Théorie des Catégories

Cours de Master

Notes de cours

2025–2026

Table des matières

Préface

La théorie des catégories, née des travaux fondateurs d'Eilenberg et Mac Lane dans les années 1940, s'est imposée comme le langage unificateur des mathématiques modernes. Conçue initialement pour formaliser la notion de *transformation naturelle* en topologie algébrique, elle a trouvé des applications profondes dans pratiquement toutes les branches des mathématiques.

C'est avant tout dans l'œuvre monumentale d'Alexandre Grothendieck que la théorie des catégories a révélé sa pleine puissance. En refondant la géométrie algébrique sur des bases catégoriques — schémas, faisceaux, topos — Grothendieck a démontré qu'un cadre abstrait bien choisi permet non seulement d'unifier des théories existantes, mais de découvrir des structures invisibles dans les formulations classiques.

Ce cours s'adresse aux étudiants de Master souhaitant acquérir une maîtrise solide des concepts fondamentaux : catégories, foncteurs, transformations naturelles, limites, adjonctions, et au-delà. L'accent est mis sur la rigueur des définitions et la richesse des exemples, issus de l'algèbre, de la topologie et de l'analyse fonctionnelle.

Notations

Notation. *Tout au long de ce texte, on adopte les conventions suivantes :*

Set — *catégorie des ensembles et applications.*

Grp — *catégorie des groupes et homomorphismes.*

Ab — *catégorie des groupes abéliens et homomorphismes.*

Ring — *catégorie des anneaux (unitaires) et homomorphismes d'anneaux.*

Top — *catégorie des espaces topologiques et applications continues.*

$\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ — *catégorie des* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels et applications linéaires.*

R-**Mod** — *catégorie des* R*-modules à gauche et homomorphismes de modules.*

Cat — *catégorie des petites catégories et foncteurs.*

$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ — *catégorie opposée de* $\mathcal{C}$*.*

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ — *ensemble des morphismes de* A *vers* B *dans* $\mathcal{C}$*.*

id_A — *morphisme identité de l'objet* A*.*

$F \circ G$ — *composition de foncteurs.*

$\alpha : F \Rightarrow G$ — *transformation naturelle de* F *vers* G*.*

$[\mathcal{C}, \mathcal{D}$ $] - - - catgoriedesfoncteursdeCversD.$

Chapitre 1

Catégories, Foncteurs, Transformations Naturelles

1.1 Catégories

1.1.1 Définition d'une catégorie

Définition 1.1 (Catégorie)**.** *Une* ***catégorie*** $\mathcal{C}$ *est la donnée de :*

(i) *une classe* $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *dont les éléments sont appelés* ***objets*** *de* $\mathcal{C}$ *;*

(ii) *pour tout couple* (A, B) *d'objets, un ensemble* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ *dont les éléments sont appelés* ***morphismes*** *(ou* ***flèches****) de* A *vers* B *;*

(iii) *pour tout triplet* (A, B, C) *d'objets, une loi de* ***composition***

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C), \quad (g, f) \longmapsto g \circ f;$$

(iv) *pour tout objet* A*, un morphisme* $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ *appelé* ***identité*** *de* A *;*

satisfaisant les axiomes suivants :

(C1) ***Associativité*** *: pour tous morphismes* $f : A \to B$*,* $g : B \to C$*,* $h : C \to D$*,*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

(C2) ***Identité*** *: pour tout morphisme* $f : A \to B$*,*

$$f \circ \mathrm{id}_A = f = \mathrm{id}_B \circ f.$$

On exige de plus que les ensembles $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ *soient deux à deux disjoints pour des couples* (A, B) *distincts (condition de ń typage ż des morphismes).*

Remarque. *Si* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$*, on note aussi* $f : A \to B$ *ou* $A \xrightarrow{f} B$*. L'objet* A *est la* ***source*** *(ou domaine) de* f *et* B *est le* ***but*** *(ou codomaine).*

1.1.2 Exemples fondamentaux

Exemple 1.2 (Catégories concrètes)**.** *(a)* **Set** *: objets = ensembles, morphismes = applications, composition usuelle.*

(b) **Grp** *: objets = groupes, morphismes = homomorphismes de groupes.*

(c) **Ab** *: objets = groupes abéliens, morphismes = homomorphismes de groupes.*

(d) **Ring** *: objets = anneaux unitaires, morphismes = homomorphismes d'anneaux (préservant l'unité).*

(e) **Top** *: objets = espaces topologiques, morphismes = applications continues.*

(f) $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ *: objets =* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels, morphismes = applications* $\mathbb{K}$*-linéaires.*

(g) R-**Mod** *: objets =* R*-modules à gauche, morphismes = homomorphismes de* R*-modules.*

Exemple 1.3 (Ensembles ordonnés comme catégories)**.** *Soit* $(P, \leq)$ *un ensemble partiellement ordonné. On définit une catégorie* $\mathcal{C}_P$ *par :*

