

Systemes Dynamiques

Notes de Cours

Master M1 — 2025–2026

Yaë Ulrich Gaba

« Si nous connaissions exactement les lois de la nature, nous n'aurions besoin que d'un seul instant. »

— Henri Poincaré

Table des matières

Préface	1
1 Systèmes Dynamiques — Définitions et Exemples	5
1.1 Introduction	5
1.2 Systèmes dynamiques continus	5
1.2.1 Existence et unicité des solutions	6
1.3 Flots et semi-flots	6
1.4 Orbites, trajectoires et ensembles limites	6
1.5 Espace des phases et portrait de phase	7
1.6 Systèmes dynamiques discrets	8
1.7 Premières intégrales et systèmes conservatifs	9
1.8 Systèmes dissipatifs et volume de Liouville	9
1.9 Exemples de systèmes dynamiques célèbres	10
1.10 Équivalence topologique et conjugaison	10
1.11 Exercices	11
2 Stabilité de Lyapunov	13
2.1 Introduction	13
2.2 Définitions de la stabilité	13
2.3 Bassin d'attraction	14
2.4 Méthode indirecte : linéarisation	14
2.5 Méthode directe de Lyapunov	15
2.6 Principe d'invariance de LaSalle	16
2.7 Théorèmes d'instabilité	16
2.8 Construction de fonctions de Lyapunov	16
2.8.1 Fonctions quadratiques	17
2.8.2 Fonctions énergie	17
2.8.3 Combinaisons et estimations	17
2.9 Stabilité des orbites périodiques	17
2.10 Fonctions de Lyapunov et contrôle	17
2.11 Exercices	18
3 Systèmes Linéaires et Classification des Portraits de Phase	19
3.1 Introduction	19
3.2 Solution générale et exponentielle de matrice	19
3.3 Classification dans $\mathbb{R}^2$	20
3.3.1 Nœud stable ($\lambda_1 < \lambda_2 < 0$)	20
3.3.2 Nœud instable ($0 < \lambda_1 < \lambda_2$)	20
3.3.3 Point col ($\lambda_1 < 0 < \lambda_2$)	21

3.3.4	Foyer stable ($\lambda = \alpha \pm i\beta$, $\alpha < 0$)	21
3.3.5	Foyer instable ($\alpha > 0$)	21
3.3.6	Centre ($\lambda = \pm i\beta$, $\alpha = 0$)	21
3.3.7	Nœud dégénéré et nœud étoilé	22
3.4	Diagramme (τ, δ)	22
3.5	Systèmes linéaires en dimension supérieure	22
3.5.1	Décomposition en sous-espaces invariants	22
3.5.2	Forme de Jordan et exponentielle	23
3.6	Systèmes linéaires non autonomes	23
3.7	Applications	23
3.8	Exercices	24
4	Systèmes Non Linéaires — Linéarisation et Variété Centrale	27
4.1	Introduction	27
4.2	Le théorème de Hartman-Grobman	27
4.3	Variétés invariantes locales	28
4.4	Théorie de la variété centrale	28
4.4.1	Calcul pratique de la variété centrale	29
4.5	Formes normales	29
4.6	Linéarisation différentiable	30
4.7	Application : dynamique de population	30
4.8	Exercices	31
5	Cycles Limites et Théorème de Poincaré-Bendixson	33
5.1	Introduction	33
5.2	Définitions	33
5.3	Critère de non-existence : Bendixson-Dulac	34
5.4	Le théorème de Poincaré-Bendixson	34
5.5	Application de Poincaré et multiplicateurs	35
5.6	Théorie de l'indice	35
5.7	Exemples détaillés	36
5.8	Le théorème de Liénard	37
5.9	Exercices	37
6	Bifurcations	39
6.1	Introduction	39
6.2	Cadre général	39
6.3	Bifurcation nœud-col (saddle-node)	39
6.4	Bifurcation transcritique	40
6.5	Bifurcation fourche (pitchfork)	41
6.6	Bifurcation de Hopf	41
6.7	Diagrammes de bifurcation	43
6.8	Bifurcations globales	43
6.9	Bifurcations en dimension supérieure	43
6.10	Applications physiques	43
6.11	Exercices	44

7	Chaos — Définitions et Propriétés	45
7.1	Introduction	45
7.2	Sensibilité aux conditions initiales	45
7.3	Définition de Devaney du chaos	46
7.4	Définition de Li-Yorke du chaos	46
7.5	L'ordre de Sharkovskii	46
7.6	Exemples fondamentaux	47
7.6.1	L'application de décalage (shift)	47
7.6.2	L'application de la tente	47
7.6.3	L'application logistique à $r = 4$	47
7.7	Le fer à cheval de Smale	47
7.8	Routes vers le chaos	48
7.9	Chaos dans les systèmes continus	48
7.10	Exercices	49
8	Exposants de Lyapunov	51
8.1	Introduction	51
8.2	Définition pour les systèmes discrets	51
8.3	Exposants de Lyapunov en dimension supérieure	52
8.4	Le théorème ergodique multiplicatif d'Oseledets	52
8.5	Propriétés fondamentales	53
8.6	Calcul numérique des exposants de Lyapunov	53
8.7	Applications à la détection du chaos	54
8.8	Exposants conditionnels et applications	55
8.9	Exercices	55
9	Attracteurs Étranges	57
9.1	Introduction	57
9.2	Définitions formelles	57
9.3	L'attracteur de Lorenz	58
9.4	Le système de Rössler	58
9.5	L'application de Hénon	59
9.6	Dimension fractale	59
9.7	Attracteurs dans les systèmes physiques	60
9.8	Exercices	60
10	Systèmes Dynamiques Discrets	63
10.1	Introduction	63
10.2	L'application logistique	63
10.3	Le théorème de Sharkovskii	64
10.4	Dynamique symbolique	64
10.5	Entropie topologique	65
10.6	Exemples avancés	66
10.7	Exercices	66
11	Introduction à la Théorie Ergodique	67
11.1	Introduction	67
11.2	Transformations préservant la mesure	67
11.3	Ergodicité	68

11.4 Le théorème ergodique de Birkhoff	68
11.5 Mélange	69
11.6 Décomposition ergodique	69
11.7 Entropie métrique	69
11.8 Applications à la théorie des nombres	70
11.9 Exercices	70

Préface

Motivation et objectifs

La théorie des systèmes dynamiques constitue l'un des piliers fondamentaux des mathématiques appliquées modernes. Née des travaux pionniers de Henri Poincaré sur le problème des trois corps à la fin du XIX^e siècle, cette discipline a connu un essor spectaculaire au cours du XX^e siècle, notamment grâce aux contributions d'Alexandre Lyapounov, George Birkhoff, Andreï Kolmogorov, Stephen Smale et Edward Lorenz.

Ce cours s'adresse aux étudiants de niveau Master (M1–M2) en mathématiques, physique théorique ou ingénierie, possédant des bases solides en analyse réelle, algèbre linéaire et équations différentielles ordinaires. Notre objectif est triple :

1. **Maîtriser les fondements théoriques** : existence et unicité des solutions, stabilité au sens de Lyapounov, théorie spectrale des systèmes linéaires, variétés centrales et réduction dimensionnelle.
2. **Comprendre les phénomènes qualitatifs** : cycles limites, bifurcations, chaos déterministe, attracteurs étranges et comportement ergodique.
3. **Développer des compétences computationnelles** : simulation numérique en Python, calcul des exposants de Lyapounov, diagrammes de bifurcation et visualisation des attracteurs.

Organisation du cours

Le cours est structuré en onze chapitres, organisés selon une progression logique allant des définitions fondamentales vers les concepts les plus avancés.

Partie I — Fondements (Chapitres 1–3). Le chapitre 1 pose les définitions de base : systèmes dynamiques continus et discrets, flots, orbites, ensembles limites. Le chapitre 2 introduit la notion de stabilité au sens de Lyapounov et les méthodes directes et indirectes. Le chapitre 3 traite la classification complète des portraits de phase des systèmes linéaires plans.

Partie II — Systèmes non linéaires (Chapitres 4–6). Le chapitre 4 développe les techniques de linéarisation et la théorie des variétés centrales. Le chapitre 5 étudie les cycles limites et le théorème de Poincaré-Bendixson. Le chapitre 6 présente la théorie des bifurcations : nœud-col, fourche, Hopf.

Partie III — Chaos et ergodicité (Chapitres 7–11). Le chapitre 7 introduit les définitions formelles du chaos. Le chapitre 8 traite des exposants de Lyapounov. Le chapitre 9 étudie les attracteurs étranges, notamment ceux de Lorenz et Hénon. Le chapitre 10

aborde les systèmes dynamiques discrets. Enfin, le chapitre 11 offre une introduction à la théorie ergodique.

Prérequis

Les prérequis essentiels pour ce cours sont :

- **Analyse réelle** : topologie de $\mathbb{R}^n$, convergence uniforme, théorèmes de points fixes, intégrales dépendant d'un paramètre.
- **Algèbre linéaire** : valeurs propres, décomposition de Jordan, exponentielle de matrice, formes bilinéaires.
- **Équations différentielles ordinaires** : théorème de Cauchy-Lipschitz, solutions maximales, lemme de Grönwall.
- **Théorie de la mesure** (pour le chapitre 11) : mesures de Borel, intégration de Lebesgue, théorèmes de convergence.
- **Programmation Python** (pour les travaux pratiques) : bibliothèques `numpy`, `scipy`, `matplotlib`.

Conventions et notations

Tout au long de ce cours, nous adoptons les conventions suivantes :

- $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ désignent respectivement les ensembles des réels, complexes, entiers naturels et entiers relatifs.
- $\|\cdot\|$ désigne une norme sur $\mathbb{R}^n$ (généralement la norme euclidienne $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$).
- $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}$ est la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r .
- $\dot{x}$ désigne $\frac{dx}{dt}$, la dérivée par rapport au temps.
- $Df(x)$ ou $J_f(x)$ désigne la matrice jacobienne de f au point x .
- $\sigma(A)$ désigne le spectre (ensemble des valeurs propres) de la matrice A .
- $\operatorname{Re}(\lambda)$ et $\operatorname{Im}(\lambda)$ désignent les parties réelle et imaginaire de $\lambda \in \mathbb{C}$.
- Les théorèmes, définitions et propositions sont numérotés par chapitre.

Perspective historique

La théorie des systèmes dynamiques possède une histoire riche et fascinante que nous résumons brièvement.

Les origines (1880–1920). Henri Poincaré, dans son œuvre monumentale *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (1892–1899), a posé les fondations de l’approche qualitative des équations différentielles. Il a introduit les notions de portrait de phase, de section de Poincaré et a entrevu la possibilité d’un comportement chaotique dans les systèmes déterministes.

La stabilité (1892–1950). Alexandre Lyapounov a développé sa théorie de la stabilité dans sa thèse de 1892, *Problème général de la stabilité du mouvement*. Ses méthodes, tant directes qu’indirectes, restent parmi les outils les plus puissants de la théorie moderne.

L’école topologique (1920–1960). George Birkhoff, puis les mathématiciens soviétiques (Andronov, Pontriaguine, Kolmogorov), ont développé l’approche topologique et ergodique. Le théorème KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser, 1954–1963) a résolu partiellement le problème de la stabilité des systèmes hamiltoniens.

La révolution du chaos (1963–présent). Edward Lorenz a découvert en 1963 la sensibilité aux conditions initiales dans un modèle météorologique simplifié. Les travaux de Smale (fer à cheval), Ruelle et Takens (attracteurs étranges), Feigenbaum (universalité), et May (dynamique des populations) ont transformé notre compréhension des systèmes déterministes.

