha' : G \Rightarrow H$ (foncteurs $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$) et $\beta : J \Rightarrow K$, $\beta' : K \Rightarrow L$ (foncteurs $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$). Alors

$$(\beta' \circ \beta) * (\alpha' \circ \alpha) = (\beta' * \alpha') \circ (\beta * \alpha).$$

Démonstration. Vérification composante par composante en utilisant la naturalité de β et β' . $\square$

1.3.3 Catégorie de foncteurs

Définition 1.34 (Catégorie de foncteurs). Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories (avec $\mathcal{C}$ petite). La **catégorie de foncteurs** $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ (aussi notée $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ ou $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$) est définie par :

- les objets sont les foncteurs $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$;
- les morphismes sont les transformations naturelles $\alpha : F \Rightarrow G$;
- la composition est la composition verticale ;
- l'identité de F est la transformation naturelle id_F définie par $(\text{id}_F)_A = \text{id}_{F(A)}$.

Remarque. L'hypothèse « $\mathcal{C}$ petite » est nécessaire pour garantir que les transformations naturelles entre deux foncteurs forment un ensemble (et non une classe propre).

Proposition 1.35. Un morphisme $\alpha : F \rightarrow G$ dans $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ est un isomorphisme si et seulement si α est un isomorphisme naturel (i.e. chaque α_A est un isomorphisme dans $\mathcal{D}$).

Démonstration. Si α est un isomorphisme dans $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$, il existe $\beta : G \Rightarrow F$ avec $\beta \circ \alpha = \text{id}_F$ et $\alpha \circ \beta = \text{id}_G$. En composantes : $\beta_A \circ \alpha_A = \text{id}_{F(A)}$ et $\alpha_A \circ \beta_A = \text{id}_{G(A)}$, donc chaque α_A est un isomorphisme.

Réciproquement, si chaque α_A est un isomorphisme, on pose $\beta_A = \alpha_A^{-1}$. La naturalité de β découle de celle de α : de $\alpha_B \circ F(f) = G(f) \circ \alpha_A$, on tire $F(f) = \alpha_B^{-1} \circ G(f) \circ \alpha_A$, d'où $\beta_B \circ G(f) = F(f) \circ \beta_A$. $\square$

Exemple 1.36 (Préfaisceaux). Si $\mathcal{C}$ est une petite catégorie, un **préfaisceau** (d'ensembles) sur $\mathcal{C}$ est un foncteur $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$. La catégorie des préfaisceaux est $[\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$, souvent notée $\widehat{\mathcal{C}}$.

1.4 Exercices

Exercice 1.1 (Catégorie des flèches). Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Construire la **catégorie des flèches** $\mathcal{C}^{\rightarrow}$ dont les objets sont les morphismes de $\mathcal{C}$ et dont un morphisme de $f : A \rightarrow B$ vers $g : C \rightarrow D$ est un couple (h, k) tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & C \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{k} & D \end{array}$$

Montrer que $\mathcal{C}^{\rightarrow} \cong [\mathbf{2}, \mathcal{C}]$ où $\mathbf{2}$ est la catégorie $\{0 \rightarrow 1\}$.

Exercice 1.2 (Sections et rétractions). Un morphisme $f : A \rightarrow B$ est une **section** (ou **mono scindé**) s'il existe $g : B \rightarrow A$ tel que $g \circ f = \text{id}_A$. Il est une **rétraction** (ou **épi scindé**) s'il existe $h : B \rightarrow A$ tel que $f \circ h = \text{id}_B$.

- (a) Montrer que toute section est un monomorphisme et toute rétraction est un épimorphisme.
- (b) Donner un monomorphisme dans $\mathbf{Set}$ qui n'est pas une section.
- (c) Montrer que dans $\mathbf{Set}$, tout épimorphisme est une rétraction (utiliser l'axiome du choix).

Exercice 1.3 (Foncteur puissance). Montrer que l'application $\mathcal{P} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ qui à un ensemble X associe $\mathcal{P}(X)$ (ensemble des parties) peut être munie d'une structure de foncteur de deux façons :

- (a) Covariant : image directe $f_*(S) = f(S)$.
- (b) Contravariant : image réciproque $f^*(S) = f^{-1}(S)$.

Vérifier les axiomes de foncteur dans chaque cas.

Exercice 1.4 (Naturalité du centre). *Le centre $Z(G) = \{g \in G \mid \forall h \in G, gh = hg\}$ définit-il un foncteur $Z : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Ab}$? Si oui, l'inclusion $Z(G) \hookrightarrow G$ est-elle une transformation naturelle ? Justifier.*

Exercice 1.5 (Équivalence mono/injectif dans Set). *Montrer que dans Set, un morphisme est un monomorphisme si et seulement s'il est injectif, et un épimorphisme si et seulement s'il est surjectif.*

Exercice 1.6 (Catégories de tranches). *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et A un objet. Construire la **catégorie de tranches** $\mathcal{C}/A$ (ou comma category over A) dont les objets sont les morphismes $f : X \rightarrow A$ et les morphismes de $(f : X \rightarrow A)$ vers $(g : Y \rightarrow A)$ sont les morphismes $h : X \rightarrow Y$ tels que $g \circ h = f$. Vérifier les axiomes de catégorie. Décrire $\mathbf{Set}/\{0, 1\}$.*

Exercice 1.7 (Endomorphismes de l'identité). *Soit $\mathcal{C} = \mathbf{Ab}$. Montrer que $\mathrm{End}(\mathrm{Id}_{\mathbf{Ab}}) \cong \mathbb{Z}$ (l'anneau des endomorphismes de la transformation naturelle identité est isomorphe à $\mathbb{Z}$).*

Indication : une transformation naturelle $\alpha : \mathrm{Id}_{\mathbf{Ab}} \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathbf{Ab}}$ est déterminée par $\alpha_{\mathbb{Z}}(1)$.

Exercice 1.8 (Foncteur nerf). *Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie. Le **nerf** $N(\mathcal{C})$ est l'ensemble simplicial défini par $N(\mathcal{C})_n = \{\text{chaînes de } n \text{ morphismes composables } A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} A_n\}$.*

(a) *Décrire $N(\mathcal{C})_0$, $N(\mathcal{C})_1$ et $N(\mathcal{C})_2$.*

(b) *Montrer que $\mathcal{C} \mapsto N(\mathcal{C})$ définit un foncteur $N : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{sSet}$.*

Chapitre 2

Dualité et Principe de Dualité

2.1 La catégorie opposée

Définition 2.1 (Catégorie opposée). Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. La **catégorie opposée** (ou **duale**) $\mathcal{C}^{\text{op}}$ est définie par :

- (i) $\text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}}) = \text{Ob}(\mathcal{C})$;
- (ii) $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$;
- (iii) la composition dans $\mathcal{C}^{\text{op}}$: si $f^{\text{op}} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(A, B)$ et $g^{\text{op}} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(B, C)$ (correspondant à $f : B \rightarrow A$ et $g : C \rightarrow B$ dans $\mathcal{C}$), alors $g^{\text{op}} \circ_{\text{op}} f^{\text{op}} = (f \circ g)^{\text{op}}$;
- (iv) $\text{id}_A^{\text{op}} = (\text{id}_A)^{\text{op}}$.

Proposition 2.2. Pour toute catégorie $\mathcal{C}$, on a $(\mathcal{C}^{\text{op}})^{\text{op}} = \mathcal{C}$.

Démonstration. Les objets sont identiques. Les morphismes : $\text{Hom}_{(\mathcal{C}^{\text{op}})^{\text{op}}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(B, A) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$. La composition est restaurée par double renversement. $\square$

- Exemple 2.3.**
- (a) Si $(P, \leq)$ est un ensemble ordonné, $\mathcal{C}_P^{\text{op}} = \mathcal{C}_{(P, \geq)}$.
 - (b) Si G est un groupe vu comme catégorie à un objet, $(\mathcal{B}G)^{\text{op}} = \mathcal{B}G^{\text{op}}$ où G^{op} est le groupe opposé (même ensemble, multiplication $a \cdot^{\text{op}} b = b \cdot a$). Pour les groupes abéliens, $G^{\text{op}} \cong G$.
 - (c) $\text{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{op}}$ n'est pas « concrètement » la catégorie des espaces vectoriels, mais elle lui est équivalente (via le dual).

2.2 Le principe de dualité

Théorème 2.4 (Principe de dualité). *Soit Φ un énoncé formulé dans le langage de la théorie des catégories (en termes d'objets, morphismes, composition et identités). Soit Φ^{op} l'énoncé obtenu en renversant toutes les flèches (en échangeant source et but, en inversant l'ordre de composition). Alors :*

Φ est vrai dans toute catégorie $\iff \Phi^{\text{op}}$ est vrai dans toute catégorie.

Plus précisément, Φ est vrai dans $\mathcal{C}$ si et seulement si Φ^{op} est vrai dans $\mathcal{C}^{\text{op}}$.

Démonstration. Si Φ est vrai dans toute catégorie, alors en particulier Φ est vrai dans $\mathcal{C}^{\text{op}}$ pour toute catégorie $\mathcal{C}$. Or l'énoncé « Φ dans $\mathcal{C}^{\text{op}}$ » est exactement « Φ^{op} dans $\mathcal{C}$ » (car passer à l'opposée renverse les flèches). Donc Φ^{op} est vrai dans toute catégorie $\mathcal{C}$. $\square$

Remarque. *Le principe de dualité est un méta-théorème : il porte sur les énoncés de la théorie et non sur des objets mathématiques particuliers. Son utilité pratique est considérable : tout théorème catégorique donne gratuitement un second théorème par dualisation.*

Corollaire 2.5. *Voici un dictionnaire des concepts duaux :*

<i>Concept</i>	<i>Concept dual</i>
<i>monomorphisme</i>	<i>épimorphisme</i>
<i>objet initial</i>	<i>objet terminal</i>
<i>section (mono scindé)</i>	<i>rétraction (épi scindé)</i>
<i>noyau</i>	<i>conoyau</i>
<i>produit</i>	<i>coproduit</i>
<i>limite</i>	<i>colimite</i>
<i>égaliseur</i>	<i>coégaliseur</i>

2.3 Exemples de dualisation

Exemple 2.6 (Dualisation des propositions du chapitre 1). (a) « La composée de monomorphismes est un monomorphisme » dualise en « la composée d'épimorphismes est un épimorphisme ».

(b) « Si $g \circ f$ est mono alors f est mono » dualise en « si $g \circ f$ est épi alors g est épi ».

(c) « L'objet initial est unique à isomorphisme unique près » dualise en la même affirmation pour l'objet terminal.

Proposition 2.7. Un foncteur contravariant $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est la même chose qu'un foncteur (covariant) $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$, ou de façon équivalente un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}^{\text{op}}$.

Démonstration. La donnée d'une application $F : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(B), F(A))$ vérifiant $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ est exactement la donnée d'une application $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(B, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(B), F(A))$ vérifiant la functorialité covariante (en utilisant la composition dans $\mathcal{C}^{\text{op}}$). $\square$

2.4 Dualités concrètes

Les dualités abstraites de la théorie des catégories se manifestent dans des théorèmes classiques profonds.

2.4.1 Dualité de Pontryagin

Théorème 2.8 (Pontryagin). Soit **LCA** la catégorie des groupes abéliens localement compacts et homomorphismes continus. Le foncteur **dual de Pontryagin**

$$\widehat{(-)} : \mathbf{LCA} \longrightarrow \mathbf{LCA}^{\text{op}}, \quad G \longmapsto \widehat{G} = \text{Hom}_{\text{cont}}(G, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$$

(muni de la topologie compacte-ouverte) définit une équivalence de catégories $\mathbf{LCA} \simeq \mathbf{LCA}^{\text{op}}$.

En particulier, la transformation naturelle canonique $G \rightarrow \widehat{\widehat{G}}$ est un isomorphisme naturel.

Remarque. La dualité de Pontryagin échange :

- groupes compacts $\longleftrightarrow$ groupes discrets ;
- $\mathbb{Z} \longleftrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (le cercle) ;
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longleftrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (auto-dual).

2.4.2 Dualité de Stone

Théorème 2.9 (Stone). Il existe une équivalence de catégories

$$\mathbf{Bool}^{\text{op}} \simeq \mathbf{Stone}$$

où **Bool** est la catégorie des algèbres de Boole et **Stone** est la catégorie des espaces de Stone (espaces topologiques compacts totalement discontinus).

Le foncteur $\mathbf{Bool} \rightarrow \mathbf{Stone}^{\text{op}}$ associe à une algèbre de Boole B son espace de spectres $\text{Spec}(B)$ (ensemble des ultrafiltres muni de la topologie de Zariski). Le foncteur inverse associe à un espace de Stone X l'algèbre $\text{Clop}(X)$ de ses parties clopen (ouvertes et fermées).

Remarque. La dualité de Stone peut être vue comme un précurseur de la dualité de Gelfand (entre C^* -algèbres commutatives et espaces compacts) et plus généralement des dualités en géométrie algébrique (le foncteur Spec).

2.5 Le foncteur Hom

Définition 2.10 (Foncteur Hom covariant). Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite et $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Le **foncteur Hom covariant** est

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

défini par :

- sur les objets : $B \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$;
- sur les morphismes : à $f : B \rightarrow C$, on associe la post-composition

$$f_* = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, f) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C), \quad g \mapsto f \circ g.$$

Proposition 2.11. $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -)$ est bien un foncteur.

Démonstration. $(\text{id}_B)_*(g) = \text{id}_B \circ g = g$, donc $(\text{id}_B)_* = \text{id}_{\text{Hom}(A, B)}$. Pour la composition : $(f' \circ f)_*(g) = (f' \circ f) \circ g = f' \circ (f \circ g) = f'_*(f_*(g))$. $\square$

Définition 2.12 (Foncteur Hom contravariant). Soit $B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Le **foncteur Hom contravariant** est

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, B) : \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

défini par :

- sur les objets : $A \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$;
- sur les morphismes : à $f : A' \rightarrow A$ dans $\mathcal{C}$, on associe la pré-composition

$$f^* = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, B) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A', B), \quad g \mapsto g \circ f.$$

Définition 2.13 (Bifoncteur Hom). Le **bifoncteur Hom** est le foncteur

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

défini par $(A, B) \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ et $(f, g) \mapsto (h \mapsto g \circ h \circ f)$ pour $f : A' \rightarrow A$ et $g : B \rightarrow B'$.

Proposition 2.14. $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -)$ est bien un foncteur $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$.

Démonstration. Il faut vérifier les deux axiomes. Pour l'identité : $\text{Hom}(\text{id}_A, \text{id}_B)(h) = \text{id}_B \circ h \circ \text{id}_A = h$. Pour la composition : si (f_1, g_1) et (f_2, g_2) sont composables, alors

$$\begin{aligned} \text{Hom}(f_1 \circ f_2, g_2 \circ g_1)(h) &= (g_2 \circ g_1) \circ h \circ (f_1 \circ f_2) \\ &= g_2 \circ (g_1 \circ h \circ f_1) \circ f_2 \\ &= \text{Hom}(f_2, g_2)(\text{Hom}(f_1, g_1)(h)). \end{aligned}$$

(Attention à l'ordre dans $\mathcal{C}^{\text{op}}$: la composition de (f_2^{op}, g_2) après (f_1^{op}, g_1) en tant que morphisme de $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C}$ donne $((f_1 \circ f_2)^{\text{op}}, g_2 \circ g_1)$.) $\square$

Proposition 2.15. Soit $\mathcal{C}$ localement petite et $f : A \rightarrow B$ un morphisme.

- (i) f est mono $\iff f_* : \text{Hom}(\mathcal{C}, A) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{C}, B)$ est injective pour tout objet C .

(ii) f est épi $\iff f^* : \text{Hom}(B, C) \rightarrow \text{Hom}(A, C)$ est injective pour tout objet C .

Démonstration. Ce sont exactement les reformulations des définitions de mono et épi en termes des applications induites. $\square$

Proposition 2.16. *Un morphisme $f : A \rightarrow B$ dans $\mathcal{C}$ induit une transformation naturelle*

$$f^* : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, -) \implies \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -)$$

définie par $f_C^(g) = g \circ f$ pour $g : B \rightarrow C$.*

Démonstration. Pour $h : C \rightarrow D$, on vérifie la naturalité : $h_* \circ f_C^* = f_D^* \circ h_*$. En effet, pour $g : B \rightarrow C$: $(h_* \circ f_C^*)(g) = h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = f_D^*(h \circ g) = (f_D^* \circ h_*)(g)$. $\square$

2.6 Exercices

Exercice 2.1 (Catégorie opposée de la catégorie opposée). *Vérifier en détail que $(\mathcal{C}^{\text{op}})^{\text{op}} = \mathcal{C}$ (égalité et non simple isomorphisme).*

Exercice 2.2 (Dual d'un foncteur). *Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur. Montrer que F induit un foncteur $F^{\text{op}} : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}^{\text{op}}$ défini par $F^{\text{op}}(A) = F(A)$ et $F^{\text{op}}(f^{\text{op}}) = (F(f))^{\text{op}}$. Vérifier les axiomes.*

Exercice 2.3 (Pleinement fidèle et isomorphismes). *Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur pleinement fidèle. Montrer que F reflète les isomorphismes : si $F(f)$ est un isomorphisme dans $\mathcal{D}$, alors f est un isomorphisme dans $\mathcal{C}$.*

Exercice 2.4 (Caractérisation des mono dans **Top**). (a) *Montrer que dans **Top**, les monomorphismes sont exactement les applications continues injectives.*

(b) *Montrer que dans **Top**, les épimorphismes sont exactement les applications continues surjectives.*

(c) *En déduire qu'il existe dans **Top** des morphismes qui sont à la fois mono et épi sans être des isomorphismes. Donner un exemple explicite.*

Exercice 2.5 (Hom et produit). Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite possédant des produits binaires. Montrer qu'il existe un isomorphisme naturel (en $\mathcal{C}$)

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A \times B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, B).$$

Exercice 2.6 (Dualité de Gelfand – énoncé catégorique). Soit $\mathbf{CHaus}$ la catégorie des espaces compacts de Hausdorff et $\mathbf{cC^*Alg}$ la catégorie des C^* -algèbres commutatives unitaires.

- (a) Décrire le foncteur $C : \mathbf{CHaus} \rightarrow \mathbf{cC^*Alg}^{\mathrm{op}}$ qui à X associe $C(X, \mathbb{C})$.
- (b) Énoncer le théorème de Gelfand–Naimark en termes d'équivalence de catégories.
- (c) En quoi cette dualité généralise-t-elle la dualité de Stone ?

Exercice 2.7 (Foncteur Hom interne). Dans $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$, montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ est lui-même un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, de sorte que le bifoncteur Hom se factorise par $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ plutôt que par $\mathbf{Set}$. On dit que $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ est *enrichie sur elle-même*. Est-ce le cas pour $\mathbf{Grp}$?

Exercice 2.8 (Dualité dans les ensembles ordonnés). Soit $(P, \leq)$ un ensemble ordonné fini.

- (a) Montrer que les éléments minimaux de P correspondent aux objets initiaux de $\mathcal{C}_P$, et les éléments maximaux aux objets terminaux.
- (b) En déduire que la catégorie $\mathcal{C}_P$ admet un objet initial si et seulement si P a un plus petit élément.
- (c) Appliquer le principe de dualité pour obtenir le résultat analogue pour les objets terminaux.

Exercice 2.9 (Plongement de Yoneda – première rencontre). Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite. On définit le **plongement de Yoneda**

$$y : \mathcal{C} \longrightarrow [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}], \quad A \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A).$$

- (a) Montrer que y est un foncteur (à un morphisme $f : A \rightarrow B$, associer la transformation naturelle $f_* : \mathrm{Hom}(-, A) \Rightarrow \mathrm{Hom}(-, B)$).
- (b) Montrer que y est pleinement fidèle. (C'est une partie du **lemme de Yoneda**, qui sera traité en détail au chapitre suivant.)

Chapitre 3

Limites et Colimites

Contents

1.1	Catégories	11
1.1.1	Définition d'une catégorie	11
1.1.2	Exemples fondamentaux	12
1.1.3	Petitesse et taille	13
1.1.4	Monomorphismes, épimorphismes, isomorphismes .	14
1.1.5	Objets initiaux, terminaux, nuls	15
1.2	Foncteurs	16
1.2.1	Définition et premiers exemples	16
1.2.2	Fidélité, plénitude, essentielle surjectivité	17
1.2.3	Composition de foncteurs	18
1.3	Transformations naturelles	18
1.3.1	Définition	18
1.3.2	Composition verticale et horizontale	19
1.3.3	Catégorie de foncteurs	20
1.4	Exercices	21

Les limites et colimites sont les généralisations catégoriques de constructions omniprésentes en mathématiques : produits, intersections, noyaux, images réciproques, limites projectives et inductives. Dans ce chapitre, nous développons la théorie de façon systématique, en partant du langage des diagrammes et des cônes, puis en énonçant la propriété universelle qui définit une limite. Nous démontrons le théorème fondamental d'existence — les produits et égaliseurs suffisent pour construire toutes les limites finies — et nous établissons la relation cruciale entre limites et foncteurs représentables.

3.1 Diagrammes et catégories d'indices

Définition 3.1 (Diagramme). Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $\mathcal{J}$ une petite catégorie (la catégorie d'indices ou catégorie de forme). Un **diagramme de forme $\mathcal{J}$ dans $\mathcal{C}$** est un foncteur

$$F: \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{C}.$$

On note F_j l'image d'un objet $j \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ et $F_\alpha: F_j \rightarrow F_k$ l'image d'un morphisme $\alpha: j \rightarrow k$ dans $\mathcal{J}$.

Exemple 3.2. Les petites catégories suivantes apparaissent constamment comme catégories d'indices.

- (i) **Catégories discrètes.** Soit $\mathcal{J}$ une catégorie discrète sur un ensemble I (objets I , seuls morphismes : les identités). Un diagramme $F: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ est simplement une famille d'objets $\{F_i\}_{i \in I}$.
- (ii) **La paire parallèle.** $\mathcal{J} = (\bullet \rightrightarrows \bullet)$, i.e. deux objets $0, 1$ avec deux morphismes non triviaux $\alpha, \beta: 0 \rightarrow 1$. Un diagramme de cette forme est une paire de morphismes parallèles $f, g: A \rightarrow B$ dans $\mathcal{C}$.
- (iii) **Le span.** $\mathcal{J} = (\bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet)$. Un diagramme est un span $A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} B$.
- (iv) **Le cospan.** $\mathcal{J} = (\bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet)$. Un diagramme est un cospan $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$.

Remarque. Un diagramme n'est rien d'autre qu'un foncteur ; le terme « diagramme » signale simplement que l'on s'apprête à en prendre la limite ou la colimite.

3.2 Cônes et cocônes

Définition 3.3 (Cône). Soit $F: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ un diagramme. Un **cône sur F** est une paire $(N, \{\pi_j\}_{j \in \mathcal{J}})$ formée d'un objet $N \in \mathcal{C}$ (le sommet du cône) et d'une famille de morphismes $\pi_j: N \rightarrow F_j$ (les jambes), un pour chaque objet $j \in \mathcal{J}$, tels que pour tout morphisme $\alpha: j \rightarrow k$ dans $\mathcal{J}$ le triangle

suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & N & \\ \pi_j \swarrow & & \searrow \pi_k \\ F_j & \xrightarrow{F_\alpha} & F_k \end{array}$$

Autrement dit, $F_\alpha \circ \pi_j = \pi_k$ pour tout $\alpha: j \rightarrow k$.

Définition 3.4 (Morphisme de cônes). Soient (N, π_j) et (N', π'_j) deux cônes sur F . Un **morphisme de cônes** de (N, π_j) vers (N', π'_j) est un morphisme $u: N \rightarrow N'$ dans $\mathcal{C}$ tel que $\pi'_j \circ u = \pi_j$ pour tout $j \in \mathcal{J}$:

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{u} & N' \\ & \searrow \pi_j & \swarrow \pi'_j \\ & F_j & \end{array}$$

Les cônes sur F et leurs morphismes forment une catégorie, notée $\text{Cone}(F)$.

Définition 3.5 (Cocône). Dualement, un **cocône sous** F est une paire $(N, \{\iota_j\}_{j \in \mathcal{J}})$ où $\iota_j: F_j \rightarrow N$ et $\iota_k \circ F_\alpha = \iota_j$ pour tout $\alpha: j \rightarrow k$:

$$\begin{array}{ccc} F_j & \xrightarrow{F_\alpha} & F_k \\ & \searrow \iota_j & \swarrow \iota_k \\ & N & \end{array}$$

Les cocônes sous F forment une catégorie $\text{Cocone}(F)$.

Remarque. Soit $\Delta_N: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ le foncteur constant envoyant tout objet sur N et tout morphisme sur id_N . Alors un cône (N, π_j) sur F est exactement une transformation naturelle $\pi: \Delta_N \Rightarrow F$. Dualement, un cocône est une transformation naturelle $\iota: F \Rightarrow \Delta_N$.

3.3 Limites

Définition 3.6 (Limite). Soit $F: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ un diagramme. Une **limite** de F est un cône $(\varprojlim F, \{\pi_j\}_j)$ qui est terminal dans $\mathbf{Cone}(F)$. Explicitement :

- (a) $(\varprojlim F, \pi_j)$ est un cône sur F ;
- (b) pour tout cône (N, ψ_j) sur F , il existe un unique morphisme $u: N \rightarrow \varprojlim F$ tel que $\pi_j \circ u = \psi_j$ pour tout $j \in \mathcal{J}$:

$$\begin{array}{ccc}
 N & \xrightarrow{\exists! u} & \varprojlim F \\
 \searrow \psi_j & & \swarrow \pi_j \\
 & F_j &
 \end{array}$$

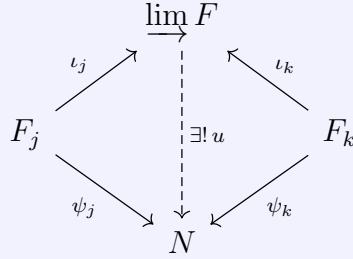
On appelle les π_j les projections canoniques.

Proposition 3.7. Si elle existe, la limite est unique à unique isomorphisme près.

Démonstration. Soient (L, π_j) et (L', π'_j) deux limites de F . Par la propriété universelle de L , il existe un unique $u: L' \rightarrow L$ avec $\pi_j \circ u = \pi'_j$. Par celle de L' , il existe un unique $v: L \rightarrow L'$ avec $\pi'_j \circ v = \pi_j$. Alors $u \circ v: L \rightarrow L$ satisfait $\pi_j \circ (u \circ v) = \pi_j$, et par unicité $u \circ v = \text{id}_L$. De même $v \circ u = \text{id}_{L'}$. $\square$

3.4 Colimites

Définition 3.8 (Colimite). Soit $F: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ un diagramme. Une **colimite** de F est un cocône $(\varinjlim F, \{\iota_j\}_j)$ qui est initial dans $\text{Cocone}(F)$. Pour tout cocône (N, ψ_j) sous F , il existe un unique $u: \varinjlim F \rightarrow N$ tel que $u \circ \iota_j = \psi_j$ pour tout j :

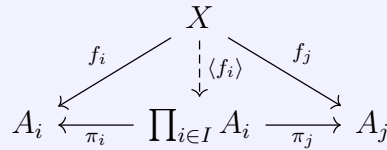


Les ι_j sont les injections canoniques.

Remarque. La colimite de $F: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ est la limite de $F^{\text{op}}: \mathcal{J}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$. Tout énoncé sur les limites se dualise en un énoncé sur les colimites.

3.5 Produits et coproduits

Définition 3.9 (Produit). Soit $\{A_i\}_{i \in I}$ une famille d'objets de $\mathcal{C}$ (i.e. un diagramme de forme discrète I). Le **produit** $\prod_{i \in I} A_i$ est la limite de ce diagramme. Concrètement, c'est un objet P muni de projections $\pi_i: P \rightarrow A_i$ tel que, pour tout objet X et toute famille de morphismes $f_i: X \rightarrow A_i$, il existe un unique $\langle f_i \rangle: X \rightarrow P$ avec $\pi_i \circ \langle f_i \rangle = f_i$:



Définition 3.10 (Coproduct). Dualement, le **coproduit** $\coprod_{i \in I} A_i$ est la colimite du diagramme discret $\{A_i\}_{i \in I}$. C'est un objet S muni d'injections $\iota_i: A_i \rightarrow S$ tel que, pour tout objet X et toute famille $f_i: A_i \rightarrow X$, il existe un unique $[f_i]: S \rightarrow X$ avec $[f_i] \circ \iota_i = f_i$.

Exemple 3.11. (i) Dans **Set**, le produit est le produit cartésien et le coproduit est l'union disjointe.

- (ii) Dans **Grp**, le produit est le produit direct et le coproduit est le produit libre.
- (iii) Dans **Ab**, le produit est le produit direct et le coproduit (fini) est la somme directe $\bigoplus_{i \in I} A_i$.
- (iv) Dans **Top**, le produit est le produit muni de la topologie produit et le coproduit est l'union disjointe avec la topologie somme.
- (v) Dans **Vect $_{\mathbb{K}}$** , produit et coproduit finis coïncident avec la somme directe.

3.6 Égaliseurs et coégaliseurs

Définition 3.12 (Égaliseur). Soient $f, g: A \rightrightarrows B$ deux morphismes parallèles. L'**égaliseur** de f et g est la limite du diagramme $\mathcal{J} = (\bullet \rightrightarrows \bullet)$, i.e. un objet E muni d'un morphisme $e: E \rightarrow A$ tel que $f \circ e = g \circ e$, universel pour cette propriété :

$$E \xrightarrow{e} A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

Pour tout $h: X \rightarrow A$ avec $f \circ h = g \circ h$, il existe un unique $\bar{h}: X \rightarrow E$ avec $e \circ \bar{h} = h$.