— $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_P) = P$;

— $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_P}(x, y) = \begin{cases} \{(x, y)\} & \text{si } x \leq y, \\ \varnothing & \text{sinon.} \end{cases}$

La transitivité de $\leq$ *assure l'existence de la composition, la réflexivité fournit les identités, et l'associativité est automatique (unicité des morphismes).*

Exemple 1.4 (Monoïdes comme catégories)**.** *Tout monoïde $(M, \cdot, e)$ définit une catégorie $\mathcal{B}M$ à un seul objet $\star$:*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}M}(\star, \star) = M, \quad g \circ f = g \cdot f, \quad \mathrm{id}_\star = e.$$

Inversement, toute catégorie à un seul objet est (les données d'un) monoïde.

Exemple 1.5 (Groupes comme catégories)**.** *Un groupe G définit une catégorie $\mathcal{B}G$ à un seul objet où* tous *les morphismes sont inversibles. Réciproquement, une catégorie à un seul objet dont tous les morphismes sont inversibles est (les données d')un groupe.*

1.1.3 Petitesse et taille

Définition 1.6 (Petite catégorie, catégorie localement petite)**.**

*(i) Une catégorie $\mathcal{C}$ est **petite** si* $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *est un ensemble (et non une classe propre).*

*(ii) Une catégorie $\mathcal{C}$ est **localement petite** si pour tous objets A, B, l'ensemble* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ *est un ensemble (au sens de la théorie des ensembles fixée).*

Remarque. *Les catégories* **Set**, **Grp**, **Top**, *etc. ne sont pas petites (la classe de tous les ensembles n'est pas un ensemble), mais elles sont localement petites. La catégorie des ensembles finis* **FinSet** *est un exemple de catégorie à la fois petite et localement petite.*

1.1.4 Monomorphismes, épimorphismes, isomorphismes

Définition 1.7 (Monomorphisme)**.** *Un morphisme $f : A \to B$ dans $\mathcal{C}$ est un **monomorphisme** (ou **mono**) si pour tous morphismes $g, h : C \to A$,*

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h.$$

On dit que f est annulable à gauche.

Définition 1.8 (Épimorphisme)**.** *Un morphisme $f : A \to B$ dans $\mathcal{C}$ est un **épimorphisme** (ou **épi**) si pour tous morphismes $g, h : B \to C$,*

$$g \circ f = h \circ f \implies g = h.$$

On dit que f est annulable à droite.

Définition 1.9 (Isomorphisme)**.** *Un morphisme $f : A \to B$ est un **isomorphisme** s'il existe $g : B \to A$ tel que*

$$g \circ f = \mathrm{id}_A \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{id}_B.$$

Un tel g est unique et noté f^{-1}. On écrit $A \cong B$ si un tel isomorphisme existe.

Proposition 1.10. *Tout isomorphisme est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme.*

Démonstration. Soit $f : A \to B$ un isomorphisme d'inverse f^{-1}. Si $f \circ g = f \circ h$, alors $g = f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ f \circ h = h$, donc f est mono. De même pour épi par composition à droite avec f^{-1}. □

Remarque. *La réciproque est fausse en général. Dans* **Ring***, l'inclusion $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ est à la fois mono et épi, mais n'est pas un isomorphisme.*

Proposition 1.11.
(i) La composée de deux monomorphismes est un monomorphisme.
(ii) La composée de deux épimorphismes est un épimorphisme.
(iii) Si $g \circ f$ est mono, alors f est mono.
(iv) Si $g \circ f$ est épi, alors g est épi.

Démonstration. (i) Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$ monos. Si $(g \circ f) \circ h_1 = (g \circ f) \circ h_2$, alors $g \circ (f \circ h_1) = g \circ (f \circ h_2)$, d'où $f \circ h_1 = f \circ h_2$ (g mono), puis $h_1 = h_2$ (f mono).

(iii) Si $g \circ f$ est mono et $f \circ h_1 = f \circ h_2$, alors $(g \circ f) \circ h_1 = (g \circ f) \circ h_2$, d'où $h_1 = h_2$. Les points (ii) et (iv) sont duaux. □

Lemme 1.12. *L'inverse d'un isomorphisme est unique.*

Démonstration. Si g et g' sont deux inverses de f, alors $g = g \circ \mathrm{id}_B = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = \mathrm{id}_A \circ g' = g'$. □

1.1.5 Objets initiaux, terminaux, nuls

Définition 1.13 (Objet initial, terminal, nul)**.** *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie.*

*(i) Un objet I est **initial** si pour tout objet A, il existe un unique morphisme $I \to A$.*

*(ii) Un objet T est **terminal** si pour tout objet A, il existe un unique morphisme $A \to T$.*

*(iii) Un objet est **nul** (ou **zéro**) s'il est à la fois initial et terminal.*