Applications

Les systèmes dynamiques trouvent des applications dans de nombreux domaines :

- **Physique** : mécanique céleste, mécanique des fluides (turbulence), physique des lasers, circuits électroniques non linéaires.
- **Biologie** : dynamique des populations (modèles proie-prédateur), épidémiologie (modèle SIR), neurosciences (modèle de Hodgkin-Huxley), rythmes circadiens.
- **Chimie** : réactions oscillantes (Belousov-Zhabotinsky), cinétique enzymatique.
- **Économie** : modèles de croissance, cycles économiques, dynamique des marchés financiers.
- **Ingénierie** : contrôle des systèmes, robotique, aéronautique (flutter), réseaux électriques.
- **Climatologie** : modèles climatiques, prévision météorologique, El Niño.

Comment utiliser ce cours

Chaque chapitre contient :

- Des **définitions** et **théorèmes** rigoureusement énoncés, avec démonstrations détaillées.
- Des **exemples** illustrant les concepts abstraits.

- Des **remarques** apportant des compléments ou des mises en garde.
- Des **exercices** de difficulté progressive.
- Des **simulations Python** permettant de visualiser les phénomènes.

Nous encourageons vivement le lecteur à :

1. Travailler les démonstrations en détail.
2. Résoudre les exercices proposés.
3. Exécuter et modifier les codes Python pour développer une intuition numérique.
4. Établir des liens entre les différents chapitres.

Références principales

1. M.W. Hirsch, S. Smale, R.L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, 3ème éd., Academic Press, 2012.
2. S.H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, 2ème éd., Westview Press, 2015.
3. L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, 3ème éd., Springer, 2001.
4. A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 1995.
5. J. Guckenheimer, P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, 1983.
6. K.T. Alligood, T.D. Sauer, J.A. Yorke, *Chaos : An Introduction to Dynamical Systems*, Springer, 1996.

Remerciements

Ce cours doit beaucoup aux ouvrages classiques cités ci-dessus, ainsi qu'aux nombreuses discussions avec des collègues et étudiants. Nous remercions également la communauté mathématique francophone pour son riche héritage dans ce domaine, depuis Poincaré jusqu'à nos jours.

Bonne lecture et bon travail !

Chapitre 1

Systèmes Dynamiques — Définitions et Exemples

En 1889, Henri Poincaré participe à un concours organisé par le roi Oscar II de Suède : démontrer la stabilité du système solaire. Non seulement Poincaré ne parvient pas à prouver la stabilité, mais il découvre quelque chose de bien plus profond : l'existence de comportements si compliqués que toute prédiction à long terme devient impossible. C'est là que naît la théorie des systèmes dynamiques : l'étude de la façon dont les états d'un système évoluent au fil du temps, avec toute la richesse — ordre, chaos, bifurcations — que cela implique.

1.1 Introduction

Un système dynamique est un modèle mathématique décrivant l'évolution temporelle d'un état dans un espace donné. Cette évolution peut être régie par une équation différentielle (temps continu) ou par une application itérée (temps discret). Dans ce chapitre, nous posons les définitions fondamentales et illustrons ces concepts par des exemples classiques issus de la physique, de la biologie et de l'ingénierie.

1.2 Systèmes dynamiques continus

Définition 1.1 (Système dynamique autonome continu). Un **système dynamique autonome continu** sur un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$ est défini par l'équation différentielle ordinaire

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in U,$$

où $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs au moins de classe C^1 .

Définition 1.2 (Système non autonome). Un **système dynamique non autonome** est de la forme

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times U,$$

où f dépend explicitement du temps t .

Remarque 1.3. Tout système non autonome $\dot{x} = f(t, x)$ sur $\mathbb{R}^n$ peut être transformé en un système autonome sur $\mathbb{R}^{n+1}$ en posant $\dot{t} = 1$, ce qui donne le système augmenté :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t, x) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.2.1 Existence et unicité des solutions

Théorème 1.4 (Cauchy-Lipschitz / Picard-Lindelöf). *Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ localement lipschitzienne sur l'ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Pour tout $x_0 \in U$, il existe un intervalle maximal $I(x_0) = (\alpha, \omega)$ avec $-\infty \leq \alpha < 0 < \omega \leq +\infty$ et une unique solution maximale $\varphi(\cdot, x_0) : I(x_0) \rightarrow U$ du problème de Cauchy*

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0.$$

Démonstration. La démonstration classique utilise le théorème du point fixe de Banach appliqué à l'opérateur de Picard

$$(T\varphi)(t) = x_0 + \int_0^t f(\varphi(s)) ds$$

dans l'espace $C([0, h], \overline{B}(x_0, r))$ muni de la norme uniforme, pour $h > 0$ suffisamment petit. La condition de Lipschitz $\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$ assure que T est une contraction pour $h < 1/L$. L'unicité sur l'intervalle maximal découle du théorème de prolongement et du lemme de Grönwall. $\square$

Théorème 1.5 (Comportement aux bornes de l'intervalle maximal). *Soit $\varphi(\cdot, x_0) : (\alpha, \omega) \rightarrow U$ la solution maximale. Si $\omega < +\infty$, alors pour tout compact $K \subseteq U$, il existe $t_K < \omega$ tel que $\varphi(t, x_0) \notin K$ pour tout $t > t_K$. Autrement dit, la trajectoire « explose » ou quitte tout compact en temps fini.*

1.3 Flots et semi-flots

Définition 1.6 (Flot). Le **flot** associé au système $\dot{x} = f(x)$ est l'application

$$\varphi : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times U \rightarrow U, \quad (t, x_0) \mapsto \varphi(t, x_0) = \varphi_t(x_0),$$

où $\mathcal{D}$ est l'ouvert maximal de définition. Le flot satisfait :

1. $\varphi_0 = \text{Id}_U$ (condition initiale) ;
2. $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ pour tous s, t admissibles (propriété de groupe).

Proposition 1.7 (Régularité du flot). Si $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$ avec $k \geq 1$, alors le flot $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow U$ est de classe C^k en (t, x_0) .

Définition 1.8 (Semi-flot). Un **semi-flot** est défini pour $t \geq 0$ uniquement. Il satisfait les mêmes propriétés que le flot, mais seulement pour $t, s \geq 0$. Les équations aux dérivées partielles de type parabolique engendrent naturellement des semi-flots.

1.4 Orbites, trajectoires et ensembles limites

Définition 1.9 (Orbite). L'**orbite** (ou **trajectoire**) passant par x_0 est l'ensemble

$$\gamma(x_0) = \{\varphi(t, x_0) : t \in I(x_0)\} \subseteq U.$$

L'**orbite positive** est $\gamma^+(x_0) = \{\varphi(t, x_0) : t \geq 0\}$ et l'**orbite négative** est $\gamma^-(x_0) = \{\varphi(t, x_0) : t \leq 0\}$.

Définition 1.10 (Points d'équilibre). Un point $x^* \in U$ est un **point d'équilibre** (ou **point fixe**, **point stationnaire**) du système $\dot{x} = f(x)$ si $f(x^*) = 0$. De manière équivalente, $\varphi(t, x^*) = x^*$ pour tout t .

Définition 1.11 (Orbite périodique). Une orbite $\gamma(x_0)$ est **périodique** s'il existe $T > 0$ tel que $\varphi(T, x_0) = x_0$ et $\varphi(t, x_0) \neq x_0$ pour $0 < t < T$. Le plus petit tel T est appelé la **période minimale**.

Définition 1.12 (Ensemble ω -limite). L'**ensemble ω -limite** de x_0 est

$$\omega(x_0) = \bigcap_{T \geq 0} \overline{\{\varphi(t, x_0) : t \geq T\}}.$$

Un point y appartient à $\omega(x_0)$ si et seulement s'il existe une suite $t_n \rightarrow +\infty$ telle que $\varphi(t_n, x_0) \rightarrow y$.

Définition 1.13 (Ensemble α -limite). De manière analogue, l'**ensemble α -limite** est

$$\alpha(x_0) = \bigcap_{T \leq 0} \overline{\{\varphi(t, x_0) : t \leq T\}}.$$

Proposition 1.14 (Propriétés des ensembles limites). Soit $\gamma^+(x_0)$ bornée. Alors :

1. $\omega(x_0)$ est non vide, compact et connexe ;
2. $\omega(x_0)$ est invariant par le flot : $\varphi_t(\omega(x_0)) = \omega(x_0)$ pour tout t ;
3. $\text{dist}(\varphi(t, x_0), \omega(x_0)) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$.

1.5 Espace des phases et portrait de phase

Définition 1.15 (Portrait de phase). Le **portrait de phase** d'un système dynamique est la partition de l'espace des phases U en orbites. Il fournit une description qualitative globale de la dynamique.

Remarque 1.16. Deux orbites distinctes ne peuvent pas se croiser (conséquence de l'unicité des solutions). L'espace des phases est donc partitionné en orbites disjointes.

Exemple 1.17 (Oscillateur harmonique). Considérons l'oscillateur harmonique simple

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0,$$

que l'on écrit comme système du premier ordre avec $x_1 = q$, $x_2 = \dot{q}$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1. \end{cases}$$

La matrice du système est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$, de valeurs propres $\lambda = \pm i\omega$. Les orbites sont des ellipses centrées à l'origine. Le portrait de phase est un **centre**.

Exemple 1.18 (Pendule simple). Le pendule simple non amorti satisfait

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0.$$

En posant $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1. \end{cases}$$

Les points d'équilibre sont $(\theta^*, 0)$ avec $\theta^* = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Les points $\theta^* = 2k\pi$ sont des centres (positions basses) et les points $\theta^* = (2k+1)\pi$ sont des cols (positions hautes).

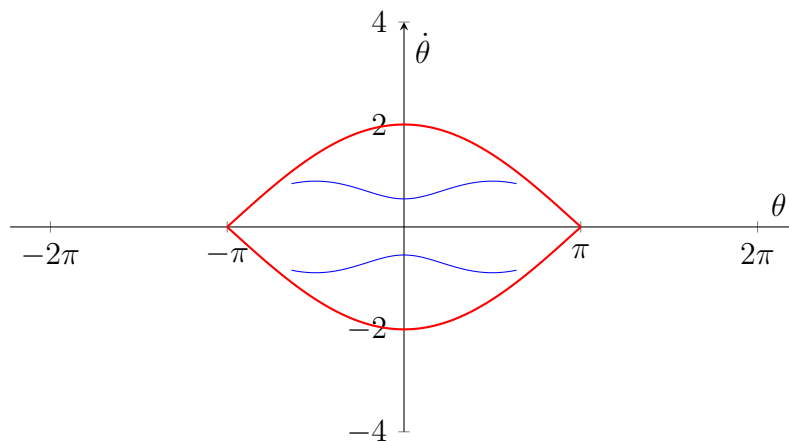
Intuition

Le portrait de phase du pendule révèle deux types de mouvement :

- Les trajectoires fermées près des centres correspondent aux oscillations (libérations) ;
- Les trajectoires ouvertes loin des centres correspondent aux rotations complètes du pendule.

Les trajectoires séparant ces deux régions sont les **séparatrices**, qui relient les points cols.

Portrait de phase du pendule simple



1.6 Systèmes dynamiques discrets

Définition 1.19 (Système dynamique discret). Un **système dynamique discret** est défini par l'itération d'une application $f : U \rightarrow U$:

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

L'orbite de x_0 est la suite $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots)$ où $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

Définition 1.20 (Points fixes et périodiques). Un point x^* est un **point fixe** de f si $f(x^*) = x^*$. Un point x^* est **périodique de période p** si $f^p(x^*) = x^*$ et $f^k(x^*) \neq x^*$ pour $1 \leq k < p$.