Définition 3.13 (Coégaliseur). Le **coégaliseur** de $f, g: A \rightrightarrows B$ est la colimite du même diagramme : un objet Q muni de $q: B \rightarrow Q$ tel que $q \circ f = q \circ g$, universel pour cette propriété :

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B \xrightarrow{q} Q$$

Exemple 3.14. (i) Dans **Set**, l'égaliseur de $f, g: A \rightrightarrows B$ est le sous-ensemble $\{a \in A : f(a) = g(a)\}$ avec l'inclusion.

(ii) Dans **Set**, le coégaliseur est le quotient $B/\sim$ où $\sim$ est la plus petite relation d'équivalence telle que $f(a) \sim g(a)$ pour tout $a \in A$.

(iii) Dans **Ab**, l'égaliseur de f, g est le noyau de $f - g$.

3.7 Noyaux et conoyaux

Définition 3.15 (Noyau). Dans une catégorie avec objet nul 0 , le **noyau** d'un morphisme $f: A \rightarrow B$ est l'égaliseur de f et du morphisme nul $0_{AB}: A \rightarrow 0 \rightarrow B$:

$$\text{Ker}(f) \xrightarrow{k} A \xrightarrow[0]{f} B$$

Définition 3.16 (Conoyau). Le **conoyau** de $f: A \rightarrow B$ est le coégaliseur de f et de 0_{AB} :

$$A \xrightarrow[0]{f} B \xrightarrow{c} \text{coker}(f)$$

Exemple 3.17. Dans $\mathbf{Ab}$ ou $\mathbf{Mod}_R$, le noyau et le conoyau catégoriques coïncident avec le noyau et le conoyau algébriques habituels.

3.8 Produits fibrés et sommes amalgamées

Définition 3.18 (Produit fibré). Soit un cospan $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$. Le **produit fibré** (ou pullback) est la limite de ce diagramme. C'est un objet $A \times_C B$ muni de $p: A \times_C B \rightarrow A$ et $q: A \times_C B \rightarrow B$ tels que $f \circ p = g \circ q$, universel pour cette propriété :

$$\begin{array}{ccc} A \times_C B & \xrightarrow{q} & B \\ p \downarrow & \lrcorner & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

Le carré ci-dessus est appelé carré cartésien.

Définition 3.19 (Somme amalgamée). Soit un span $A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} B$. La **somme amalgamée** (ou pushout) est la colimite de ce diagramme : un objet $A \sqcup_C B$ muni de $i: A \rightarrow A \sqcup_C B$ et $j: B \rightarrow A \sqcup_C B$ tels que

$$i \circ f = j \circ g :$$

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{g} & B \\ f \downarrow & \lrcorner & \downarrow j \\ A & \xrightarrow{i} & A \sqcup_C B \end{array}$$

Exemple 3.20. (i) Dans **Set**, $A \times_C B = \{(a, b) \in A \times B : f(a) = g(b)\}$.

(ii) Dans **Set**, $A \sqcup_C B = (A \sqcup B)/\sim$ où $f(c) \sim g(c)$ pour tout $c \in C$.

(iii) Dans **Top**, le produit fibré est le sous-espace correspondant du produit.

(iv) Dans **Grp**, la somme amalgamée est le produit amalgamé de groupes.

Proposition 3.21. Si $\mathcal{C}$ admet des produits binaires et des égaliseurs, alors $\mathcal{C}$ admet des produits fibrés. Plus précisément, le produit fibré de $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ est l'égaliseur de

$$A \times B \xrightleftharpoons[g \circ \pi_B]{f \circ \pi_A} C$$

Démonstration. Soit $e: E \rightarrow A \times B$ l'égaliseur de $f \circ \pi_A$ et $g \circ \pi_B$. Posons $p = \pi_A \circ e$ et $q = \pi_B \circ e$. Alors $f \circ p = f \circ \pi_A \circ e = g \circ \pi_B \circ e = g \circ q$, donc (E, p, q) est un cône sur le cospan. Soit (X, p', q') un autre cône, i.e. $f \circ p' = g \circ q'$. Par la propriété universelle du produit, il existe un unique $h = \langle p', q' \rangle: X \rightarrow A \times B$ avec $\pi_A \circ h = p'$ et $\pi_B \circ h = q'$. Alors $f \circ \pi_A \circ h = f \circ p' = g \circ q' = g \circ \pi_B \circ h$, donc par la propriété universelle de l'égaliseur, h se factorise uniquement par e . $\square$

3.9 Théorème d'existence des limites finies

Théorème 3.22. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\mathcal{C}$ admet toutes les limites finies (i.e. les limites de diagrammes $F: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ avec $\mathcal{J}$ finie).
- (ii) $\mathcal{C}$ admet les produits finis et les égaliseurs.
- (iii) $\mathcal{C}$ admet un objet terminal, les produits binaires et les égaliseurs.

On dit alors que $\mathcal{C}$ est **finiment complète**.

Démonstration. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est claire puisque les produits finis et les égaliseurs sont des limites finies.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : le produit vide est un objet terminal.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : soit $F: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ un diagramme avec $\mathcal{J}$ finie, disons $\text{Ob}(\mathcal{J}) = \{j_1, \dots, j_n\}$ et $\text{Mor}(\mathcal{J})$ (non identités) $= \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ avec $\alpha_k: s(k) \rightarrow t(k)$. Formons le produit $P = \prod_{i=1}^n F_{j_i}$ avec projections π_i , et le produit $Q = \prod_{k=1}^m F_{t(k)}$ avec projections ρ_k .

Définissons deux morphismes $\varphi, \psi: P \rightarrow Q$ par :

$$\rho_k \circ \varphi = F_{\alpha_k} \circ \pi_{s(k)}, \quad \rho_k \circ \psi = \pi_{t(k)}.$$

Ces morphismes existent par la propriété universelle de Q . Soit $e: E \rightarrow P$ l'égaliseur de φ et ψ .

Montrons que $(E, \{\pi_i \circ e\}_i)$ est une limite de F . Pour tout $\alpha_k: s(k) \rightarrow t(k)$:

$$F_{\alpha_k} \circ (\pi_{s(k)} \circ e) = \rho_k \circ \varphi \circ e = \rho_k \circ \psi \circ e = \pi_{t(k)} \circ e,$$

donc $(E, \pi_i \circ e)$ est bien un cône. Soit (N, ψ_i) un autre cône. La famille ψ_i induit un unique $h: N \rightarrow P$ avec $\pi_i \circ h = \psi_i$. La condition de cône donne $\varphi \circ h = \psi \circ h$, donc h se factorise uniquement par e , ce qui conclut. $\square$

Corollaire 3.23. *Dualement, $\mathcal{C}$ admet toutes les colimites finies si et seulement si elle admet les coproduits finis et les coégaliseurs. On dit alors que $\mathcal{C}$ est **finiment cocomplète**.*

3.10 Hom préserve les limites

Définition 3.24 (Foncteur qui préserve les limites). *Un foncteur $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ préserve les limites de forme $\mathcal{J}$ si, pour tout diagramme $F: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ dont la limite (L, π_j) existe, le cône $(GL, G\pi_j)$ est une limite de $GF: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{D}$. Un foncteur qui préserve toutes les petites limites est dit **continu**.*

Théorème 3.25. *Pour tout objet $X \in \mathcal{C}$, le foncteur covariant*

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -): \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

préserve toutes les limites qui existent dans $\mathcal{C}$. Autrement dit, si $(L, \pi_j) =$

$\varprojlim F$, alors

$$\mathrm{Hom}(X, \varprojlim F) \cong \varprojlim_j \mathrm{Hom}(X, F_j)$$

naturellement en X .

Démonstration. Soit $F: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ un diagramme avec limite (L, π_j) . La limite $\varprojlim_j \mathrm{Hom}(X, F_j)$ dans **Set** est

$$\{(h_j)_{j \in \mathcal{J}} \in \prod_j \mathrm{Hom}(X, F_j) : F_\alpha \circ h_j = h_k \text{ pour tout } \alpha: j \rightarrow k\},$$

c'est-à-dire l'ensemble des cônes de sommet X sur F .

Définissons $\Phi: \mathrm{Hom}(X, L) \rightarrow \varprojlim_j \mathrm{Hom}(X, F_j)$ par $\Phi(u) = (\pi_j \circ u)_j$. Pour tout u , la famille $(\pi_j \circ u)_j$ est un cône (car (π_j) l'est), donc Φ est bien définie.

Injectivité : si $\Phi(u) = \Phi(v)$, alors $\pi_j \circ u = \pi_j \circ v$ pour tout j , et par unicité dans la propriété universelle de L , $u = v$.

Surjectivité : soit $(h_j)_j$ un cône de sommet X . Par la propriété universelle de L , il existe un unique $u: X \rightarrow L$ avec $\pi_j \circ u = h_j$, i.e. $\Phi(u) = (h_j)_j$.

La naturalité en X est immédiate. $\square$

Corollaire 3.26. *Le foncteur contravariant $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y): \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ transforme les colimites de $\mathcal{C}$ en limites de **Set** :*

$$\mathrm{Hom}(\varinjlim F_j, Y) \cong \varprojlim_j \mathrm{Hom}(F_j, Y).$$

3.11 Limites filtrantes

Définition 3.27 (Catégorie filtrante). *Une petite catégorie $\mathcal{J}$ est **filtrante** si :*

- (a) $\mathcal{J}$ est non vide ;
- (b) pour tous $j, k \in \mathcal{J}$, il existe un objet ℓ et des morphismes $j \rightarrow \ell$ et $k \rightarrow \ell$;
- (c) pour tous morphismes parallèles $f, g: j \rightrightarrows k$, il existe $h: k \rightarrow \ell$ tel que $h \circ f = h \circ g$.

Définition 3.28 (Colimite filtrante). *Une **colimite filtrante** est une colimite de diagramme $F: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ où $\mathcal{J}$ est filtrante. Dualement, une **limite cofiltrante** est une limite indexée par une catégorie cofiltrante*

$(\mathcal{J}^{\text{op}} \text{ filtrante})$.

Exemple 3.29. (i) Tout ensemble ordonné filtrant $(I, \leq)$ (vu comme catégorie) est filtrant. Les colimites indexées par un tel ensemble sont les limites inductives classiques.

(ii) $\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$ dans **Ab**.

Théorème 3.30. Dans **Set**, les colimites filtrantes commutent avec les limites finies. Plus précisément, si $\mathcal{J}$ est filtrante et $\mathcal{K}$ est finie, alors pour $F: \mathcal{J} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathbf{Set}$:

$$\varinjlim_j \varprojlim_k F(j, k) \cong \varprojlim_k \varinjlim_j F(j, k).$$

Esquisse de démonstration. On vérifie directement que la description ensembliste de la colimite filtrante (classes d'équivalence de paires (j, x_j)) permet de commuter les deux constructions, en utilisant les propriétés (a)–(c) de la catégorie filtrante pour traiter les cas des produits finis et des égaliseurs. $\square$

3.12 Exercices

Exercice 3.1. Soient $f: A \rightarrow C$ et $g: B \rightarrow C$ dans une catégorie avec produits fibrés. Montrer que si g est un monomorphisme, alors la projection $p: A \times_C B \rightarrow A$ est un monomorphisme.

Exercice 3.2. Montrer que tout égaliseur est un monomorphisme.

Exercice 3.3. Soient $F, G: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ deux diagrammes et $\alpha: F \Rightarrow G$ une transformation naturelle. Si $\varprojlim F$ et $\varprojlim G$ existent, montrer qu'il existe un unique morphisme $\varprojlim \alpha: \varprojlim F \rightarrow \varprojlim G$ compatible avec les projections.

Exercice 3.4. Décrire explicitement le produit de deux petites catégories $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ dans **Cat**.

Exercice 3.5. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $\mathcal{D}$ une catégorie admettant toutes les limites de forme $\mathcal{J}$. Montrer que $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ admet aussi les limites de

forme $\mathcal{J}$, calculées « objectivement » : $(\varinjlim F_i)(C) = \varinjlim F_i(C)$.

Exercice 3.6. Montrer que **Set**, **Grp**, **Ab**, **Top** et **Mod_R** sont des catégories complètes et cocomplètes (admettent toutes les petites limites et colimites).

Exercice 3.7. Montrer que dans **Ab**, les colimites filtrantes sont exactes, i.e. le foncteur $\varinjlim$: $\text{Fun}(\mathcal{J}, \mathbf{Ab}) \rightarrow \mathbf{Ab}$ (pour $\mathcal{J}$ filtrante) est un foncteur exact.

Exercice 3.8. Soient $H \xrightarrow{f} G_1$ et $H \xrightarrow{g} G_2$ des homomorphismes de groupes. Montrer que la somme amalgamée $G_1 \sqcup_H G_2$ dans **Grp** est le produit amalgamé $G_1 *_H G_2$.

Chapitre 4

Adjonctions

Contents

2.1	La catégorie opposée	23
2.2	Le principe de dualité	24
2.3	Exemples de dualisation	25
2.4	Dualités concrètes	25
2.4.1	Dualité de Pontryagin	25
2.4.2	Dualité de Stone	26
2.5	Le foncteur Hom	26
2.6	Exercices	28

Les adjonctions sont l'un des concepts les plus fondamentaux de la théorie des catégories, reliant deux foncteurs de directions opposées par une bijection naturelle entre ensembles de morphismes. Introduites par Daniel Kan en 1958, elles unifient une multitude de constructions mathématiques : les foncteurs libres, la tensorisation, l'image directe et réciproque de faisceaux, les suspensions et espaces de lacets. Comme le disait Saunders Mac Lane, « les adjonctions apparaissent partout ».

4.1 Définition par bijection naturelle

Définition 4.1 (Adjonction). Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories et

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \dashv \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$$

deux foncteurs. On dit que F est **adjoint à gauche** de G (et G **adjoint**

à droite de F), noté $F \dashv G$, s'il existe une bijection

$$\Phi_{A,B}: \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, B) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, GB)$$

naturelle en $A \in \mathcal{C}$ et $B \in \mathcal{D}$. La naturalité signifie que pour tous $f: A' \rightarrow A$ dans $\mathcal{C}$ et $g: B \rightarrow B'$ dans $\mathcal{D}$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(FA, B) & \xrightarrow{\Phi_{A,B}} & \text{Hom}(A, GB) \\ (Ff)^* \circ g_* \downarrow & & \downarrow f^* \circ (Gg)_* \\ \text{Hom}(FA', B') & \xrightarrow{\Phi_{A',B'}} & \text{Hom}(A', GB') \end{array}$$

Notation. Si $h: FA \rightarrow B$, on appelle $\tilde{h} = \Phi(h): A \rightarrow GB$ la transposée (ou adjointe) de h . Réciproquement, si $k: A \rightarrow GB$, on note $\hat{k} = \Phi^{-1}(k): FA \rightarrow B$.

4.2 Unité et counité

Définition 4.2 (Unité et counité). Soit $F \dashv G$ une adjonction avec bijection Φ .

(i) L'**unité** est la transformation naturelle $\eta: \text{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$ définie par

$$\eta_A = \Phi_{A,FA}(\text{id}_{FA}): A \rightarrow GFA.$$

(ii) La **counité** est la transformation naturelle $\varepsilon: FG \Rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$ définie par

$$\varepsilon_B = \Phi_{GB,B}^{-1}(\text{id}_{GB}): FGB \rightarrow B.$$

Proposition 4.3. Pour tout $h: FA \rightarrow B$ et tout $k: A \rightarrow GB$:

$$\tilde{h} = Gh \circ \eta_A, \quad \hat{k} = \varepsilon_B \circ Fk.$$

Démonstration. Par naturalité de Φ en B , pour $h: FA \rightarrow B$:

$$\Phi_{A,B}(h) = \Phi_{A,B}(h \circ \text{id}_{FA}) = Gh \circ \Phi_{A,FA}(\text{id}_{FA}) = Gh \circ \eta_A.$$

De même, par naturalité en A , pour $k: A \rightarrow GB$:

$$\Phi_{A,B}^{-1}(k) = \Phi_{A,B}^{-1}(\text{id}_{GB} \circ k) = \Phi_{GB,B}^{-1}(\text{id}_{GB}) \circ Fk = \varepsilon_B \circ Fk. \quad \square$$

4.3 Identités triangulaires

Théorème 4.4 (Identités triangulaires). *Soit $F \dashv G$ avec unité η et counité ε . Les compositions suivantes sont des identités :*

(i) $\varepsilon F \circ F \eta = \text{id}_F$, i.e. pour tout A :

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{F\eta_A} & FGFA \\ & \searrow \text{id}_{FA} & \downarrow \varepsilon_{FA} \\ & & FA \end{array}$$

(ii) $G\varepsilon \circ \eta G = \text{id}_G$, i.e. pour tout B :

$$\begin{array}{ccc} GB & \xrightarrow{\eta_{GB}} & GFGB \\ & \searrow \text{id}_{GB} & \downarrow G\varepsilon_B \\ & & GB \end{array}$$

Démonstration. (i) Soit $A \in \mathcal{C}$. En utilisant la 4.3 avec $h = \text{id}_{FA} : FA \rightarrow FA$:

$$\tilde{\text{id}}_{FA} = G(\text{id}_{FA}) \circ \eta_A = \eta_A.$$

Maintenant, appliquons Φ^{-1} à $\eta_A = \tilde{\text{id}}_{FA}$:

$$\hat{\eta}_A = \varepsilon_{FA} \circ F\eta_A.$$

Mais $\hat{\eta}_A = \Phi^{-1}(\Phi(\text{id}_{FA})) = \text{id}_{FA}$, donc $\varepsilon_{FA} \circ F\eta_A = \text{id}_{FA}$.

(ii) Soit $B \in \mathcal{D}$. Avec $k = \text{id}_{GB} : GB \rightarrow GB$:

$$\hat{\text{id}}_{GB} = \varepsilon_B \circ F(\text{id}_{GB}) = \varepsilon_B.$$

Appliquons Φ à $\varepsilon_B = \hat{\text{id}}_{GB}$:

$$\tilde{\varepsilon}_B = G\varepsilon_B \circ \eta_{GB}.$$

Mais $\tilde{\varepsilon}_B = \Phi(\Phi^{-1}(\text{id}_{GB})) = \text{id}_{GB}$, donc $G\varepsilon_B \circ \eta_{GB} = \text{id}_{GB}$. □

4.4 Équivalence des définitions

Théorème 4.5. *Les données suivantes sont équivalentes :*

(a) Une adjonction $F \dashv G$ donnée par une bijection naturelle

$$\Phi: \text{Hom}(FA, B) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(A, GB).$$

(b) Un quadruplet $(F, G, \eta, \varepsilon)$ où $\eta: \text{Id}_C \Rightarrow GF$ et $\varepsilon: FG \Rightarrow \text{Id}_D$ sont des transformations naturelles satisfaisant les identités triangulaires.

Démonstration. $(a) \Rightarrow (b)$: c'est ce que nous avons construit dans les 4.2 et 4.4.

$(b) \Rightarrow (a)$: étant donné $(F, G, \eta, \varepsilon)$ satisfaisant les identités triangulaires, définissons

$$\Phi_{A,B}(h) = Gh \circ \eta_A \quad \text{pour } h: FA \rightarrow B,$$

$$\Psi_{A,B}(k) = \varepsilon_B \circ Fk \quad \text{pour } k: A \rightarrow GB.$$

Vérifions que $\Psi \circ \Phi = \text{id}$. Soit $h: FA \rightarrow B$:

$$\Psi(\Phi(h)) = \varepsilon_B \circ F(Gh \circ \eta_A) = \varepsilon_B \circ FGh \circ F\eta_A.$$

Par naturalité de ε (appliquée à $h: FA \rightarrow B$) : $\varepsilon_B \circ FGh = h \circ \varepsilon_{FA}$, donc

$$\Psi(\Phi(h)) = h \circ \varepsilon_{FA} \circ F\eta_A = h \circ \text{id}_{FA} = h,$$

en utilisant la première identité triangulaire.

Vérifions que $\Phi \circ \Psi = \text{id}$. Soit $k: A \rightarrow GB$:

$$\Phi(\Psi(k)) = G(\varepsilon_B \circ Fk) \circ \eta_A = G\varepsilon_B \circ GFk \circ \eta_A.$$

Par naturalité de η (appliquée à $k: A \rightarrow GB$) : $GFk \circ \eta_A = \eta_{GB} \circ k$, donc

$$\Phi(\Psi(k)) = G\varepsilon_B \circ \eta_{GB} \circ k = \text{id}_{GB} \circ k = k,$$

en utilisant la seconde identité triangulaire.

La naturalité de Φ en A et B suit de la fonctorialité de G et de la naturalité de η . $\square$

4.5 Exemples fondamentaux

Exemple 4.6 (Libre $\dashv$ Oubli). Le foncteur d'oubli $U: \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ admet un adjoint à gauche F , le foncteur « groupe libre » :

$$\mathbf{Set} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \dashv \\ \xleftarrow{U} \end{array} \mathbf{Grp} \quad \text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(FX, G) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, UG).$$

L'unité $\eta_X: X \rightarrow UFX$ est l'inclusion de X comme générateurs dans le groupe libre FX . La counité $\varepsilon_G: FUG \rightarrow G$ envoie chaque mot formel dans le groupe libre sur les éléments de G sur son évaluation dans G . De même pour **Ab**, **Ring**, **Mod** _{R} , **Vect** _{$\mathbb{K}$} , etc.

Exemple 4.7 (Produit $\dashv$ Hom interne). Dans **Set** (ou plus généralement dans toute catégorie cartésienne fermée), pour tout ensemble A :

$$(-) \times A \dashv (-)^A,$$

i.e. $\text{Hom}(X \times A, B) \cong \text{Hom}(X, B^A)$ où $B^A = \text{Hom}(A, B)$. C'est la curryfication.

Exemple 4.8 (Image réciproque $\dashv$ image directe). Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue entre espaces topologiques. Les foncteurs image réciproque f^* et image directe f_* sur les faisceaux satisfont $f^* \dashv f_*$:

$$\text{Hom}_{\text{Sh}(X)}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \text{Hom}_{\text{Sh}(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}).$$

Exemple 4.9 (Suspension $\dashv$ Lacets). Dans la catégorie homotopique pointée **Top**_{*}, la suspension réduite Σ et le foncteur espace de lacets Ω satisfont

$$\Sigma \dashv \Omega, \quad [\Sigma X, Y]_* \cong [X, \Omega Y]_*$$

où $[-, -]_*$ désigne les classes d'homotopie pointée.

Exemple 4.10 (Foncteur diagonal $\dashv$ Produit). Soit $\Delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ le foncteur diagonal $\Delta(A) = (A, A)$. Si $\mathcal{C}$ admet des produits binaires, alors $\Delta \dashv \times$:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C} \times \mathcal{C}}(\Delta A, (B, C)) = \text{Hom}(A, B) \times \text{Hom}(A, C) \cong \text{Hom}(A, B \times C).$$

Dualement, le coproduit est adjoint à gauche du diagonal : $\sqcup \dashv \Delta$.

Exemple 4.11 (Extension et restriction des scalaires). Soit $\varphi: R \rightarrow S$ un homomorphisme d'anneaux. Le foncteur de restriction des scalaires $\varphi^*: \mathbf{Mod}_S \rightarrow \mathbf{Mod}_R$ admet un adjoint à gauche, l'extension des scalaires $S \otimes_R (-): \mathbf{Mod}_R \rightarrow \mathbf{Mod}_S$:

$$\text{Hom}_S(S \otimes_R M, N) \cong \text{Hom}_R(M, \varphi^* N).$$

4.6 Adjoints et limites

Théorème 4.12 (Les adjoints à droite préservent les limites). *Soit $F \dashv G$ avec $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ et $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$. Alors G préserve toutes les limites qui existent dans $\mathcal{D}$.*

Démonstration. Soit $D: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{D}$ un diagramme avec limite (L, π_j) . Montrons que $(GL, G\pi_j)$ est une limite de $GD: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$.

Soit (X, ψ_j) un cône sur GD dans $\mathcal{C}$, i.e. $\psi_j: X \rightarrow GD_j$ avec $GD_\alpha \circ \psi_j = \psi_k$ pour tout $\alpha: j \rightarrow k$.

Par l'adjonction, chaque $\psi_j: X \rightarrow GD_j$ correspond à un unique $\hat{\psi}_j = \varepsilon_{D_j} \circ F\psi_j: FX \rightarrow D_j$. Vérifions que $(\hat{\psi}_j)_j$ est un cône sur D . Pour $\alpha: j \rightarrow k$:

$$\begin{aligned} D_\alpha \circ \hat{\psi}_j &= D_\alpha \circ \varepsilon_{D_j} \circ F\psi_j = \varepsilon_{D_k} \circ FGD_\alpha \circ F\psi_j \\ &= \varepsilon_{D_k} \circ F(GD_\alpha \circ \psi_j) = \varepsilon_{D_k} \circ F\psi_k = \hat{\psi}_k, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la naturalité de ε .

Par la propriété universelle de (L, π_j) , il existe un unique $v: FX \rightarrow L$ avec $\pi_j \circ v = \hat{\psi}_j$. En transposant, on obtient $u = \tilde{v} = Gv \circ \eta_X: X \rightarrow GL$. Alors :

$$G\pi_j \circ u = G\pi_j \circ Gv \circ \eta_X = G(\pi_j \circ v) \circ \eta_X = G\hat{\psi}_j \circ \eta_X = \tilde{\hat{\psi}}_j = \psi_j.$$

L'unicité de u découle de celle de v et de la bijectivité de la transposition. $\square$

Théorème 4.13 (Les adjoints à gauche préservent les colimites). *Soit $F \dashv G$ avec $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ et $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$. Alors F préserve toutes les colimites qui existent dans $\mathcal{C}$.*

Démonstration. Soit $D: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ un diagramme avec colimite (C, ι_j) . Montrons que $(FC, F\iota_j)$ est une colimite de $FD: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{D}$.

Soit (Y, ψ_j) un cocône sous FD , i.e. $\psi_j: FD_j \rightarrow Y$. Par l'adjonction, chaque ψ_j correspond à $\tilde{\psi}_j: D_j \rightarrow GY$. La famille $(\tilde{\psi}_j)_j$ est un cocône sous D dans $\mathcal{C}$ (par naturalité de la bijection).

Par la propriété universelle de (C, ι_j) , il existe un unique $w: C \rightarrow GY$ avec $w \circ \iota_j = \tilde{\psi}_j$. En transposant, $\hat{w} = \varepsilon_Y \circ Fw: FC \rightarrow Y$ satisfait :

$$\hat{w} \circ F\iota_j = \varepsilon_Y \circ Fw \circ F\iota_j = \varepsilon_Y \circ F(w \circ \iota_j) = \varepsilon_Y \circ F\tilde{\psi}_j = \hat{\tilde{\psi}}_j = \psi_j.$$

L'unicité suit comme dans la preuve précédente. $\square$

Corollaire 4.14. *Si $F \dashv G$, alors pour tout diagramme $D: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{D}$ dont la limite existe :*

$$G(\varprojlim D_j) \cong \varprojlim G(D_j), \quad F(\varinjlim D_j) \cong \varinjlim F(D_j).$$

4.7 Le théorème de Freyd (GAFT)

Nous établissons maintenant un critère puissant garantissant l'existence d'un foncteur adjoint.

Définition 4.15 (Condition d'ensemble de solutions). *Un foncteur $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ satisfait la **condition d'ensemble de solutions** si, pour tout $A \in \mathcal{C}$, il existe un ensemble (et non une classe propre) $\{f_i: A \rightarrow GB_i\}_{i \in I_A}$ de morphismes tel que tout morphisme $f: A \rightarrow GB$ se factorise comme $f = Gh \circ f_i$ pour un certain $i \in I_A$ et un certain $h: B_i \rightarrow B$.*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f_i} & GB_i \\ & \searrow f & \downarrow Gh \\ & & GB \end{array}$$

Théorème 4.16 (Théorème de l'adjoint de Freyd (GAFT)). *Soit $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur où $\mathcal{D}$ est complète (admet toutes les petites limites). Alors G admet un adjoint à gauche si et seulement si :*

- (i) G préserve toutes les petites limites (est continu) ;
- (ii) G satisfait la condition d'ensemble de solutions.

Démonstration. Nécessité : si $F \dashv G$, alors G préserve les limites par le 4.12. Pour la condition d'ensemble de solutions, l'ensemble $\{\eta_A: A \rightarrow GFA\}$ (réduit à un seul élément) convient, car tout $f: A \rightarrow GB$ a pour transposée $\hat{f}: FA \rightarrow B$, et $f = G\hat{f} \circ \eta_A$.

Suffisance : fixons $A \in \mathcal{C}$. Nous construisons un objet initial dans la catégorie comma $(A \downarrow G)$, dont les objets sont les paires $(B, f: A \rightarrow GB)$ et les morphismes $(B, f) \rightarrow (B', f')$ sont les $h: B \rightarrow B'$ avec $Gh \circ f = f'$.

Étape 1. Par la condition d'ensemble de solutions, soit $\{(B_i, f_i)\}_{i \in I}$ un ensemble de solutions. Posons $B_0 = \prod_{i \in I} B_i$ (produit dans $\mathcal{D}$, qui existe car $\mathcal{D}$ est complète). Comme G préserve les limites, $GB_0 \cong \prod_i GB_i$, et la famille

$(f_i)_i$ induit $f_0: A \rightarrow GB_0$. L'objet (B_0, f_0) est « faiblement initial » : tout objet de $(A \downarrow G)$ reçoit au moins un morphisme depuis (B_0, f_0) .