Proposition 1.14. *Si I_1 et I_2 sont deux objets initiaux de $\mathcal{C}$, alors $I_1 \cong I_2$, et l'isomorphisme est unique. De même pour les objets terminaux.*

Démonstration. Par la propriété universelle, il existe des morphismes uniques $f : I_1 \to I_2$ et $g : I_2 \to I_1$. Alors $g \circ f : I_1 \to I_1$ et $\mathrm{id}_{I_1} : I_1 \to I_1$ sont deux morphismes de I_1 vers lui-même ; par unicité (car I_1 est initial), $g \circ f = \mathrm{id}_{I_1}$. De même $f \circ g = \mathrm{id}_{I_2}$. □

Exemple 1.15 (Objets initiaux et terminaux)**.** *(a) Dans* **Set** *: $\varnothing$ est initial, tout singleton est terminal.*

(b) Dans **Grp** *et* **Ab** *: le groupe trivial $\{e\}$ est objet nul.*

(c) Dans **Ring** *: $\mathbb{Z}$ est initial, l'anneau nul $\{0\}$ est terminal.*

(d) Dans **Top** *: $\varnothing$ est initial, tout singleton (avec la topologie triviale) est terminal.*

(e) Dans $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ *: l'espace nul $\{0\}$ est objet nul.*

1.2 Foncteurs

1.2.1 Définition et premiers exemples

Définition 1.16 (Foncteur (covariant)). *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un **foncteur** (covariant) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est la donnée de :*

(i) une application $F : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$;

(ii) pour tout couple (A, B) d'objets de $\mathcal{C}$, une application

$$F_{A,B} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$$

(on note simplement $F(f)$ pour $F_{A,B}(f)$) ;

satisfaisant :

(F1) $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$ pour tout objet A de $\mathcal{C}$;

(F2) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ pour tous morphismes composables f, g dans $\mathcal{C}$.

Définition 1.17 (Foncteur contravariant). *Un **foncteur contravariant** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un foncteur $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$, c'est-à-dire qu'il* renverse les flèches *:*

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g).$$

Exemple 1.18 (Foncteurs classiques). *(a) **Foncteur d'oubli** U : $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$: à un groupe G associe l'ensemble sous-jacent, à un homomorphisme l'application sous-jacente.*

*(b) **Foncteur libre** $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Grp}$: à un ensemble X associe le groupe libre $F(X)$.*

*(c) **Foncteur abélianisation** $\mathrm{ab} : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$: $G \mapsto G/[G, G]$.*

*(d) **Foncteur espace dual** $(-)^* : \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{\mathrm{op}}$: $V \mapsto V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$, contravariant.*

*(e) **Foncteur** π_1 : $\mathbf{Top}_* \to \mathbf{Grp}$, le groupe fondamental.*

*(f) **Foncteur identité** $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$: $A \mapsto A$, $f \mapsto f$.*

*(g) **Foncteur constant** $\Delta_D : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$: tout objet sur D, tout morphisme sur id_D.*

Proposition 1.19. *Tout foncteur préserve les isomorphismes : si f est un isomorphisme dans $\mathcal{C}$, alors $F(f)$ est un isomorphisme dans $\mathcal{D}$, d'inverse $F(f^{-1})$.*

Démonstration. $F(f) \circ F(f^{-1}) = F(f \circ f^{-1}) = F(\mathrm{id}_B) = \mathrm{id}_{F(B)}$ et de même pour l'autre composition. □

1.2.2 Fidélité, plénitude, essentielle surjectivité

Définition 1.20 (Foncteur fidèle, plein, pleinement fidèle)**.** *Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est :*

(i) ***fidèle*** *si pour tous $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, l'application $F_{A,B} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ est injective ;*

(ii) ***plein*** *si chaque $F_{A,B}$ est surjective ;*

(iii) ***pleinement fidèle*** *s'il est à la fois plein et fidèle (chaque $F_{A,B}$ est bijective).*

Définition 1.21 (Essentiellement surjectif)**.** *Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est* ***essentiellement surjectif*** *si pour tout objet $D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, il existe $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ tel que $F(C) \cong D$.*

Exemple 1.22. *(a) Le foncteur d'oubli $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ est fidèle mais pas plein.*

(b) L'inclusion $\mathbf{Ab} \hookrightarrow \mathbf{Grp}$ est pleinement fidèle.

(c) Le foncteur $\mathrm{ab} : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$ est plein et essentiellement surjectif (mais pas fidèle).