Exemple 1.21 (Application logistique). L'**application logistique** est définie par

$$f_r(x) = rx(1 - x), \quad x \in [0, 1], \quad r \in [0, 4].$$

Les points fixes satisfont $x = rx(1 - x)$, soit $x^* = 0$ et $x^* = 1 - 1/r$ (pour $r > 1$).

1.7 Premières intégrales et systèmes conservatifs

Définition 1.22 (Première intégrale). Une fonction $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 est une **première intégrale** (ou **constante du mouvement**) du système $\dot{x} = f(x)$ si H est constante le long de toute orbite :

$$\frac{d}{dt}H(\varphi(t, x_0)) = \nabla H(\varphi(t, x_0)) \cdot f(\varphi(t, x_0)) = 0 \quad \forall t.$$

Théorème 1.23 (Réduction dimensionnelle). Si H est une première intégrale telle que $\nabla H(x) \neq 0$ sur un ensemble de niveau $\Sigma_c = \{x \in U : H(x) = c\}$, alors Σ_c est une sous-variété de dimension $n - 1$ invariante par le flot. La dynamique se réduit donc à l'étude d'un système sur Σ_c .

Définition 1.24 (Système hamiltonien). Un **système hamiltonien** sur $\mathbb{R}^{2n}$ est défini par

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

où $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ est la **fonction de Hamilton** (énergie). Le hamiltonien H est automatiquement une première intégrale.

Exemple 1.25 (Pendule comme système hamiltonien). Le pendule simple (Exemple 1.18) est hamiltonien avec

$$H(\theta, p) = \frac{p^2}{2} - \frac{g}{l} \cos \theta,$$

où $p = \dot{\theta}$. Les courbes de niveau de H coïncident avec les orbites du portrait de phase.

1.8 Systèmes dissipatifs et volume de Liouville

Théorème 1.26 (Formule de Liouville). Soit $\Omega(t) = \varphi_t(\Omega_0)$ l'image d'un domaine mesurable $\Omega_0 \subseteq U$ par le flot. Alors

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(\Omega(t)) = \int_{\Omega(t)} \text{div } f(x) dx.$$

Corollaire 1.27. Si $\text{div } f(x) = 0$ pour tout $x \in U$, le flot préserve le volume (système **incompressible**). C'est le cas de tout système hamiltonien.

Définition 1.28 (Système dissipatif). Un système est **dissipatif** si $\text{div } f(x) < 0$ sur U . Dans ce cas, les volumes dans l'espace des phases contractent au cours du temps.

Exemple 1.29 (Oscillateur amorti). L'oscillateur harmonique amorti

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 - 2\gamma x_2, \quad \gamma > 0,$$

a pour divergence $\text{div } f = -2\gamma < 0$. C'est un système dissipatif. Les volumes contractent au taux $e^{-2\gamma t}$.

1.9 Exemples de systèmes dynamiques célèbres

Exemple 1.30 (Système de Lotka-Volterra). Le modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra est

$$\dot{x} = \alpha x - \beta xy, \quad \dot{y} = \delta xy - \gamma y,$$

avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$. Le point d'équilibre non trivial est $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$. Ce système possède la première intégrale $H(x, y) = \delta x - \gamma \ln x + \beta y - \alpha \ln y$.

Exemple 1.31 (Système de Lorenz). Le système de Lorenz, introduit en 1963, est

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = \rho x - y - xz, \quad \dot{z} = xy - \beta z,$$

avec les paramètres classiques $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = 8/3$. La divergence est $\operatorname{div} f = -\sigma - 1 - \beta < 0$: le système est dissipatif.

Simulation du système de Lorenz

```
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp
import matplotlib.pyplot as plt

def lorenz(t, state, sigma=10, rho=28, beta=8/3):
    x, y, z = state
    return [sigma*(y - x), rho*x - y - x*z, x*y - beta*z]

sol = solve_ivp(lorenz, [0, 50], [1, 1, 1], max_step=0.01,
                dense_output=True)
t = np.linspace(0, 50, 10000)
xyz = sol.sol(t)

fig = plt.figure(figsize=(10, 7))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot(xyz[0], xyz[1], xyz[2], lw=0.5, color='steelblue')
ax.set_xlabel('x'); ax.set_ylabel('y'); ax.set_zlabel('z')
ax.set_title("Attracteur de Lorenz")
plt.tight_layout()
plt.savefig("lorenz_attractor.pdf")
plt.show()
```

1.10 Équivalence topologique et conjugaison

Définition 1.32 (Équivalence topologique). Deux systèmes dynamiques $\dot{x} = f(x)$ et $\dot{y} = g(y)$ sont **topologiquement équivalents** s'il existe un homéomorphisme $h : U \rightarrow V$ qui envoie les orbites de f sur les orbites de g en préservant l'orientation (le sens de parcours).

Définition 1.33 (Conjugaison topologique). Deux systèmes sont **topologiquement conjugués** si le changement de variable h respecte aussi la paramétrisation temporelle : $h \circ \varphi_t^f = \varphi_t^g \circ h$ pour tout t .

Remarque 1.34. La conjugaison topologique est plus forte que l'équivalence topologique. La conjugaison préserve les périodes des orbites périodiques, contrairement à la simple équivalence.

1.11 Exercices

Exercice 1.1 (Points d'équilibre). Trouver tous les points d'équilibre du système

$$\dot{x} = y - x^2, \quad \dot{y} = x - 2.$$

Déterminer la nature de chaque point d'équilibre en calculant la matrice jacobienne et ses valeurs propres.

Exercice 1.2 (Première intégrale). Montrer que $H(x, y) = x^2 + y^2 - 2 \ln(1 + x^2 + y^2)$ est une première intégrale du système

$$\dot{x} = -y \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}, \quad \dot{y} = x \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}.$$

Exercice 1.3 (Flot explicite). Calculer explicitement le flot du système linéaire $\dot{x} = Ax$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier la propriété de groupe $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$.

Exercice 1.4 (Système dissipatif). Calculer la divergence du système de Rössler

$$\dot{x} = -y - z, \quad \dot{y} = x + ay, \quad \dot{z} = b + z(x - c),$$

et déterminer pour quelles valeurs des paramètres a, b, c le système est dissipatif.

Exercice 1.5 (Application logistique). Pour l'application logistique $f_r(x) = rx(1 - x)$:

1. Trouver les points fixes et étudier leur stabilité en fonction de r .
2. Trouver les orbites de période 2 et étudier leur stabilité.
3. Montrer que pour $r > 4$, l'orbite de presque tout point initial dans $[0, 1]$ s'échappe vers $-\infty$.

Exercice 1.6 (Volume et Liouville). Soit le système $\dot{x} = f(x)$ sur $\mathbb{R}^3$ avec $f(x, y, z) = (y, -x - \epsilon y, z - \epsilon z^3)$.

1. Calculer $\operatorname{div} f$.
2. Pour quelles valeurs de ϵ le système est-il dissipatif? conservatif?
3. Décrire qualitativement le comportement des volumes au cours du temps.

Chapitre 2

Stabilité de Lyapunov

En 1892, le mathématicien russe Aleksandr Lyapunov soutient sa thèse *Le problème général de la stabilité du mouvement*. Son idée géniale : pour décider si un point d'équilibre est stable, il n'est pas nécessaire de résoudre les équations du mouvement. Il suffit de trouver une « fonction d'énergie » — aujourd'hui appelée *fonction de Lyapunov* — qui décroît le long des trajectoires. Si une telle fonction existe, le système est stable, *sans qu'on ait besoin de connaître les solutions explicitement*. C'est l'une des méthodes les plus puissantes de toute la théorie des systèmes dynamiques.

2.1 Introduction

La question de la stabilité est fondamentale dans l'étude des systèmes dynamiques : un point d'équilibre est-il robuste face aux perturbations ? Alexandre Lyapounov a développé dans sa thèse de 1892 deux approches complémentaires : la méthode indirecte (linéarisation) et la méthode directe (fonctions de Lyapounov). Ces méthodes restent les outils centraux de l'analyse de stabilité.

2.2 Définitions de la stabilité

Considérons le système autonome $\dot{x} = f(x)$ où $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 et x^* est un point d'équilibre : $f(x^*) = 0$. Sans perte de généralité, nous supposons $x^* = 0$ (par translation).

Définition 2.1 (Stabilité au sens de Lyapunov). Le point d'équilibre $x^* = 0$ est **stable au sens de Lyapunov** si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|x_0\| < \delta \implies \|\varphi(t, x_0)\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0.$$

Définition 2.2 (Stabilité asymptotique). Le point d'équilibre 0 est **asymptotiquement stable** s'il est stable au sens de Lyapunov et s'il existe $\delta_0 > 0$ tel que

$$\|x_0\| < \delta_0 \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, x_0) = 0.$$

Définition 2.3 (Stabilité asymptotique globale). Le point 0 est **globalement asymptotiquement stable (GAS)** s'il est stable et si $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, x_0) = 0$ pour tout $x_0 \in U$.

Définition 2.4 (Instabilité). Le point 0 est **instable** s'il n'est pas stable au sens de Lyapunov.

Définition 2.5 (Stabilité exponentielle). Le point 0 est **exponentiellement stable** s'il existe des constantes $M > 0$, $\alpha > 0$ et $\delta > 0$ tels que

$$\|x_0\| < \delta \implies \|\varphi(t, x_0)\| \leq M \|x_0\| e^{-\alpha t} \quad \forall t \geq 0.$$

Remarque 2.6. La stabilité exponentielle implique la stabilité asymptotique, qui implique la stabilité au sens de Lyapunov. Les réciproques sont fausses en général.

Intuition

- **Stabilité de Lyapunov** : une bille au fond d'un bol reste près du fond si on la perturbe légèrement.
- **Stabilité asymptotique** : la bille revient au fond grâce au frottement.
- **Instabilité** : une bille au sommet d'une colline — toute perturbation l'éloigne.

2.3 Bassin d'attraction

Définition 2.7 (Bassin d'attraction). Le **bassin d'attraction** d'un point d'équilibre asymptotiquement stable x^* est l'ensemble

$$\mathcal{B}(x^*) = \{x_0 \in U : \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, x_0) = x^*\}.$$

Proposition 2.8. Le bassin d'attraction $\mathcal{B}(x^*)$ est un ouvert invariant par le flot, et sa frontière $\partial\mathcal{B}(x^*)$ est également invariante.

2.4 Méthode indirecte : linéarisation

Théorème 2.9 (Stabilité par linéarisation — Lyapunov indirect). Soit $A = Df(0)$ la matrice jacobienne de f au point d'équilibre $x^* = 0$.

1. Si toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative ($\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ pour tout i), alors 0 est **asymptotiquement stable**.
2. Si au moins une valeur propre de A a une partie réelle strictement positive ($\operatorname{Re}(\lambda_j) > 0$ pour un j), alors 0 est **instable**.
3. Si toutes les valeurs propres satisfont $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0$ avec au moins une valeur propre sur l'axe imaginaire, la linéarisation **ne conclut pas** : il faut utiliser la méthode directe.

Idée de la démonstration. On écrit $f(x) = Ax + g(x)$ avec $g(x) = o(\|x\|)$ au voisinage de 0. Si toutes les valeurs propres de A ont des parties réelles négatives, il existe P définie positive telle que $A^\top P + PA = -Q$ avec Q définie positive (équation de Lyapunov matricielle). La fonction $V(x) = x^\top Px$ est alors une fonction de Lyapunov pour le système linéarisé, et le terme $g(x) = o(\|x\|)$ ne perturbe pas la conclusion dans un voisinage suffisamment petit de l'origine. $\square$

Exemple 2.10 (Pendule amorti). Le pendule amorti linéarisé au voisinage de $\theta = 0$ donne

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g/l & -c \end{pmatrix},$$

avec $c > 0$ le coefficient d'amortissement. Le polynôme caractéristique est $\lambda^2 + c\lambda + g/l = 0$, de discriminant $\Delta = c^2 - 4g/l$. Les deux valeurs propres ont des parties réelles négatives (car $c > 0$ et $g/l > 0$), donc l'équilibre est asymptotiquement stable.