Étape 2. Pour rendre l'objet initial, nous égalisons. Considérons l'ensemble de tous les endomorphismes $h: B_0 \rightarrow B_0$ dans $(A \downarrow G)$ (c'est un ensemble car $\text{Hom}(B_0, B_0)$ est un ensemble). Formons l'égaliseur $e: E \rightarrow B_0$ de tous ces endomorphismes dans $\mathcal{D}$. (Plus précisément, l'égaliseur de la famille de paires (id_{B_0}, h) pour tout endomorphisme h .) Comme G préserve les égaliseurs, $Ge: GE \rightarrow GB_0$ est l'égaliseur correspondant dans $\mathcal{C}$. Puisque id_{B_0} est un endomorphisme de (B_0, f_0) , on a $Gh \circ f_0 = f_0$ pour tout h , donc f_0 se factorise par Ge en un unique $f_E: A \rightarrow GE$.

Étape 3. Montrons que (E, f_E) est initial dans $(A \downarrow G)$. Par l'étape 1 (via la factorisation e), tout objet (B, f) reçoit un morphisme depuis (E, f_E) : en effet, le morphisme $(B_0, f_0) \rightarrow (B, f)$ se factorise par E . Pour l'unicité, soient $u, v: E \rightarrow B$ deux morphismes avec $Gu \circ f_E = Gv \circ f_E = f$. Formons l'égaliseur $w: W \rightarrow E$ de u et v . Par faible initialité de (B_0, f_0) , il existe $s: B_0 \rightarrow W$. La composée $e' = e \circ w \circ s: B_0 \rightarrow B_0$ est un endomorphisme de (B_0, f_0) , donc $e \circ w \circ s$ est égalisé par e , ce qui implique $w \circ s \circ e_0 = \text{id}$ (par la propriété de l'égaliseur en étape 2), et finalement w est un isomorphisme, donc $u = v$.

Posons alors $FA = E$. La correspondance $A \mapsto FA$ s'étend en un foncteur adjoint à gauche de G , avec unité $\eta_A = f_E$. $\square$

Corollaire 4.17. (Théorème de l'adjoint spécial, SAFT.) Soit $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur continu où $\mathcal{D}$ est complète et localement petite. Si $\mathcal{D}$ admet une famille cogénératrice, alors G admet un adjoint à gauche.

Esquisse. La famille cogénératrice fournit automatiquement la condition d'ensemble de solutions, et on applique le 4.16. $\square$

Exemple 4.18. (i) Le foncteur d'oubli $U: \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Set}$ préserve les limites et $\mathbf{Ab}$ est complète. L'ensemble $\{f: X \rightarrow UB : |B| \leq |X| + \aleph_0\}$ fournit un ensemble de solutions, d'où $F \dashv U$ (groupes abéliens libres).

(ii) Le foncteur d'oubli $U: \mathbf{CompHaus} \rightarrow \mathbf{Top}$ satisfait les conditions du SAFT, ce qui donne la compactification de Stone-Čech $\beta \dashv U$.

4.8 Adjonctions et catégories comma

Proposition 4.19. *Un foncteur $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ admet un adjoint à gauche si et seulement si, pour tout $A \in \mathcal{C}$, la catégorie comma $(A \downarrow G)$ admet un objet initial.*

Démonstration. Si $F \dashv G$ avec unité η , alors (FA, η_A) est initial dans $(A \downarrow G)$: pour tout $(B, f: A \rightarrow GB)$, le morphisme $\hat{f} = \varepsilon_B \circ Ff: FA \rightarrow B$ est l'unique morphisme avec $G\hat{f} \circ \eta_A = f$.

Réciproquement, si $(L_A, \eta_A: A \rightarrow GL_A)$ est initial dans $(A \downarrow G)$ pour tout A , on pose $FA = L_A$ et on vérifie la fonctorialité et la bijection naturelle. $\square$

4.9 Propriétés supplémentaires

Proposition 4.20. *Soit $F \dashv G$.*

- (i) *G est fidèle si et seulement si chaque composante de la counité ε_B est un épimorphisme.*
- (ii) *G est pleinement fidèle si et seulement si ε est un isomorphisme naturel.*

Démonstration. (i) G fidèle $\Leftrightarrow \Phi$ injective sur les fibres $\Leftrightarrow$ la composée $h \mapsto \varepsilon_B \circ Fk \mapsto h$ est injective $\Leftrightarrow \varepsilon_B$ est un épimorphisme (car $\hat{k} = \varepsilon_B \circ Fk$).

(ii) G pleinement fidèle $\Leftrightarrow \Phi$ bijectif pour $A = GB \Leftrightarrow \text{Hom}(FGB, B) \cong \text{Hom}(GB, GB)$ par $h \mapsto Gh \circ \eta_{GB}$, et ε_B est l'antécédent de id_{GB} , d'où le résultat. $\square$

Proposition 4.21 (Unicité des adjoints). *Si $F \dashv G$ et $F' \dashv G$, alors $F \cong F'$ (naturellement). De même, si $F \dashv G$ et $F \dashv G'$, alors $G \cong G'$.*

Démonstration. Par le lemme de Yoneda, F est déterminé par le foncteur $\text{Hom}(F(-), -) = \text{Hom}(-, G(-))$, qui ne dépend que de G . $\square$

Proposition 4.22 (Composition d'adjonctions). *Si $F \dashv G: \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}$ et $F' \dashv G': \mathcal{D} \rightleftarrows \mathcal{E}$, alors $F'F \dashv GG'$.*

Démonstration. $\text{Hom}_{\mathcal{E}}(F'FA, B) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, G'B) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, GG'B)$, naturellement en A et B . $\square$

4.10 Monades issues d'adjonctions

Remarque. Toute adjonction $F \dashv G$ engendre une monade $T = GF: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ munie de :

- $\eta: \text{Id} \Rightarrow T$ (l'unité de l'adjonction),
- $\mu = G\varepsilon F: T^2 = GF GF \Rightarrow GF = T$ (la multiplication).

Les identités triangulaires entraînent les axiomes de monade : $\mu \circ T\eta = \mu \circ \eta T = \text{id}_T$ et $\mu \circ T\mu = \mu \circ \mu T$ (associativité). Nous développerons cette théorie au chapitre suivant.

4.11 Exercices

Exercice 4.1. Soit $F: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Ab}$ le foncteur « groupe abélien libre » ($FX = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z}$) et $U: \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Set}$ l'oubli. Montrer que $F \dashv U$ en exhibant l'unité, la counité, et en vérifiant les identités triangulaires.

Exercice 4.2. Soit R un anneau commutatif et M un R -module. Montrer que $M \otimes_R (-) \dashv \text{Hom}_R(M, -)$ en établissant la bijection naturelle $\text{Hom}_R(M \otimes_R N, P) \cong \text{Hom}_R(N, \text{Hom}_R(M, P))$.

Exercice 4.3. Montrer que tout adjoint à gauche préserve les épimorphismes et que tout adjoint à droite préserve les monomorphismes.

Exercice 4.4. Montrer qu'une adjonction $F \dashv G$ est une équivalence de catégories si et seulement si η et ε sont des isomorphismes naturels.

Exercice 4.5. Soit $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{C}$ une sous-catégorie pleine. On dit que $\mathcal{D}$ est réflexive si le foncteur d'inclusion $\iota: \mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{C}$ admet un adjoint à gauche $L: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ (le réflecteur).

- (a) Montrer que ε est un isomorphisme naturel.
- (b) Montrer que L est essentiellement surjectif.
- (c) Montrer que $\mathbf{Ab}$ est une sous-catégorie réflexive de $\mathbf{Grp}$ (le réflecteur est l'abélianisation $G \mapsto G/[G, G]$).

Exercice 4.6. En utilisant le GAFT, montrer que le foncteur d'oubli $U: \mathbf{CompHaus} \rightarrow \mathbf{Top}$ admet un adjoint à gauche (la compactification de Stone–Čech). Indication : vérifier que $\mathbf{CompHaus}$ est complète, que U préserve les limites, et exhiber un ensemble de solutions.

Exercice 4.7. Soient $K: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ et $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ des foncteurs avec $\mathcal{A}$ petite et $\mathcal{C}$ cocomplète. Montrer que l'extension de Kan à gauche $\mathrm{Lan}_K F$ existe et que $\mathrm{Lan}_K \dashv K^*$ où $K^*: \mathrm{Fun}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \rightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ est la précomposition par K .

Exercice 4.8. Soit $F \dashv G$ avec $T = GF$, η l'unité et $\mu = G\varepsilon F$. Vérifier en détail les axiomes de monade :

- (a) $\mu \circ T\eta = \mathrm{id}_T$ et $\mu \circ \eta T = \mathrm{id}_T$ (axiomes d'unité).
- (b) $\mu \circ T\mu = \mu \circ \mu T$ (associativité).

Indication : utiliser les identités triangulaires et la naturalité de η et ε .

Exercice 4.9. Soient $(P, \leq)$ et $(Q, \leq)$ deux ensembles partiellement ordonnés, vus comme catégories. Montrer qu'une adjonction $F \dashv G$ entre ces catégories est exactement une connexion de Galois : $F(p) \leq q \Leftrightarrow p \leq G(q)$. Donner un exemple en théorie des treillis.

Chapitre 5

Lemme de Yoneda et représentabilité

Contents

3.1	Diagrammes et catégories d'indices	32
3.2	Cônes et cocônes	32
3.3	Limites	34
3.4	Colimites	34
3.5	Produits et coproduits	35
3.6	Égaliseurs et coégaliseurs	36
3.7	Noyaux et conoyaux	37
3.8	Produits fibrés et sommes amalgamées	37
3.9	Théorème d'existence des limites finies	38
3.10	Hom préserve les limites	39
3.11	Limites filtrantes	40
3.12	Exercices	41

Le lemme de Yoneda est, selon beaucoup de catégoriciens, le résultat le plus fondamental de la théorie des catégories. Il affirme qu'un objet est entièrement déterminé par l'ensemble des morphismes qui y arrivent (ou qui en partent), et que cette détermination est fonctorielle. Plus précisément, le lemme établit une bijection naturelle entre les transformations naturelles issues d'un foncteur représentable et les éléments de l'objet cible, ce qui permet de *plonger* toute catégorie dans une catégorie de foncteurs.

Ce chapitre développe la théorie des préfaisceaux, démontre le lemme de Yoneda dans sa forme complète, en déduit le plongement de Yoneda, puis étudie les foncteurs représentables et leurs propriétés.

5.1 Préfaisceaux et foncteurs Hom

Définition 5.1 (Préfaisceau). *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite. Un **préfaisceau** sur $\mathcal{C}$ est un foncteur*

$$F: \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}.$$

La catégorie des préfaisceaux sur $\mathcal{C}$ est la catégorie de foncteurs $\text{Fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set})$, que l'on note $\widehat{\mathcal{C}}$ ou $\text{PSh}(\mathcal{C})$. Les morphismes dans $\widehat{\mathcal{C}}$ sont les transformations naturelles.

Remarque. *La catégorie $\widehat{\mathcal{C}}$ n'est en général pas petite, même si $\mathcal{C}$ est petite : les foncteurs de $\mathcal{C}^{\text{op}}$ vers $\mathbf{Set}$ forment une classe propre dès que $\mathcal{C}$ a suffisamment d'objets. Toutefois, si $\mathcal{C}$ est petite, alors $\widehat{\mathcal{C}}$ est localement petite et admet toutes les limites et colimites petites (calculées argument par argument).*

Définition 5.2 (Foncteur Hom covariant). *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite et $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Le **foncteur Hom covariant** représenté par A est le foncteur*

$$h^A = \text{Hom}(A, -): \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

défini sur les objets par $h^A(B) = \text{Hom}(A, B)$ et sur les morphismes $f: B \rightarrow C$ par la post-composition :

$$h^A(f) = f_*: \text{Hom}(A, B) \longrightarrow \text{Hom}(A, C), \quad g \longmapsto f \circ g.$$

Définition 5.3 (Foncteur Hom contravariant). *Soit $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Le **foncteur Hom contravariant** représenté par A est le foncteur*

$$h_A = \text{Hom}(-, A): \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

défini sur les objets par $h_A(B) = \text{Hom}(B, A)$ et sur les morphismes $f: B \rightarrow C$ (dans $\mathcal{C}$, donc $f: C \rightarrow B$ dans $\mathcal{C}^{\text{op}}$) par la pré-composition :

$$h_A(f) = f^*: \text{Hom}(C, A) \longrightarrow \text{Hom}(B, A), \quad g \longmapsto g \circ f.$$

Ainsi h_A est un préfaisceau sur $\mathcal{C}$.

- Exemple 5.4.** (i) Dans **Set**, le foncteur $h^{\{*\}} = \text{Hom}(\{*\}, -)$ est (naturellement isomorphe à) le foncteur identité Id_{Set} , car un élément de $\text{Hom}(\{*\}, X)$ correspond exactement à un élément de X .
- (ii) Dans **Ab**, le foncteur $h^{\mathbb{Z}} = \text{Hom}(\mathbb{Z}, -)$ est le foncteur oubli $U: \text{Ab} \rightarrow \text{Set}$, car un morphisme de groupes $\mathbb{Z} \rightarrow G$ est déterminé par l'image de 1.
- (iii) Dans **Top**, le foncteur $h^{\{*\}}$ est le foncteur ensemble sous-jacent. Le foncteur $h^{[0,1]}$ est le foncteur des chemins, dont l'étude mène à la théorie de l'homotopie.
- (iv) Dans Vect_k , le foncteur $h_V = \text{Hom}(-, V)$ envoie W sur l'espace des applications linéaires $W \rightarrow V$. En particulier, $h_k = \text{Hom}(-, k)$ est le foncteur dual.

Définition 5.5 (Foncteur Hom bifonctoriel). Le **foncteur** Hom **bifonctoriel** est le foncteur

$$\text{Hom}(-, -): \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \longrightarrow \text{Set}$$

défini sur les paires d'objets par $\text{Hom}(A, B)$ et sur les paires de morphismes $(f: A' \rightarrow A, g: B \rightarrow B')$ par

$$\text{Hom}(f, g): \text{Hom}(A, B) \longrightarrow \text{Hom}(A', B'), \quad h \longmapsto g \circ h \circ f.$$

Proposition 5.6. Le foncteur $\text{Hom}(-, -)$ est bien un bifoncteur : pour tous morphismes composables (f_1, g_1) et (f_2, g_2) , on a

$$\text{Hom}(f_1 \circ f_2, g_2 \circ g_1) = \text{Hom}(f_2, g_2) \circ \text{Hom}(f_1, g_1),$$

et $\text{Hom}(\text{id}_A, \text{id}_B) = \text{id}_{\text{Hom}(A, B)}$.

Démonstration. Pour tout $h \in \text{Hom}(A, B)$, on a

$$\begin{aligned} \text{Hom}(f_1 \circ f_2, g_2 \circ g_1)(h) &= (g_2 \circ g_1) \circ h \circ (f_1 \circ f_2) \\ &= g_2 \circ (g_1 \circ h \circ f_1) \circ f_2 \\ &= \text{Hom}(f_2, g_2)(\text{Hom}(f_1, g_1)(h)). \end{aligned}$$

L'assertion sur les identités est immédiate. □

5.2 Le plongement de Yoneda

Définition 5.7 (Plongement de Yoneda covariant). *Le **plongement de Yoneda covariant** est le foncteur*

$$\mathbf{y}: \mathcal{C} \longrightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}) = \widehat{\mathcal{C}}, \quad A \longmapsto h_A = \text{Hom}(-, A).$$

Sur les morphismes $f: A \rightarrow B$, il est défini par la transformation naturelle $\mathbf{y}(f) = f_*: h_A \Rightarrow h_B$ dont la composante en $C \in \mathcal{C}$ est

$$(f_*)_C: \text{Hom}(C, A) \longrightarrow \text{Hom}(C, B), \quad g \longmapsto f \circ g.$$

Définition 5.8 (Plongement de Yoneda contravariant). *De même, le **plongement de Yoneda contravariant** est le foncteur*

$$\mathbf{y}^{\text{op}}: \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathbf{Set}), \quad A \longmapsto h^A = \text{Hom}(A, -).$$

Remarque. *Suivant les auteurs, le plongement de Yoneda covariant est parfois noté $\mathcal{C} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{C}}$, $A \mapsto \mathcal{C}(-, A)$, ou encore $A \mapsto \text{Yo}(A)$. Nous utiliserons principalement la notation h_A pour le foncteur contravariant représenté par A et h^A pour le covariant.*

Lemme 5.9. *Le plongement de Yoneda $\mathbf{y}$ est un foncteur bien défini : pour tout morphisme $f: A \rightarrow B$ dans $\mathcal{C}$, la famille $(f_*)_C = f \circ (-)$ est une transformation naturelle $h_A \Rightarrow h_B$.*

Démonstration. Il faut vérifier que pour tout morphisme $u: C' \rightarrow C$ dans $\mathcal{C}$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(C, A) & \xrightarrow{(f_*)_C} & \text{Hom}(C, B) \\ u^* \downarrow & & \downarrow u^* \\ \text{Hom}(C', A) & \xrightarrow{(f_*)_{C'}} & \text{Hom}(C', B) \end{array}$$

Pour tout $g \in \text{Hom}(C, A)$, on a

$$u^* \circ (f_*)_C(g) = u^*(f \circ g) = f \circ g \circ u = (f_*)_{C'}(g \circ u) = (f_*)_{C'} \circ u^*(g).$$

Donc le diagramme commute. □

5.3 Le lemme de Yoneda

Nous énonçons et démontrons maintenant le résultat central de ce chapitre. Nous traitons d'abord la version contravariante (préfaisceaux), puis indiquons la version covariante.

Théorème 5.10 (Lemme de Yoneda). *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite, $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, et $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ un préfaisceau. Il existe une bijection*

$$\Phi_A: \text{Nat}(h_A, F) \xrightarrow{\sim} F(A)$$

qui est naturelle en A et en F . Explicitement, Φ_A est définie par

$$\Phi_A(\alpha) = \alpha_A(\text{id}_A)$$

pour toute transformation naturelle $\alpha: h_A \Rightarrow F$.

Démonstration. La preuve se décompose en quatre étapes : construction de la bijection, construction de l'inverse, vérification que ces constructions sont mutuellement inverses, et preuve de la naturalité.

Étape 1 : Définition de Φ_A . Soit $\alpha: h_A \Rightarrow F$ une transformation naturelle. Pour chaque objet B de $\mathcal{C}$, α possède une composante $\alpha_B: \text{Hom}(B, A) \rightarrow F(B)$. En particulier, pour $B = A$, on obtient $\alpha_A: \text{Hom}(A, A) \rightarrow F(A)$. On pose

$$\Phi_A(\alpha) := \alpha_A(\text{id}_A) \in F(A).$$

Étape 2 : Construction de l'inverse Ψ_A . Soit $x \in F(A)$. On définit une transformation naturelle $\Psi_A(x) = \beta^x: h_A \Rightarrow F$ en posant, pour chaque objet B de $\mathcal{C}$ et chaque morphisme $f \in \text{Hom}(B, A) = h_A(B)$,

$$\beta_B^x(f) := F(f)(x) \in F(B).$$

Ici, $F(f): F(A) \rightarrow F(B)$ est l'application induite par F (rappelons que F est un foncteur de $\mathcal{C}^{\text{op}}$ vers $\mathbf{Set}$, donc un morphisme $f: B \rightarrow A$ dans $\mathcal{C}$ induit $F(f): F(A) \rightarrow F(B)$).

Vérifions que β^x est bien une transformation naturelle. Pour un morphisme $u: C \rightarrow B$ dans $\mathcal{C}$, il faut montrer que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(B, A) & \xrightarrow{\beta_B^x} & F(B) \\ u^* \downarrow & & \downarrow F(u) \\ \text{Hom}(C, A) & \xrightarrow{\beta_C^x} & F(C) \end{array}$$

Pour tout $f \in \text{Hom}(B, A)$, on a

$$\begin{aligned}
 F(u) \circ \beta_B^x(f) &= F(u)(F(f)(x)) \\
 &= (F(u) \circ F(f))(x) \\
 &= F(f \circ u)(x) \quad (\text{fonctorialité de } F \text{ sur } \mathcal{C}^{\text{op}}) \\
 &= \beta_C^x(f \circ u) \\
 &= \beta_C^x(u^*(f)).
 \end{aligned}$$

Donc β^x est bien naturelle.

Étape 3 : Φ_A et Ψ_A sont mutuellement inverses.

Vérification $\Phi_A \circ \Psi_A = \text{id}_{F(A)}$. Pour tout $x \in F(A)$,

$$\Phi_A(\Psi_A(x)) = \Phi_A(\beta^x) = \beta_A^x(\text{id}_A) = F(\text{id}_A)(x) = \text{id}_{F(A)}(x) = x.$$

Vérification $\Psi_A \circ \Phi_A = \text{id}_{\text{Nat}(h_A, F)}$. Pour toute transformation naturelle $\alpha: h_A \Rightarrow F$, posons $x = \Phi_A(\alpha) = \alpha_A(\text{id}_A)$. Il faut montrer que $\beta^x = \alpha$, c'est-à-dire que pour tout objet B et tout $f \in \text{Hom}(B, A)$,

$$\beta_B^x(f) = \alpha_B(f).$$

Par définition, $\beta_B^x(f) = F(f)(x) = F(f)(\alpha_A(\text{id}_A))$. Or la naturalité de α appliquée au morphisme $f: B \rightarrow A$ donne le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}(A, A) & \xrightarrow{\alpha_A} & F(A) \\
 f^* \downarrow & & \downarrow F(f) \\
 \text{Hom}(B, A) & \xrightarrow{\alpha_B} & F(B)
 \end{array}$$

En évaluant sur $\text{id}_A \in \text{Hom}(A, A)$, on obtient

$$F(f)(\alpha_A(\text{id}_A)) = \alpha_B(f^*(\text{id}_A)) = \alpha_B(\text{id}_A \circ f) = \alpha_B(f).$$

Donc $\beta_B^x(f) = \alpha_B(f)$ pour tout B et tout f , ce qui montre $\Psi_A(\Phi_A(\alpha)) = \alpha$.

Étape 4 : Naturalité.

Naturalité en A. Soit $u: A' \rightarrow A$ un morphisme dans $\mathcal{C}$. Il faut vérifier que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Nat}(h_A, F) & \xrightarrow{\Phi_A} & F(A) \\
 u^* \downarrow & & \downarrow F(u) \\
 \text{Nat}(h_{A'}, F) & \xrightarrow{\Phi_{A'}} & F(A')
 \end{array}$$

où $u^*(\alpha) = \alpha \circ \mathbf{y}(u) = \alpha \circ u_*$, c'est-à-dire la transformation naturelle dont la composante en B est $\alpha_B \circ (u \circ -)$. Pour toute $\alpha: h_A \Rightarrow F$,

$$\begin{aligned} F(u)(\Phi_A(\alpha)) &= F(u)(\alpha_A(\text{id}_A)), \\ \Phi_{A'}(u^*(\alpha)) &= (u^*(\alpha))_{A'}(\text{id}_{A'}) = \alpha_{A'}(u \circ \text{id}_{A'}) = \alpha_{A'}(u). \end{aligned}$$

Par naturalité de α en le morphisme $u: A' \rightarrow A$, $F(u)(\alpha_A(\text{id}_A)) = \alpha_{A'}(u)$. Le diagramme commute.

Naturalité en F . Soit $\eta: F \Rightarrow G$ une transformation naturelle entre pré-faisceaux. On vérifie que

$$\begin{array}{ccc} \text{Nat}(h_A, F) & \xrightarrow{\Phi_A^F} & F(A) \\ \eta_* \downarrow & & \downarrow \eta_A \\ \text{Nat}(h_A, G) & \xrightarrow{\Phi_A^G} & G(A) \end{array}$$

commute, où $\eta_*(\alpha) = \eta \circ \alpha$. Pour toute α ,

$$\eta_A(\Phi_A^F(\alpha)) = \eta_A(\alpha_A(\text{id}_A)) = (\eta \circ \alpha)_A(\text{id}_A) = \Phi_A^G(\eta_*(\alpha)). \quad \square$$

Remarque. La version covariante du lemme de Yoneda s'énonce comme suit. Pour tout foncteur $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ et tout $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, on a une bijection naturelle

$$\text{Nat}(h^A, G) \cong G(A), \quad \alpha \mapsto \alpha_A(\text{id}_A).$$

La preuve est entièrement analogue.

5.4 Corollaires du lemme de Yoneda

Corollaire 5.11 (Le plongement de Yoneda est pleinement fidèle). *Le foncteur $\mathbf{y}: \mathcal{C} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$, $A \mapsto h_A$, est pleinement fidèle. Autrement dit, pour tous objets A, B de $\mathcal{C}$,*

$$\mathbf{y}_{A,B}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \xrightarrow{\sim} \text{Nat}(h_A, h_B)$$

est une bijection.

Démonstration. Appliquons le lemme de Yoneda 5.10 au préfaisceau $F = h_B = \text{Hom}(-, B)$. On obtient la bijection naturelle

$$\Phi_A: \text{Nat}(h_A, h_B) \xrightarrow{\sim} h_B(A) = \text{Hom}(A, B).$$

Par construction, $\Phi_A(\alpha) = \alpha_A(\text{id}_A)$ pour toute transformation naturelle $\alpha: h_A \Rightarrow h_B$.

Or, par définition du plongement de Yoneda, pour tout morphisme $f: A \rightarrow B$, on a $\mathbf{y}(f) = f_*$ avec $(f_*)_C(g) = f \circ g$ pour tout $g \in \text{Hom}(C, A)$. Donc

$$\Phi_A(\mathbf{y}(f)) = (f_*)_A(\text{id}_A) = f \circ \text{id}_A = f.$$

Cela montre que $\Phi_A \circ \mathbf{y}_{A,B} = \text{id}_{\text{Hom}(A,B)}$, donc $\mathbf{y}_{A,B}$ est l'inverse de Φ_A , et en particulier c'est une bijection. $\square$

Corollaire 5.12. *Soient A, B des objets d'une catégorie localement petite $\mathcal{C}$. Alors*

$$h_A \cong h_B \quad \text{dans } \widehat{\mathcal{C}} \quad \Longleftrightarrow \quad A \cong B \quad \text{dans } \mathcal{C}.$$

De même, $h^A \cong h^B$ dans $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathbf{Set})$ si et seulement si $A \cong B$ dans $\mathcal{C}$.

Démonstration. $(\Leftarrow)$ Si $f: A \xrightarrow{\sim} B$ est un isomorphisme, alors $\mathbf{y}(f) = f_*: h_A \Rightarrow h_B$ est un isomorphisme dans $\widehat{\mathcal{C}}$ car $\mathbf{y}$ est un foncteur.

$(\Rightarrow)$ Supposons $\alpha: h_A \xrightarrow{\sim} h_B$ un isomorphisme de préfaisceaux. Puisque $\mathbf{y}$ est pleinement fidèle (corollaire 5.11), il existe un unique $f: A \rightarrow B$ tel que $\mathbf{y}(f) = \alpha$, et un unique $g: B \rightarrow A$ tel que $\mathbf{y}(g) = \alpha^{-1}$. Alors

$$\mathbf{y}(g \circ f) = \mathbf{y}(g) \circ \mathbf{y}(f) = \alpha^{-1} \circ \alpha = \text{id}_{h_A} = \mathbf{y}(\text{id}_A),$$

et la fidélité de $\mathbf{y}$ donne $g \circ f = \text{id}_A$. De même, $f \circ g = \text{id}_B$, donc f est un isomorphisme. $\square$

Corollaire 5.13. *Pour tout préfaisceau $F \in \widehat{\mathcal{C}}$ et tout objet $A \in \mathcal{C}$, les éléments de $F(A)$ correspondent bijectivement aux morphismes $h_A \rightarrow F$ dans $\widehat{\mathcal{C}}$. En particulier, les « éléments généralisés de type A » de F sont exactement les transformations naturelles $h_A \Rightarrow F$.*

Remarque. *Le lemme de Yoneda exprime le principe suivant : un objet est entièrement déterminé par ses relations avec tous les autres objets. Plus précisément, connaître le préfaisceau $h_A = \text{Hom}(-, A)$ revient à connaître A à isomorphisme unique près. Ce point de vue est central en géométrie algébrique, où les « points à valeurs dans S » d'un schéma X sont les morphismes $S \rightarrow X$, c'est-à-dire les éléments de $h_X(S)$.*

5.5 Foncteurs représentables

Définition 5.14 (Foncteur représentable). *Un préfaisceau $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ est dit **représentable** s'il existe un objet $A \in \mathcal{C}$ et un isomorphisme naturel $\alpha: h_A \xrightarrow{\sim} F$. L'objet A est appelé l'**objet représentant** de F , et le couple (A, α) est une **représentation** de F .*

*Par le lemme de Yoneda, donner un tel isomorphisme revient à donner un élément $\xi = \alpha_A(\text{id}_A) \in F(A)$ tel que pour tout objet B et tout $x \in F(B)$, il existe un unique $f: B \rightarrow A$ avec $F(f)(\xi) = x$. L'élément ξ est l'**élément universel**.*

Exemple 5.15. (i) **Foncteur oubli des groupes.** Le foncteur oubli $U: \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ est représenté par $\mathbb{Z}$, car $\text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(\mathbb{Z}, G) \cong U(G)$ via $\varphi \mapsto \varphi(1)$. L'élément universel est $1 \in U(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

(ii) **Foncteur ensemble de puissance.** Le foncteur $\mathcal{P}: \mathbf{Set}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ qui envoie X sur $\mathcal{P}(X) = \{A \subseteq X\}$ est représenté par l'ensemble $\{0, 1\}$: un sous-ensemble $A \subseteq X$ correspond à sa fonction caractéristique $\chi_A: X \rightarrow \{0, 1\}$.

(iii) **Produits.** Dans une catégorie $\mathcal{C}$ avec produits binaires, le foncteur $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ défini par $X \mapsto \text{Hom}(X, A) \times \text{Hom}(X, B)$ est représenté par $A \times B$.