Proposition 1.23. *Un foncteur fidèle reflète les monomorphismes : si F est fidèle et $F(f)$ est mono, alors f est mono.*

Démonstration. Si $f \circ g = f \circ h$, alors $F(f) \circ F(g) = F(f \circ g) = F(f \circ h) = F(f) \circ F(h)$, donc $F(g) = F(h)$ car $F(f)$ est mono. Par fidélité, $g = h$. □

1.2.3 Composition de foncteurs

Proposition 1.24. *Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ sont des foncteurs, alors $G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ défini par $(G \circ F)(A) = G(F(A))$ et $(G \circ F)(f) = G(F(f))$ est un foncteur.*

Démonstration. $(G \circ F)(\mathrm{id}_A) = G(F(\mathrm{id}_A)) = G(\mathrm{id}_{F(A)}) = \mathrm{id}_{G(F(A))}$ et $(G \circ F)(g \circ f) = G(F(g \circ f)) = G(F(g) \circ F(f)) = G(F(g)) \circ G(F(f))$. $\square$

1.3 Transformations naturelles

1.3.1 Définition

Définition 1.25 (Transformation naturelle)**.** *Soient $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs. Une **transformation naturelle** $\alpha : F \Rightarrow G$ est la donnée, pour chaque objet A de $\mathcal{C}$, d'un morphisme*

$$\alpha_A : F(A) \longrightarrow G(A)$$

*dans $\mathcal{D}$, appelé **composante** de α en A, tel que pour tout morphisme $f : A \to B$ dans $\mathcal{C}$, le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "\alpha_B"'] & G(B)
\end{tikzcd}$$

Autrement dit : $\alpha_B \circ F(f) = G(f) \circ \alpha_A$ pour tout $f : A \to B$.

Définition 1.26 (Isomorphisme naturel)**.** *Une transformation naturelle $\alpha : F \Rightarrow G$ est un **isomorphisme naturel** si chaque composante α_A est un isomorphisme dans $\mathcal{D}$. On écrit alors $F \cong G$.*

Exemple 1.27 (Double dual)**.** *Soit $\mathbb{K}$ un corps. Le morphisme canonique $\eta_V : V \to V^{**}$, $v \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(v))$, définit une transformation naturelle $\eta : \mathrm{Id}_{\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}} \Rightarrow (-)^{**}$.*
Pour $f : V \to W$ linéaire, la naturalité revient à $f^{**} \circ \eta_V = \eta_W \circ f$, ce

qui se vérifie : pour $v \in V$ et $\psi \in W^*$,

$$(f^{**}(\eta_V(v)))(\psi) = \eta_V(v)(\psi \circ f) = (\psi \circ f)(v) = \psi(f(v)) = \eta_W(f(v))(\psi).$$

En dimension finie, η est un isomorphisme naturel.

Exemple 1.28 (Déterminant)**.** *Le déterminant* $\det : \mathrm{GL}_n \Rightarrow (-)^\times$ *est une transformation naturelle entre foncteurs* $\mathbf{Ring} \to \mathbf{Grp}$*, où* $\mathrm{GL}_n(R)$ *est le groupe des matrices inversibles et* $(-)^\times$ *associe le groupe des unités. La naturalité exprime que pour tout homomorphisme d'anneaux* $\varphi : R \to S$*, on a* $\det \circ \mathrm{GL}_n(\varphi) = \varphi^\times \circ \det$.

Exemple 1.29 (Abélianisation)**.** *La projection canonique* $\pi_G : G \twoheadrightarrow G/[G,G]$ *définit une transformation naturelle* $\pi : U \Rightarrow U \circ \mathrm{ab}$ *(ici* $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ *est l'oubli), ou plus précisément* $\pi : \mathrm{Id}_{\mathbf{Grp} \Rightarrow \iota \circ \mathrm{ab}}$ *où* $\iota : \mathbf{Ab} \hookrightarrow \mathbf{Grp}$.

1.3.2 Composition verticale et horizontale

Définition 1.30 (Composition verticale)**.** *Soient* $\alpha : F \Rightarrow G$ *et* $\beta : G \Rightarrow H$ *des transformations naturelles entre foncteurs* $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$*. La* ***composition verticale*** $\beta \circ \alpha : F \Rightarrow H$ *est définie par*

$$(\beta \circ \alpha)_A = \beta_A \circ \alpha_A.$$

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[rr, bend left, "(\beta\circ\alpha)_A"] & G(A) \arrow[r, "\beta_A"] & H(A) \end{tikzcd}$$

Proposition 1.31. *La composition verticale $\beta \circ \alpha$ est bien une transformation naturelle.*

Démonstration. Pour $f : A \to B$ dans $\mathcal{C}$: $(\beta \circ \alpha)_B \circ F(f) = \beta_B \circ \alpha_B \circ F(f) = \beta_B \circ G(f) \circ \alpha_A = H(f) \circ \beta_A \circ \alpha_A = H(f) \circ (\beta \circ \alpha)_A$. $\square$