2.5 Méthode directe de Lyapunov

Définition 2.11 (Fonction de Lyapunov). Soit $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 définie sur un voisinage de $x^* = 0$ avec $V(0) = 0$. La **dérivée orbitale** (ou dérivée de Lie) de V le long du champ f est

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) f_i(x).$$

On dit que V est :

- **définie positive** si $V(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$ dans un voisinage de 0 ;
- **semi-définie positive** si $V(x) \geq 0$;
- **définie négative** si $V(x) < 0$ pour tout $x \neq 0$.

Théorème 2.12 (Théorème de stabilité de Lyapunov). *S'il existe une fonction V définie positive telle que $\dot{V}(x) \leq 0$ dans un voisinage de 0, alors 0 est **stable au sens de Lyapunov**.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ suffisamment petit pour que $\bar{B}(0, \epsilon) \subseteq U$. Posons $c = \min_{\|x\|=\epsilon} V(x) > 0$ (car V est définie positive et continue sur le compact $\{\|x\| = \epsilon\}$). Par continuité de V et $V(0) = 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $V(x) < c$ pour $\|x\| < \delta$. Si $\|x_0\| < \delta$, alors $V(\varphi(t, x_0)) \leq V(x_0) < c$ pour tout $t \geq 0$ (car $\dot{V} \leq 0$). Donc $\varphi(t, x_0)$ ne peut pas atteindre la sphère $\|x\| = \epsilon$, ce qui prouve $\|\varphi(t, x_0)\| < \epsilon$. $\square$

Théorème 2.13 (Théorème de stabilité asymptotique de Lyapunov). *S'il existe une fonction V définie positive telle que $\dot{V}(x) < 0$ pour tout $x \neq 0$ dans un voisinage de 0 (i.e., $\dot{V}$ est définie négative), alors 0 est **asymptotiquement stable**.*

Théorème 2.14 (Théorème de Barbashin-Krasovskii). *Si $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est définie positive, radialement non bornée ($V(x) \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$), et si $\dot{V}(x) < 0$ pour tout $x \neq 0$, alors 0 est **globalement asymptotiquement stable**.*

Fonctions de Lyapunov non bornées

Pour la stabilité asymptotique *globale*, il est essentiel que V soit radialement non bornée. Sans cette condition, la trajectoire pourrait s'échapper vers l'infini tout en gardant V décroissante.

2.6 Principe d'invariance de LaSalle

Lorsque $\dot{V}$ est seulement semi-définie négative, le théorème de stabilité asymptotique ne s'applique pas directement. Le principe de LaSalle permet souvent de conclure malgré tout.

Théorème 2.15 (Principe d'invariance de LaSalle). *Soit $\Omega \subseteq U$ un compact positivement invariant. Soit $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\dot{V}(x) \leq 0$ sur Ω . Posons $S = \{x \in \Omega : \dot{V}(x) = 0\}$ et soit M le plus grand sous-ensemble invariant contenu dans S . Alors*

$$\omega(x_0) \subseteq M \quad \forall x_0 \in \Omega.$$

En particulier, toute trajectoire issue de Ω converge vers M .

Idée de la démonstration. Puisque V est décroissante et bornée inférieurement sur le compact Ω , $V(\varphi(t, x_0))$ converge vers une limite c . L'ensemble ω -limite $\omega(x_0)$ est non vide (car Ω est compact), invariant, et $V \equiv c$ sur $\omega(x_0)$. Donc $\dot{V} = 0$ sur $\omega(x_0)$, ce qui donne $\omega(x_0) \subseteq S$. Par invariance de $\omega(x_0)$, on obtient $\omega(x_0) \subseteq M$. $\square$

Exemple 2.16 (Pendule amorti — LaSalle). Considérons le pendule amorti :

$$\dot{\theta} = \omega, \quad \dot{\omega} = -\frac{g}{l} \sin \theta - c\omega, \quad c > 0.$$

La fonction énergie $V(\theta, \omega) = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{g}{l}(1 - \cos \theta)$ satisfait

$$\dot{V} = -c\omega^2 \leq 0.$$

L'ensemble $S = \{\dot{V} = 0\} = \{\omega = 0\}$. Sur S , on a $\dot{\omega} = -\frac{g}{l} \sin \theta$, qui est nul uniquement si $\theta = k\pi$. Le plus grand ensemble invariant dans S est $M = \{(0, 0), (\pi, 0)\}$. Par LaSalle, toute trajectoire bornée converge vers M . Près de l'équilibre $(0, 0)$, on obtient la stabilité asymptotique.

2.7 Théorèmes d'instabilité

Théorème 2.17 (Théorème d'instabilité de Lyapunov). *S'il existe une fonction V de classe C^1 avec $V(0) = 0$ telle que $\dot{V}(x) > 0$ dans un voisinage de 0 (sauf en 0), et si dans tout voisinage de 0 il existe un point x avec $V(x) > 0$, alors 0 est **instable**.*

Théorème 2.18 (Théorème de Chetaev). *Soit $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 avec $V(0) = 0$. Supposons qu'il existe un ouvert G tel que $0 \in \partial G$ et :*

1. $V(x) > 0$ pour tout $x \in G$;
2. $V(x) = 0$ sur $\partial G \cap U$;
3. $\dot{V}(x) > 0$ pour tout $x \in G$.

*Alors 0 est **instable**.*

2.8 Construction de fonctions de Lyapunov

La difficulté principale de la méthode directe est de *trouver* une fonction de Lyapunov adéquate. Voici quelques stratégies.

2.8.1 Fonctions quadratiques

Pour le système $\dot{x} = Ax + g(x)$ avec $g(x) = o(\|x\|)$, on cherche $V(x) = x^\top P x$ avec P symétrique définie positive solution de l'équation de Lyapounov matricielle :

$$A^\top P + PA = -Q,$$

où Q est symétrique définie positive. Cette équation admet une unique solution P définie positive si et seulement si A est une matrice de Hurwitz (toutes les valeurs propres à partie réelle négative).

Équation de Lyapounov matricielle

$$A^\top P + PA = -Q \quad \implies \quad P = \int_0^{+\infty} e^{A^\top t} Q e^{At} dt.$$

Cette intégrale converge si et seulement si A est une matrice de Hurwitz.

2.8.2 Fonctions énergie

Pour les systèmes mécaniques, l'énergie totale (cinétique + potentielle) est souvent un bon candidat. Si le système est dissipatif, $\dot{V}$ sera négative ou semi-négative.

2.8.3 Combinaisons et estimations

Pour des systèmes plus complexes, on peut construire V par combinaison linéaire de termes simples, ou par la méthode des *backstepping* en théorie du contrôle.

2.9 Stabilité des orbites périodiques

Définition 2.19 (Stabilité orbitale). Une orbite périodique Γ est **orbitalement stable** si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\text{dist}(x_0, \Gamma) < \delta \implies \text{dist}(\varphi(t, x_0), \Gamma) < \epsilon \quad \forall t \geq 0.$$

Définition 2.20 (Stabilité asymptotique orbitale). L'orbite Γ est **asymptotiquement orbitalement stable** si elle est orbitalement stable et si $\text{dist}(\varphi(t, x_0), \Gamma) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$ pour x_0 suffisamment proche de Γ .

Remarque 2.21. La stabilité orbitale est plus naturelle que la stabilité au sens de Lyapunov pour les orbites périodiques, car même dans le cas stable, deux points voisins sur l'orbite se séparent linéairement en temps le long de l'orbite.

2.10 Fonctions de Lyapunov et contrôle

Remarque 2.22. En théorie du contrôle, les fonctions de Lyapunov jouent un rôle central. Pour un système contrôlé $\dot{x} = f(x, u)$, on cherche un retour d'état $u = k(x)$ tel qu'une fonction de Lyapunov V satisfasse $\dot{V} < 0$ en boucle fermée. C'est le principe du **contrôle par fonctions de Lyapunov** (CLF — Control Lyapunov Function).

2.11 Exercices

Exercice 2.1 (Stabilité par linéarisation). Étudier la stabilité des points d'équilibre du système

$$\dot{x} = y + x(1 - x^2 - y^2), \quad \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2).$$

Exercice 2.2 (Construction de Lyapunov). Pour le système $\dot{x} = -x + 2x^2y$, $\dot{y} = -y$, montrer que $V(x, y) = x^2 + y^2$ est une fonction de Lyapunov pour un voisinage convenable de l'origine et conclure sur la stabilité.

Exercice 2.3 (LaSalle). Appliquer le principe de LaSalle au système

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x^3 - y^3,$$

avec la fonction $V(x, y) = \frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2}$.

Exercice 2.4 (Instabilité par Chetaev). Montrer que l'origine est instable pour le système

$$\dot{x} = y + x^3, \quad \dot{y} = x + y^3,$$

en utilisant la fonction $V(x, y) = xy$.

Exercice 2.5 (Équation de Lyapounov matricielle). Résoudre l'équation $A^\top P + PA = -I$ pour $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est définie positive.

Exercice 2.6 (Stabilité globale). Montrer que l'origine est globalement asymptotiquement stable pour $\dot{x} = -x^3$, $\dot{y} = -y$ en utilisant $V(x, y) = \frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2}$.

Chapitre 3

Systèmes Linéaires et Classification des Portraits de Phase

3.1 Introduction

Avant d'affronter les tourbillons du chaos et la complexité des systèmes non linéaires, il faut maîtriser le cas linéaire — celui où tout peut être calculé explicitement. Le portrait de phase d'un système linéaire plan est entièrement déterminé par les valeurs propres de sa matrice : nœuds stables ou instables, foyers spiralants, centres elliptiques, points-selles. Cette classification, héritée des travaux de Poincaré et de son élève Ivar Bendixson à la fin du XIX^e siècle, constitue le dictionnaire visuel que tout dynamiqueien consulte en premier.

Mais le système linéaire n'est pas qu'un exercice pédagogique. Grâce au théorème de Hartman-Grobman, le portrait de phase linéarisé autour d'un équilibre hyperbolique reproduit fidèlement le comportement local du système non linéaire. C'est pourquoi les systèmes linéaires constituent la brique élémentaire de la théorie des systèmes dynamiques. Ce chapitre développe la classification complète des portraits de phase pour les systèmes plans $\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbb{R}^2$.

3.2 Solution générale et exponentielle de matrice

Théorème 3.1 (Solution du système linéaire). *La solution du système $\dot{x} = Ax$ avec condition initiale $x(0) = x_0$ est*

$$x(t) = e^{At} x_0,$$

où l'**exponentielle de matrice** est définie par

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots$$

Proposition 3.2 (Propriétés de e^{At}). 1. $e^{A \cdot 0} = I$;

2. $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A$;

3. $e^{A(t+s)} = e^{At} e^{As}$;

4. $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$;

5. Si P est inversible, $e^{(P^{-1}AP)t} = P^{-1} e^{At} P$;

6. $\det(e^{At}) = e^{\text{tr}(A)t}$.

Calcul de e^{At} pour $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

Si A a pour valeurs propres λ_1, λ_2 :

- Cas $\lambda_1 \neq \lambda_2$ réelles : $e^{At} = \frac{\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} I + \frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} A$.
- Cas $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$: $e^{At} = e^{\lambda t} (I + (A - \lambda I)t)$ si $A \neq \lambda I$.
- Cas complexes $\lambda = \alpha \pm i\beta$: $e^{At} = e^{\alpha t} \left(\cos(\beta t) I + \frac{\sin(\beta t)}{\beta} (A - \alpha I) \right)$.