(iv) **Grassmanniennes.** En géométrie algébrique, le foncteur de Grassmann $\text{Grass}(r, n): \mathbf{Sch}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ qui envoie un schéma S sur l'ensemble des sous-fibrés localement libres de rang r de $\mathcal{O}_S^n$ est représentable par la Grassmannienne $\text{Gr}(r, n)$.

Proposition 5.16. *Si F est un préfaisceau représentable, son objet représentant est unique à isomorphisme unique près.*

Démonstration. Si (A, α) et (B, β) sont deux représentations de F , alors $\beta^{-1} \circ \alpha: h_A \xrightarrow{\sim} h_B$ est un isomorphisme de préfaisceaux. Par le corollaire 5.12, $A \cong B$ dans $\mathcal{C}$. L'unicité de l'isomorphisme découle de la fidélité de $\mathbf{y}$. $\square$

5.6 Tout préfaisceau est colimite de représentables

Définition 5.17 (Catégorie des éléments). Soit $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ un préfaisceau. La **catégorie des éléments** de F , notée $\int_{\mathcal{C}} F$ ou $\text{el}(F)$, est la catégorie dont :

- les objets sont les paires (C, x) avec $C \in \mathcal{C}$ et $x \in F(C)$;
- un morphisme $(C, x) \rightarrow (C', x')$ est un morphisme $f: C \rightarrow C'$ dans $\mathcal{C}$ tel que $F(f)(x') = x$.

Proposition 5.18. Le foncteur de projection $\pi: \int_{\mathcal{C}} F \rightarrow \mathcal{C}$ défini par $\pi(C, x) = C$ et $\pi(f) = f$ est un foncteur fidèle. De plus, la catégorie $\int_{\mathcal{C}} F$ est petite lorsque $\mathcal{C}$ est petite.

Démonstration. La fidélité est immédiate puisque π est injectif sur les morphismes. Si $\mathcal{C}$ est petite, alors $\text{Ob}(\int_{\mathcal{C}} F) = \coprod_{C \in \mathcal{C}} F(C)$ est un ensemble, et de même pour les morphismes. $\square$

Théorème 5.19 (Tout préfaisceau est colimite de représentables). Soit $\mathcal{C}$ une catégorie petite et $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ un préfaisceau. Alors

$$F \cong \text{colim}_{(C, x) \in \int_{\mathcal{C}} F} h_C$$

dans $\widehat{\mathcal{C}}$, où la colimite est prise le long du foncteur $\int_{\mathcal{C}} F \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$, $(C, x) \mapsto h_C$.

Démonstration. Notons $G = \text{colim}_{(C, x) \in \int_{\mathcal{C}} F} h_C$. Par le lemme de Yoneda, pour tout préfaisceau P ,

$$\begin{aligned} \text{Nat}(G, P) &\cong \lim_{(C, x) \in (\int_{\mathcal{C}} F)^{\text{op}}} \text{Nat}(h_C, P) \\ &\cong \lim_{(C, x) \in (\int_{\mathcal{C}} F)^{\text{op}}} P(C). \end{aligned}$$

Un élément de cette limite est une famille compatible $(s_{(C, x)})_{(C, x) \in \int_{\mathcal{C}} F} \in \prod_{(C, x) \in \int_{\mathcal{C}} F} P(C)$ telle que pour tout morphisme $f: (C, x) \rightarrow (C', x')$ dans $\int_{\mathcal{C}} F$, on a $P(f)(s_{(C', x')}) = s_{(C, x)}$. Or une transformation naturelle $\eta: F \Rightarrow P$ est une famille $(\eta_C)_{C \in \mathcal{C}}$ avec $\eta_C: F(C) \rightarrow P(C)$ naturelle en C . La correspondance est $\eta \mapsto (\eta_C(x))_{(C, x) \in \int_{\mathcal{C}} F}$, et on vérifie que c'est une bijection. Ainsi $\text{Nat}(G, P) \cong \text{Nat}(F, P)$ naturellement en P , et le lemme de Yoneda (appliqué dans $\widehat{\mathcal{C}}$) donne $G \cong F$. $\square$

Remarque. Le théorème 5.19 est souvent appelé théorème de densité de Yoneda : les objets représentables forment une famille « dense » dans la catégorie des préfaisceaux, au sens où tout préfaisceau s'obtient par colimites à partir des représentables.

5.7 Exercices

Exercice 5.1. Soit G un groupe vu comme une catégorie $\mathbf{BG}$ à un seul objet $*$ avec $\mathrm{Hom}(*, *) = G$.

- (a) Montrer qu'un préfaisceau sur $\mathbf{BG}$ est la même chose qu'un G -ensemble (à droite).
- (b) Identifier l'image du plongement de Yoneda dans ce cas.
- (c) Énoncer et vérifier le lemme de Yoneda dans ce contexte : pour tout G -ensemble X , $\mathrm{Nat}(h_*, X) \cong X$ (en tant qu'ensembles).

Exercice 5.2. Soit $(P, \leq)$ un ensemble préordonné vu comme une catégorie.

- (a) Montrer qu'un préfaisceau sur P est un foncteur $P^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$, c'est-à-dire un ensemble $F(p)$ pour chaque $p \in P$ avec des applications de restriction $F(q) \rightarrow F(p)$ pour $p \leq q$, compatibles avec la composition.
- (b) Décrire le préfaisceau représentable h_p pour $p \in P$.
- (c) Interpréter le lemme de Yoneda dans ce cas.

Exercice 5.3. Montrer que tout foncteur représentable $h_A: \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ préserve les limites. (C'est-à-dire, h_A envoie les colimites de $\mathcal{C}$ en limites de $\mathbf{Set}$.)

Exercice 5.4. Montrer que la catégorie des éléments $\int_{\mathcal{C}} F$ est isomorphe à la catégorie comma $(\mathbf{y} \downarrow F)$, où $\mathbf{y}: \mathcal{C} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ est le plongement de Yoneda.

Exercice 5.5. (Lemme de co-Yoneda.) Soit $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ un foncteur covariant. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{C}$,

$$F(A) \cong \int^{C \in \mathcal{C}} \mathrm{Hom}(C, A) \times F(C),$$

où $\int^C$ désigne la coégalisatrice (coend).

Exercice 5.6. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie petite. Montrer que $\widehat{\mathcal{C}} = \text{Fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set})$ admet toutes les petites limites et colimites, calculées argument par argument.

Exercice 5.7. (Extension de Kan à gauche le long de Yoneda.) Soit $\mathcal{C}$ une catégorie petite, $\mathcal{D}$ une catégorie cocomplète, et $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur. Montrer que l'extension de Kan à gauche $\text{Lan}_{\mathbf{y}} G: \widehat{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{D}$ existe et est donnée par

$$(\text{Lan}_{\mathbf{y}} G)(F) = \text{colim}_{(C,x) \in \int_{\mathcal{C}} F} G(C).$$

Chapitre 6

Monades et algèbres

Contents

4.1	Définition par bijection naturelle	43
4.2	Unité et counité	44
4.3	Identités triangulaires	45
4.4	Équivalence des définitions	45
4.5	Exemples fondamentaux	46
4.6	Adjoints et limites	48
4.7	Le théorème de Freyd (GAFT)	49
4.8	Adjonctions et catégories comma	51
4.9	Propriétés supplémentaires	51
4.10	Monades issues d'adjonctions	52
4.11	Exercices	52

Les monades constituent un concept unificateur remarquable qui relie la théorie des adjonctions, l'algèbre universelle et l'informatique théorique. Toute adjonction engendre une monade ; réciproquement, toute monade provient d'une adjonction, et ce de deux manières canoniques (Eilenberg–Moore et Kleisli). Le théorème de Beck, résultat culminant de ce chapitre, caractérise les catégories qui peuvent être décrites comme des « catégories d'algèbres » sur une monade.

Ce chapitre suppose connue la théorie des adjonctions développée aux chapitres précédents.

6.1 Définition et premiers exemples

Définition 6.1 (Monade). Une **monade** sur une catégorie $\mathcal{C}$ est un triplet (T, η, μ) où :

- $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ est un endofoncteur ;
- $\eta: \text{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow T$ est une transformation naturelle appelée **unité** ;
- $\mu: T^2 \Rightarrow T$ est une transformation naturelle appelée **multiplication**,

satisfaisant les axiomes suivants :

- (i) **Associativité** : $\mu \circ T\mu = \mu \circ \mu T$, c'est-à-dire le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} T^3 & \xrightarrow{T\mu} & T^2 \\ \mu T \downarrow & & \downarrow \mu \\ T^2 & \xrightarrow{\mu} & T \end{array}$$

- (ii) **Unités** : $\mu \circ T\eta = \text{id}_T = \mu \circ \eta T$, c'est-à-dire :

$$\begin{array}{ccccc} T & \xrightarrow{T\eta} & T^2 & \xleftarrow{\eta T} & T \\ & \searrow & \downarrow \mu & \swarrow & \\ & & T & & \end{array}$$

Remarque. Une monade sur $\mathcal{C}$ est exactement un monoïde dans la catégorie monoïdale $(\text{End}(\mathcal{C}), \circ, \text{Id}_{\mathcal{C}})$ des endofoncteurs de $\mathcal{C}$, munie de la composition comme produit tensoriel.

Notation. Par abus de langage, on note souvent la monade simplement T , les transformations η et μ étant sous-entendues. On écrit parfois η^T et μ^T lorsqu'il y a ambiguïté.

Définition 6.2 (Morphisme de monades). Soient (S, η^S, μ^S) et (T, η^T, μ^T) deux monades sur $\mathcal{C}$. Un **morphisme de monades** $\sigma: S \rightarrow T$ est une transformation naturelle $\sigma: S \Rightarrow T$ telle que :

$$\sigma \circ \eta^S = \eta^T, \quad \sigma \circ \mu^S = \mu^T \circ (\sigma \star \sigma),$$

où $\sigma \star \sigma = \sigma T \circ S \sigma = T \sigma \circ \sigma S: S^2 \Rightarrow T^2$.

6.2 Monades issues d'adjonctions

Théorème 6.3. *Toute adjonction $(F \dashv G, \eta, \varepsilon) : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}$ engendre une monade (T, η, μ) sur $\mathcal{C}$, où*

$$T = G \circ F, \quad \mu = G\varepsilon F : T^2 = GF GF \Rightarrow GF = T.$$

Démonstration. L'unité $\eta : \text{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF = T$ est l'unité de l'adjonction. Il faut vérifier les axiomes de monade.

Associativité. On a $\mu \circ T\mu = G\varepsilon F \circ GF \cdot G\varepsilon F = G\varepsilon F \circ G(FG\varepsilon F) = G(\varepsilon F \circ FG\varepsilon F) = G(\varepsilon \cdot \varepsilon FGF) \dots$ Plus précisément, $\mu \circ T\mu$ a pour composante en C :

$$G(\varepsilon_{FC}) \circ GF(G(\varepsilon_{FC})) = G(\varepsilon_{FC} \circ FG(\varepsilon_{FC})).$$

Et $\mu \circ \mu T$ a pour composante en C :

$$G(\varepsilon_{FC}) \circ G(\varepsilon_{GFFC}) = G(\varepsilon_{FC} \circ \varepsilon_{GFFC}).$$

Or la naturalité de ε appliquée au morphisme $\varepsilon_{FC} : FGFC \rightarrow FC$ donne $\varepsilon_{FC} \circ FG(\varepsilon_{FC}) = \varepsilon_{FC} \circ \varepsilon_{GFFC}$, ce qui est exactement l'identité de gauche.

Unité à gauche. $\mu \circ \eta T$ a pour composante en C : $G(\varepsilon_{FC}) \circ \eta_{GFC}$. Par l'identité triangulaire $G\varepsilon \circ \eta G = \text{id}_G$, en l'évaluant sur FC on obtient $G(\varepsilon_{FC}) \circ \eta_{GFC} = \text{id}_{GFC} = \text{id}_{TC}$.

Unité à droite. $\mu \circ T\eta$ a pour composante en C : $G(\varepsilon_{FC}) \circ GF(\eta_C)$. Par l'identité triangulaire $\varepsilon F \circ F\eta = \text{id}_F$, en l'évaluant sur C on obtient $\varepsilon_{FC} \circ F(\eta_C) = \text{id}_{FC}$, d'où en appliquant G : $G(\varepsilon_{FC}) \circ GF(\eta_C) = G(\text{id}_{FC}) = \text{id}_{GFC}$. $\square$

Exemple 6.4. (i) *Monade libre sur les groupes.* L'adjonction libre/oubli $F \dashv U : \mathbf{Grp} \rightleftarrows \mathbf{Set}$ engendre la monade $T = UF$ sur $\mathbf{Set}$: pour un ensemble X , $T(X)$ est l'ensemble sous-jacent au groupe libre $F(X)$. L'unité $\eta_X : X \rightarrow T(X)$ envoie chaque élément sur le mot de longueur 1 correspondant. La multiplication $\mu_X : T^2(X) \rightarrow T(X)$ « aplattit » les mots de mots en les concaténant.

(ii) *Monade libre sur les modules.* Pour un anneau R , l'adjonction libre/oubli $F \dashv U : R\text{-Mod} \rightleftarrows \mathbf{Set}$ donne $T(X) = \bigoplus_{x \in X} R \cong R^{(X)}$. L'unité envoie x sur le vecteur de base e_x et la multiplication est la R -linéarisation.

(iii) *Monade ensemble de puissance.* Le foncteur $\mathcal{P} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ avec $\eta_X(x) = \{x\}$ et $\mu_X(\mathfrak{A}) = \bigcup \mathfrak{A}$ pour $\mathfrak{A} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ est une mo-

nade. Elle provient de l'auto-adjonction $\mathcal{P} \dashv \mathcal{P}^{\text{op}}$ (à travers l'isomorphisme $\mathbf{Set}^{\text{op}} \cong \mathbf{CABA}$).

- (iv) **Monades en informatique.** En programmation fonctionnelle (*Haskell*, *Scala*), les monades modélisent les effets de calcul. La monade **Maybe** correspond au foncteur $T(X) = X \sqcup \{*\}$ (valeur optionnelle). La monade **List** correspond au foncteur monoïde libre $T(X) = \coprod_{n \geq 0} X^n$. La monade d'état $T(X) = (X \times S)^S$ pour un ensemble d'états S modélise les calculs avec état mutable.

Proposition 6.5. *Dualement, toute adjonction $(F \dashv G)$ engendre une comonade (K, ε, δ) sur $\mathcal{D}$, où $K = F \circ G$, ε est la co-unité de l'adjonction, et $\delta = F\eta G: K \Rightarrow K^2$.*

Démonstration. C'est le dual du théorème 6.3, en considérant l'adjonction dans les catégories opposées. $\square$

6.3 Algèbres d'Eilenberg–Moore

La question réciproque se pose : toute monade provient-elle d'une adjonction ? La réponse est oui, et il y a (au moins) deux constructions canoniques. Nous commençons par celle d'Eilenberg–Moore.

Définition 6.6 (*T*-algèbre). *Soit (T, η, μ) une monade sur $\mathcal{C}$. Une *T*-algèbre (ou algèbre d'Eilenberg–Moore) est un couple (A, a) où :*

- $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ est un objet (le **porteur**) ;
- $a: T(A) \rightarrow A$ est un morphisme (l'**application de structure**),

satisfaisant :

- (i) **Unité** : $a \circ \eta_A = \text{id}_A$:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & T(A) \\ & \searrow & \downarrow a \\ & & A \end{array}$$

(ii) **Associativité** : $a \circ \mu_A = a \circ T(a)$:

$$\begin{array}{ccc} T^2(A) & \xrightarrow{T(a)} & T(A) \\ \mu_A \downarrow & & \downarrow a \\ T(A) & \xrightarrow{a} & A \end{array}$$

Définition 6.7 (Morphisme de T -algèbres). *Un **morphisme de T -algèbres** de (A, a) vers (B, b) est un morphisme $f: A \rightarrow B$ dans $\mathcal{C}$ tel que $f \circ a = b \circ T(f)$:*

$$\begin{array}{ccc} T(A) & \xrightarrow{T(f)} & T(B) \\ a \downarrow & & \downarrow b \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Définition 6.8 (Catégorie d'Eilenberg–Moore). *La **catégorie d'Eilenberg–Moore** de la monade T , notée $\mathcal{C}^T$, est la catégorie dont les objets sont les T -algèbres et les morphismes sont les morphismes de T -algèbres. La composition et les identités sont héritées de $\mathcal{C}$.*

Exemple 6.9. (i) **Monade libre sur les groupes.** *La monade $T = UF$ sur **Set** (foncteur mot). Une T -algèbre est un ensemble X muni d'une application $a: T(X) \rightarrow X$ qui est associative et unitale. Cela revient exactement à munir X d'une structure de groupe. Ainsi $\mathbf{Set}^T \simeq \mathbf{Grp}$.*

(ii) **Monade ensemble de puissance.** *Les $\mathcal{P}$ -algèbres sur **Set** sont les treillis complets avec morphismes préservant les suprema arbitraires.*

(iii) **Algèbre libre.** *Pour toute monade T et tout objet $C \in \mathcal{C}$, le couple $(T(C), \mu_C)$ est une T -algèbre, appelée la **T -algèbre libre** engendrée par C . En effet, $\mu_C \circ \eta_{TC} = \text{id}_{TC}$ (unité de droite) et $\mu_C \circ \mu_{TC} = \mu_C \circ T\mu_C$ (associativité).*

Théorème 6.10. *Soit (T, η, μ) une monade sur $\mathcal{C}$. Il existe une adjonc-*

tion

$$F^T \dashv U^T : \mathcal{C}^T \rightleftarrows \mathcal{C}$$

telle que la monade associée est (T, η, μ) , où :

- le foncteur d'oubli $U^T : \mathcal{C}^T \rightarrow \mathcal{C}$ est défini par $U^T(A, a) = A$ et $U^T(f) = f$;
- le foncteur libre $F^T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^T$ est défini par $F^T(C) = (TC, \mu_C)$ et $F^T(f) = T(f)$.

Démonstration. F^T est bien défini. Pour tout $C \in \mathcal{C}$, (TC, μ_C) est une T -algèbre libre (exemple 6.9(iii)). Pour un morphisme $f : C \rightarrow D$, $T(f) : TC \rightarrow TD$ est un morphisme de T -algèbres car $T(f) \circ \mu_C = \mu_D \circ T^2(f)$ par naturalité de μ .

Adjonction. On définit l'unité $\eta_C^{\text{adj}} = \eta_C : C \rightarrow U^T F^T(C) = TC$ et la co-unité $\varepsilon_{(A, a)}^{\text{adj}} = a : F^T U^T(A, a) = (TA, \mu_A) \rightarrow (A, a)$. Vérifions que a est un morphisme de T -algèbres : $a \circ \mu_A = a \circ Ta$ par l'axiome d'associativité de (A, a) .

Identités triangulaires.

- $U^T \varepsilon \circ \eta_{U^T} : U^T \Rightarrow U^T$: pour (A, a) , la composante est $a \circ \eta_A = \text{id}_A$ par l'axiome d'unité. Donc c'est id_{U^T} .
- $\varepsilon_{F^T} \circ F^T \eta : F^T \Rightarrow F^T$: pour C , la composante est $\mu_C \circ T\eta_C = \text{id}_{TC}$ par l'axiome d'unité de droite de la monade. Donc c'est id_{F^T} .

La monade associée est T . $U^T F^T(C) = TC$, et la multiplication est $U^T \varepsilon_{F^T C} = \mu_C$. L'unité est η_C . $\square$

6.4 Catégorie de Kleisli

Définition 6.11 (Catégorie de Kleisli). Soit (T, η, μ) une monade sur $\mathcal{C}$. La **catégorie de Kleisli** $\mathcal{C}_T$ est définie par :

- $\text{Ob}(\mathcal{C}_T) = \text{Ob}(\mathcal{C})$;
- pour $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C}_T)$, on pose $\text{Hom}_{\mathcal{C}_T}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, TB)$;
- la composition de $f : A \rightarrow TB$ et $g : B \rightarrow TC$ dans $\mathcal{C}_T$ est

$$g \circ_T f := \mu_C \circ Tg \circ f : A \rightarrow TC;$$

- l'identité de A dans $\mathcal{C}_T$ est $\eta_A : A \rightarrow TA$.

Proposition 6.12. *La catégorie de Kleisli $\mathcal{C}_T$ est bien une catégorie.*

Démonstration. Associativité. Pour $f: A \rightarrow TB$, $g: B \rightarrow TC$, $h: C \rightarrow TD$,

$$\begin{aligned} h \circ_T (g \circ_T f) &= \mu_D \circ Th \circ (\mu_C \circ Tg \circ f) \\ &= \mu_D \circ Th \circ \mu_C \circ Tg \circ f \\ &= \mu_D \circ \mu_{TD} \circ T^2h \circ Tg \circ f \quad (\text{naturalité de } \mu). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} (h \circ_T g) \circ_T f &= \mu_D \circ T(\mu_D \circ Th \circ g) \circ f \\ &= \mu_D \circ T\mu_D \circ T^2h \circ Tg \circ f. \end{aligned}$$

Par l'associativité de la monade $\mu_D \circ \mu_{TD} = \mu_D \circ T\mu_D$, les deux expressions sont égales.

Unité à gauche. $f \circ_T \eta_A = \mu_B \circ Tf \circ \eta_A = \mu_B \circ \eta_{TB} \circ f = f$ par naturalité de η et l'axiome d'unité.

Unité à droite. $\eta_B \circ_T f = \mu_B \circ T\eta_B \circ f = \text{id}_{TB} \circ f = f$ par l'axiome d'unité de la monade. $\square$

Théorème 6.13. *Il existe une adjonction $F_T \dashv G_T: \mathcal{C}_T \rightleftarrows \mathcal{C}$ telle que la monade associée est T , où :*

- $F_T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_T$ est défini par $F_T(A) = A$ sur les objets et $F_T(f) = \eta_B \circ f$ pour $f: A \rightarrow B$;
- $G_T: \mathcal{C}_T \rightarrow \mathcal{C}$ est défini par $G_T(A) = TA$ et $G_T(f) = \mu_B \circ Tf$ pour $f: A \rightarrow TB$.

Démonstration. La vérification est directe. L'unité de l'adjonction est $\eta_A: A \rightarrow G_T F_T(A) = TA$, et la co-unité est $\varepsilon_A = \text{id}_{TA}: F_T G_T(A) = TA \rightarrow TA$ dans $\mathcal{C}_T$ (vue comme $\text{id}_{TA} \in \text{Hom}(TA, TA)$). Les identités triangulaires se vérifient à l'aide des axiomes de monade. $\square$

Remarque. *La catégorie de Kleisli est initiale et celle d'Eilenberg–Moore est terminale parmi les adjonctions engendrant la monade T . Plus précisément, si $(F \dashv G): \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}$ est une adjonction engendrant T , il existe des foncteurs uniques (à isomorphisme unique près) formant le diagramme*

commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{D} \\ & \nearrow J & \downarrow K \\ \mathcal{C}_T & & \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathcal{C}^T \end{array}$$

où J est pleinement fidèle et K est le foncteur de comparaison.

6.5 Théorème de monadicité de Beck

Le théorème de Beck caractérise les adjonctions pour lesquelles le foncteur de comparaison est une équivalence.

Définition 6.14 (Paire coégalisatrice scindée). *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Une paire coégalisatrice scindée est un diagramme*

$$\begin{array}{ccccc} & \overset{s}{\curvearrowright} & & \overset{t}{\curvearrowright} & \\ A & \xrightarrow{f} & B & \xleftarrow{e} & C \\ & \underset{g}{\curvearrowright} & & & \end{array}$$

tel que $e \circ f = e \circ g$, $e \circ t = \text{id}_C$, $f \circ s = \text{id}_B$ et $g \circ s = t \circ e$.

Lemme 6.15. *Toute paire coégalisatrice scindée est un coégalisateur absolu, c'est-à-dire que e est le coégalisateur de (f, g) et ce coégalisateur est préservé par tout foncteur.*

Démonstration. Montrons que e est le coégalisateur de (f, g) . On sait que $e \circ f = e \circ g$. Soit $h: B \rightarrow D$ tel que $h \circ f = h \circ g$. Posons $\bar{h} = h \circ t: C \rightarrow D$. Alors $\bar{h} \circ e = h \circ t \circ e = h \circ g \circ s \dots$ Plus précisément :

$$\bar{h} \circ e = h \circ t \circ e.$$

Or $g \circ s = t \circ e$, donc $t \circ e = g \circ s$ et

$$h \circ t \circ e = h \circ g \circ s = h \circ f \circ s = h \circ \text{id}_B = h.$$

Donc $\bar{h} \circ e = h$.

Pour l'unicité, si $\bar{h}' \circ e = h$, alors $\bar{h}' = \bar{h}' \circ e \circ t = h \circ t = \bar{h}$.

Puisque les identités scindantes se transportent par tout foncteur U (en appliquant U aux morphismes s, t), le coégalisateur est préservé par U . $\square$

Définition 6.16 (Foncteur de comparaison). Soit $(F \dashv G, \eta, \varepsilon)$ une adjonction $\mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}$ engendrant la monade $T = GF$. Le **foncteur de comparaison** est le foncteur $K: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}^T$ défini par :

- $K(D) = (GD, G\varepsilon_D)$ pour tout $D \in \mathcal{D}$;
- $K(f) = Gf$ pour tout morphisme f dans $\mathcal{D}$.

Proposition 6.17. Le foncteur de comparaison K est bien défini : $(GD, G\varepsilon_D)$ est une T -algèbre pour tout D .

Démonstration. Unité. $G\varepsilon_D \circ \eta_{GD} = \text{id}_{GD}$ par l'identité triangulaire.

Associativité. $G\varepsilon_D \circ \mu_{GD} = G\varepsilon_D \circ G\varepsilon_{FGD} = G(\varepsilon_D \circ \varepsilon_{FGD})$. Par ailleurs, $G\varepsilon_D \circ GF(G\varepsilon_D) = G(\varepsilon_D \circ FG\varepsilon_D)$. La naturalité de ε appliquée à ε_D donne $\varepsilon_D \circ FG\varepsilon_D = \varepsilon_D \circ \varepsilon_{FGD}$. $\square$

Définition 6.18 (Foncteur monadique). Un foncteur $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ est dit **monadique** s'il admet un adjoint à gauche F et si le foncteur de comparaison $K: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}^T$ (pour la monade $T = GF$) est une équivalence de catégories. Il est **strictement monadique** si K est un isomorphisme de catégories.

Définition 6.19 (G -paire coégalisatrice scindée). Soit $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur. Une paire de morphismes $f, g: A \rightrightarrows B$ dans $\mathcal{D}$ est une **G -paire coégalisatrice scindée** si la paire $Gf, Gg: GA \rightrightarrows GB$ admet une paire coégalisatrice scindée dans $\mathcal{C}$.

Théorème 6.20 (Théorème de monadicité de Beck). Soit $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur admettant un adjoint à gauche F . Alors G est monadique si et seulement si :

- (i) G reflète les isomorphismes (c'est-à-dire : si Gf est un isomorphisme dans $\mathcal{C}$, alors f est un isomorphisme dans $\mathcal{D}$) ;
- (ii) $\mathcal{D}$ admet les coégalisateurs de toutes les G -paires coégalisatrices scindées, et G les préserve.

Démonstration. La preuve se décompose en deux implications.

($\Rightarrow$) **Condition nécessaire.**

Supposons G monadique, c'est-à-dire que $K: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}^T$ est une équivalence.

(i) *G reflète les isomorphismes.* Puisque $U^T \circ K = G$ et que K est une équivalence, il suffit de montrer que U^T reflète les isomorphismes. Soit $f: (A, a) \rightarrow (B, b)$ un morphisme de T -algèbres tel que $U^T(f) = f: A \rightarrow B$ est un isomorphisme dans $\mathcal{C}$. Alors f^{-1} existe dans $\mathcal{C}$, et il faut montrer que f^{-1} est un morphisme de T -algèbres, c'est-à-dire $f^{-1} \circ b = a \circ T(f^{-1})$. Or $f \circ a = b \circ Tf$ donne $a = f^{-1} \circ b \circ Tf$, donc $a \circ T(f^{-1}) = f^{-1} \circ b \circ Tf \circ T(f^{-1}) = f^{-1} \circ b$.

(ii) *Existence et préservation des coégalisateurs.* Puisque K est une équivalence, il suffit de montrer le résultat pour $\mathcal{C}^T$. Si $(f, g): (A, a) \rightrightarrows (B, b)$ est une paire dans $\mathcal{C}^T$ telle que $U^T f, U^T g$ admet une paire coégalisatrice scindée dans $\mathcal{C}$, alors le coégalisateur scindé est absolu (lemme 6.15) et on peut le relever en une T -algèbre.

($\Leftarrow$) Condition suffisante.

Supposons (i) et (ii). Montrons que K est une équivalence en vérifiant qu'il est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.

K est fidèle. K est fidèle car $U^T \circ K = G$ et U^T est fidèle (comme foncteur d'oubli d'algèbres).

K est plein. Soit $\varphi: K(D) \rightarrow K(D')$ un morphisme de T -algèbres, c'est-à-dire $\varphi: GD \rightarrow GD'$ avec $\varphi \circ G\varepsilon_D = G\varepsilon_{D'} \circ GF\varphi$. Considérons le diagramme dans $\mathcal{D}$:

$$FGFGD \xrightleftharpoons[\varepsilon_{FGD}]{FG\varepsilon_D} FGD \xrightarrow{\varepsilon_D} D$$

En appliquant G , on obtient une paire coégalisatrice scindée (les sections proviennent de η). Par (ii), ε_D est le coégalisateur de cette paire dans $\mathcal{D}$. De même pour D' . La condition de morphisme de T -algèbres sur φ assure que $F\varphi: FGD \rightarrow FGD'$ est compatible, et par la propriété universelle du coégalisateur, il existe un unique $f: D \rightarrow D'$ avec $Gf = \varphi$. Donc $K(f) = \varphi$.