Définition 1.32 (Composition horizontale)**.** *Soient $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $H, K : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ des foncteurs, avec $\alpha : F \Rightarrow G$ et $\beta : H \Rightarrow K$. La* ***composition horizontale*** *$\beta * \alpha : H \circ F \Rightarrow K \circ G$ est définie par*

$$(\beta * \alpha)_A = \beta_{G(A)} \circ H(\alpha_A) = K(\alpha_A) \circ \beta_{F(A)}.$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "H"] \arrow[r, bend right, "K"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

Proposition 1.33 (Loi d'échange)**.** *Soient $\alpha : F \Rightarrow G$, $\alpha' : G \Rightarrow H$ (foncteurs $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$) et $\beta : J \Rightarrow K$, $\beta' : K \Rightarrow L$ (foncteurs $\mathcal{D} \to \mathcal{E}$). Alors*

$$(\beta' \circ \beta) * (\alpha' \circ \alpha) = (\beta' * \alpha') \circ (\beta * \alpha).$$

Démonstration. Vérification composante par composante en utilisant la naturalité de β et β'. □

1.3.3 Catégorie de foncteurs

Définition 1.34 (Catégorie de foncteurs)**.** *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories (avec $\mathcal{C}$ petite). La* ***catégorie de foncteurs*** *$[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ (aussi notée $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ ou $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$) est définie par :*

- *les objets sont les foncteurs $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$;*
- *les morphismes sont les transformations naturelles $\alpha : F \Rightarrow G$;*
- *la composition est la composition verticale ;*
- *l'identité de F est la transformation naturelle id_F définie par $(\mathrm{id}_F)_A = \mathrm{id}_{F(A)}$.*

Remarque. *L'hypothèse ń $\mathcal{C}$ petite ż est nécessaire pour garantir que les transformations naturelles entre deux foncteurs forment un ensemble (et non une classe propre).*

Proposition 1.35. *Un morphisme $\alpha : F \to G$ dans $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ est un isomorphisme si et seulement si α est un isomorphisme naturel (i.e. chaque α_A est un isomorphisme dans $\mathcal{D}$).*

Démonstration. Si α est un isomorphisme dans $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$, il existe $\beta : G \Rightarrow F$ avec $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_F$ et $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_G$. En composantes : $\beta_A \circ \alpha_A = \mathrm{id}_{F(A)}$ et $\alpha_A \circ \beta_A = \mathrm{id}_{G(A)}$, donc chaque α_A est un isomorphisme.

Réciproquement, si chaque α_A est un isomorphisme, on pose $\beta_A = \alpha_A^{-1}$. La naturalité de β découle de celle de α : de $\alpha_B \circ F(f) = G(f) \circ \alpha_A$, on tire $F(f) = \alpha_B^{-1} \circ G(f) \circ \alpha_A$, d'où $\beta_B \circ G(f) = F(f) \circ \beta_A$. □

Exemple 1.36 (Préfaisceaux)**.** *Si $\mathcal{C}$ est une petite catégorie, un* ***préfaisceau*** *(d'ensembles) sur $\mathcal{C}$ est un foncteur $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$. La catégorie des préfaisceaux est $[\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$, souvent notée $\widehat{\mathcal{C}}$.*

1.4 Exercices

Exercice 1.1 (Catégorie des flèches)**.** *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Construire la* ***catégorie des flèches*** *$\mathcal{C}^{\to}$ dont les objets sont les morphismes de $\mathcal{C}$ et dont un morphisme de $f : A \to B$ vers $g : C \to D$ est un couple (h, k) tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "g"] \\
B \arrow[r, "k"'] & D
\end{tikzcd}$$

Montrer que $\mathcal{C}^{\to} \cong [\mathbf{2}, \mathcal{C}]$ où $\mathbf{2}$ est la catégorie $\{0 \to 1\}$.

Exercice 1.2 (Sections et rétractions)**.** *Un morphisme $f : A \to B$ est une* ***section*** *(ou mono scindé) s'il existe $g : B \to A$ tel que $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Il est une* ***rétraction*** *(ou épi scindé) s'il existe $h : B \to A$ tel que $f \circ h = \mathrm{id}_B$.*

(a) Montrer que toute section est un monomorphisme et toute rétraction est un épimorphisme.

(b) Donner un monomorphisme dans $\mathbf{Set}$ qui n'est pas une section.

(c) Montrer que dans $\mathbf{Set}$, tout épimorphisme est une rétraction (utiliser l'axiome du choix).

Exercice 1.3 (Foncteur puissance). *Montrer que l'application $\mathcal{P} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ qui à un ensemble X associe $\mathcal{P}(X)$ (ensemble des parties) peut être munie d'une structure de foncteur de deux façons :*

(a) Covariant : image directe $f_*(S) = f(S)$.

(b) Contravariant : image réciproque $f^*(S) = f^{-1}(S)$.

Vérifier les axiomes de foncteur dans chaque cas.