3.3 Classification dans $\mathbb{R}^2$

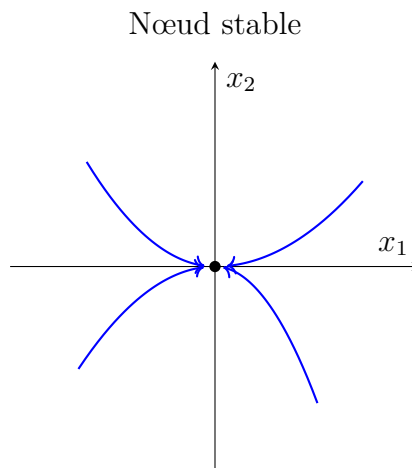
Considérons le système $\dot{x} = Ax$ où $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ et $\det(A) \neq 0$ (l'origine est l'unique point d'équilibre). Les invariants pertinents sont :

- $\tau = \text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$;
- $\delta = \det(A) = \lambda_1 \lambda_2$;
- $\Delta = \tau^2 - 4\delta$ (discriminant du polynôme caractéristique).

3.3.1 Nœud stable ($\lambda_1 < \lambda_2 < 0$)

Définition 3.3 (Nœud stable). Le portrait de phase est un **nœud stable** lorsque les deux valeurs propres sont réelles et strictement négatives. Toutes les orbites convergent vers l'origine tangentielllement au sous-espace propre associé à la valeur propre de plus grand module.

Conditions : $\delta > 0$, $\tau < 0$, $\Delta > 0$.



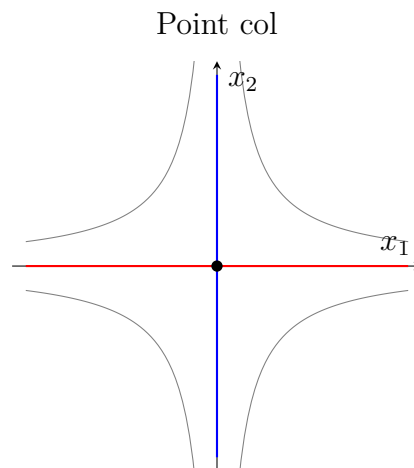
3.3.2 Nœud instable ($0 < \lambda_1 < \lambda_2$)

Définition 3.4 (Nœud instable). Portrait de phase symétrique du nœud stable : les orbites divergent de l'origine. Conditions : $\delta > 0$, $\tau > 0$, $\Delta > 0$.

3.3.3 Point col ($\lambda_1 < 0 < \lambda_2$)

Définition 3.5 (Point col). Le portrait de phase est un **point col** (ou **selle**) lorsque les valeurs propres sont de signes opposés. Les orbites s'approchent de l'origine le long du sous-espace propre stable et s'en éloignent le long du sous-espace propre instable.

Conditions : $\delta < 0$.



3.3.4 Foyer stable ($\lambda = \alpha \pm i\beta$, $\alpha < 0$)

Définition 3.6 (Foyer stable). Le portrait de phase est un **foyer stable** lorsque les valeurs propres sont complexes conjuguées à partie réelle négative. Les orbites spiralent vers l'origine.

Conditions : $\Delta < 0$, $\tau < 0$.

3.3.5 Foyer instable ($\alpha > 0$)

Portrait symétrique : spirales divergentes. Conditions : $\Delta < 0$, $\tau > 0$.

3.3.6 Centre ($\lambda = \pm i\beta$, $\alpha = 0$)

Définition 3.7 (Centre). Le portrait de phase est un **centre** lorsque les valeurs propres sont purement imaginaires. Les orbites sont des ellipses fermées autour de l'origine. L'équilibre est stable mais non asymptotiquement stable.

Conditions : $\Delta < 0$, $\tau = 0$.

Centre et perturbations non linéaires

Un centre linéaire est *structurellement instable* : une perturbation non linéaire arbitrairement petite peut le transformer en foyer (stable ou instable). C'est un cas critique de la linéarisation.

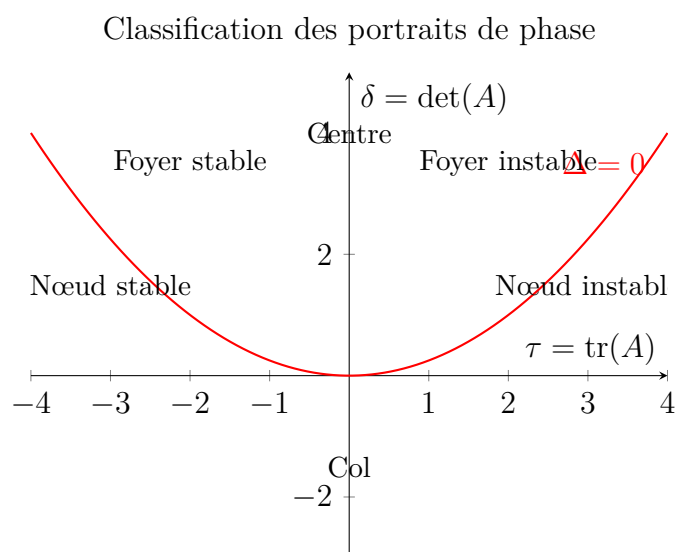
3.3.7 Nœud dégénéré et nœud étoilé

Définition 3.8 (Nœud étoilé). Si $A = \lambda I$ ($\lambda < 0$), toutes les droites passant par l'origine sont des orbites : c'est un **nœud étoilé stable**.

Définition 3.9 (Nœud dégénéré). Si A a une valeur propre double $\lambda < 0$ avec un seul vecteur propre (bloc de Jordan), le portrait de phase est un **nœud dégénéré stable**. Toutes les orbites sont tangentes au sous-espace propre.

3.4 Diagramme (τ, δ)

La classification complète se résume dans le plan (τ, δ) :



Théorème 3.10 (Classification complète en dimension 2). Soit $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ avec $\det(A) \neq 0$. La nature du portrait de phase de $\dot{x} = Ax$ est entièrement déterminée par $\tau = \text{tr}(A)$ et $\delta = \det(A)$:

Type	Conditions	Stabilité
Nœud stable	$\delta > 0, \tau < 0, \Delta \geq 0$	Asymp. stable
Nœud instable	$\delta > 0, \tau > 0, \Delta \geq 0$	Instable
Col	$\delta < 0$	Instable
Foyer stable	$\Delta < 0, \tau < 0$	Asymp. stable
Foyer instable	$\Delta < 0, \tau > 0$	Instable
Centre	$\Delta < 0, \tau = 0$	Stable (non asymp.)

3.5 Systèmes linéaires en dimension supérieure

3.5.1 Décomposition en sous-espaces invariants

Théorème 3.11 (Décomposition spectrale). Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. L'espace $\mathbb{R}^n$ se décompose en somme directe de sous-espaces invariants :

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c,$$

où :

- E^s (sous-espace **stable**) : valeurs propres généralisées à partie réelle < 0 ;
- E^u (sous-espace **instable**) : valeurs propres généralisées à partie réelle > 0 ;
- E^c (sous-espace **central**) : valeurs propres généralisées à partie réelle $= 0$.

Proposition 3.12 (Comportement asymptotique). 1. Pour $x_0 \in E^s$: $\|e^{At}x_0\| \rightarrow 0$ exponentiellement quand $t \rightarrow +\infty$.

2. Pour $x_0 \in E^u$: $\|e^{At}x_0\| \rightarrow +\infty$ exponentiellement quand $t \rightarrow +\infty$.

3. Pour $x_0 \in E^c$: $\|e^{At}x_0\|$ croît au plus polynomialement.

3.5.2 Forme de Jordan et exponentielle

Proposition 3.13 (Exponentielle d'un bloc de Jordan). Si $J_k(\lambda) = \lambda I_k + N_k$ est un bloc de Jordan de taille k , alors

$$e^{J_k(\lambda)t} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & t \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.6 Systèmes linéaires non autonomes

Définition 3.14 (Matrice fondamentale). Pour le système $\dot{x} = A(t)x$, une **matrice fondamentale** est une matrice $\Phi(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dont les colonnes forment un système fondamental de solutions. Elle satisfait $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$ et $\det(\Phi(t)) \neq 0$.

Théorème 3.15 (Formule de Liouville-Jacobi). $\det(\Phi(t)) = \det(\Phi(t_0)) \exp\left(\int_{t_0}^t \text{tr}(A(s)) ds\right)$.

3.7 Applications

Exemple 3.16 (Circuit RLC). Un circuit RLC série est gouverné par

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0,$$

ce qui donne en posant $x_1 = q$, $x_2 = \dot{q}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}.$$

Selon les valeurs de R , L , C :

- $R^2 < 4L/C$: foyer stable (oscillations amorties) ;
- $R^2 = 4L/C$: nœud dégénéré (amortissement critique) ;
- $R^2 > 4L/C$: nœud stable (sur-amortissement).

Portraits de phase pour différentes matrices

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp

matrices = {
    "Noeud stable": np.array([[ -2, 0], [0, -1]]),
    "Col": np.array([[ -1, 0], [0, 1]]),
    "Foyer stable": np.array([[ -0.5, 2], [-2, -0.5]]),
    "Centre": np.array([[ 0, 1], [-1, 0]])
}