K est essentiellement surjectif. Soit (A, a) une T -algèbre. Considérons la paire

$$FTA \xrightleftharpoons[\varepsilon_{FA \circ FT(\eta_A)}]{Fa} FA$$

Plus précisément, on considère les deux morphismes $F(a), \varepsilon_{FA}: FGFA = FTA \rightrightarrows FA$. En appliquant G , on obtient $GFa, G\varepsilon_{FA}: GFGFA \rightrightarrows GFA$, qui est une G -paire coégalisatrice scindée (les sections sont données par η_{GFA} et $GF\eta_A$, en utilisant les axiomes de la T -algèbre).

Par (ii), soit $e: FA \rightarrow D$ le coégalisateur de $(F(a), \varepsilon_{FA})$ dans $\mathcal{D}$, préservé par G . Alors $Ge: GFA = TA \rightarrow GD$ est le coégalisateur de $(GFa, G\varepsilon_{FA}) = (Ta, \mu_A)$ dans $\mathcal{C}$. Or a coégalise cette paire ($a \circ Ta = a \circ \mu_A$ par l'axiome d'associativité), donc il existe un unique $\bar{a}: GD \rightarrow A$ avec $\bar{a} \circ Ge = a$.

On vérifie que $\bar{a}$ est un isomorphisme. En effet, $\bar{a} \circ Ge \circ \eta_A = a \circ \eta_A = \text{id}_A$, et on montre que $Ge \circ \eta_A \circ \bar{a} = \text{id}_{GD}$ en utilisant que Ge est un épimorphisme (étant un coégalisateur). Donc $G(\bar{a})$... plus précisément, on montre que $\bar{a}$ induit un isomorphisme $GD \cong A$ et par (i) (G reflète les isomorphismes), l'isomorphisme se relève.

Ainsi $(A, a) \cong K(D) = (GD, G\varepsilon_D)$ dans $\mathcal{C}^T$. $\square$

Remarque. Il existe une version « stricte » du théorème de Beck : G est strictement monadique si et seulement si G reflète les isomorphismes et $\mathcal{D}$ admet les coégalisateurs de toutes les paires réflexives (c'est-à-dire $f, g: A \rightrightarrows B$ avec une section commune $s: B \rightarrow A$, $fs = gs = \text{id}_B$), et G les préserve.

On utilise aussi fréquemment le théorème de monadicité par coégalisateurs réflexifs : si G crée les coégalisateurs de G -paires coégalisatrices scindées (au lieu de simplement les préserver), alors G est strictement monadique.

6.6 Applications : catégories algébriques

Le théorème de Beck permet de reconnaître les catégories « algébriques », c'est-à-dire celles qui sont monadiques sur **Set**.

Définition 6.21 (Catégorie algébrique). Une catégorie $\mathcal{D}$ est dite **algébrique** (au sens de la monadicité) si le foncteur d'oubli $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Set}$ est monadique.

Corollaire 6.22. Les catégories **Grp**, **Ab**, $R\text{-Mod}$, **Ring** sont monadiques sur **Set**.

Démonstration. Nous vérifions les conditions du théorème de Beck pour le foncteur d'oubli $U: \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ (les autres cas sont analogues).

U admet un adjoint à gauche. C'est le foncteur groupe libre $F: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Grp}$.

U reflète les isomorphismes. Un morphisme de groupes $\varphi: G \rightarrow H$ tel que $U\varphi$ est bijectif est un isomorphisme de groupes (l'inverse ensembliste est automatiquement un morphisme de groupes : $\varphi^{-1}(xy) = \varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(y)$ car φ est un morphisme bijectif).

Grp admet les coégalisateurs des U -paires coégalisatrices scindées et U les préserve. Plus généralement, **Grp** admet tous les coégalisateurs (c'est

la catégorie quotient par la relation d'équivalence engendrée). Si la paire est U -scindée, le coégalisateur dans **Grp** est préservé par U car les paires coégalisatrices scindées donnent des coégalisateurs absolus (lemme 6.15). $\square$

Exemple 6.23. (i) **Top n'est pas monadique sur Set.** Le foncteur d'oubli $U: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ ne reflète pas les isomorphismes : une bijection continue n'est pas nécessairement un homéomorphisme. Donc **Top** n'est pas monadique sur **Set**.

(ii) **Les espaces de Hausdorff compacts.** Le foncteur d'oubli $U: \mathbf{CHaus} \rightarrow \mathbf{Set}$ est monadique (théorème de Manes). La monade associée est la monade ultrafiltres $\beta: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$, qui envoie un ensemble sur l'ensemble de ses ultrafiltres.

Proposition 6.24. Soit $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur monadique. Alors :

- (i) G reflète les isomorphismes ;
- (ii) G crée les limites que $\mathcal{C}$ possède (en particulier $\mathcal{D}$ est complète si $\mathcal{C}$ l'est) ;
- (iii) G est fidèle et conservatif.

Démonstration. (i) est le théorème de Beck. Pour (ii), on montre que U^T crée les limites. Soit $\{(A_i, a_i)\}$ un diagramme de T -algèbres et $L = \lim_i A_i$ dans $\mathcal{C}$ avec projections π_i . Alors $TL = T(\lim_i A_i)$ et on définit $\ell: TL \rightarrow L$ comme l'unique morphisme tel que $\pi_i \circ \ell = a_i \circ T\pi_i$ pour tout i . On vérifie que (L, ℓ) est une T -algèbre et que c'est la limite dans $\mathcal{C}^T$. Comme K est une équivalence, le résultat se transporte à $\mathcal{D}$.

(iii) découle de (i) et de l'existence de l'adjoint à gauche. $\square$

Théorème 6.25 (Critère de monadicité de Beck simplifié). Soit $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur admettant un adjoint à gauche. Si G reflète les isomorphismes et si $\mathcal{D}$ admet tous les coégalisateurs réflexifs et G les préserve, alors G est monadique.

Démonstration. Toute G -paire coégalisatrice scindée est en particulier réflexive (la section s fournit la section commune). Donc les hypothèses du théorème de Beck 6.20 sont satisfaites. $\square$

6.7 Exercices

Exercice 6.1. Une monade (T, η, μ) est dite **idempotente** si $\mu: T^2 \Rightarrow T$ est un isomorphisme naturel.

- (a) Montrer que T est idempotente si et seulement si $T\eta = \eta T: T \Rightarrow T^2$.
- (b) Montrer que T est idempotente si et seulement si $U^T: \mathcal{C}^T \rightarrow \mathcal{C}$ est pleinement fidèle.
- (c) En déduire que les T -algèbres correspondent à une sous-catégorie pleine réflexive de $\mathcal{C}$.

Exercice 6.2. Soit T la monade **Maybe** sur **Set** : $T(X) = X \sqcup \{\perp\}$, $\eta_X(x) = x$, $\mu_X(x) = x$ si $x \in X$ et $\mu_X(\perp) = \perp$.

- (a) Vérifier les axiomes de monade.
- (b) Décrire la catégorie de Kleisli **Set** _{T} : quels sont les morphismes de A vers B ? Interpréter comme des fonctions partielles.
- (c) Décrire les T -algèbres (catégorie d'Eilenberg–Moore).

Exercice 6.3. Soit $T: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ le foncteur qui envoie X sur l'ensemble des distributions de probabilité finiment supportées sur X :

$$T(X) = \left\{ p: X \rightarrow [0, 1] \mid \text{supp}(p) \text{ fini, } \sum_{x \in X} p(x) = 1 \right\}.$$

- (a) Définir η et μ pour en faire une monade.
- (b) Identifier les T -algèbres comme des espaces convexes (ensembles munis de combinaisons convexes).

Exercice 6.4. Soit $(F \dashv G, \eta, \varepsilon)$ une adjonction engendrant la monade T et la comonade K .

- (a) Montrer que les identités triangulaires de l'adjonction sont exactement ce qu'il faut pour que η et $\mu = G\varepsilon F$ satisfassent les axiomes de monade.
- (b) Montrer que si F est pleinement fidèle, alors η est un isomorphisme naturel, et T est idempotente.
- (c) Montrer que si G est pleinement fidèle, alors ε est un isomorphisme naturel, et K est idempotente.

Exercice 6.5. Soit T une monade sur $\mathcal{C}$.

- (a) Montrer que le foncteur libre $F^T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^T$ préserve les colimites.
- (b) Montrer que toute T -algèbre (A, a) est le coégalisateur dans $\mathcal{C}^T$ de la paire

$$F^T T(A) \begin{array}{c} \xrightarrow{F^T(a)} \\ \xrightarrow{\varepsilon_{F^T(A)}} \end{array} F^T(A)$$

c'est-à-dire que toute algèbre est un coégalisateur d'algèbres libres.

Exercice 6.6. Donner un exemple explicite montrant que le foncteur d'oubli $U: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ ne reflète pas les isomorphismes. En déduire que $\mathbf{Top}$ n'est pas monadique sur $\mathbf{Set}$.

Exercice 6.7. Soient S et T deux monades sur $\mathcal{C}$. Une **loi distributive** de S sur T est une transformation naturelle $\lambda: TS \Rightarrow ST$ compatible avec les unités et multiplications des deux monades.

- (a) Écrire les quatre diagrammes de compatibilité que λ doit satisfaire.
- (b) Montrer qu'une loi distributive λ définit une monade ST sur $\mathcal{C}$ avec unité $\eta^S \eta^T$ et multiplication $\mu^S \mu^T \circ S\lambda T$.
- (c) Donner un exemple avec $S = (-) \times M$ (monade écrivain pour un monoïde M) et $T = (-)^R$ (monade lecteur pour un ensemble R).

Exercice 6.8. (Monade de codensité.) Soit $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur qui n'admet pas nécessairement d'adjoint à gauche. On définit l'extension de Kan à droite $\text{Ran}_G G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ (lorsqu'elle existe).

- (a) Montrer que $T = \text{Ran}_G G$ est naturellement muni d'une structure de monade, appelée la **monade de codensité** de G .
- (b) Montrer que lorsque G admet un adjoint à gauche F , la monade de codensité coïncide avec GF .
- (c) Pour $G: \mathbf{FinSet} \hookrightarrow \mathbf{Set}$ l'inclusion, montrer que la monade de codensité est la monade des ultrafiltres β .

Chapitre 7

Catégories abéliennes et suites exactes

Contents

5.1	Préfaisceaux et foncteurs Hom	56
5.2	Le plongement de Yoneda	58
5.3	Le lemme de Yoneda	59
5.4	Corollaires du lemme de Yoneda	61
5.5	Foncteurs représentables	63
5.6	Tout préfaisceau est colimite de représentables . .	64
5.7	Exercices	65

Les catégories abéliennes constituent le cadre algébrique dans lequel se développe l'algèbre homologique. Introduites par Grothendieck dans son célèbre article *Tôhoku* (1957), elles axiomatisent les propriétés essentielles des catégories de modules et de faisceaux qui permettent de définir les foncteurs dérivés et de manipuler les suites exactes. Dans ce chapitre, nous construisons la théorie pas à pas : catégories pré-additives, additives, puis abéliennes, avant d'énoncer et de démontrer les lemmes fondamentaux (serpent, cinq) qui sont les outils de base du calcul homologique.

7.1 Catégories pré-additives

Définition 7.1 (Catégorie pré-additive). Une catégorie $\mathcal{A}$ est dite **pré-additive** (ou **Ab-catégorie**) si, pour tous objets $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{A})$, l'ensemble $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ est muni d'une structure de groupe abélien telle que la composition

$$\circ: \text{Hom}_{\mathcal{A}}(B, C) \times \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, C)$$

est bilinéaire : pour tous $f, f': A \rightarrow B$ et $g, g': B \rightarrow C$,

$$g \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f', \quad (g + g') \circ f = g \circ f + g' \circ f.$$

Exemple 7.2. (i) Pour tout anneau R , la catégorie $R\text{-Mod}$ est pré-additive : si $f, g: M \rightarrow N$ sont des R -morphisms, on pose $(f + g)(m) = f(m) + g(m)$.

(ii) La catégorie **Ab** des groupes abéliens est le cas $R = \mathbb{Z}$.

(iii) La catégorie **Set** n'est pas pré-additive, car $\text{Hom}_{\text{Set}}(A, B)$ n'a pas de structure naturelle de groupe abélien (sauf cas dégénérés).

Remarque. Dans une catégorie pré-additive, chaque $\text{Hom}(A, B)$ possède un élément neutre $0_{A,B}$ pour l'addition. On a $0_{B,C} \circ f = 0_{A,C}$ et $g \circ 0_{A,B} = 0_{A,C}$ pour tous $f: A \rightarrow B$ et $g: B \rightarrow C$.

Définition 7.3 (Foncteur additif). Un foncteur $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ entre catégories pré-additives est **additif** si, pour tous objets A, B et tous morphismes $f, g: A \rightarrow B$,

$$F(f + g) = F(f) + F(g).$$

Autrement dit, $F_{A,B}: \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(FA, FB)$ est un morphisme de groupes abéliens.

7.2 Catégories additives et biproduits

Définition 7.4 (Objet nul). Un objet $0 \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ est un **objet nul** s'il est à la fois initial et terminal, c'est-à-dire si $\text{Hom}(0, A)$ et $\text{Hom}(A, 0)$ sont des singletons pour tout objet A .

Définition 7.5 (Biproduit). Soit $\mathcal{A}$ une catégorie pré-additive possédant un objet nul. Un **biproduit** de deux objets A, B est un diagramme

$$A \xrightleftharpoons[\iota_A]{\pi_A} A \oplus B \xrightleftharpoons[\iota_B]{\pi_B} B$$

vérifiant :

- (a) $\pi_A \circ \iota_A = \text{id}_A$, $\pi_B \circ \iota_B = \text{id}_B$;
- (b) $\pi_B \circ \iota_A = 0$, $\pi_A \circ \iota_B = 0$;
- (c) $\iota_A \circ \pi_A + \iota_B \circ \pi_B = \text{id}_{A \oplus B}$.

Proposition 7.6. Dans une catégorie pré-additive, un biproduit $A \oplus B$ est simultanément un produit $(A \oplus B, \pi_A, \pi_B)$ et un coproduit $(A \oplus B, \iota_A, \iota_B)$.

Démonstration. Montrons que $A \oplus B$ est un produit. Soit X un objet muni de morphismes $f: X \rightarrow A$ et $g: X \rightarrow B$. Posons $h = \iota_A \circ f + \iota_B \circ g: X \rightarrow A \oplus B$. Alors

$$\pi_A \circ h = \pi_A \circ \iota_A \circ f + \pi_A \circ \iota_B \circ g = f + 0 = f,$$

et de même $\pi_B \circ h = g$. Pour l'unicité, si h' vérifie $\pi_A \circ h' = f$ et $\pi_B \circ h' = g$, alors

$$h' = (\iota_A \circ \pi_A + \iota_B \circ \pi_B) \circ h' = \iota_A \circ f + \iota_B \circ g = h.$$

L'argument dual montre que c'est un coproduit. $\square$

Définition 7.7 (Catégorie additive). Une catégorie $\mathcal{A}$ est **additive** si :

- (i) $\mathcal{A}$ est pré-additive ;
- (ii) $\mathcal{A}$ possède un objet nul ;
- (iii) tout couple d'objets (A, B) admet un biproduit $A \oplus B$.

Exemple 7.8. (i) $R\text{-Mod}$ est additive pour tout anneau R , avec $M \oplus N$ la somme directe usuelle.

(ii) $\mathbf{Ab}$ est additive.

(iii) La catégorie des espaces vectoriels de dimension finie $\mathbf{Vect}_k^{\text{fd}}$ est additive.

Proposition 7.9 (Matrices de morphismes). Dans une catégorie additive, un morphisme $f: A_1 \oplus A_2 \rightarrow B_1 \oplus B_2$ est entièrement déterminé par

la matrice

$$f \longleftrightarrow \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}, \quad f_{ij} = \pi_{B_i} \circ f \circ \iota_{A_j} : A_j \rightarrow B_i,$$

et la composition correspond au produit matriciel.

Démonstration. On a $f = \sum_{i,j} \iota_{B_i} \circ f_{ij} \circ \pi_{A_j}$ par la condition (c) du biproduit appliquée au domaine et au codomaine. La vérification du produit matriciel pour la composition est un calcul direct utilisant les relations d'orthogonalité. $\square$

7.3 Catégories abéliennes

Définition 7.10 (Noyau et conoyau). Soit $f: A \rightarrow B$ un morphisme dans une catégorie pré-additive avec objet nul.

- (i) Un **noyau** de f est un égalisateur de f et $0_{A,B}$, c'est-à-dire un morphisme $\ker f: K \rightarrow A$ tel que $f \circ \ker f = 0$ et, pour tout $g: X \rightarrow A$ avec $f \circ g = 0$, il existe un unique $\bar{g}: X \rightarrow K$ avec $\ker f \circ \bar{g} = g$:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\exists! \bar{g}} & K \\ & \searrow g & \downarrow \ker f \\ & & A \xrightarrow{f} B \end{array}$$

- (ii) Un **conoyau** de f est un coégalisateur de f et $0_{A,B}$, c'est-à-dire un morphisme $\text{coker } f: B \rightarrow C$ tel que $\text{coker } f \circ f = 0$ et vérifiant la propriété universelle duale.

Définition 7.11 (Image et coimage). Soit $f: A \rightarrow B$ un morphisme dans une catégorie possédant noyaux et conoyaux.

- (i) L'**image** de f est $\text{im } f = \ker(\text{coker } f)$.
(ii) La **coimage** de f est $\text{coim } f = \text{coker}(\ker f)$.

Définition 7.12 (Catégorie abélienne). Une catégorie $\mathcal{A}$ est **abélienne** si :

- (AB1) $\mathcal{A}$ est additive ;
(AB2) tout morphisme admet un noyau et un conoyau ;

(AB3) pour tout morphisme $f: A \rightarrow B$, le morphisme canonique

$$\text{coim } f \longrightarrow \text{im } f$$

est un isomorphisme.

Remarque. La condition (AB3) équivaut à : tout monomorphisme est un noyau et tout épimorphisme est un conoyau. Plus précisément, dans une catégorie abélienne, un morphisme f se factorise comme

$$A \xrightarrow{\text{coim } f} \text{im } f \xrightarrow{\text{im } f} B$$

où la première flèche est un épimorphisme et la seconde un monomorphisme. C'est l'analogue catégorique du premier théorème d'isomorphisme.

Théorème 7.13 (Théorème de plongement de Freyd–Mitchell). Toute petite catégorie abélienne $\mathcal{A}$ admet un foncteur exact et pleinement fidèle

$$F: \mathcal{A} \longrightarrow R\text{-Mod}$$

pour un certain anneau R . En particulier, toute relation diagrammatique valable dans les catégories de modules est valable dans toute catégorie abélienne.

Démonstration. La démonstration complète, due à Freyd (1964) et Mitchell (1965), est longue et technique. L'idée est la suivante :

1. On fixe un générateur U de $\mathcal{A}$ (qui existe car $\mathcal{A}$ est petite abélienne).
2. On pose $R = \text{End}_{\mathcal{A}}(U)^{\text{op}}$ et on considère le foncteur $F = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(U, -): \mathcal{A} \rightarrow R\text{-Mod}$.
3. On montre que F est exact et pleinement fidèle en utilisant le fait que U est un générateur.

Nous renvoyons à [2] ou [3] pour les détails. □

Remarque. Le théorème de Freyd–Mitchell justifie la technique de la chasse au diagramme : pour démontrer un résultat dans une catégorie abélienne abstraite, il suffit de le vérifier pour les modules, où l'on peut travailler avec des éléments.

7.4 Exemples de catégories abéliennes

Exemple 7.14 (Modules sur un anneau). *Pour tout anneau R (commutatif ou non), la catégorie $R\text{-Mod}$ est abélienne. Les noyaux et conoyaux sont les noyaux et conoyaux de morphismes de modules au sens usuel, et la condition $\text{image} = \text{coimage}$ est le premier théorème d'isomorphisme : $M/\ker f \cong \text{im } f$.*

Exemple 7.15 (Groupes abéliens). $\mathbf{Ab} = \mathbb{Z}\text{-Mod}$ est le cas particulier $R = \mathbb{Z}$.

Exemple 7.16 (Faisceaux de modules). *Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé. La catégorie $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$ des faisceaux de $\mathcal{O}_X$ -modules est abélienne. Les noyaux sont calculés section par section (le noyau préfaisceautique est déjà un faisceau), mais les conoyaux nécessitent une faisceautisation.*

Exemple 7.17 (Foncteurs vers $\mathbf{Ab}$). *Si $\mathcal{C}$ est une petite catégorie, alors la catégorie des foncteurs $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathbf{Ab})$ est abélienne, les noyaux et conoyaux étant calculés argument par argument (« point par point »).*

Exemple 7.18 (Contre-exemple : groupes non abéliens). *La catégorie $\mathbf{Grp}$ des groupes (non nécessairement abéliens) n'est pas abélienne. Elle est pointée (le groupe trivial est un objet nul) et admet noyaux et conoyaux, mais la condition (AB3) échoue : le morphisme canonique $\text{coim } f \rightarrow \text{im } f$ n'est pas toujours un isomorphisme. En effet, $\text{im } f$ au sens catégorique est le plus petit sous-groupe normal contenant l'image ensembliste, qui peut différer du quotient $G/\ker f$.*

7.5 Suites exactes

Définition 7.19 (Suite exacte en un point). Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Une suite de morphismes

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

est dite **exacte en** B si $\operatorname{im} f = \ker g$ (comme sous-objets de B). De manière équivalente, $g \circ f = 0$ et, pour tout $h: X \rightarrow B$ avec $g \circ h = 0$, le morphisme h se factorise (uniquement) par $\operatorname{im} f$.

Définition 7.20 (Suite exacte courte). Une **suite exacte courte** est une suite

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

qui est exacte en A , B et C . Cela signifie :

- (i) f est un monomorphisme ($\ker f = 0$);
- (ii) g est un épimorphisme ($\operatorname{coker} g = 0$);
- (iii) $\operatorname{im} f = \ker g$.

On note souvent une telle suite $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$.

Exemple 7.21. (i) Dans $\mathbf{Ab}$: $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow 0$ pour tout $n \geq 1$.

(ii) Dans $R\text{-}\mathbf{Mod}$: si $N \leq M$ est un sous-module, alors $0 \rightarrow N \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M/N \rightarrow 0$ est exacte.

(iii) La suite $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$ est une suite exacte courte qui ne scinde pas.

Définition 7.22 (Suite exacte scindée). Une suite exacte courte $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ est **scindée** si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

- (i) il existe $s: C \rightarrow B$ tel que $g \circ s = \operatorname{id}_C$ (section de g);
- (ii) il existe $r: B \rightarrow A$ tel que $r \circ f = \operatorname{id}_A$ (rétraction de f);
- (iii) $B \cong A \oplus C$ via un isomorphisme compatible avec f et g .

7.6 Foncteurs exacts

Définition 7.23 (Foncteur exact à gauche, à droite, exact). Soit $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur additif entre catégories abéliennes.

- (i) F est **exact à gauche** s'il transforme toute suite exacte courte $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ en une suite exacte $0 \rightarrow FA \rightarrow FB \rightarrow FC$.
- (ii) F est **exact à droite** s'il transforme toute suite exacte courte $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ en une suite exacte $FA \rightarrow FB \rightarrow FC \rightarrow 0$.
- (iii) F est **exact** s'il est exact à gauche et à droite, c'est-à-dire s'il préserve les suites exactes courtes.

Proposition 7.24. Pour tout objet A d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$, les foncteurs

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, -): \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab} \quad \text{et} \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, A): \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}$$

sont exacts à gauche.

Démonstration. Soit $0 \rightarrow B' \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} B'' \rightarrow 0$ une suite exacte courte. On doit montrer que

$$0 \rightarrow \mathrm{Hom}(A, B') \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(A, B) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}(A, B'')$$

est exacte.

Injectivité de f_ .* Si $f \circ h = 0$ pour $h: A \rightarrow B'$, alors h se factorise par $\ker f = 0$, donc $h = 0$.

Exactitude en $\mathrm{Hom}(A, B)$. On a $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = 0$. Réciproquement, si $g \circ \varphi = 0$ pour $\varphi: A \rightarrow B$, alors φ se factorise par $\ker g = \mathrm{im} f$, donc il existe $\psi: A \rightarrow B'$ avec $f \circ \psi = \varphi$. L'argument pour $\mathrm{Hom}(-, A)$ est dual. $\square$

Exemple 7.25. Le foncteur $- \otimes_R N: R\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$ est exact à droite mais pas exact en général. La mesure de sa non-exactitude à gauche est le foncteur Tor , que nous étudierons au chapitre 8.

7.7 Le lemme du serpent

Théorème 7.26 (Lemme du serpent). *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Étant donné un diagramme commutatif à lignes exactes*

$$\begin{array}{ccccccc} A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

il existe un morphisme connectant $\delta: \ker c \rightarrow \operatorname{coker} a$ et une suite exacte

$$\ker a \rightarrow \ker b \rightarrow \ker c \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} a \rightarrow \operatorname{coker} b \rightarrow \operatorname{coker} c.$$

De plus, si $A' \rightarrow B'$ est un monomorphisme (c'est-à-dire la ligne supérieure est exacte aussi à gauche), alors $\ker a \rightarrow \ker b$ est un monomorphisme. Dualement, si $B \rightarrow C$ est un épimorphisme, alors $\operatorname{coker} b \rightarrow \operatorname{coker} c$ est un épimorphisme.

Démonstration. Par le théorème de Freyd–Mitchell, il suffit de démontrer ce résultat dans $R\text{-}\mathbf{Mod}$, où l'on peut raisonner sur les éléments. Nous donnons néanmoins une preuve diagrammatique qui peut être formalisée dans toute catégorie abélienne.

Étape 1 : Morphismes entre noyaux. Puisque $f \circ a \circ \ker a' = b \circ f' \circ \ker a' = b \circ f' \circ \ker a'$ et le carré commute ($b \circ f' = f \circ a$), la restriction de b à $\ker a$ donne un morphisme $\ker a \rightarrow \ker b$ (car $b \circ (f' \circ \ker a') = f \circ (a \circ \ker a') = f \circ 0 = 0$, et f est un monomorphisme dans la ligne inférieure lorsque la suite est exacte à gauche). Plus précisément, pour tout $x \in \ker a$, on a $a(x) = 0$, donc $b(f'(x)) = f(a(x)) = 0$, ce qui signifie $f'(x) \in \ker b$. De même, on construit $\ker b \rightarrow \ker c$.

Étape 2 : Construction du morphisme connectant δ . Soit $z \in \ker c$. Comme g' est surjectif, il existe $y \in B'$ tel que $g'(y) = z$. Considérons $b(y) \in B$. On a

$$g(b(y)) = c(g'(y)) = c(z) = 0,$$

donc $b(y) \in \ker g = \operatorname{im} f$, et il existe $x \in A$ (unique car f est injectif) tel que $f(x) = b(y)$. On pose

$$\delta(z) = \text{classe de } x \text{ dans } \operatorname{coker} a = A / \operatorname{im} a.$$

Bonne définition. Si y_1 est un autre relèvement de z , alors $y - y_1 \in \ker g' = \text{im } f'$, donc $y - y_1 = f'(w)$ pour un $w \in A'$. Alors $b(y) - b(y_1) = b(f'(w)) = f(a(w))$, d'où $x - x_1 = a(w) \in \text{im } a$, et les classes coïncident.

Étape 3 : Exactitude en $\ker c$. Soit $z \in \ker c$ dans l'image de $\ker b \rightarrow \ker c$, c'est-à-dire $z = g'(y)$ avec $b(y) = 0$. Alors on peut prendre $x = 0$ (car $f(0) = 0 = b(y)$), donc $\delta(z) = 0$.

Réciproquement, si $\delta(z) = 0$, alors $x = a(w)$ pour un $w \in A'$. Posons $y_0 = y - f'(w)$. Alors $g'(y_0) = g'(y) = z$ et $b(y_0) = b(y) - b(f'(w)) = f(x) - f(a(w)) = f(x - x) = 0$, donc $y_0 \in \ker b$ et z provient de $\ker b$.

Étape 4 : Exactitude en $\text{coker } a$. Soit $\bar{x} \in \text{coker } a$ l'image d'un $x \in A$ par la projection. Alors $\bar{x} \in \text{im } \delta$ si et seulement si il existe $y \in B'$ avec $f(x) = b(y)$, c'est-à-dire $\bar{x}$ est dans le noyau de $\text{coker } a \rightarrow \text{coker } b$ (car $f(x) = b(y)$ signifie que $f(x) \in \text{im } b$). D'où l'exactitude en $\text{coker } a$.

Les vérifications de l'exactitude en $\ker a$, $\ker b$, $\text{coker } b$ et $\text{coker } c$ sont similaires et laissées au lecteur (exercice 7.3). $\square$

Le diagramme complet du lemme du serpent est souvent représenté ainsi :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \ker a & \longrightarrow & \ker b & \longrightarrow & \ker c & \longrightarrow \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & \\
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & \text{coker } a & \longrightarrow & \text{coker } b & \longrightarrow & \text{coker } c &
 \end{array}$$

7.8 Le lemme des cinq

Théorème 7.27 (Lemme des cinq). *Soit un diagramme commutatif dans une catégorie abélienne dont les lignes sont exactes :*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A_1 & \xrightarrow{d_1} & A_2 & \xrightarrow{d_2} & A_3 & \xrightarrow{d_3} & A_4 & \xrightarrow{d_4} & A_5 \\
 \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \alpha_3 & & \downarrow \alpha_4 & & \downarrow \alpha_5 \\
 B_1 & \xrightarrow{e_1} & B_2 & \xrightarrow{e_2} & B_3 & \xrightarrow{e_3} & B_4 & \xrightarrow{e_4} & B_5
 \end{array}$$

- (i) Si α_1 est un épimorphisme et α_2, α_4 sont des monomorphismes, alors α_3 est un monomorphisme.
- (ii) Si α_5 est un monomorphisme et α_2, α_4 sont des épimorphismes, alors α_3 est un épimorphisme.
- (iii) En particulier, si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$ sont des isomorphismes, alors α_3 est un isomorphisme.