Exercice 1.4 (Naturalité du centre). *Le centre $Z(G) = \{g \in G \mid \forall h \in G, gh = hg\}$ définit-il un foncteur $Z : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$? Si oui, l'inclusion $Z(G) \hookrightarrow G$ est-elle une transformation naturelle ? Justifier.*

Exercice 1.5 (Équivalence mono/injectif dans Set). *Montrer que dans* **Set***, un morphisme est un monomorphisme si et seulement s'il est injectif, et un épimorphisme si et seulement s'il est surjectif.*

Exercice 1.6 (Catégories de tranches). *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et A un objet. Construire la **catégorie de tranches** $\mathcal{C}/A$ (ou* comma category over *A) dont les objets sont les morphismes $f : X \to A$ et les morphismes de $(f : X \to A)$ vers $(g : Y \to A)$ sont les morphismes $h : X \to Y$ tels que $g \circ h = f$. Vérifier les axiomes de catégorie. Décrire $\mathbf{Set}/\{0, 1\}$.*

Exercice 1.7 (Endomorphismes de l'identité). *Soit $\mathcal{C} = \mathbf{Ab}$. Montrer que $\mathrm{End}(\mathrm{Id}_{\mathbf{Ab}}) \cong \mathbb{Z}$ (l'anneau des endomorphismes de la transformation naturelle identité est isomorphe à $\mathbb{Z}$).*
Indication *: une transformation naturelle $\alpha : \mathrm{Id}_{\mathbf{Ab} \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathbf{Ab}}}$ est déterminée par $\alpha_{\mathbb{Z}}(1)$.*

Exercice 1.8 (Foncteur nerf). *Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie. Le **nerf** $N(\mathcal{C})$ est l'ensemble simplicial défini par $N(\mathcal{C})_n = \{$chaînes de n morphismes composables $A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} A_n\}$.*

(a) Décrire $N(\mathcal{C})_0$, $N(\mathcal{C})_1$ et $N(\mathcal{C})_2$.

(b) Montrer que $\mathcal{C} \mapsto N(\mathcal{C})$ définit un foncteur $N : \mathbf{Cat} \to \mathbf{sSet}$.

Chapitre 2

Dualité et Principe de Dualité

2.1 La catégorie opposée

Définition 2.1 (Catégorie opposée)**.** *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. La **catégorie opposée** (ou **duale**) $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ est définie par :*

(i) $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *;*

(ii) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ *;*

(iii) la composition dans $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$: si $f^{\mathrm{op}} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(A, B)$ et $g^{\mathrm{op}} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(B, C)$ (correspondant à $f : B \to A$ et $g : C \to B$ dans $\mathcal{C}$), alors $g^{\mathrm{op}} \circ_{\mathrm{op}} f^{\mathrm{op}} = (f \circ g)^{\mathrm{op}}$;

(iv) $\mathrm{id}_A^{\mathrm{op}} = (\mathrm{id}_A)^{\mathrm{op}}$.

Proposition 2.2. *Pour toute catégorie $\mathcal{C}$, on a $(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathcal{C}$.*

Démonstration. Les objets sont identiques. Les morphismes : $\mathrm{Hom}_{(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(B, A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$. La composition est restaurée par double renversement. □

Exemple 2.3. *(a) Si $(P, \leq)$ est un ensemble ordonné, $\mathcal{C}_P^{\mathrm{op}} = \mathcal{C}_{(P,\geq)}$.*

(b) Si G est un groupe vu comme catégorie à un objet, $(\mathcal{B}G)^{\mathrm{op}} = \mathcal{B}G^{\mathrm{op}}$ où G^{op} est le groupe opposé (même ensemble, multiplication $a \cdot^{\mathrm{op}} b = b \cdot a$). Pour les groupes abéliens, $G^{\mathrm{op}} \cong G$.

(c) $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{\mathrm{op}}$ *n'est pas ń concrètement ż la catégorie des espaces vecto-*

riels, mais elle lui est équivalente (via le dual).

2.2 Le principe de dualité

Théorème 2.4 (Principe de dualité)**.** *Soit Φ un énoncé formulé dans le langage de la théorie des catégories (en termes d'objets, morphismes, composition et identités). Soit Φ^{op} l'énoncé obtenu en renversant toutes les flèches (en échangeant source et but, en inversant l'ordre de composition). Alors :*

$$\Phi \text{ est vrai dans toute catégorie} \iff \Phi^{\mathrm{op}} \text{ est vrai dans toute catégorie.}$$

Plus précisément, Φ est vrai dans $\mathcal{C}$ si et seulement si Φ^{op} est vrai dans $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

Démonstration. Si Φ est vrai dans toute catégorie, alors en particulier Φ est vrai dans $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ pour toute catégorie $\mathcal{C}$. Or l'énoncé ń Φ dans $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ ż est exactement ń Φ^{op} dans $\mathcal{C}$ ż (car passer à l'opposée renverse les flèches). Donc Φ^{op} est vrai dans toute catégorie $\mathcal{C}$. $\square$