fig, axes = plt.subplots(2, 2, figsize=(10, 10))
for ax, (name, A) in zip(axes.flat, matrices.items()):
    for angle in np.linspace(0, 2*np.pi, 20, endpoint=False):
        x0 = 2 * np.array([np.cos(angle), np.sin(angle)])
        sol = solve_ivp(lambda t, x: A @ x, [0, 10], x0,
                        max_step=0.05)
        ax.plot(sol.y[0], sol.y[1], 'b-', lw=0.5)
    ax.set_title(name)
    ax.set_xlim(-3, 3); ax.set_ylim(-3, 3)
    ax.set_aspect('equal'); ax.grid(True, alpha=0.3)
plt.tight_layout()
plt.savefig("phase_portraits_linear.pdf")
plt.show()
```

3.8 Exercices

Exercice 3.1 (Exponentielle de matrice). Calculer e^{At} pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (bloc de Jordan). Tracer le portrait de phase.

Exercice 3.2 (Classification). Classifier le portrait de phase de $\dot{x} = Ax$ pour

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$$

en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.3 (Dimension 3). Trouver les sous-espaces stable, instable et central pour

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.4 (Système périodique). Considérer le système périodique $\dot{x} = A(t)x$ avec $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(t) & 0 \end{pmatrix}$ où $\omega(t) = \omega_0(1 + \epsilon \cos(t))$. Discuter la stabilité en utilisant la théorie de Floquet.

Exercice 3.5 (Équivalence topologique). Montrer que deux nœuds stables avec des valeurs propres distinctes sont topologiquement équivalents mais pas nécessairement C^1 -conjugués.

Exercice 3.6 (Diagramme de stabilité). Pour le système dépendant de deux paramètres $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{pmatrix}$, tracer dans le plan (a, b) les régions correspondant aux différents types de portraits de phase.

Chapitre 4

Systèmes Non Linéaires — Linéarisation et Variété Centrale

Nous quittons maintenant le monde rassurant des systèmes linéaires pour entrer dans celui, infiniment plus riche, des systèmes non linéaires. Ici, les surprises abondent : un pendule peut osciller ou tourner, une population peut exploser ou s'effondrer, un circuit électrique peut engendrer des oscillations auto-entretenues. Le théorème de Hartman-Grobman (1960) nous assure que, près d'un équilibre *hyperbolique*, le portrait de phase non linéaire ressemble qualitativement à celui du système linéarisé. Mais que se passe-t-il lorsque des valeurs propres tombent sur l'axe imaginaire ? C'est là qu'intervient la théorie de la *variété centrale*, développée par Victor Pliss (1964) et Jack Carr (1981).

4.1 Introduction

Les systèmes non linéaires présentent une richesse phénoménologique considérable qui dépasse le cadre des systèmes linéaires : multiplicité de points d'équilibre, cycles limites, chaos. Pour comprendre le comportement *local* au voisinage d'un équilibre, on recourt à la linéarisation (théorème de Hartman-Grobman) et, dans les cas dégénérés, à la théorie des variétés centrales.

4.2 Le théorème de Hartman-Grobman

Théorème 4.1 (Hartman-Grobman). *Soit $\dot{x} = f(x)$ avec $f \in C^1$, $f(0) = 0$, et $A = Df(0)$. Si A est **hyperbolique** (aucune valeur propre sur l'axe imaginaire), alors il existe un homéomorphisme h défini dans un voisinage de 0 tel que h conjugue le flot de $\dot{x} = f(x)$ au flot linéaire $\dot{y} = Ay$:*

$$h(\varphi_t(x)) = e^{At} h(x)$$

pour t suffisamment petit et x dans un voisinage de 0.

Remarque 4.2. Le théorème de Hartman-Grobman garantit que la topologie du portrait de phase local est entièrement déterminée par la linéarisation lorsque l'équilibre est hyperbolique. L'homéomorphisme h n'est en général pas différentiable.

Définition 4.3 (Équilibre hyperbolique). Un point d'équilibre x^* est **hyperbolique** si la matrice jacobienne $Df(x^*)$ n'a aucune valeur propre de partie réelle nulle.

Définition 4.4 (Équilibre non hyperbolique). Un équilibre est **non hyperbolique** (ou **dégénéré**) si au moins une valeur propre de $Df(x^*)$ a une partie réelle nulle. Dans ce cas, la linéarisation ne détermine pas la stabilité : il faut des outils supplémentaires.

4.3 Variétés invariantes locales

Théorème 4.5 (Variétés stable et instable). Soit $x^* = 0$ un équilibre hyperbolique de $\dot{x} = f(x)$ avec $A = Df(0)$. Soient E^s et E^u les sous-espaces stable et instable de A . Alors il existe des variétés locales :

- $W_{\text{loc}}^s(0)$: **variété stable locale**, tangente à E^s en 0, de dimension $\dim E^s$;
- $W_{\text{loc}}^u(0)$: **variété instable locale**, tangente à E^u en 0, de dimension $\dim E^u$.

Ces variétés sont de classe C^k si $f \in C^k$, et sont localement invariantes par le flot.

Définition 4.6 (Variétés globales). Les **variétés stable et instable globales** sont définies par :

$$W^s(0) = \{x \in U : \varphi(t, x) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty\},$$

$$W^u(0) = \{x \in U : \varphi(t, x) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow -\infty\}.$$

Exemple 4.7 (Col en dimension 2). Pour le système $\dot{x} = -x + x^2$, $\dot{y} = y$, l'origine est un col avec $E^s = \{y = 0\}$, $E^u = \{x = 0\}$. La variété stable locale est la courbe $y = 0$, $|x| < 1$, et la variété instable est l'axe $x = 0$.

4.4 Théorie de la variété centrale

Lorsque l'équilibre est non hyperbolique, la dynamique essentielle est capturée par la **variété centrale**.

Théorème 4.8 (Existence de la variété centrale). Soit $\dot{x} = f(x)$ avec $f(0) = 0$ et $A = Df(0)$. Supposons que A ait n_s valeurs propres à partie réelle négative, n_u à partie réelle positive, et n_c à partie réelle nulle, avec $n_s + n_u + n_c = n$. Alors il existe une variété locale $W_{\text{loc}}^c(0)$:

- de dimension n_c ;
- tangente à E^c en 0 ;
- localement invariante par le flot ;
- de classe C^k si $f \in C^k$ (mais pas nécessairement analytique même si f est analytique).

Non-unicité de la variété centrale

Contrairement aux variétés stable et instable, la variété centrale n'est en général **pas unique**. Deux variétés centrales différentes peuvent coïncider à tout ordre mais différer par des termes exponentiellement petits.

Théorème 4.9 (Réduction à la variété centrale). Si $n_u = 0$ (pas de direction instable), la stabilité de l'équilibre $x^* = 0$ du système complet est déterminée par la stabilité de 0 dans la dynamique restreinte à la variété centrale W^c .

4.4.1 Calcul pratique de la variété centrale

Considérons le système sous forme canonique :

$$\dot{x} = Cx + F(x, y), \quad \dot{y} = Sy + G(x, y),$$

où $x \in \mathbb{R}^{n_c}$, $y \in \mathbb{R}^{n_s}$, C a toutes ses valeurs propres sur l'axe imaginaire, S a toutes ses valeurs propres à partie réelle négative, et F, G sont d'ordre au moins 2.

La variété centrale est le graphe d'une fonction $y = h(x)$ avec $h(0) = 0$, $Dh(0) = 0$. La fonction h satisfait l'équation aux dérivées partielles :

$$Dh(x) [Cx + F(x, h(x))] = Sh(x) + G(x, h(x)).$$

En pratique, on développe h en série de Taylor et on identifie les coefficients ordre par ordre.

Exemple 4.10 (Variété centrale en dimension 2). Considérons le système

$$\dot{x} = xy, \quad \dot{y} = -y + x^2.$$

L'origine est un équilibre non hyperbolique : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $E^c = \{y = 0\}$, $E^s = \{x = 0\}$.

On cherche $y = h(x) = ax^2 + bx^3 + \dots$. Substituant dans l'équation de la variété centrale :

$$h'(x) \cdot x h(x) = -h(x) + x^2.$$

À l'ordre 2 : $0 = -ax^2 + x^2$, donc $a = 1$. À l'ordre 3 : $2x \cdot x \cdot x^2 = -bx^3$, donc $2x^3$ versus $-bx^3$ donne... recalculons : $h'(x) = 2x + 3bx^2 + \dots$, et $h'(x) \cdot x h(x) = (2x)(x)(x^2) + \dots = 2x^4 + \dots$ qui est d'ordre 4. Donc $b = 0$ à l'ordre 3.

La dynamique sur la variété centrale est :

$$\dot{x} = x \cdot h(x) = x \cdot x^2 + \dots = x^3 + \dots$$

Comme $\dot{x} = x^3 > 0$ pour $x > 0$ et $\dot{x} < 0$ pour $x < 0$, l'équilibre est **instable**.

4.5 Formes normales

Définition 4.11 (Forme normale de Poincaré). Une **forme normale** est une simplification du système non linéaire obtenue par des changements de variables polynomiaux successifs qui éliminent les termes non résonnants.

Théorème 4.12 (Théorème de la forme normale). Soit $\dot{x} = Ax + f_2(x) + f_3(x) + \dots$ avec f_k homogène de degré k . Pour chaque $k \geq 2$, il existe un changement de variable polynomial $x = y + \phi_k(y)$ qui élimine les termes non résonnants d'ordre k dans f_k .

Définition 4.13 (Résonance). Un monôme $x^m = x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$ dans la j -ème composante est **résonnant** si

$$\langle m, \lambda \rangle - \lambda_j = 0,$$

où $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est le vecteur des valeurs propres et $\langle m, \lambda \rangle = m_1 \lambda_1 + \dots + m_n \lambda_n$.

4.6 Linéarisation différentiable

Théorème 4.14 (Sternberg). *Si $x^* = 0$ est hyperbolique et si les valeurs propres de $Df(0)$ ne satisfont aucune relation de résonance, alors il existe un difféomorphisme local de classe C^∞ qui conjugue le système non linéaire au système linéaire $\dot{y} = Ay$.*

Remarque 4.15. Le théorème de Sternberg améliore celui de Hartman-Grobman en donnant un difféomorphisme (et pas seulement un homéomorphisme) sous des conditions de non-résonance.

4.7 Application : dynamique de population

Exemple 4.16 (Compétition entre deux espèces). Le modèle de compétition de Lotka-Volterra est

$$\dot{x}_1 = x_1(1 - x_1 - \alpha x_2), \quad \dot{x}_2 = x_2(1 - x_2 - \beta x_1),$$

avec $\alpha, \beta > 0$. Les points d'équilibre sont $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ et, si $\alpha \neq 1$ et $\beta \neq 1$, le point de coexistence

$$x^* = \left(\frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\beta}, \frac{1 - \beta}{1 - \alpha\beta} \right).$$

La linéarisation en chaque point d'équilibre détermine la dynamique locale.

Variétés stable et instable du col

```
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp
import matplotlib.pyplot as plt

def system(t, state):
    x, y = state
    return [x - x**2, -y + x*y]

fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 6))

# Stable manifold (integrate backward from near saddle)
for eps in [0.01, -0.01]:
    sol = solve_ivp(lambda t, s: [-v for v in system(t, s)],
                    [0, 5], [0, eps], max_step=0.01)
    ax.plot(sol.y[0], sol.y[1], 'b-', lw=2, label='$W^s$' if eps > 0 else
            '↩')

# Unstable manifold (integrate forward)
for eps in [0.01, -0.01]:
    sol = solve_ivp(system, [0, 5], [eps, 0], max_step=0.01)
    ax.plot(sol.y[0], sol.y[1], 'r-', lw=2, label='$W^u$' if eps > 0 else
            '↪')

ax.set_xlim(-1, 2); ax.set_ylim(-1, 2)
ax.set_xlabel('$x$'); ax.set_ylabel('$y$')
ax.legend(); ax.grid(True, alpha=0.3)
ax.set_title("Varietes stable et instable")
```