Démonstration. Par le théorème de Freyd–Mitchell, il suffit de raisonner dans $R\text{-Mod}$.

(i) α_3 est un monomorphisme. Soit $x \in A_3$ tel que $\alpha_3(x) = 0$. Alors $e_3(\alpha_3(x)) = 0$, donc $\alpha_4(d_3(x)) = 0$ (par commutativité). Comme α_4 est un monomorphisme, $d_3(x) = 0$. Par exactitude de la ligne supérieure en A_3 , il existe $y \in A_2$ tel que $d_2(y) = x$.

Considérons $\alpha_2(y) \in B_2$. On a $e_2(\alpha_2(y)) = \alpha_3(d_2(y)) = \alpha_3(x) = 0$. Par exactitude de la ligne inférieure en B_2 , il existe $z \in B_1$ tel que $e_1(z) = \alpha_2(y)$. Comme α_1 est un épimorphisme, il existe $w \in A_1$ avec $\alpha_1(w) = z$. Alors

$$\alpha_2(d_1(w)) = e_1(\alpha_1(w)) = e_1(z) = \alpha_2(y).$$

Comme α_2 est un monomorphisme, $d_1(w) = y$, donc $x = d_2(y) = d_2(d_1(w)) = 0$ par exactitude ($d_2 \circ d_1 = 0$ car $\text{im } d_1 \subseteq \ker d_2$). Donc α_3 est un monomorphisme.

(ii) α_3 est un épimorphisme. Argument dual. Soit $b \in B_3$. On a $\alpha_4^{-1}(e_3(b)) \dots$ plus précisément, $e_3(b) \in B_4$ et comme α_4 est un épimorphisme, il existe $a_4 \in A_4$ avec $\alpha_4(a_4) = e_3(b)$.

Considérons $e_4(e_3(b)) = 0$ (par exactitude). Donc $e_4(\alpha_4(a_4)) = 0$, ce qui donne $\alpha_5(d_4(a_4)) = 0$. Comme α_5 est un monomorphisme, $d_4(a_4) = 0$. Par exactitude en A_4 , il existe $a_3 \in A_3$ avec $d_3(a_3) = a_4$.

Posons $b' = b - \alpha_3(a_3)$. Alors $e_3(b') = e_3(b) - e_3(\alpha_3(a_3)) = e_3(b) - \alpha_4(d_3(a_3)) = e_3(b) - \alpha_4(a_4) = 0$. Par exactitude en B_3 , il existe $b_2 \in B_2$ avec $e_2(b_2) = b'$. Comme α_2 est un épimorphisme, il existe $a_2 \in A_2$ avec $\alpha_2(a_2) = b_2$. Alors $\alpha_3(d_2(a_2)) = e_2(\alpha_2(a_2)) = e_2(b_2) = b'$. D'où $b = \alpha_3(a_3) + \alpha_3(d_2(a_2)) = \alpha_3(a_3 + d_2(a_2))$, et α_3 est surjectif. $\square$

Corollaire 7.28 (Lemme court des cinq). *Soit un diagramme commutatif*

à lignes exactes courtes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Si α et γ sont des isomorphismes, alors β est un isomorphisme.

Démonstration. On complète par $0 \rightarrow 0$ à gauche et $0 \rightarrow 0$ à droite pour obtenir un diagramme de cinq colonnes, puis on applique le lemme des cinq avec $\alpha_1 = \alpha_5 = \text{id}_0$, $\alpha_2 = \alpha$, $\alpha_4 = \gamma$. $\square$

7.9 Objets injectifs et projectifs

Définition 7.29 (Objet projectif). *Un objet P d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ est **projectif** si le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, -)$ est exact, c'est-à-dire si pour tout épimorphisme $g: B \twoheadrightarrow C$ et tout morphisme $f: P \rightarrow C$, il existe $\tilde{f}: P \rightarrow B$ tel que $g \circ \tilde{f} = f$:*

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \swarrow \tilde{f} & \downarrow f & & \\ B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Définition 7.30 (Objet injectif). *Dualement, un objet I est **injectif** si $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, I)$ est exact, c'est-à-dire si pour tout monomorphisme $f: A \hookrightarrow B$ et tout morphisme $g: A \rightarrow I$, il existe $\tilde{g}: B \rightarrow I$ avec $\tilde{g} \circ f = g$:*

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xhookrightarrow{f} & B \\ & & \downarrow g & \nearrow \tilde{g} & \\ & & I & & \end{array}$$

Proposition 7.31. *Tout R -module libre est projectif. Plus généralement, les facteurs directs de modules libres (modules projectifs) sont projectifs.*

Démonstration. Soit $F = \bigoplus_{i \in I} R$ un module libre. Un morphisme $f: F \rightarrow C$ est déterminé par les images $f(e_i) \in C$ des générateurs. Si $g: B \twoheadrightarrow C$ est surjectif, on choisit pour chaque i un $b_i \in B$ avec $g(b_i) = f(e_i)$. La propriété

universelle du module libre donne un unique $\tilde{f}: F \rightarrow B$ avec $\tilde{f}(e_i) = b_i$, et $g \circ \tilde{f} = f$. $\square$

Théorème 7.32 (Critère de Baer). *Un R -module I est injectif si et seulement si pour tout idéal $J \subseteq R$ et tout morphisme $f: J \rightarrow I$, il existe une extension $\tilde{f}: R \rightarrow I$ avec $\tilde{f}|_J = f$.*

Démonstration. La nécessité est immédiate (prendre le monomorphisme $J \hookrightarrow R$). Pour la suffisance, soit $f: A \hookrightarrow B$ un monomorphisme et $g: A \rightarrow I$ un morphisme. On utilise le lemme de Zorn sur l'ensemble des extensions partielles de g le long de sous-modules de B contenant A . Un élément maximal (M, h) doit avoir $M = B$: sinon, on prend $b \in B \setminus M$ et on pose $J = \{r \in R : rb \in M\}$. La composée $J \xrightarrow{r \mapsto rb} M \xrightarrow{h} I$ s'étend à R par hypothèse, ce qui permet d'étendre h à $M + Rb$, contredisant la maximalité. $\square$

Définition 7.33 (Assez d'injectifs / de projectifs). *Une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ a assez d'injectifs si tout objet A admet un monomorphisme $A \hookrightarrow I$ avec I injectif.*
Dualement, $\mathcal{A}$ a assez de projectifs si tout objet A admet un épimorphisme $P \twoheadrightarrow A$ avec P projectif.

Théorème 7.34. *Pour tout anneau R , la catégorie $R\text{-Mod}$ a assez d'injectifs et assez de projectifs.*

Démonstration. Assez de projectifs. Tout module M est quotient d'un module libre (prendre le module libre sur un ensemble de générateurs de M), et les modules libres sont projectifs.

Assez d'injectifs. On utilise le plongement de Baer. Tout groupe abélien A se plonge dans un groupe abélien divisible (donc injectif en tant que $\mathbb{Z}$ -module). Pour un R -module M , on plonge le $\mathbb{Z}$ -module sous-jacent dans un $\mathbb{Z}$ -module injectif Q , puis on montre que $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$ est un R -module injectif et que l'application $M \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$ définie par $m \mapsto (r \mapsto rm \in Q)$ est un monomorphisme de R -modules. $\square$

7.10 Résolutions

Définition 7.35 (Résolution projective). *Soit A un objet d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$. Une **résolution projective** de A est une suite exacte*

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

où chaque P_n est projectif. On note $P_\bullet \rightarrow A$ une telle résolution.

Définition 7.36 (Résolution injective). *Dualement, une **résolution injective** de A est une suite exacte*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\eta} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \xrightarrow{d^1} I^2 \longrightarrow \cdots$$

où chaque I^n est injectif. On note $A \rightarrow I^\bullet$.

Proposition 7.37. *Si $\mathcal{A}$ a assez de projectifs (resp. d'injectifs), tout objet admet une résolution projective (resp. injective).*

Démonstration. Pour une résolution projective : on choisit un épimorphisme $P_0 \twoheadrightarrow A$ avec P_0 projectif, puis un épimorphisme $P_1 \twoheadrightarrow \ker(P_0 \rightarrow A)$ avec P_1 projectif, et ainsi de suite par récurrence. L'argument pour les résolutions injectives est dual. $\square$

Théorème 7.38 (Lemme de comparaison). *Soit $f: A \rightarrow B$ un morphisme, $P_\bullet \rightarrow A$ une résolution projective et $Q_\bullet \rightarrow B$ une suite exacte quelconque (pas nécessairement projective). Alors il existe un morphisme de chaînes $\varphi_\bullet: P_\bullet \rightarrow Q_\bullet$ relevant f , et deux tels relèvements sont homotopes.*

Démonstration. On construit $\varphi_n: P_n \rightarrow Q_n$ par récurrence. Pour $n = 0$: on a $\varepsilon_B \circ \varphi_0 = f \circ \varepsilon_A$, et comme P_0 est projectif et ε_B est surjectif, le relèvement existe. Pour le pas de récurrence : on utilise la projectivité de P_n et l'exactitude de $Q_\bullet$ pour construire φ_n relevant le morphisme induit sur les noyaux.

L'unicité à homotopie près se démontre de manière similaire, en construisant une homotopie $s_n: P_n \rightarrow Q_{n+1}$ par récurrence, utilisant à chaque étape la projectivité de P_n . $\square$

7.11 Exercices

Exercice 7.1. Montrer qu'un foncteur additif $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ entre catégories additives préserve l'objet nul et les biproduits.

Exercice 7.2. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et $f: A \rightarrow B$ un morphisme. Montrer que :

- (a) f est un monomorphisme si et seulement si $\ker f = 0$;
- (b) f est un épimorphisme si et seulement si $\operatorname{coker} f = 0$;
- (c) f est un isomorphisme si et seulement si $\ker f = 0$ et $\operatorname{coker} f = 0$.

Exercice 7.3. Compléter les détails de la preuve du lemme du serpent (théorème 7.26) en vérifiant l'exactitude de la suite $\ker a \rightarrow \ker b \rightarrow \ker c$ et $\operatorname{coker} a \rightarrow \operatorname{coker} b \rightarrow \operatorname{coker} c$.

Exercice 7.4. (Lemme du fer à cheval.) Soit $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ une suite exacte courte dans une catégorie abélienne ayant assez de projectifs. Si $P'_\bullet \rightarrow A'$ et $P''_\bullet \rightarrow A''$ sont des résolutions projectives, montrer qu'il existe une résolution projective $P_\bullet \rightarrow A$ avec $P_n = P'_n \oplus P''_n$ qui s'insère dans une suite exacte courte de complexes $0 \rightarrow P'_\bullet \rightarrow P_\bullet \rightarrow P''_\bullet \rightarrow 0$.

Exercice 7.5. Soit $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ une suite exacte courte dans $R\text{-Mod}$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) la suite est scindée ;
- (ii) g admet une section ;
- (iii) f admet une rétraction ;
- (iv) pour tout module M , la suite $0 \rightarrow \operatorname{Hom}(M, A) \rightarrow \operatorname{Hom}(M, B) \rightarrow \operatorname{Hom}(M, C) \rightarrow 0$ est exacte.

En déduire qu'un module C est projectif si et seulement si toute suite exacte courte $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ est scindée.

Exercice 7.6. Un groupe abélien A est dit **divisible** si pour tout $n \geq 1$ et tout $a \in A$, il existe $b \in A$ avec $nb = a$.

- (a) Montrer que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sont divisibles.
- (b) Montrer qu'un groupe abélien est injectif (dans $\mathbf{Ab}$) si et seulement s'il est divisible. Indication : utiliser le critère de Baer.

(c) En déduire que **Ab** a assez d'injectifs.

Exercice 7.7. (Lemme 3×3 .) Soit un diagramme commutatif dans une catégorie abélienne dont les colonnes et les deux premières lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & C'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Montrer que la troisième ligne est également exacte. Indication : appliquer deux fois le lemme du serpent.

Exercice 7.8. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. On dit que $\mathcal{A}$ satisfait l'axiome **AB5** si $\mathcal{A}$ admet toutes les colimites filtrantes et si les colimites filtrantes commutent aux suites exactes. Montrer que **R-Mod** satisfait **AB5**.

Chapitre 8

Catégories dérivées — Introduction

Contents

6.1	Définition et premiers exemples	68
6.2	Monades issues d'adjonctions	69
6.3	Algèbres d'Eilenberg–Moore	70
6.4	Catégorie de Kleisli	72
6.5	Théorème de monadicité de Beck	74
6.6	Applications : catégories algébriques	77
6.7	Exercices	79

Les catégories dérivées, introduites par Grothendieck et développées par Verdier dans sa thèse (1967), fournissent le cadre conceptuel adéquat pour l'algèbre homologique. L'idée fondatrice est simple mais profonde : au lieu de travailler avec un objet A et ses résolutions, on travaille directement avec la catégorie des complexes de chaînes, en « inversant » les quasi-isomorphismes. Ce processus de *localisation* produit la catégorie dérivée $D(\mathcal{A})$, dans laquelle un objet et sa résolution deviennent isomorphes. La structure supplémentaire de *catégorie triangulée* encode l'information des suites exactes longues.

8.1 Complexes de chaînes

Définition 8.1 (Complexe de chaînes). Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Un **complexe de chaînes** (ou **complexe cochain**) dans $\mathcal{A}$ est une suite $(A^n, d^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ d'objets et de morphismes

$$\cdots \longrightarrow A^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} A^n \xrightarrow{d^n} A^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

telle que $d^n \circ d^{n-1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Les morphismes d^n sont appelés les **différentielles**. On note le complexe $A^\bullet$ ou $(A^\bullet, d)$.

Définition 8.2 (Morphisme de complexes). Un **morphisme de complexes** $f: A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ est une famille de morphismes $(f^n: A^n \rightarrow B^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que le diagramme suivant commute pour tout n :

$$\begin{array}{ccc} A^n & \xrightarrow{d_A^n} & A^{n+1} \\ f^n \downarrow & & \downarrow f^{n+1} \\ B^n & \xrightarrow{d_B^n} & B^{n+1} \end{array}$$

c'est-à-dire $f^{n+1} \circ d_A^n = d_B^n \circ f^n$.

Notation. On note $\text{Ch}(\mathcal{A})$ la catégorie dont les objets sont les complexes de chaînes dans $\mathcal{A}$ et les morphismes sont les morphismes de complexes. On note aussi :

- $\text{Ch}^+(\mathcal{A})$: complexes bornés inférieurement ($A^n = 0$ pour $n \ll 0$) ;
- $\text{Ch}^-(\mathcal{A})$: complexes bornés supérieurement ($A^n = 0$ pour $n \gg 0$) ;
- $\text{Ch}^b(\mathcal{A})$: complexes bornés ($A^n = 0$ pour $|n| \gg 0$).

Définition 8.3 (Cohomologie d'un complexe). Le n -ième **objet de cohomologie** du complexe $A^\bullet$ est

$$H^n(A^\bullet) = \ker d^n / \text{im } d^{n-1} = \ker(d^n: A^n \rightarrow A^{n+1}) / \text{im}(d^{n-1}: A^{n-1} \rightarrow A^n).$$

Ceci a un sens car $\text{im } d^{n-1} \subseteq \ker d^n$ (puisque $d^n \circ d^{n-1} = 0$). Les éléments de $\ker d^n$ sont les n -**cocycles** et ceux de $\text{im } d^{n-1}$ les n -**cobords**.

Proposition 8.4. La cohomologie définit un foncteur $H^n: \text{Ch}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ pour chaque $n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Soit $f: A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ un morphisme de complexes. Comme f^n envoie $\ker d_A^n$ dans $\ker d_B^n$ (par commutativité) et $\operatorname{im} d_A^{n-1}$ dans $\operatorname{im} d_B^{n-1}$, il induit un morphisme $H^n(f): H^n(A^\bullet) \rightarrow H^n(B^\bullet)$. La fonctorialité ($H^n(\operatorname{id}) = \operatorname{id}$ et $H^n(g \circ f) = H^n(g) \circ H^n(f)$) est immédiate. $\square$

Proposition 8.5. *Si $\mathcal{A}$ est abélienne, alors $\operatorname{Ch}(\mathcal{A})$ est abélienne, les noyaux, conoyaux et (co)images étant calculés degré par degré.*

Démonstration. On vérifie les axiomes. L'objet nul est le complexe nul. Le biproduit est $(A \oplus B)^n = A^n \oplus B^n$ avec $d_{A \oplus B}^n = d_A^n \oplus d_B^n$. Le noyau de $f: A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ est le complexe $(\ker f^n, d^n|_{\ker f^n})_{n \in \mathbb{Z}}$, qui est bien un sous-complexe car d^n envoie $\ker f^n$ dans $\ker f^{n+1}$. De même pour le conoyau. La condition image = coimage se vérifie degré par degré car elle est satisfaite dans $\mathcal{A}$. $\square$

8.2 Homotopie de chaînes et catégorie homotopique

Définition 8.6 (Homotopie de chaînes). *Soient $f, g: A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ deux morphismes de complexes. Une **homotopie de chaînes** de f vers g est une famille de morphismes $(s^n: A^n \rightarrow B^{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que*

$$f^n - g^n = d_B^{n-1} \circ s^n + s^{n+1} \circ d_A^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & A^{n-1} & \xrightarrow{d_A^{n-1}} & A^n & \xrightarrow{d_A^n} & A^{n+1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & \swarrow s^n & \downarrow & \swarrow s^{n+1} & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & B^{n-1} & \xrightarrow{d_B^{n-1}} & B^n & \xrightarrow{d_B^n} & B^{n+1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

On dit que f et g sont **homotopes** et on note $f \sim g$.

Proposition 8.7. *La relation d'homotopie $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\operatorname{Hom}_{\operatorname{Ch}(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet)$, compatible avec la composition.*

Démonstration. **Réflexivité :** $f \sim f$ avec $s^n = 0$. **Symétrie :** si s est une homotopie de f vers g , alors $-s$ est une homotopie de g vers f . **Transitivité :** si s est une homotopie de f vers g et t de g vers h , alors $s + t$ est une homotopie de f vers h .

Compatibilité. Si $f \sim g: A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ via s et $h: B^\bullet \rightarrow C^\bullet$, alors $h \circ f \sim h \circ g$ via $h \circ s$. Si $h: C^\bullet \rightarrow A^\bullet$, alors $f \circ h \sim g \circ h$ via $s \circ h$. $\square$

Proposition 8.8. *Si $f \sim g: A^\bullet \rightarrow B^\bullet$, alors $H^n(f) = H^n(g)$ pour tout n .*

Démonstration. Soit $[a] \in H^n(A^\bullet)$, c'est-à-dire $a \in \ker d_A^n$. Alors

$$f^n(a) - g^n(a) = d_B^{n-1}(s^n(a)) + s^{n+1}(d_A^n(a)) = d_B^{n-1}(s^n(a)) + 0 \in \operatorname{im} d_B^{n-1},$$

donc $[f^n(a)] = [g^n(a)]$ dans $H^n(B^\bullet)$. $\square$

Définition 8.9 (Catégorie homotopique). *La **catégorie homotopique** $K(\mathcal{A})$ est la catégorie dont :*

- *les objets sont les complexes de chaînes dans $\mathcal{A}$;*
- *les morphismes sont les classes d'homotopie : $\operatorname{Hom}_{K(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet) = \operatorname{Hom}_{\operatorname{Ch}(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet)/\sim$.*

On définit de même $K^+(\mathcal{A})$, $K^-(\mathcal{A})$, $K^b(\mathcal{A})$.

Définition 8.10 (Équivalence d'homotopie). *Un morphisme de complexes $f: A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ est une **équivalence d'homotopie** s'il devient un isomorphisme dans $K(\mathcal{A})$, c'est-à-dire s'il existe $g: B^\bullet \rightarrow A^\bullet$ avec $g \circ f \sim \operatorname{id}_{A^\bullet}$ et $f \circ g \sim \operatorname{id}_{B^\bullet}$.*

8.3 Quasi-isomorphismes et localisation

Définition 8.11 (Quasi-isomorphisme). *Un morphisme de complexes $f: A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ est un **quasi-isomorphisme** si $H^n(f): H^n(A^\bullet) \xrightarrow{\sim} H^n(B^\bullet)$ est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*

Remarque. *Toute équivalence d'homotopie est un quasi-isomorphisme (par la proposition 8.8), mais la réciproque est fausse en général.*

Exemple 8.12. *Dans $\mathbf{Ab}$, considérons les complexes*

$$A^\bullet : 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad B^\bullet : 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

(concentrés en degrés 0 et 1). Le morphisme $f: A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ donné par $f^0 = 0$ et $f^1 = \text{projection}$ est un quasi-isomorphisme ($H^0 = 0$, $H^1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour les deux), mais pas une équivalence d'homotopie.

Définition 8.13 (Localisation d'une catégorie). Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et S une classe de morphismes. La **localisation** $\mathcal{C}[S^{-1}]$ est une catégorie munie d'un foncteur $Q: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$ tel que :

- (i) $Q(s)$ est un isomorphisme pour tout $s \in S$;
- (ii) Q est universel pour cette propriété : pour tout foncteur $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ tel que $F(s)$ est un isomorphisme pour tout $s \in S$, il existe un unique foncteur $\bar{F}: \mathcal{C}[S^{-1}] \rightarrow \mathcal{D}$ avec $\bar{F} \circ Q = F$.

Remarque. La localisation existe toujours (modulo des problèmes ensemblistes), mais les morphismes dans $\mathcal{C}[S^{-1}]$ sont en général des « fractions » formelles $s_1^{-1} \circ f_1 \circ s_2^{-1} \circ f_2 \circ \dots$, ce qui rend la catégorie difficile à manipuler. La notion de système multiplicatif permet de simplifier cette description.

Définition 8.14 (Système multiplicatif). Une classe S de morphismes dans une catégorie $\mathcal{C}$ est un **système multiplicatif** si :

- (MS1) S contient toutes les identités et est stable par composition ;
- (MS2) (**Condition d'Ore à gauche et à droite.**) Pour tout diagramme $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{s} B$ avec $s \in S$, il existe un diagramme $A \xleftarrow{t} D \xrightarrow{g} B$ avec $t \in S$ et $f \circ t = s \circ g$ (et dualement) :

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{g} & B \\ t \downarrow \in S & & \in S \downarrow s \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

- (MS3) Pour $f, g: A \rightarrow B$, il existe $s \in S$ avec $s \circ f = s \circ g$ si et seulement s'il existe $t \in S$ avec $f \circ t = g \circ t$.

Proposition 8.15. La classe des quasi-isomorphismes dans $K(\mathcal{A})$ forme un système multiplicatif.

Démonstration. La vérification de (MS1) est immédiate. Pour (MS2) et (MS3), on utilise la construction du *cône de mapping* (voir ci-dessous) et les propriétés de la catégorie homotopique. Nous omettons les détails techniques. $\square$

8.4 La catégorie dérivée

Définition 8.16 (Catégorie dérivée). La *catégorie dérivée* $D(\mathcal{A})$ est la localisation de la catégorie homotopique $K(\mathcal{A})$ par rapport aux quasi-isomorphismes :

$$D(\mathcal{A}) = K(\mathcal{A})[\text{Qis}^{-1}].$$

On définit de même les variantes bornées :

- $D^+(\mathcal{A}) = K^+(\mathcal{A})[\text{Qis}^{-1}]$;
- $D^-(\mathcal{A}) = K^-(\mathcal{A})[\text{Qis}^{-1}]$;
- $D^b(\mathcal{A}) = K^b(\mathcal{A})[\text{Qis}^{-1}]$.

Remarque. Un morphisme $A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ dans $D(\mathcal{A})$ est représenté par un *toit* :

$$\begin{array}{ccc} & C^\bullet & \\ s \swarrow & & \searrow f \\ A^\bullet & & B^\bullet \end{array} \quad \sim$$

où s est un quasi-isomorphisme. La composition de deux toits nécessite la condition d'Ore (MS2).

Théorème 8.17. Si $\mathcal{A}$ a assez d'injectifs, le foncteur naturel

$$K^+(\mathcal{I}) \longrightarrow D^+(\mathcal{A})$$

est une équivalence de catégories, où $\mathcal{I}$ désigne la sous-catégorie pleine des objets injectifs de $\mathcal{A}$. Autrement dit, tout objet de $D^+(\mathcal{A})$ est isomorphe à un complexe d'injectifs.

Démonstration. Essentielle surjectivité. Soit $A^\bullet \in D^+(\mathcal{A})$. Par récurrence, on construit une résolution injective $I^\bullet$ du complexe $A^\bullet$: c'est un complexe d'injectifs muni d'un quasi-isomorphisme $A^\bullet \rightarrow I^\bullet$. Cette construction généralise les résolutions injectives d'un seul objet (proposition 7.37).

Pleine fidélité. Il faut montrer que si $I^\bullet, J^\bullet$ sont des complexes bornés inférieurement d'injectifs, alors

$$\text{Hom}_{K^+(\mathcal{A})}(I^\bullet, J^\bullet) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{D^+(\mathcal{A})}(I^\bullet, J^\bullet).$$

L'injectivité vient du fait qu'un morphisme homotope à zéro vers un complexe d'injectifs est nul dans la catégorie dérivée. La surjectivité utilise le fait que tout toit peut être « redressé » en utilisant l'injectivité des composantes. $\square$

8.5 Le foncteur de décalage et le cône de mapping

Définition 8.18 (Foncteur de décalage). *Le **foncteur de décalage** (ou **translation**) $[1]: \text{Ch}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Ch}(\mathcal{A})$ est défini par*

$$(A[1])^n = A^{n+1}, \quad d_{A[1]}^n = -d_A^{n+1}.$$

Pour un morphisme $f: A^\bullet \rightarrow B^\bullet$, on pose $(f[1])^n = f^{n+1}$. Plus généralement, $A[k]^n = A^{n+k}$ avec $d_{A[k]}^n = (-1)^k d_A^{n+k}$.

Définition 8.19 (Cône de mapping). *Soit $f: A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ un morphisme de complexes. Le **cône de mapping** de f , noté $\text{Cone}(f)$, est le complexe défini par*

$$\text{Cone}(f)^n = A^{n+1} \oplus B^n$$

avec la différentielle

$$d_{\text{Cone}(f)}^n = \begin{pmatrix} -d_A^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} & d_B^n \end{pmatrix} : A^{n+1} \oplus B^n \longrightarrow A^{n+2} \oplus B^{n+1}.$$

Proposition 8.20. *Pour tout morphisme de complexes $f: A^\bullet \rightarrow B^\bullet$, on a une suite de morphismes de complexes*

$$A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \xrightarrow{\iota} \text{Cone}(f) \xrightarrow{\pi} A[1]^\bullet$$

où $\iota^n(b) = (0, b)$ et $\pi^n(a, b) = a$. De plus, cette suite induit une suite exacte longue en cohomologie :

$$\cdots \rightarrow H^n(A^\bullet) \xrightarrow{H^n(f)} H^n(B^\bullet) \rightarrow H^n(\text{Cone}(f)) \rightarrow H^{n+1}(A^\bullet) \rightarrow \cdots$$

Démonstration. On vérifie d'abord que $d_{\text{Cone}(f)}^2 = 0$:

$$\begin{pmatrix} -d_A^{n+2} & 0 \\ f^{n+2} & d_B^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_A^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} & d_B^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_A^{n+2}d_A^{n+1} & 0 \\ -f^{n+2}d_A^{n+1} + d_B^{n+1}f^{n+1} & d_B^{n+1}d_B^n \end{pmatrix} = 0,$$

utilisant $d^2 = 0$ et $f \circ d_A = d_B \circ f$.

Pour la suite exacte courte de complexes, on a $0 \rightarrow B^\bullet \xrightarrow{\iota} \text{Cone}(f) \xrightarrow{\pi} A[1]^\bullet \rightarrow 0$ qui est exacte degré par degré. La suite exacte longue en cohomologie

logie en découle (voir théorème 8.30). Le morphisme connectant $H^n(A[1]^\bullet) = H^{n+1}(A^\bullet) \rightarrow H^{n+1}(B^\bullet)$ s'identifie à $H^{n+1}(f)$. $\square$

8.6 Structure triangulée

Définition 8.21 (Catégorie triangulée). Une *catégorie triangulée* est un triplet $(\mathcal{T}, [1], \Delta)$ où :

- $\mathcal{T}$ est une catégorie additive ;
- $[1]: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ est un automorphisme (le **foncteur de translation**) ;
- Δ est une classe de suites $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} A[1]$ appelées **triangles distingués**,

satisfaisant les axiomes suivants.

Définition 8.22 (Axiomes TR1–TR4) (**TR1**) (*Identité et complé-*
tion.)

- (a) Pour tout objet A , le triangle $A \xrightarrow{\text{id}} A \rightarrow 0 \rightarrow A[1]$ est distingué.
- (b) Tout morphisme $u: A \rightarrow B$ peut être complété en un triangle distingué $A \xrightarrow{u} B \rightarrow C \rightarrow A[1]$.
- (c) Tout triangle isomorphe à un triangle distingué est distingué.

(**TR2**) (**Rotation.**) Un triangle $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} A[1]$ est distingué si et seulement si $B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} A[1] \xrightarrow{-u[1]} B[1]$ est distingué.