Remarque. *Le principe de dualité est un* méta-théorème *: il porte sur les énoncés de la théorie et non sur des objets mathématiques particuliers. Son utilité pratique est considérable : tout théorème catégorique donne* gratuitement *un second théorème par dualisation.*

Corollaire 2.5. *Voici un dictionnaire des concepts duaux :*

Concept	***Concept dual***
monomorphisme	*épimorphisme*
objet initial	*objet terminal*
section (mono scindé)	*rétraction (épi scindé)*
noyau	*conoyau*
produit	*coproduit*
limite	*colimite*
égaliseur	*coégaliseur*

2.3 Exemples de dualisation

Exemple 2.6 (Dualisation des propositions du chapitre 1). *(a) ń La composée de monomorphismes est un monomorphisme ż dualise en ń la composée d'épimorphismes est un épimorphisme ż.*

(b) ń Si $g \circ f$ est mono alors f est mono ż dualise en ń si $g \circ f$ est épi alors g est épi ż.

(c) ń L'objet initial est unique à isomorphisme unique près ż dualise en la même affirmation pour l'objet terminal.

Proposition 2.7. *Un foncteur contravariant $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est la même chose qu'un foncteur (covariant) $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$, ou de façon équivalente un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$.*

Démonstration. La donnée d'une application $F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(B), F(A))$ vérifiant $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ est exactement la donnée d'une application $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(B, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(B), F(A))$ vérifiant la fonctorialité covariante (en utilisant la composition dans $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$). $\square$

2.4 Dualités concrètes

Les dualités abstraites de la théorie des catégories se manifestent dans des théorèmes classiques profonds.

2.4.1 Dualité de Pontryagin

Théorème 2.8 (Pontryagin)**.** *Soit* **LCA** *la catégorie des groupes abéliens localement compacts et homomorphismes continus. Le foncteur* ***dual de Pontryagin***

$$\widehat{(-)} : \mathbf{LCA} \longrightarrow \mathbf{LCA}^{\mathrm{op}}, \quad G \longmapsto \widehat{G} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(G, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$$

(muni de la topologie compacte-ouverte) définit une équivalence de catégories $\mathbf{LCA} \simeq \mathbf{LCA}^{\mathrm{op}}$*.*

En particulier, la transformation naturelle canonique $G \to \widehat{\widehat{G}}$ *est un isomorphisme naturel.*

Remarque. *La dualité de Pontryagin échange :*

- *groupes compacts* $\longleftrightarrow$ *groupes discrets ;*
- $\mathbb{Z} \longleftrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *(le cercle) ;*
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longleftrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *(auto-dual).*

2.4.2 Dualité de Stone

Théorème 2.9 (Stone)**.** *Il existe une équivalence de catégories*

$$\mathbf{Bool}^{\mathrm{op}} \simeq \mathbf{Stone}$$

où **Bool** *est la catégorie des algèbres de Boole et* **Stone** *est la catégorie des espaces de Stone (espaces topologiques compacts totalement discontinus).*

Le foncteur $\mathbf{Bool} \to \mathbf{Stone}^{\mathrm{op}}$ *associe à une algèbre de Boole* B *son espace de spectres* $\mathrm{Spec}(B)$ *(ensemble des ultrafiltres muni de la topologie de Zariski). Le foncteur inverse associe à un espace de Stone* X *l'algèbre* $\mathrm{Clop}(X)$ *de ses parties clopen (ouvertes et fermées).*

Remarque. *La dualité de Stone peut être vue comme un précurseur de la dualité de Gelfand (entre* C^**-algèbres commutatives et espaces compacts) et plus généralement des dualités en géométrie algébrique (le foncteur* Spec*).*

2.5 Le foncteur Hom

Définition 2.10 (Foncteur Hom covariant)**.** *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite et $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Le* ***foncteur Hom covariant*** *est*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

défini par :

- *sur les objets : $B \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$;*
- *sur les morphismes : à $f : B \to C$, on associe la post-composition*

$$f_* = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C), \quad g \mapsto f \circ g.$$

Proposition 2.11. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -)$ *est bien un foncteur.*

Démonstration. $(\mathrm{id}_B)_*(g) = \mathrm{id}_B \circ g = g$, donc $(\mathrm{id}_B)_* = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(A,B)}$. Pour la composition : $(f' \circ f)_*(g) = (f' \circ f) \circ g = f' \circ (f \circ g) = f'_*(f_*(g))$. □

Définition 2.12 (Foncteur Hom contravariant)**.** *Soit $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Le* ***foncteur Hom contravariant*** *est*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, B) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

défini par :

- *sur les objets : $A \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$;*
- *sur les morphismes : à $f : A' \to A$ dans $\mathcal{C}$, on associe la pré-composition*

$$f^* = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, B) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A', B), \quad g \mapsto g \circ f.$$

Définition 2.13 (Bifoncteur Hom)**.** *Le* ***bifoncteur Hom*** *est le foncteur*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

défini par $(A, B) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ et $(f, g) \mapsto (h \mapsto g \circ h \circ f)$ pour $f : A' \to A$ et $g : B \to B'$.