```
plt.tight_layout()
plt.savefig("stable_unstable_manifolds.pdf")
plt.show()
```

4.8 Exercices

Exercice 4.1 (Hartman-Grobman). Vérifier que l'équilibre $(0, 0)$ du système $\dot{x} = -x + y^2$, $\dot{y} = -2y + x^2$ est hyperbolique. Quel est le type du portrait de phase local ?

Exercice 4.2 (Variété centrale). Calculer la variété centrale et déterminer la stabilité de l'origine pour

$$\dot{x} = -x^2y, \quad \dot{y} = -y + x^2.$$

Exercice 4.3 (Bifurcation transcritique). Étudier le système $\dot{x} = \mu x - x^2$, $\dot{y} = -y$ au voisinage de $(\mu, x, y) = (0, 0, 0)$ par réduction à la variété centrale.

Exercice 4.4 (Forme normale). Mettre sous forme normale à l'ordre 3 le système $\dot{x} = -y + ax^2 + bxy$, $\dot{y} = x + cx^2 + dxy$.

Exercice 4.5 (Variétés globales). Tracer numériquement les variétés stable et instable de l'équilibre $(1, 0)$ du système $\dot{x} = x(1 - x) - xy$, $\dot{y} = y(x - 1)$.

Exercice 4.6 (Non-unicité). Montrer que pour le système $\dot{x} = x^2$, $\dot{y} = -y$, la variété centrale n'est pas unique en exhibant deux fonctions $h_1(x)$ et $h_2(x)$ satisfaisant l'équation de la variété centrale.

Chapitre 5

Cycles Limites et Théorème de Poincaré-Bendixson

Le cœur bat. Un circuit électronique oscille. Une population de prédateurs et de proies fluctue périodiquement. Ces phénomènes d'oscillation auto-entretenu sont omniprésents dans la nature et la technologie. Mathématiquement, ils correspondent à des *cycles limites* : des orbites périodiques isolées vers lesquelles les trajectoires voisines convergent (ou divergent). Le théorème de Poincaré-Bendixson (1901) est le résultat fondamental qui garantit l'existence de tels cycles dans les systèmes plans : si une trajectoire reste confinée dans une région compacte sans point d'équilibre, elle doit converger vers un cycle limite. Ce résultat, spécifique à la dimension 2, n'a pas d'analogue en dimension supérieure — c'est là que le chaos entre en scène.

5.1 Introduction

Les cycles limites sont des orbites périodiques isolées dans l'espace des phases, c'est-à-dire des orbites fermées qui ne font pas partie d'une famille continue d'orbites fermées. Ils constituent l'un des phénomènes les plus importants propres aux systèmes non linéaires, car les systèmes linéaires ne peuvent produire que des centres (familles continues d'orbites fermées). Le théorème de Poincaré-Bendixson fournit un critère puissant pour prouver l'existence de cycles limites dans le plan.

5.2 Définitions

Définition 5.1 (Cycle limite). Un **cycle limite** est une orbite périodique Γ qui est l'ensemble ω -limite ou α -limite d'au moins une orbite n'appartenant pas à Γ .

Définition 5.2 (Types de cycles limites). Un cycle limite Γ est :

- **stable** (attractif) si $\Gamma = \omega(x_0)$ pour tout x_0 dans un voisinage de Γ ;
- **instable** (répulsif) si $\Gamma = \alpha(x_0)$ pour tout x_0 dans un voisinage de Γ ;
- **semi-stable** si Γ est attractif d'un côté et répulsif de l'autre.

Exemple 5.3 (Cycle limite dans l'oscillateur de Van der Pol). L'équation de Van der Pol

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0, \quad \mu > 0,$$

possède un unique cycle limite stable. Pour μ petit, ce cycle est proche du cercle de rayon 2 centré à l'origine. Pour μ grand, le cycle prend une forme caractéristique d'**oscillation de relaxation**.

5.3 Critère de non-existence : Bendixson-Dulac

Théorème 5.4 (Critère de Bendixson). *Soit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domaine simplement connexe. Si $\operatorname{div} f(x) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ est de signe constant (et non identiquement nulle) sur D , alors le système $\dot{x} = f(x)$ n'a **aucune orbite périodique** entièrement contenue dans D .*

Démonstration. Par le théorème de Green, si Γ était une orbite périodique enfermant un domaine Ω , on aurait

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} f \, dx_1 \, dx_2 = \oint_{\Gamma} (f_1 \, dx_2 - f_2 \, dx_1) = 0,$$

car sur Γ , $dx_i = f_i \, dt$, et l'intégrale curviligne se simplifie. Mais si $\operatorname{div} f$ est de signe constant et non nulle, l'intégrale double est non nulle : contradiction. $\square$

Théorème 5.5 (Critère de Dulac). *Le même résultat vaut si l'on remplace $\operatorname{div} f$ par $\operatorname{div}(\rho f)$ où $\rho : D \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 strictement positive (fonction de Dulac).*

Exemple 5.6 (Système de Lotka-Volterra). Pour $\dot{x} = x(\alpha - \beta y)$, $\dot{y} = y(\delta x - \gamma)$ dans le premier quadrant, prenons $\rho(x, y) = \frac{1}{xy}$. Alors $\operatorname{div}(\rho f) = 0$, ce qui ne permet pas de conclure. Cependant, l'existence d'une première intégrale montre que les orbites sont fermées (centre) et non des cycles limites.

5.4 Le théorème de Poincaré-Bendixson

Théorème 5.7 (Poincaré-Bendixson). *Soit $\dot{x} = f(x)$ un système de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $\gamma^+(x_0)$ une semi-orbite positive bornée contenue dans un compact K ne contenant aucun point d'équilibre. Alors $\omega(x_0)$ est une orbite périodique (et donc un cycle limite si $x_0 \notin \omega(x_0)$).*

Remarque 5.8. Plus généralement, si K contient un nombre fini de points d'équilibre, l'ensemble $\omega(x_0)$ est soit :

1. un point d'équilibre ;
2. une orbite périodique ;
3. un ensemble formé de points d'équilibre reliés par des connexions hétéroclines ou homoclines.

Dimension 2 uniquement

Le théorème de Poincaré-Bendixson est spécifique à la dimension 2. En dimension $n \geq 3$, les ensembles ω -limites bornés peuvent être beaucoup plus compliqués (attracteurs étranges, par exemple).

Corollaire 5.9 (Existence de cycles limites). *Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ un compact positivement invariant, annulaire (sans trou), ne contenant aucun point d'équilibre. Alors K contient au moins un cycle limite.*

Intuition

Stratégie pour prouver l'existence d'un cycle limite :

1. Construire une région annulaire K positivement invariante (le champ pointe vers l'intérieur sur le bord).
2. Vérifier qu'il n'y a pas de point d'équilibre dans K .
3. Conclure par Poincaré-Bendixson.

5.5 Application de Poincaré et multiplicateurs

Définition 5.10 (Section de Poincaré). Une **section de Poincaré** est une courbe Σ transverse au champ de vecteurs, c'est-à-dire telle que $f(x) \cdot n(x) \neq 0$ pour tout $x \in \Sigma$, où n est un vecteur normal à Σ .

Définition 5.11 (Application de Poincaré). L'**application de Poincaré** (ou application de premier retour) $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$ associe à un point $x \in \Sigma$ le prochain point d'intersection de l'orbite avec Σ .

Proposition 5.12. Une orbite périodique Γ correspond à un point fixe de P . La stabilité de Γ est déterminée par $|P'(x^*)|$:

- $|P'(x^*)| < 1$: cycle stable ;
- $|P'(x^*)| > 1$: cycle instable ;
- $|P'(x^*)| = 1$: cas indéterminé.

Définition 5.13 (Multiplicateur de Floquet). Pour une orbite périodique de période T du système $\dot{x} = f(x)$ en dimension n , les **multiplicateurs de Floquet** sont les valeurs propres de la matrice de monodromie

$$M = \Phi(T),$$

où $\Phi(t)$ est la solution de $\dot{\Phi} = Df(\gamma(t))\Phi$, $\Phi(0) = I$. Un multiplicateur vaut toujours 1 (direction tangente). L'orbite est stable si tous les autres multiplicateurs ont un module < 1 .

5.6 Théorie de l'indice

Définition 5.14 (Indice d'une courbe fermée). Soit γ une courbe fermée simple dans $\mathbb{R}^2$ ne passant par aucun équilibre. L'**indice de γ** par rapport au champ f est le nombre de tours que fait le vecteur $f(x)$ lorsque x parcourt γ dans le sens positif :

$$I_\gamma = \frac{1}{2\pi} \oint_\gamma d\theta, \quad \theta = \arctan \frac{f_2(x)}{f_1(x)}.$$

Théorème 5.15 (Propriétés de l'indice). 1. Si γ n'entoure aucun équilibre, $I_\gamma = 0$.

2. L'indice d'un nœud ou d'un foyer est $+1$.

3. L'indice d'un col est -1 .
4. L'indice d'une orbite périodique est $+1$.
5. L'indice est additif : si γ entoure plusieurs équilibres, $I_\gamma = \sum I_{x_i^*}$.

Corollaire 5.16. À l'intérieur d'un cycle limite, la somme des indices des équilibres vaut $+1$. En particulier, un cycle limite doit entourer au moins un équilibre.

5.7 Exemples détaillés

Exemple 5.17 (Oscillateur de Van der Pol — existence du cycle). Considérons le système en coordonnées de Liénard :

$$\dot{x} = y - F(x), \quad \dot{y} = -x,$$

avec $F(x) = \mu(x^3/3 - x)$, $\mu > 0$. L'unique point d'équilibre est l'origine (foyer instable pour $\mu > 0$). On construit une région annulaire :

- Bord intérieur : cercle de petit rayon r (le champ pointe vers l'extérieur car l'équilibre est instable) ;
- Bord extérieur : courbe de niveau de l'énergie choisie suffisamment grande (le système est dissipatif globalement).

Par Poincaré-Bendixson, il existe un cycle limite dans cette région.

Cycle limite de Van der Pol

```
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp
import matplotlib.pyplot as plt

def van_der_pol(t, state, mu=1.0):
    x, y = state
    return [y, mu*(1 - x**2)*y - x]

fig, axes = plt.subplots(1, 3, figsize=(15, 5))
for ax, mu in zip(axes, [0.5, 1.0, 5.0]):
    for r in [0.1, 0.5, 1.0, 3.0, 5.0]:
        for theta in np.linspace(0, 2*np.pi, 4, endpoint=False):
            x0 = [r*np.cos(theta), r*np.sin(theta)]
            sol = solve_ivp(van_der_pol, [0, 50], x0,
                           args=(mu,), max_step=0.05)
            ax.plot(sol.y[0], sol.y[1], 'b-', lw=0.3, alpha=0.5)
    ax.set_title(f"$\\mu = {mu}$")
    ax.set_xlabel("$x$"); ax.set_ylabel("$\\dot{x}$")
    ax.set_xlim(-6, 6); ax.set_ylim(-8, 8)
    ax.set_aspect('auto'); ax.grid(True, alpha=0.3)
plt.tight_layout()
plt.savefig("van_der_pol_cycles.pdf")
```