(**TR3**) (**Morphisme de triangles.**) Étant donnés deux triangles distingués et des morphismes f, g formant un carré commutatif comme ci-dessous, il existe un morphisme h complétant le diagramme en un morphisme de triangles :

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C & \xrightarrow{w} & A[1] \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow f[1] \\ A' & \xrightarrow{u'} & B' & \xrightarrow{v'} & C' & \xrightarrow{w'} & A'[1] \end{array}$$

(**TR4**) (**Axiome de l'octaèdre.**) Étant donnés des morphismes $u: A \rightarrow$

B et $v: B \rightarrow C$, et des triangles distingués

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{u} B \rightarrow D \rightarrow A[1], \\ B &\xrightarrow{v} C \rightarrow E \rightarrow B[1], \\ A &\xrightarrow{v \circ u} C \rightarrow F \rightarrow A[1], \end{aligned}$$

il existe un triangle distingué $D \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow D[1]$ tel que le diagramme complet commute.

Théorème 8.23. *La catégorie homotopique $K(\mathcal{A})$, munie du foncteur de décalage $[1]$ et des triangles de la forme*

$$A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \xrightarrow{\iota} \text{Cone}(f) \xrightarrow{\pi} A[1]^\bullet$$

(et de leurs isomorphes), est une catégorie triangulée.

Démonstration. Nous vérifions les axiomes.

(TR1) : (a) Le cône de $\text{id}: A^\bullet \rightarrow A^\bullet$ est homotopiquement trivial : $\text{Cone}(\text{id})^n = A^{n+1} \oplus A^n$ avec la différentielle qui en fait un complexe acyclique (exercice). (b) Par définition, tout f donne un triangle via le cône. (c) Par définition de la classe Δ .

(TR2) : La rotation des triangles se vérifie par un calcul explicite d'homotopie entre $\text{Cone}(\iota)$ et $A[1]^\bullet$.

(TR3) : On construit h composante par composante en utilisant les propriétés universelles dans la catégorie homotopique.

(TR4) : Vérification par construction explicite, voir par exemple Weibel [4, 1.5]. $\square$

Corollaire 8.24. *La catégorie dérivée $D(\mathcal{A})$ hérite d'une structure triangulée. De même pour $D^+(\mathcal{A})$, $D^-(\mathcal{A})$ et $D^b(\mathcal{A})$.*

8.7 Foncteurs dérivés

Définition 8.25 (Foncteur dérivé à droite). *Soit $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur exact à gauche entre catégories abéliennes, avec $\mathcal{A}$ ayant assez d'injectifs. Le **foncteur dérivé à droite** $RF: D^+(\mathcal{A}) \rightarrow D^+(\mathcal{B})$ est défini comme suit :*

1. Pour $A^\bullet \in D^+(\mathcal{A})$, on choisit une résolution injective $A^\bullet \xrightarrow{\sim} I^\bullet$;

2. On pose $RF(A^\bullet) = F(I^\bullet)$ (application de F degré par degré).

Ceci est bien défini (indépendant du choix de résolution, à isomorphisme canonique près dans $D^+(\mathcal{B})$) par le lemme de comparaison (théorème 7.38).

Définition 8.26 (Foncteur dérivé à gauche). *Dualement, si $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est exact à droite et $\mathcal{A}$ a assez de projectifs, le **foncteur dérivé à gauche** $LF: D^-(\mathcal{A}) \rightarrow D^-(\mathcal{B})$ est défini par $LF(A^\bullet) = F(P^\bullet)$ où $P^\bullet \xrightarrow{\sim} A^\bullet$ est une résolution projective.*

Définition 8.27 (Foncteurs dérivés classiques). *Pour un objet A vu comme complexe concentré en degré 0, on pose :*

$$R^n F(A) = H^n(RF(A)) \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

On a $R^0 F = F$ (car F est exact à gauche). De même, $L_n F(A) = H^{-n}(LF(A))$ avec $L_0 F = F$.

Définition 8.28 (Ext et Tor). *Soit R un anneau et A, B des R -modules.*

(i) *Les **groupes d'extension** sont*

$$\text{Ext}_R^n(A, B) = R^n \text{Hom}_R(A, -)(B) = H^n(\text{Hom}_R(A, I^\bullet))$$

où $B \rightarrow I^\bullet$ est une résolution injective. Alternativement, $\text{Ext}_R^n(A, B) = H^n(\text{Hom}_R(P_\bullet, B))$ où $P_\bullet \rightarrow A$ est une résolution projective.

(ii) *Les **groupes de torsion** sont*

$$\text{Tor}_n^R(A, B) = L_n(A \otimes_R -)(B) = H_n(A \otimes_R P_\bullet)$$

où $P_\bullet \rightarrow B$ est une résolution projective.

Remarque. *Les foncteurs Ext et Tor sont balancés : on peut calculer $\text{Ext}_R^n(A, B)$ soit via une résolution projective de A , soit via une résolution injective de B , et on obtient le même résultat (à isomorphisme canonique près). De même, $\text{Tor}_n^R(A, B)$ peut être calculé en résolvant soit A , soit B .*

Proposition 8.29. *On a les identifications :*

$$\mathrm{Ext}_R^0(A, B) \cong \mathrm{Hom}_R(A, B), \quad \mathrm{Tor}_0^R(A, B) \cong A \otimes_R B.$$

Démonstration. Pour $\mathrm{Ext}^0 : H^0(\mathrm{Hom}_R(P_\bullet, B)) = \ker(\mathrm{Hom}(P_0, B) \rightarrow \mathrm{Hom}(P_1, B))$, qui s'identifie à $\mathrm{Hom}(A, B)$ par exactitude de $0 \rightarrow \mathrm{Hom}(A, B) \rightarrow \mathrm{Hom}(P_0, B) \rightarrow \mathrm{Hom}(P_1, B)$ (le foncteur $\mathrm{Hom}(-, B)$ est exact à gauche). L'argument pour Tor_0 est analogue. $\square$

8.8 Suite exacte longue en cohomologie

Théorème 8.30 (Suite exacte longue). *Soit $0 \rightarrow A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \xrightarrow{g} C^\bullet \rightarrow 0$ une suite exacte courte de complexes dans une catégorie abélienne. Alors il existe des morphismes connectants $\delta^n : H^n(C^\bullet) \rightarrow H^{n+1}(A^\bullet)$ et une suite exacte longue*

$$\dots \rightarrow H^n(A^\bullet) \xrightarrow{H^n(f)} H^n(B^\bullet) \xrightarrow{H^n(g)} H^n(C^\bullet) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(A^\bullet) \rightarrow \dots$$

De plus, δ^n est naturel en les suites exactes courtes.

Démonstration. **Construction de δ^n .** Soit $[c] \in H^n(C^\bullet)$, représenté par $c \in C^n$ avec $d_C^n(c) = 0$. Comme g^n est surjectif, il existe $b \in B^n$ avec $g^n(b) = c$. Considérons $d_B^n(b) \in B^{n+1}$. On a

$$g^{n+1}(d_B^n(b)) = d_C^n(g^n(b)) = d_C^n(c) = 0,$$

donc $d_B^n(b) \in \ker g^{n+1} = \mathrm{im} f^{n+1}$, et il existe un unique $a \in A^{n+1}$ avec $f^{n+1}(a) = d_B^n(b)$.

a est un cocycle. On a $f^{n+2}(d_A^{n+1}(a)) = d_B^{n+1}(f^{n+1}(a)) = d_B^{n+1}(d_B^n(b)) = 0$, et comme f^{n+2} est injectif, $d_A^{n+1}(a) = 0$.

Bonne définition. Si b' est un autre relèvement de c , alors $b - b' \in \ker g^n = \mathrm{im} f^n$, donc $b - b' = f^n(a_0)$ et $d_B^n(b) - d_B^n(b') = d_B^n(f^n(a_0)) = f^{n+1}(d_A^n(a_0))$, d'où $a - a' = d_A^n(a_0) \in \mathrm{im} d_A^n$.

On pose $\delta^n([c]) = [a] \in H^{n+1}(A^\bullet)$.

Exactitude en $H^n(C^\bullet)$. $\delta^n \circ H^n(g) = 0$: si $[c] = H^n(g)([b_0])$ avec $d_B^n(b_0) = 0$, on peut prendre $b = b_0$ et alors $d_B^n(b) = 0$, donc $a = 0$.

Réciproquement, si $\delta^n([c]) = 0$, alors $a = d_A^n(a_0)$ et $b' = b - f^n(a_0)$ vérifie $d_B^n(b') = f^{n+1}(a - d_A^n(a_0)) = 0$ et $g^n(b') = c$, donc $[c] = H^n(g)([b'])$.

Exactitude en $H^{n+1}(A^\bullet)$. $H^{n+1}(f) \circ \delta^n = 0 : H^{n+1}(f)([a]) = [f^{n+1}(a)] = [d_B^n(b)] = 0$ dans $H^{n+1}(B^\bullet)$.

Réciproquement, si $[a] \in \ker H^{n+1}(f)$, alors $f^{n+1}(a) = d_B^n(b)$ pour un $b \in B^n$, et $c = g^n(b)$ est un cocycle (car $d_C^n(c) = g^{n+1}(d_B^n(b)) = g^{n+1}(f^{n+1}(a)) = 0$), avec $\delta^n([c]) = [a]$.

L'exactitude en $H^n(A^\bullet)$ et $H^n(B^\bullet)$ se vérifie de manière analogue. $\square$

Corollaire 8.31. *Soit $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur exact à gauche et $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ une suite exacte courte dans $\mathcal{A}$. Alors on a une suite exacte longue*

$$0 \rightarrow FA \rightarrow FB \rightarrow FC \xrightarrow{\delta^0} R^1F(A) \rightarrow R^1F(B) \rightarrow R^1F(C) \rightarrow \dots$$

En particulier, pour $F = \text{Hom}_R(M, -)$:

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M, A) \rightarrow \text{Hom}(M, B) \rightarrow \text{Hom}(M, C) \rightarrow \text{Ext}^1(M, A) \rightarrow \dots$$

Démonstration. On applique RF à la suite exacte courte (vue comme triangle distingué dans $D^+(\mathcal{A})$), ce qui donne un triangle distingué dans $D^+(\mathcal{B})$. La suite exacte longue en cohomologie associée à ce triangle donne le résultat. $\square$

8.9 Exercices

Exercice 8.1. *Montrer que $\text{Cone}(\text{id}_{A^\bullet})$ est un complexe acyclique (c'est-à-dire $H^n(\text{Cone}(\text{id})) = 0$ pour tout n), et construire explicitement une homotopie contractante.*

Exercice 8.2. *Montrer qu'un morphisme de complexes $f: A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ est un quasi-isomorphisme si et seulement si $\text{Cone}(f)$ est acyclique.*

Exercice 8.3. *Calculer $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ pour tous $m, k \geq 1$ et tout $n \geq 0$. Indication : utiliser la résolution projective $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times m} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow 0$.*

Exercice 8.4. *Calculer $\text{Tor}_{\mathbb{Z}}^n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ pour tous $m, k \geq 1$ et tout $n \geq 0$.*

Exercice 8.5. Soit R un anneau et A, C des R -modules. Montrer que $\text{Ext}_R^1(C, A)$ classe les suites exactes courtes $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ à équivalence de Yoneda près.

Indication : à une telle suite, associer l'image de id_C par le morphisme connectant $\text{Hom}(C, C) \rightarrow \text{Ext}_R^1(C, A)$.

Exercice 8.6. Montrer qu'une catégorie triangulée non triviale n'est pas abélienne.

Indication : dans une catégorie triangulée, $\text{Hom}(A, B)$ est un groupe abélien et les suites exactes sont remplacées par des triangles. Montrer que les biproduits ne coïncident pas avec les produits en général dans une catégorie triangulée.

Exercice 8.7. Soit A un groupe abélien. Montrer que dans $D(\mathbf{Ab})$, A (vu comme complexe concentré en degré 0) est isomorphe à toute résolution projective ou injective de A .

Exercice 8.8. En utilisant le lemme du fer à cheval (exercice 7.4), donner une preuve directe de l'existence de la suite exacte longue des foncteurs dérivés (corollaire 8.31) sans passer par les catégories dérivées.

Exercice 8.9. La **dimension projective** d'un R -module M , notée $\text{pd}_R(M)$, est la longueur minimale d'une résolution projective de M (ou $+\infty$ si aucune n'est finie).

(a) Montrer que $\text{pd}_R(M) \leq n$ si et seulement si $\text{Ext}_R^{n+1}(M, N) = 0$ pour tout N .

(b) La **dimension globale** de R est $\text{gldim}(R) = \sup_M \text{pd}_R(M)$. Montrer que $\text{gldim}(\mathbb{Z}) = 1$.

(c) Montrer que $\text{gldim}(k) = 0$ pour tout corps k .

Exercice 8.10. Vérifier en détail l'axiome (**TR2**) pour la catégorie homotopique $K(\mathcal{A})$: si $A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \xrightarrow{\iota} \text{Cone}(f) \xrightarrow{\pi} A[1]^\bullet$ est un triangle distingué, construire un isomorphisme explicite entre $\text{Cone}(\iota)$ et $A[1]^\bullet$ dans $K(\mathcal{A})$.

Exercice 8.11. Soit (F, G) un couple de foncteurs adjoints entre catégories abéliennes avec assez d'injectifs et de projectifs. Si F est exact à droite et G est exact à gauche, montrer que (LF, RG) est un couple de foncteurs adjoints au niveau des catégories dérivées :

$$\mathrm{Hom}_{D^-(\mathcal{B})}(LF(A^\bullet), B^\bullet) \cong \mathrm{Hom}_{D^-(\mathcal{A})}(A^\bullet, RG(B^\bullet)).$$

Chapitre 9

Catégories monoïdales et tressées

Contents

7.1	Catégories pré-additives	82
7.2	Catégories additives et biproducts	82
7.3	Catégories abéliennes	84
7.4	Exemples de catégories abéliennes	86
7.5	Suites exactes	86
7.6	Foncteurs exacts	88
7.7	Le lemme du serpent	89
7.8	Le lemme des cinq	90
7.9	Objets injectifs et projectifs	92
7.10	Résolutions	94
7.11	Exercices	95

Les catégories monoïdales formalisent la notion de « produit tensoriel » dans un cadre catégorique général. Elles interviennent en algèbre (modules sur un anneau), en topologie (espaces de lacets), en informatique théorique (types linéaires, sémantique catégorique) et en physique mathématique (théories topologiques des champs). Ce chapitre introduit les structures monoïdales, symétriques et tressées, puis développe les notions de catégorie enrichie et de catégorie cartésienne fermée, avec l'application fondamentale à la correspondance de Curry–Howard–Lambek.

9.1 Catégories monoïdales

Définition 9.1 (Catégorie monoïdale). Une *catégorie monoïdale* est un sextuplet $(\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ où :

- (i) $\mathcal{C}$ est une catégorie ;
- (ii) $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ est un bifoncteur, appelé **produit tensoriel** ;
- (iii) $I \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ est l'**objet unité** ;
- (iv) $\alpha_{A,B,C}: (A \otimes B) \otimes C \xrightarrow{\sim} A \otimes (B \otimes C)$ est un isomorphisme naturel en A, B, C , appelé l'**associateur** ;
- (v) $\lambda_A: I \otimes A \xrightarrow{\sim} A$ est un isomorphisme naturel en A , appelé l'**uniteur à gauche** ;
- (vi) $\rho_A: A \otimes I \xrightarrow{\sim} A$ est un isomorphisme naturel en A , appelé l'**uniteur à droite** ;

soumis aux conditions de cohérence suivantes.

Diagramme du pentagone. Pour tous $A, B, C, D \in \text{Ob}(\mathcal{C})$:

$$\begin{array}{ccc}
 & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) & \\
 \alpha_{A \otimes B, C, D} \nearrow & & \searrow \alpha_{A, B, C \otimes D} \\
 ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \\
 \alpha_{A, B, C} \otimes \text{id}_D \downarrow & & \uparrow \text{id}_A \otimes \alpha_{B, C, D} \\
 (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D & \xrightarrow{\alpha_{A, B \otimes C, D}} & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D)
 \end{array}$$

Diagramme du triangle. Pour tous $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$:

$$\begin{array}{ccc}
 (A \otimes I) \otimes B & \xrightarrow{\alpha_{A, I, B}} & A \otimes (I \otimes B) \\
 \rho_A \otimes \text{id}_B \searrow & & \swarrow \text{id}_A \otimes \lambda_B \\
 & A \otimes B &
 \end{array}$$

Définition 9.2 (Catégorie monoïdale stricte). Une *catégorie monoïdale* est dite **stricte** si les isomorphismes α , λ et ρ sont tous des identités, c'est-à-dire si $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$, $I \otimes A = A$ et $A \otimes I = A$ pour tous objets A, B, C .

Théorème 9.3 (Cohérence de Mac Lane). *Soit $(\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ une catégorie monoïdale.*

- (a) *Tout diagramme dont les flèches sont des composées d'instances de α, λ, ρ et de leurs inverses commute.*
- (b) *Toute catégorie monoïdale est monoïdalement équivalente à une catégorie monoïdale stricte.*

Démonstration. La partie (a) est le théorème original de Mac Lane (1963). On montre d'abord que tout diagramme de cohérence se réduit à un diagramme dans la catégorie libre monoïdale sur un générateur, puis on vérifie la commutativité dans ce cas par induction sur la complexité des expressions. La partie (b) se déduit en construisant une catégorie monoïdale stricte $\mathcal{C}_s$ avec une équivalence monoïdale $\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}_s$ (cf. Joyal–Street). $\square$

Remarque. *En pratique, le théorème de cohérence nous autorise à omettre les parenthèses et à identifier $I \otimes A$, $A \otimes I$ et A sans ambiguïté. On écrit simplement $A \otimes B \otimes C$ au lieu de $(A \otimes B) \otimes C$ ou $A \otimes (B \otimes C)$.*

9.2 Exemples fondamentaux

Exemple 9.4 (Catégories monoïdales classiques). (i) $(\mathbf{Set}, \times, \{*\})$: la catégorie des ensembles avec le produit cartésien. L'objet unité est un singleton.

(ii) $(\mathbf{Ab}, \otimes_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$: la catégorie des groupes abéliens avec le produit tensoriel sur $\mathbb{Z}$.

(iii) $(R\text{-}\mathbf{Mod}, \otimes_R, R)$: pour un anneau commutatif R , la catégorie des R -modules avec le produit tensoriel.

(iv) $(\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}, \otimes_{\mathbb{K}}, \mathbb{K})$: la catégorie des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

(v) $(\mathbf{Cat}, \times, \mathbf{1})$: la catégorie des petites catégories avec le produit.

(vi) $(\mathbf{Set}, \sqcup, \emptyset)$: les ensembles avec l'union disjointe. L'objet unité est l'ensemble vide.

(vii) $([\mathcal{C}, \mathcal{C}], \circ, \mathrm{id}_{\mathcal{C}})$: la catégorie des endofoncteurs de $\mathcal{C}$ avec la composition. Cette catégorie monoïdale est stricte.

Exemple 9.5 (Structures monoïdales sur les espaces vectoriels gradués). Soit $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{Z}}$ la catégorie des espaces vectoriels $\mathbb{Z}$ -gradués. Le produit ten-

soiel gradué est défini par

$$(V \otimes W)_n = \bigoplus_{p+q=n} V_p \otimes_{\mathbb{K}} W_q.$$

L'objet unité est $\mathbb{K}$ concentré en degré 0. Cette structure monoïdale joue un rôle central en algèbre homologique et en topologie algébrique.

9.3 Catégories monoïdales symétriques et tressées

Définition 9.6 (Catégorie monoïdale tressée). Une **catégorie monoïdale tressée** est une catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ munie d'un isomorphisme naturel

$$\sigma_{A,B}: A \otimes B \xrightarrow{\sim} B \otimes A,$$

appelé **tressage**, satisfaisant les deux diagrammes hexagonaux suivants.

Premier hexagone :

$$\begin{array}{ccc} (A \otimes B) \otimes C & \xrightarrow{\sigma_{A,B} \otimes \text{id}} & (B \otimes A) \otimes C \xrightarrow{\alpha} B \otimes (A \otimes C) \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \text{id} \otimes \sigma_{A,C} \\ A \otimes (B \otimes C) & \xrightarrow{\sigma_{A,B \otimes C}} & (B \otimes C) \otimes A \xrightarrow{\alpha} B \otimes (C \otimes A) \end{array}$$

Second hexagone : le diagramme analogue avec σ^{-1} et les associateurs inversés.

Définition 9.7 (Catégorie monoïdale symétrique). Une catégorie monoïdale tressée est dite **symétrique** si $\sigma_{B,A} \circ \sigma_{A,B} = \text{id}_{A \otimes B}$ pour tous A, B .

Exemple 9.8. (i) $(\mathbf{Set}, \times, \{*\})$, $(\mathbf{Ab}, \otimes_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$, $(\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}, \otimes_{\mathbb{K}}, \mathbb{K})$ sont symétriques.

(ii) La catégorie des représentations d'un groupe quantique $U_q(\mathfrak{g})$ pour q générique est tressée mais pas symétrique en général.

9.4 Objets monoïdes

Définition 9.9 (Monoïde dans une catégorie monoïdale). Soit $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale. Un **objet monoïde** (ou **monoïde dans $\mathcal{C}$**) est un triplet (M, μ, η) où :

- (i) $M \in \text{Ob}(\mathcal{C})$;
- (ii) $\mu: M \otimes M \rightarrow M$ est la **multiplication** ;
- (iii) $\eta: I \rightarrow M$ est l'**unité** ;

satisfaisant les axiomes d'associativité et d'unité :

$$\begin{array}{ccc}
 (M \otimes M) \otimes M & \xrightarrow{\alpha} & M \otimes (M \otimes M) \\
 \mu \otimes \text{id} \downarrow & & \downarrow \text{id} \otimes \mu \\
 M \otimes M & \xrightarrow{\mu} & M
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 I \otimes M & \xrightarrow{\eta \otimes \text{id}} & M \otimes M & \xleftarrow{\text{id} \otimes \eta} & M \otimes I \\
 & \searrow \lambda & \downarrow \mu & \swarrow \rho & \\
 & & M & &
 \end{array}$$

Exemple 9.10 (Monoïdes dans diverses catégories). (i) Un monoïde dans $(\mathbf{Set}, \times, \{*\})$ est un monoïde au sens usuel.

(ii) Un monoïde dans $(\mathbf{Ab}, \otimes_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$ est un anneau.

(iii) Un monoïde dans $(R\text{-}\mathbf{Mod}, \otimes_R, R)$ est une R -algèbre.

(iv) Un monoïde dans $([\mathcal{C}, \mathcal{C}], \circ, \text{id}_{\mathcal{C}})$ est une monade.

Définition 9.11 (Comonoïde). Dualement, un **comonoïde** dans $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ est un triplet (C, Δ, ε) avec $\Delta: C \rightarrow C \otimes C$ (comultiplication) et $\varepsilon: C \rightarrow I$ (counité), satisfaisant les axiomes duaux. Un comonoïde dans $(\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}, \otimes_{\mathbb{K}}, \mathbb{K})$ est une coalgèbre.

9.5 Catégories enrichies

Définition 9.12 (Catégorie enrichie). Soit $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale. Une **catégorie enrichie sur $\mathcal{V}$** (ou **$\mathcal{V}$ -catégorie**) $\mathcal{C}$ consiste en :

- (i) une collection d'objets $\text{Ob}(\mathcal{C})$;
- (ii) pour chaque paire (A, B) , un objet $\mathcal{C}(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{V})$ (l'**objet de morphismes**) ;
- (iii) pour chaque triplet (A, B, C) , un morphisme de composition

$\circ_{A,B,C}: \mathcal{C}(B, C) \otimes \mathcal{C}(A, B) \rightarrow \mathcal{C}(A, C)$ dans $\mathcal{V}$;

(iv) pour chaque objet A , un morphisme identité $j_A: I \rightarrow \mathcal{C}(A, A)$ dans $\mathcal{V}$;

satisfaisant les axiomes d'associativité et d'unité (exprimés comme commutativité de diagrammes dans $\mathcal{V}$).

Exemple 9.13 (Enrichissements classiques). (i) **Set**-catégories = catégories ordinaires (localement petites).

(ii) **Ab**-catégories = catégories préadditives.

(iii) **Vect** $_{\mathbb{K}}$ -catégories = catégories $\mathbb{K}$ -linéaires.

(iv) **Cat**-catégories = 2-catégories (strictes).

(v) $([0, \infty], \geq, +, 0)$ -catégories = espaces métriques généralisés (au sens de Lawvere).

9.6 Catégories fermées

Définition 9.14 (Catégorie monoïdale fermée). Une catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ est dite **fermée (à droite)** si pour chaque objet B , le foncteur $- \otimes B: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ admet un adjoint à droite, noté $[B, -]$ ou $\underline{\text{Hom}}(B, -)$:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes B, C) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, [B, C])$$

naturellement en A et C . L'objet $[B, C]$ est appelé le **Hom interne**.

Définition 9.15 (Catégorie cartésienne fermée). Une catégorie est **cartésienne fermée (CCC)** si :

(i) elle possède un objet terminal 1 ;

(ii) elle possède tous les produits binaires $A \times B$;

(iii) elle est monoïdale fermée pour la structure $(\mathcal{C}, \times, 1)$, c'est-à-dire les exponentielles $B^A = [A, B]$ existent :

$$\text{Hom}(A \times B, C) \cong \text{Hom}(A, C^B).$$

Exemple 9.16 (Catégories cartésiennes fermées). (i) **Set** avec $B^A = \text{Set}(A, B)$.

- (ii) **Cat** avec $\mathcal{D}^{\mathcal{C}} = \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$.
- (iii) La catégorie des graphes orientés.
- (iv) La catégorie des ensembles simpliciaux $\mathbf{sSet} = \text{Fun}(\Delta^{\text{op}}, \mathbf{Set})$.
- (v) Tout topos élémentaire (cf. chapitre 10).

Proposition 9.17 (Évaluation et curryfication). *Dans une catégorie cartésienne fermée, on dispose de :*

- (a) un morphisme d'évaluation $\text{ev}_{A,B}: B^A \times A \rightarrow B$;
- (b) pour tout $f: A \times B \rightarrow C$, un unique $\tilde{f}: A \rightarrow C^B$ (le **curryfié** de f) tel que $\text{ev} \circ (\tilde{f} \times \text{id}_B) = f$.

Démonstration. Le morphisme d'évaluation est la coïunité de l'adjonction $(-) \times A \dashv (-)^A$. La curryfication est le passage au transposé adjoint. $\square$

9.7 Correspondance de Curry–Howard–Lambek

La correspondance de Curry–Howard–Lambek établit un dictionnaire entre trois domaines :

Logique	Typage	Catégories
Proposition A	Type A	Objet A
Preuve de A	Terme de type A	Morphisme $1 \rightarrow A$
$A \Rightarrow B$	Type fonction $A \rightarrow B$	Exponentielle B^A
$A \wedge B$	Type produit $A \times B$	Produit $A \times B$
Vrai ($\top$)	Type unité	Objet terminal 1
Modus ponens	Application	Évaluation
Introduction de $\Rightarrow$	λ -abstraction	Curryfication

Théorème 9.18 (Lambek). *Il y a une équivalence de catégories entre :*

- (a) les théories de type du λ -calcul simplement typé (avec produits) ;
- (b) les catégories cartésiennes fermées.

Plus précisément, la catégorie syntaxique d'un λ -calcul simplement typé est cartésienne fermée, et réciproquement, le langage interne d'une CCC est un λ -calcul simplement typé.

Esquisse. On construit la catégorie syntaxique $\mathcal{C}_T$ d'une théorie T : les objets sont les types, les morphismes $A \rightarrow B$ sont les termes $x : A \vdash t : B$ modulo $\beta\eta$ -équivalence. Le produit de types donne le produit catégorique, et le type fonction donne l'exponentielle. Réciproquement, à une CCC $\mathcal{C}$ on associe la théorie dont les types sont les objets et dont les termes sont les morphismes. $\square$

9.8 Exercices

Exercice 9.1. Montrer que la catégorie $(\mathbf{Mat}_{\mathbb{K}}, \otimes, 1)$, dont les objets sont les entiers naturels et les morphismes $m \rightarrow n$ sont les matrices $n \times m$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, avec le produit de Kronecker, est monoïdale stricte.

Exercice 9.2. Vérifier en détail que les monoïdes dans $(\mathbf{Ab}, \otimes_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$ sont exactement les anneaux (unitaires).

Exercice 9.3. Montrer que la catégorie $\mathbf{Top}$ des espaces topologiques n'est pas cartésienne fermée. Indication : considérer le produit $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ et la topologie compacte-ouverte.

Exercice 9.4. Soit $\mathcal{V} = ([0, \infty], \geq)$ munie de la structure monoïdale $(+, 0)$. Montrer qu'une $\mathcal{V}$ -catégorie est exactement un espace quasi-métrique généralisé au sens de Lawvere : $d(x, x) = 0$ et $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Exercice 9.5 (Groupe de tresses et catégorie tressée). Soit $\mathcal{B}$ la catégorie dont les objets sont les entiers $n \geq 0$ et dont les morphismes $n \rightarrow n$ forment le groupe de tresses B_n . Montrer que $\mathcal{B}$ est monoïdale (pour l'addition) et tressée.

Exercice 9.6. En utilisant la correspondance de Curry-Howard-Lambek, interpréter la tautologie $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$ comme un isomorphisme dans une CCC.