Proposition 2.14. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)$ *est bien un foncteur* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$.

Démonstration. Il faut vérifier les deux axiomes. Pour l'identité : $\mathrm{Hom}(\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_B)(h) = \mathrm{id}_B \circ h \circ \mathrm{id}_A = h$. Pour la composition : si (f_1, g_1) et (f_2, g_2) sont composables, alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(f_1 \circ f_2, g_2 \circ g_1)(h) &= (g_2 \circ g_1) \circ h \circ (f_1 \circ f_2) \\ &= g_2 \circ (g_1 \circ h \circ f_1) \circ f_2 \\ &= \mathrm{Hom}(f_2, g_2)(\mathrm{Hom}(f_1, g_1)(h)).\end{aligned}$$

(Attention à l'ordre dans $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$: la composition de (f_2^{op}, g_2) après (f_1^{op}, g_1) en tant que morphisme de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C}$ donne $((f_1 \circ f_2)^{\mathrm{op}}, g_2 \circ g_1)$.) $\square$

Proposition 2.15. *Soit* $\mathcal{C}$ *localement petite et* $f : A \to B$ *un morphisme.*

(i) f *est mono* $\iff$ $f_* : \mathrm{Hom}(C, A) \to \mathrm{Hom}(C, B)$ *est injective pour tout objet* C.

(ii) f *est épi* $\iff$ $f^* : \mathrm{Hom}(B, C) \to \mathrm{Hom}(A, C)$ *est injective pour tout objet* C.

Démonstration. Ce sont exactement les reformulations des définitions de mono et épi en termes des applications induites. $\square$

Proposition 2.16. *Un morphisme* $f : A \to B$ *dans* $\mathcal{C}$ *induit une transformation naturelle*

$$f^* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, -) \Longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -)$$

définie par $f^*_C(g) = g \circ f$ *pour* $g : B \to C$.

Démonstration. Pour $h : C \to D$, on vérifie la naturalité : $h_* \circ f^*_C = f^*_D \circ h_*$. En effet, pour $g : B \to C$: $(h_* \circ f^*_C)(g) = h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = f^*_D(h \circ g) = (f^*_D \circ h_*)(g)$. $\square$

2.6 Exercices

Exercice 2.1 (Catégorie opposée de la catégorie opposée)**.** *Vérifier en détail que* $(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathcal{C}$ *(égalité et non simple isomorphisme).*

Exercice 2.2 (Dual d'un foncteur)**.** *Soit* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *un foncteur. Montrer que* F *induit un foncteur* $F^{\mathrm{op}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ *défini par* $F^{\mathrm{op}}(A) = F(A)$ *et* $F^{\mathrm{op}}(f^{\mathrm{op}}) = (F(f))^{\mathrm{op}}$*. Vérifier les axiomes.*

Exercice 2.3 (Pleinement fidèle et isomorphismes)**.** *Soit* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *un foncteur pleinement fidèle. Montrer que* F *reflète les isomorphismes : si* $F(f)$ *est un isomorphisme dans* $\mathcal{D}$*, alors* f *est un isomorphisme dans* $\mathcal{C}$*.*

Exercice 2.4 (Caractérisation des mono dans **Top**)**.**
- *(a) Montrer que dans* **Top***, les monomorphismes sont exactement les applications continues injectives.*
- *(b) Montrer que dans* **Top***, les épimorphismes sont exactement les applications continues surjectives.*
- *(c) En déduire qu'il existe dans* **Top** *des morphismes qui sont à la fois mono et épi sans être des isomorphismes. Donner un exemple explicite.*

Exercice 2.5 (Hom et produit)**.** *Soit* $\mathcal{C}$ *une catégorie localement petite possédant des produits binaires. Montrer qu'il existe un isomorphisme naturel (en* C*)*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A \times B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, B).$$

Exercice 2.6 (Dualité de Gelfand – énoncé catégorique)**.** *Soit* **CHaus** *la catégorie des espaces compacts de Hausdorff et* $\mathbf{cC^*Alg}$ *la catégorie des* C^**-algèbres commutatives unitaires.*
- *(a) Décrire le foncteur* $C : \mathbf{CHaus} \to \mathbf{cC^*Alg}^{\mathrm{op}}$ *qui à* X *associe* $C(X, \mathbb{C})$*.*
- *(b) Énoncer le théorème de Gelfand–Naimark en termes d'équivalence de catégories.*
- *(c) En quoi cette dualité généralise-t-elle la dualité de Stone ?*