Chapitre 10

Topos de Grothendieck — Introduction

Contents

8.1	Complexes de chaînes	98
8.2	Homotopie de chaînes et catégorie homotopique .	99
8.3	Quasi-isomorphismes et localisation	100
8.4	La catégorie dérivée	102
8.5	Le foncteur de décalage et le cône de mapping . .	103
8.6	Structure triangulée	104
8.7	Foncteurs dérivés	105
8.8	Suite exacte longue en cohomologie	107
8.9	Exercices	108

La théorie des topos, initiée par Grothendieck dans le cadre de la géométrie algébrique et reformulée par Lawvere et Tierney dans un cadre axiomatique, constitue l'un des sommets de la théorie des catégories. Un topos unifie la géométrie (faisceaux sur un espace), l'algèbre (faisceaux sur un site) et la logique (univers de mathématiques intuitionnistes). Ce chapitre présente les fondements : sites, topologies de Grothendieck, faisceaux, topos élémentaires, classificateur de sous-objets et logique interne.

10.1 Sites et topologies de Grothendieck

Définition 10.1 (Crible). Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie et $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Un **crible** sur C est un sous-foncteur $S \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C)$ du préfaisceau représentable, c'est-à-dire une famille de morphismes de but C stable par précomposition : si $f: D \rightarrow C$ est dans S et $g: E \rightarrow D$ est un morphisme quelconque, alors $f \circ g \in S$.

Définition 10.2 (Topologie de Grothendieck). Une **topologie de Grothendieck** J sur une petite catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée, pour chaque objet $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, d'une collection $J(C)$ de cribles sur C (appelés **cribles couvrants**), satisfaisant les axiomes :

- (T1) **Maximalité** : le crible maximal $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C)$ est dans $J(C)$.
- (T2) **Stabilité** : si $S \in J(C)$ et $f: D \rightarrow C$, alors le crible tiré en arrière $f^*(S) = \{g: E \rightarrow D \mid f \circ g \in S\}$ est dans $J(D)$.
- (T3) **Transitivité** : si $S \in J(C)$ et R est un crible sur C tel que pour tout $f: D \rightarrow C$ dans S on a $f^*(R) \in J(D)$, alors $R \in J(C)$.

Un couple $(\mathcal{C}, J)$ est appelé un **site**.

Exemple 10.3 (Sites fondamentaux). (i) **Site ouvert**. Soit X un espace topologique. La catégorie $\text{Ouv}(X)$ des ouverts de X (avec les inclusions) munie de la topologie où un crible sur U est couvrant si et seulement si les ouverts qu'il contient recouvrent U .

(ii) **Topologie étale**. Sur la catégorie des schémas de type fini sur un corps k , les familles couvrantes sont les familles surjectives de morphismes étales.

(iii) **Topologie fppf**. Les familles couvrantes sont les familles surjectives de morphismes fidèlement plats de présentation finie.

(iv) **Topologie de Zariski**. Les familles couvrantes sont les recouvrements par des ouverts de Zariski.

(v) **Topologie grossière**. Seul le crible maximal est couvrant. Tout préfaisceau est un faisceau pour cette topologie.

(vi) **Topologie canonique**. La plus fine topologie pour laquelle tout foncteur représentable est un faisceau.

10.2 Préfaisceaux et faisceaux

Définition 10.4 (Préfaisceau). *Un **préfaisceau** (d'ensembles) sur une petite catégorie $\mathcal{C}$ est un foncteur $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$. La catégorie des préfaisceaux est notée $\widehat{\mathcal{C}} = \text{Fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set})$.*

Définition 10.5 (Condition de faisceau). *Soit $(\mathcal{C}, J)$ un site. Un préfaisceau $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ est un **faisceau** (pour la topologie J) si pour tout objet C et tout crible couvrant $S \in J(C)$, le morphisme canonique*

$$F(C) \longrightarrow \lim_{(f: D \rightarrow C) \in S} F(D)$$

est un isomorphisme. Autrement dit, toute famille compatible d'éléments indexée par S se recolle de manière unique.

Remarque. *Lorsque la topologie est engendrée par des familles couvrantes $\{f_i: U_i \rightarrow C\}_{i \in I}$, la condition de faisceau se reformule par l'exactitude du diagramme égalisateur classique :*

$$F(C) \longrightarrow \prod_{i \in I} F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i, j \in I} F(U_i \times_C U_j)$$

10.3 Topos de Grothendieck

Définition 10.6 (Topos de Grothendieck). *Un **topos de Grothendieck** est une catégorie équivalente à la catégorie $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$ des faisceaux d'ensembles sur un site $(\mathcal{C}, J)$.*

Proposition 10.7 (Faisceautisation). *L'inclusion $\iota: \text{Sh}(\mathcal{C}, J) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ admet un adjoint à gauche $a: \widehat{\mathcal{C}} \rightarrow \text{Sh}(\mathcal{C}, J)$, appelé **foncteur faisceau associé** ou **faisceautisation**. L'adjonction $a \dashv \iota$ vérifie que a est exact à gauche.*

Esquisse. On construit a en deux étapes d'une procédure de type « plus » (+). Pour un préfaisceau F , on définit $F^+(C) = \text{colim}_{S \in J(C)} \text{Hom}(S, F)$. Le foncteur $F \mapsto (F^+)^+$ donne le faisceau associé. $\square$

Exemple 10.8 (Topos fondamentaux). (i) **Topos des faisceaux sur un espace.** Pour un espace topologique X , $\mathrm{Sh}(X) = \mathrm{Sh}(\mathrm{Ouv}(X), J_{\mathrm{ouv}})$ est le topos classique.

(ii) **Topos étale.** Pour un schéma X , le petit site étale donne le topos étale $X_{\mathrm{ét}}$, central en cohomologie étale.

(iii) **Topos des préfaisceaux.** $\widehat{\mathcal{C}} = \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set})$ est un topos (pour la topologie grossière).

(iv) **Topos classifiant.** Pour un groupe G , la catégorie $G\text{-}\mathbf{Set}$ des G -ensembles est un topos.

10.4 Topos élémentaire

Définition 10.9 (Topos élémentaire). Un **topos élémentaire** est une catégorie $\mathcal{E}$ vérifiant :

- (i) $\mathcal{E}$ possède toutes les limites finies ;
- (ii) $\mathcal{E}$ est cartésienne fermée ;
- (iii) $\mathcal{E}$ possède un **classificateur de sous-objets** Ω (cf. définition 10.10).

Définition 10.10 (Classificateur de sous-objets). Un objet Ω muni d'un monomorphisme $\mathrm{vrai} : 1 \rightarrow \Omega$ est un **classificateur de sous-objets** si pour tout monomorphisme $m : S \rightarrow A$, il existe un unique morphisme $\chi_m : A \rightarrow \Omega$ (le **morphisme caractéristique**) tel que le carré suivant est un tiré en arrière :

$$\begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & 1 \\ m \downarrow & & \downarrow \mathrm{vrai} \\ A & \xrightarrow{\chi_m} & \Omega \end{array}$$

Exemple 10.11 (Classificateur dans $\mathbf{Set}$). Dans $\mathbf{Set}$, le classificateur est $\Omega = \{0, 1\}$ avec $\mathrm{vrai} : \{*\} \rightarrow \{0, 1\}$ envoyant $*$ sur 1. Pour un sous-ensemble $S \subseteq A$, le morphisme caractéristique est la fonction indicatrice χ_S .

Proposition 10.12. *Tout topos de Grothendieck est un topos élémentaire. La réciproque est fausse en général.*

Esquisse. Un topos de Grothendieck possède toutes les limites (et colimites), est cartésien fermé, et le foncteur $\text{Sub}(-) : \mathcal{E}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ est représentable par un objet Ω . Pour la non-réciproque, la catégorie des ensembles finis est un topos élémentaire mais pas de Grothendieck (pas de colimites quelconques). $\square$

10.5 Logique interne d'un topos

La structure de topos élémentaire induit une logique interne qui est, en général, *intuitionniste* : le tiers exclu $A \vee \neg A$ n'est pas nécessairement valide.

Définition 10.13 (Algèbre de Heyting interne). *Dans un topos élémentaire $\mathcal{E}$, pour chaque objet A , le treillis des sous-objets $\text{Sub}(A)$ est une algèbre de Heyting. Les opérations logiques sont :*

- (i) $\wedge$: intersection de sous-objets (tiré en arrière le long de la diagonale) ;
- (ii) $\vee$: union de sous-objets (image de la somme amalgamée) ;
- (iii) $\Rightarrow$: implication de Heyting (adjoint à droite de $\wedge$) ;
- (iv) $\neg$: négation définie par $\neg S = (S \Rightarrow \perp)$.

Proposition 10.14 (Structure algébrique de Ω). *Dans un topos élémentaire, l'objet Ω est un objet d'algèbre de Heyting interne. Les morphismes $\wedge, \vee, \Rightarrow : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ et $\neg : \Omega \rightarrow \Omega$ satisfont les axiomes d'algèbre de Heyting. L'objet Ω est une algèbre de Boole interne si et seulement si la logique du topos est classique.*

Remarque. *Un topos $\mathcal{E}$ est dit **booléen** si Ω est une algèbre de Boole interne, c'est-à-dire si $\neg\neg = \text{id}_{\Omega}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $\mathcal{E}$ est booléen ;
- (ii) tout sous-objet admet un complément ;
- (iii) $\text{Sub}(A)$ est une algèbre de Boole pour tout A .

Le topos $\mathbf{Set}$ est booléen. Le topos $\text{Sh}(X)$ pour un espace X est booléen si et seulement si X est extrêmement disconnecté (pour les faisceaux de

Stone).

10.6 Morphismes géométriques

Définition 10.15 (Morphisme géométrique). Un **morphisme géométrique** $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ entre topos est un couple de foncteurs $(f^*: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}, f_*: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E})$ tel que :

- (i) $f^* \dashv f_*$ (adjonction);
- (ii) f^* est exact à gauche (préserve les limites finies).

Le foncteur f^* est l'**image inverse** et f_* est l'**image directe**.

Exemple 10.16. (i) Pour une application continue $f: X \rightarrow Y$, l'image directe et l'image inverse des faisceaux donnent un morphisme géométrique $\mathrm{Sh}(X) \rightarrow \mathrm{Sh}(Y)$.

- (ii) Le morphisme global $\Gamma: \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Set}$ défini par $\Gamma = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(1, -)$ est l'image directe d'un morphisme géométrique $\gamma: \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Set}$ (le **point global**).

10.7 Théorème de Giraud

Théorème 10.17 (Giraud). Soit $\mathcal{E}$ une catégorie. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) $\mathcal{E}$ est un topos de Grothendieck (i.e. $\mathcal{E} \simeq \mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J)$ pour un petit site $(\mathcal{C}, J)$);
- (b) $\mathcal{E}$ vérifie :
 - (i) $\mathcal{E}$ possède toutes les petites colimites;
 - (ii) les colimites sont universelles (stables par tiré en arrière);
 - (iii) les relations d'équivalence sont effectives;
 - (iv) les sommes amalgamées sont disjointes;
 - (v) $\mathcal{E}$ possède une famille génératrice (petit ensemble).

Idée de preuve. (a) $\Rightarrow$ (b) : on vérifie chaque condition pour les faisceaux. (b) $\Rightarrow$ (a) : on prend pour $\mathcal{C}$ une petite sous-catégorie génératrice et on munit $\mathcal{C}$ de la topologie canonique. Le plongement de Yoneda suivi de la faisceautisation donne une équivalence $\mathcal{E} \simeq \mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J)$. $\square$

10.8 Exercices

Exercice 10.1. Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie et $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Montrer que les cribles sur C sont en bijection avec les sous-foncteurs du foncteur représentable $\text{Hom}(-, C)$.

Exercice 10.2. Vérifier que la topologie grossière (seul le crible maximal est couvrant) satisfait les axiomes (T1)–(T3). Montrer que tout préfaisceau est un faisceau pour cette topologie.

Exercice 10.3. Soit X un espace topologique. Montrer que dans $\text{Sh}(X)$, le classificateur de sous-objets est le faisceau $\Omega(U) = \{V \subseteq U \mid V \text{ ouvert}\}$ pour tout ouvert $U \subseteq X$. En déduire que $\text{Sh}(X)$ n'est en général pas booléen.

Exercice 10.4. Soit G un groupe. Montrer que la catégorie $G\text{-Set}$ des G -ensembles (à gauche) est un topos de Grothendieck. Décrire explicitement le classificateur Ω .

Exercice 10.5 (Morphismes géométriques et points). Montrer qu'un morphisme géométrique $p: \mathbf{Set} \rightarrow \mathcal{E}$ (appelé **point** du topos $\mathcal{E}$) est déterminé par un foncteur exact à gauche et qui commute aux petites colimites $p^*: \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Set}$.

Exercice 10.6. Montrer que dans $\mathbf{Set}$: (a) les colimites sont universelles, (b) les relations d'équivalence sont effectives, (c) les sommes sont disjointes.

Chapitre 11

Théorie des ∞ -catégories — Aperçu

Contents

9.1	Catégories monoïdales	112
9.2	Exemples fondamentaux	113
9.3	Catégories monoïdales symétriques et tressées . .	114
9.4	Objets monoïdes	115
9.5	Catégories enrichies	115
9.6	Catégories fermées	116
9.7	Correspondance de Curry–Howard–Lambek . . .	117
9.8	Exercices	118

La théorie des catégories classique traite des objets et des morphismes entre eux. Mais dans de nombreuses situations (topologie algébrique, algèbre homotopique, géométrie algébrique dérivée), il est naturel de considérer des morphismes entre morphismes, des morphismes entre ceux-ci, et ainsi de suite. Les **∞ -catégories** (ou plus précisément les $(\infty, 1)$ -catégories) formalisent cette idée : ce sont des catégories avec des morphismes à tous les niveaux, où les morphismes de niveau ≥ 2 sont tous inversibles (à homotopie près). Ce chapitre final offre un aperçu des fondements, sans prétendre à l'exhaustivité.

11.1 Motivation

Les catégories ordinaires ne capturent pas toute l'information homotopique. Considérons les exemples suivants :

- (i) **Espaces topologiques.** La catégorie homotopique $\mathbf{Ho}(\mathbf{Top})$ (où l'on a inversé les équivalences d'homotopie faible) perd de l'information : les espaces de morphismes ne sont plus des ensembles mais des *espaces*.
- (ii) **Complexes de chaînes.** La catégorie dérivée $D(\mathcal{A})$ d'une catégorie abélienne est obtenue en inversant les quasi-isomorphismes, mais cette localisation détruit des structures (les triangles distingués ne forment pas une bonne notion de limites).
- (iii) **Champs.** Un champ sur un site est un « faisceau de catégories », ce qui demande naturellement des 2-morphismes et des cohérences supérieures.

Remarque. *Il existe plusieurs modèles équivalents pour les $(\infty, 1)$ -catégories :*

- (a) *les quasi-catégories (Boardman–Vogt, Joyal, Lurie) ;*
- (b) *les catégories de Segal complètes (Rezk) ;*
- (c) *les catégories simpliciales (Dwyer–Kan) ;*
- (d) *les catégories de modèles (Quillen) — comme présentation.*

Ces modèles sont tous reliés par des équivalences de Quillen ou des équivalences catégoriques appropriées.

11.2 Quasi-catégories

Notation. On note Δ la catégorie simpliciale dont les objets sont les ensembles ordonnés finis $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$ pour $n \geq 0$, et les morphismes sont les applications croissantes. Un **ensemble simplicial** est un foncteur $X: \Delta^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$. On note $\mathbf{sSet} = \mathbf{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set})$ la catégorie des ensembles simpliciaux.

Définition 11.1 (Corne). *Pour $0 \leq k \leq n$, la **corne** $\Lambda_k^n \subset \Delta^n$ est le sous-ensemble simplicial obtenu en retirant la face intérieure et la k -ème face de Δ^n . La corne est dite :*

- (i) ***intérieure** si $0 < k < n$;*
- (ii) ***extérieure** si $k = 0$ ou $k = n$.*

Définition 11.2 (Quasi-catégorie). *Un ensemble simplicial X est une **quasi-catégorie** (ou **∞ -catégorie** au sens de Joyal–Lurie) s'il satisfait la **condition de relèvement de Kan interne** : pour tout $n \geq 2$ et tout*

$0 < k < n$, toute application $\Lambda_k^n \rightarrow X$ admet une extension à Δ^n :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

Contrairement à un complexe de Kan (qui exige le relèvement pour toutes les cornes, y compris extérieures), une quasi-catégorie ne requiert le relèvement que pour les cornes intérieures.

Exemple 11.3 (Quasi-catégories fondamentales). (i) **Nerf d'une catégorie.** Si $\mathcal{C}$ est une catégorie ordinaire, son nerf $N(\mathcal{C})$ est une quasi-catégorie. Les 0-simplexes sont les objets, les 1-simplexes sont les morphismes, et les n -simplexes ($n \geq 2$) sont les suites composables de n morphismes. Le relèvement interne est unique car la composition dans $\mathcal{C}$ est strictement définie.

(ii) **Complexes de Kan.** Tout complexe de Kan est une quasi-catégorie. Les complexes de Kan correspondent aux ∞ -groupoïdes (tous les morphismes sont inversibles à homotopie près). L'ensemble simplicial singulier $\text{Sing}(X)$ d'un espace topologique X est un complexe de Kan.

(iii) **Nerf de Dold–Kan.** Le nerf de la catégorie dérivée d'une catégorie abélienne donne une quasi-catégorie qui encode l'information homotopique perdue par la localisation.

Proposition 11.4 (Catégorie homotopique). Soit X une quasi-catégorie. On définit sa **catégorie homotopique** hX comme la catégorie ordinaire dont :

- (i) les objets sont les 0-simplexes de X ;
- (ii) les morphismes de x à y sont les classes d'homotopie de 1-simplexes de x à y ;
- (iii) la composition est induite par le relèvement des cornes Λ_1^2 .

La catégorie hX est bien définie et $h(N(\mathcal{C})) \simeq \mathcal{C}$ pour toute catégorie ordinaire $\mathcal{C}$.

11.3 $(\infty, 1)$ -Catégories

Définition 11.5 ($(\infty, 1)$ -catégorie (informelle)). Une $(\infty, 1)$ -catégorie est une structure possédant :

- (i) des objets ;
 - (ii) des 1-morphismes entre objets ;
 - (iii) des 2-morphismes entre 1-morphismes ;
 - (iv) des n -morphismes entre $(n - 1)$ -morphismes, pour tout $n \geq 2$;
- où tous les k -morphismes pour $k \geq 2$ sont inversibles (à homotopie près).

Remarque. Le modèle standard pour les $(\infty, 1)$ -catégories est celui des quasi-catégories. Dans la suite, on utilise les termes « ∞ -catégorie » et « quasi-catégorie » de manière interchangeable.

Définition 11.6 (Espaces de morphismes). Soit $\mathcal{C}$ une ∞ -catégorie et $x, y \in \mathcal{C}$. L'espace de morphismes $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(x, y)$ est un espace de Kan (un complexe de Kan) défini par

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(x, y)_n = \{f : \Delta^{n+1} \rightarrow \mathcal{C} \mid f|_{\Delta^{\{0\}}} = x, f|_{\Delta^{\{1, \dots, n+1\}}} \text{ dégénéré sur } y\}.$$

Les composantes connexes $\pi_0(\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(x, y))$ redonnent l'ensemble des morphismes dans $\mathrm{h}\mathcal{C}$.

Exemple 11.7 (∞ -catégories fondamentales). (i) $\mathcal{S}$ — $l'\infty$ -catégorie des espaces. Les objets sont les complexes de Kan (ou les espaces topologiques, à équivalence faible près). Les espaces de morphismes sont les espaces de fonctions.

(ii) Cat_{∞} — $l'\infty$ -catégorie des ∞ -catégories. C'est l'analogue supérieur de Cat .

(iii) $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ — catégorie dérivée ∞ -catégorique. Pour une catégorie abélienne $\mathcal{A}$, on obtient une ∞ -catégorie stable qui raffine la catégorie dérivée triangulée classique.

11.4 Yoneda ∞ -catégorique

Théorème 11.8 (Lemme de Yoneda ∞ -catégorique). *Soit $\mathcal{C}$ une petite ∞ -catégorie. Le plongement de Yoneda*

$$\mathbf{y}: \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})$$

est pleinement fidèle : pour tous $x, y \in \mathcal{C}$, l'application

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(x, y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Map}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})}(\mathbf{y}(x), \mathbf{y}(y))$$

est une équivalence d'espaces.

Remarque. *La preuve du lemme de Yoneda ∞ -catégorique est considérablement plus subtile que dans le cas classique. Lurie en donne une démonstration dans Higher Topos Theory (Proposition 5.1.3.1) en utilisant les joints d'ensembles simpliciaux et les extensions de Kan à droite.*

11.5 Adjonctions ∞ -catégoriques

Définition 11.9 (Adjonction entre ∞ -catégories). *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux ∞ -catégories. Un foncteur $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est **adjoint à gauche** d'un foncteur $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ s'il existe une équivalence d'espaces*

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{D}}(F(x), y) \simeq \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(x, G(y))$$

naturelle en $x \in \mathcal{C}$ et $y \in \mathcal{D}$.

Proposition 11.10 (Caractérisation par unité/coïunité). *L'adjonction $F \dashv G$ dans le cadre ∞ -catégorique est équivalente à l'existence de transformations naturelles $\eta: \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F$ et $\varepsilon: F \circ G \rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ satisfaisant les identités triangulaires à homotopie (cohérente) près.*

11.6 Topos supérieurs

Définition 11.11 (Topos supérieur (d’après Lurie)). *Un ∞ -**topos** (ou topos supérieur) est une ∞ -catégorie $\mathcal{X}$ qui est une localisation exacte à gauche accessible d’une ∞ -catégorie de préfaisceaux : il existe une petite ∞ -catégorie $\mathcal{C}$ et une localisation*

$$L: \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}) \rightleftarrows \mathcal{X} : \iota$$

avec $L \dashv \iota$ et L exact à gauche.

Théorème 11.12 (Giraud ∞ -catégorique (Lurie)). *Soit $\mathcal{X}$ une ∞ -catégorie présentable. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) $\mathcal{X}$ est un ∞ -topos ;
- (b) les colimites dans $\mathcal{X}$ sont universelles, et les objets de groupoïde sont effectifs ;
- (c) $\mathcal{X}$ vérifie la descente : pour tout diagramme simplicial $U_{\bullet} \rightarrow X$, le foncteur $\mathcal{X}_{/X} \rightarrow \lim_n \mathcal{X}_{/U_n}$ est une équivalence.

Exemple 11.13 (∞ -topos fondamentaux). (i) $\mathcal{S}$, l’ ∞ -catégorie des espaces, est le ∞ -topos terminal (analogue de **Set**).

(ii) Pour un espace topologique X , la catégorie $\mathrm{Sh}_{\infty}(X)$ des faisceaux d’espaces sur X est un ∞ -topos.

(iii) Le ∞ -topos étale d’un schéma intervient en géométrie algébrique dérivée.

Remarque (Perspectives). *La théorie des ∞ -catégories et des ∞ -topos est aujourd’hui un domaine très actif. Parmi les directions de recherche :*

- (i) la **géométrie algébrique dérivée** (Lurie, Toën–Vezzosi) ;
- (ii) la **topologie algébrique chromatique** (spectres, localisation chromatique) ;
- (iii) les **théories des champs topologiques** (TQFT, théorie de Cobordisme étendu, hypothèse du cobordisme de Baez–Dolan–Lurie) ;
- (iv) la **logique homotopique** et la théorie des types homotopiques ($\mathrm{HoTT}/\mathrm{UF}$) ;

(v) les (∞, n) -catégories pour $n > 1$ et les structures de dimension supérieure.

11.7 Exercices

Exercice 11.1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie ordinaire. Montrer que le nerf $N(\mathcal{C})$ est une quasi-catégorie, et que les relèvements de cornes intérieures sont uniques.

Exercice 11.2. Soit X un complexe de Kan. Montrer que la catégorie homotopique $\mathrm{h}X$ est un groupoïde (tout morphisme est un isomorphisme).

Exercice 11.3. Soit $\mathcal{C}$ une quasi-catégorie et $x, y \in \mathcal{C}$. Montrer que $\pi_0(\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(x, y)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\mathcal{C}}(x, y)$.

Exercice 11.4. Montrer que l' ∞ -catégorie $\mathcal{S}$ des espaces est le ∞ -topos final : pour tout ∞ -topos $\mathcal{X}$, il existe un morphisme géométrique essentiellement unique $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}$.

Exercice 11.5 (Nerf et catégorie homotopique). Montrer que pour toute catégorie ordinaire $\mathcal{C}$, le foncteur catégorie homotopique du nerf redonne la catégorie d'origine : $\mathrm{h}(N(\mathcal{C})) \cong \mathcal{C}$.

Exercice 11.6. Soit X un espace topologique. Montrer que l'ensemble simplicial singulier $\mathrm{Sing}(X)$ est un complexe de Kan. Indication : utiliser le fait que les cornes topologiques sont des rétractes de déformation des simplexes standard.

Annexe A

Rappels d'algèbre et de topologie

Contents

10.1 Sites et topologies de Grothendieck	120
10.2 Préfaisceaux et faisceaux	121
10.3 Topos de Grothendieck	121
10.4 Topos élémentaire	122
10.5 Logique interne d'un topos	123
10.6 Morphismes géométriques	124
10.7 Théorème de Giraud	124
10.8 Exercices	125

Cet appendice rassemble sans démonstration les résultats d'algèbre et de topologie utilisés dans le cours.

A.1 Algèbre

- Définition A.1** (Groupe, anneau, module). (i) Un **groupe** $(G, \cdot, e)$ est un ensemble muni d'une loi associative, d'un élément neutre et d'inverses.
- (ii) Un **anneau** $(R, +, \cdot, 0, 1)$ est un groupe abélien $(R, +, 0)$ muni d'une seconde loi associative avec unité 1, distributive par rapport à l'addition.
- (iii) Un **R -module à gauche** est un groupe abélien $(M, +)$ muni d'une action $R \times M \rightarrow M$ compatible avec les structures de R et de M .

Proposition A.2 (Produit tensoriel). Soient R un anneau commutatif, M un R -module à droite et N un R -module à gauche. Le **produit tensoriel** $M \otimes_R N$ est le quotient du $\mathbb{Z}$ -module libre sur $M \times N$ par les relations de bilinéarité et de R -équilibre :

$$(m \cdot r) \otimes n = m \otimes (r \cdot n).$$

Il satisfait la propriété universelle : $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N, P) \cong \text{Bil}_R(M \times N, P)$.

Définition A.3 (Suite exacte). Une suite de morphismes de R -modules $\cdots \rightarrow M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \rightarrow \cdots$ est **exacte** en M_n si $\ker f_n = \text{im } f_{n+1}$. Une **suite exacte courte** est une suite exacte $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$.

Définition A.4 (Algèbre libre, quotient). Soit R un anneau commutatif.

- (i) Le R -module libre sur un ensemble S est $R^{(S)} = \bigoplus_{s \in S} R$.
- (ii) Pour un sous-module $N \subseteq M$, le quotient M/N est un R -module avec la surjection canonique $\pi: M \rightarrow M/N$.

A.2 Topologie

Définition A.5 (Espace topologique). Un **espace topologique** est un couple (X, τ) où τ est une collection de sous-ensembles de X (les **ouverts**) stable par unions quelconques et intersections finies, contenant $\emptyset$ et X .

Définition A.6 (Application continue, homéomorphisme). Une application $f: X \rightarrow Y$ entre espaces topologiques est **continue** si $f^{-1}(V)$ est ouvert dans X pour tout ouvert V de Y . Un **homéomorphisme** est une bijection continue dont l'inverse est continue.

Définition A.7 (Compacité, connexité). (i) X est **compact** si de tout recouvrement ouvert on peut extraire un sous-recouvrement fini. (ii) X est **connexe** s'il ne peut pas s'écrire comme union de deux ouverts disjoints non vides.

Définition A.8 (Préfaisceau et faisceau sur un espace). *Soit X un espace topologique.*

- (i) Un **préfaisceau** (d'ensembles) sur X est un foncteur $F: \text{Ouv}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$.
- (ii) Un préfaisceau F est un **faisceau** s'il satisfait la condition de recollement : pour tout recouvrement ouvert $\{U_i\}$ de U , le diagramme

$$F(U) \rightarrow \prod_i F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j)$$

est un égalisateur.

Définition A.9 (Homotopie, équivalence d'homotopie). (i) Deux applications continues $f, g: X \rightarrow Y$ sont **homotopes** s'il existe une application continue $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ avec $H(-, 0) = f$ et $H(-, 1) = g$.

- (ii) $f: X \rightarrow Y$ est une **équivalence d'homotopie** s'il existe $g: Y \rightarrow X$ avec $g \circ f \simeq \text{id}_X$ et $f \circ g \simeq \text{id}_Y$.

Définition A.10 (Groupe fondamental). *Pour un espace topologique pointé (X, x_0) , le **groupe fondamental** $\pi_1(X, x_0)$ est le groupe des classes d'homotopie de lacets basés en x_0 .*

Bibliographie

- [1] Mac Lane, S., *Categories for the Working Mathematician*, 2nd ed., Springer, 1998.
- [2] Freyd, P., *Abelian Categories : An Introduction to the Theory of Functors*, Harper & Row, 1964.
- [3] Mitchell, B., *Theory of Categories*, Academic Press, 1965.
- [4] Weibel, C.A., *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press, 1994.
- [5] Borceux, F., *Handbook of Categorical Algebra* (3 volumes), Cambridge University Press, 1994.
- [6] Riehl, E., *Category Theory in Context*, Dover, 2016.
- [7] Awodey, S., *Category Theory*, 2nd ed., Oxford University Press, 2010.
- [8] Kashiwara, M. and Schapira, P., *Categories and Sheaves*, Springer, 2006.
- [9] Grothendieck, A., *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tôhoku Math. J., 9, 119–221, 1957.