```
plt.show()
```

Exemple 5.18 (Modèle de FitzHugh-Nagumo). Le modèle simplifié de neurone de FitzHugh-Nagumo est

$$\dot{v} = v - \frac{v^3}{3} - w + I, \quad \dot{w} = \epsilon(v + a - bw),$$

avec $\epsilon \ll 1$. Ce système possède un cycle limite pour certaines valeurs du courant injecté I , modélisant le potentiel d'action.

5.8 Le théorème de Liénard

Théorème 5.19 (Liénard). *Considérons l'équation de Liénard $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$ avec $F(x) = \int_0^x f(s) ds$. Sous les conditions :*

1. *f et g continues, g impaire avec $xg(x) > 0$ pour $x \neq 0$;*
2. *F impaire, $F(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$;*
3. *F est négative pour $0 < x < a$, positive et croissante pour $x > a$ (pour un certain $a > 0$) ;*

*alors le système admet un **unique cycle limite stable**.*

5.9 Exercices

Exercice 5.1 (Bendixson). Montrer que le système $\dot{x} = x + e^{-y}$, $\dot{y} = y + e^x$ n'a pas d'orbite périodique dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5.2 (Poincaré-Bendixson). Montrer l'existence d'un cycle limite pour le système $\dot{r} = r(1 - r^2) + \epsilon r \cos \theta$, $\dot{\theta} = 1$ pour ϵ suffisamment petit.

Exercice 5.3 (Indice). Calculer l'indice de l'origine pour le système $\dot{x} = x^2 - y^2$, $\dot{y} = 2xy$.

Exercice 5.4 (Application de Poincaré). Pour le système en coordonnées polaires $\dot{r} = r(1 - r)(2 - r)$, $\dot{\theta} = 1$, trouver tous les cycles limites et déterminer leur stabilité.

Exercice 5.5 (Van der Pol). Montrer par la méthode de la moyenne que pour $\mu \ll 1$, le cycle limite de l'oscillateur de Van der Pol est proche du cercle de rayon 2.

Exercice 5.6 (Unicité). Soit $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x + y(1 - x^2 - 3y^2)$. Montrer qu'il existe un unique cycle limite en utilisant le théorème de Liénard.

Chapitre 6

Bifurcations

Imaginez un système physique qui dépend d'un paramètre : la charge sur un pont, la température d'un fluide, le taux de natalité d'une population. À mesure que le paramètre varie, le comportement du système change progressivement — jusqu'à un seuil critique où tout bascule : un équilibre stable disparaît, un cycle limite apparaît, le nombre de solutions change brusquement. Ce changement qualitatif soudain est une *bifurcation*, et sa classification — nœud-selle, transcritique, fourche, Hopf — constitue l'un des chapitres les plus beaux de la théorie des systèmes dynamiques, hérité des travaux de Poincaré et systématisé par René Thom dans sa *théorie des catastrophes* (1972).

6.1 Introduction

Une **bifurcation** se produit lorsque la structure qualitative du portrait de phase d'un système dynamique change sous l'effet de la variation d'un paramètre. Ce chapitre étudie les bifurcations locales les plus fondamentales : nœud-col, transcritique, fourche et Hopf.

6.2 Cadre général

Définition 6.1 (Bifurcation). Considérons le système paramétrique $\dot{x} = f(x, \mu)$, où $x \in \mathbb{R}^n$ et $\mu \in \mathbb{R}^p$ est un vecteur de paramètres. Une valeur μ_0 est une **valeur de bifurcation** si le portrait de phase de $f(\cdot, \mu)$ n'est pas topologiquement équivalent pour μ près de μ_0 de part et d'autre.

Définition 6.2 (Bifurcation locale). Une bifurcation est **locale** si elle est associée au changement de stabilité d'un point d'équilibre, c'est-à-dire au passage d'une valeur propre de la jacobienne à travers l'axe imaginaire.

Définition 6.3 (Codimension). La **codimension** d'une bifurcation est le nombre minimal de paramètres indépendants nécessaires pour l'observer de manière générique.

6.3 Bifurcation nœud-col (saddle-node)

Définition 6.4 (Bifurcation nœud-col). La **bifurcation nœud-col** (ou **pli**) est la création ou l'annihilation de deux points d'équilibre lorsqu'un paramètre traverse une valeur critique.

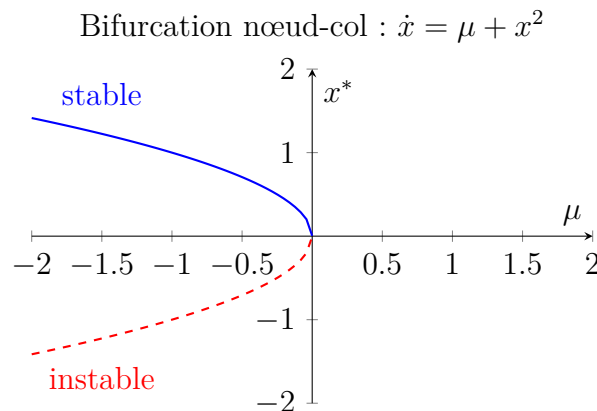
Théorème 6.5 (Forme normale du nœud-col). *La forme normale de la bifurcation nœud-col en dimension 1 est*

$$\dot{x} = \mu + x^2.$$

- Pour $\mu < 0$: deux équilibres $x^* = \pm\sqrt{-\mu}$ (un stable, un instable).
- Pour $\mu = 0$: un équilibre semi-stable $x^* = 0$.
- Pour $\mu > 0$: aucun équilibre.

Théorème 6.6 (Conditions du nœud-col). *Soit $\dot{x} = f(x, \mu)$ avec $f(x_0, \mu_0) = 0$. La bifurcation nœud-col se produit en (x_0, μ_0) si :*

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \mu_0) = 0$ (valeur propre nulle);
2. $\frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) \neq 0$ (transversalité);
3. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, \mu_0) \neq 0$ (non-dégénérescence).



6.4 Bifurcation transcritique

Définition 6.7 (Bifurcation transcritique). Dans une **bifurcation transcritique**, deux équilibres échangent leur stabilité au point de bifurcation, sans création ni disparition.

Théorème 6.8 (Forme normale transcritique). *La forme normale est $\dot{x} = \mu x - x^2$.*

- Pour $\mu < 0$: $x^* = 0$ stable, $x^* = \mu$ instable.
- Pour $\mu > 0$: $x^* = 0$ instable, $x^* = \mu$ stable.

Les deux branches d'équilibre se croisent en $\mu = 0$ et échangent leur stabilité.

Exemple 6.9 (Modèle logistique avec récolte constante). Le modèle $\dot{N} = rN(1 - N/K) - H$ présente une bifurcation nœud-col lorsque H augmente : au-delà d'un seuil critique, la population s'effondre.

6.5 Bifurcation fourche (pitchfork)

Définition 6.10 (Bifurcation fourche). La **bifurcation fourche** se produit dans les systèmes possédant une symétrie $x \mapsto -x$. Un équilibre perd sa stabilité et donne naissance à deux nouveaux équilibres.

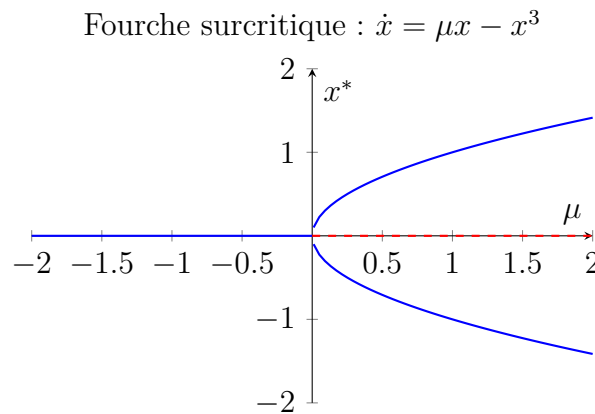
Théorème 6.11 (Bifurcation fourche surcritique). La forme normale est $\dot{x} = \mu x - x^3$.

- Pour $\mu \leq 0$: seul $x^* = 0$ existe, stable.
- Pour $\mu > 0$: $x^* = 0$ instable, deux nouveaux équilibres stables $x^* = \pm\sqrt{\mu}$.

Théorème 6.12 (Bifurcation fourche sous-critique). La forme normale est $\dot{x} = \mu x + x^3$.

- Pour $\mu < 0$: $x^* = 0$ stable, deux équilibres instables $x^* = \pm\sqrt{-\mu}$.
- Pour $\mu \geq 0$: seul $x^* = 0$ existe, instable.

La bifurcation sous-critique est **dangereuse** car l'équilibre perd brusquement sa stabilité sans alternative stable locale.



Exemple 6.13 (Flambage d'Euler). La déflexion d'une poutre sous charge axiale P est gouvernée par

$$EI \frac{d^2\theta}{ds^2} + P \sin \theta = 0.$$

Linéarisé, cela donne une bifurcation fourche surcritique à $P_c = \pi^2 EI / L^2$ (charge critique d'Euler).

6.6 Bifurcation de Hopf

Définition 6.14 (Bifurcation de Hopf). La **bifurcation de Hopf** se produit lorsqu'une paire de valeurs propres complexes conjuguées traverse l'axe imaginaire. Elle donne naissance à un cycle limite (ou le détruit).

Théorème 6.15 (Hopf). Soit $\dot{x} = f(x, \mu)$ avec $f(0, \mu) = 0$ pour tout μ et $A(\mu) = D_x f(0, \mu)$ ayant des valeurs propres $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$. Supposons :

1. $\alpha(0) = 0$, $\beta(0) = \omega_0 \neq 0$ (valeurs propres sur l'axe imaginaire) ;

2. $\alpha'(0) \neq 0$ (condition de transversalité : les valeurs propres traversent l'axe imaginaire avec une vitesse non nulle).

Alors :

- **Hopf surcritique** (premier coefficient de Lyapunov $\ell_1 < 0$) : un cycle limite **stable** naît pour $\mu > 0$ (l'équilibre devient instable) ;
- **Hopf sous-critique** ($\ell_1 > 0$) : un cycle limite **instable** existe pour $\mu < 0$ (l'équilibre est encore stable), et disparaît à $\mu = 0$.

Premier coefficient de Lyapunov

Pour le système $\dot{z} = (\alpha + i\omega)z + c_1 z |z|^2 + \dots$ en coordonnées complexes, le premier coefficient de Lyapunov est $\ell_1 = \text{Re}(c_1)$. Si $\ell_1 < 0$ la bifurcation est surcritique.

Exemple 6.16 (Oscillateur de Stuart-Landau). Le modèle $\dot{z} = (\mu + i\omega)z - z|z|^2$ en coordonnées polaires (r, θ) donne

$$\dot{r} = \mu r - r^3, \quad \dot{\theta} = \omega.$$

Pour $\mu > 0$, un cycle limite stable de rayon $r = \sqrt{\mu}$ existe. C'est la bifurcation de Hopf surcritique par excellence.

Diagramme de bifurcation et Hopf

```
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp
import matplotlib.pyplot as plt

def hopf_system(t, state, mu):
    x, y = state
    r2 = x**2 + y**2
    return [mu*x - y - x*r2, x + mu*y - y*r2]

fig, axes = plt.subplots(1, 3, figsize=(15, 5))
mus = [-0.5, 0.0, 0.5]
for ax, mu in zip(axes, mus):
    for r0 in [0.1, 0.3, 0.8, 1.5, 2.0]:
        for th in [0, np.pi/2, np.pi, 3*np.pi/2]:
            x0 = [r0*np.cos(th), r0*np.sin(th)]
            sol = solve_ivp(hopf_system, [0, 30], x0,
                           args=(mu,), max_step=0.05)
            ax.plot(sol.y[0], sol.y[1], 'b-', lw=0.3)
    ax.set_title(f"$\\mu = {mu}$")
    ax.set_xlim(-2, 2); ax.set_ylim(-2, 2)
    ax.set_aspect('equal'); ax.grid(True, alpha=0.3)
plt.suptitle("Bifurcation de Hopf surcritique", fontsize=14)
plt.tight_layout()
plt.savefig("hopf_bifurcation.pdf")
plt.show()
```

6.7 Diagrammes de bifurcation

Définition 6.17 (Diagramme de bifurcation). Un **diagramme de bifurcation** représente les équilibres (ou amplitudes des cycles) en fonction du paramètre μ . Les branches stables sont tracées en trait plein, les branches instables en pointillé.

Remarque 6.18. Pour les bifurcations de Hopf, on représente généralement le rayon du cycle limite (ou le maximum/minimum d'une composante) en fonction de μ .

6.8 Bifurcations globales

Définition 6.19 (Bifurcation homocline). Une **bifurcation homocline** se produit lorsqu'une orbite homocline (connexion d'un col à lui-même) apparaît ou disparaît. Elle peut engendrer un cycle limite de grande période.

Définition 6.20 (Bifurcation SNIC). La bifurcation **SNIC** (Saddle-Node on an Invariant Circle) se produit lorsqu'un nœud-col apparaît sur un cycle limite, le détruisant. La période du cycle tend vers l'infini à la bifurcation.

Théorème 6.21 (Scaling de la période). • *Bifurcation SNIC* : $T \sim \frac{1}{\sqrt{\mu - \mu_c}}$;

• *Bifurcation homocline* : $T \sim -\frac{1}{\lambda_s} \ln |\mu - \mu_c|$, où λ_s est la valeur propre stable du col.

6.9 Bifurcations en dimension supérieure

Remarque 6.22. En dimension $n > 2$, les mêmes bifurcations locales se produisent par réduction à la variété centrale. Les conditions sont identiques mais s'appliquent au système réduit. Des bifurcations spécifiques apparaissent aussi :

- **Bogdanov-Takens** (codimension 2) : valeur propre double nulle ;
- **Hopf-Hopf** (codimension 2) : deux paires de valeurs propres purement imaginaires ;
- **Cusp** (codimension 2) : dégénérescence du nœud-col.

6.10 Applications physiques

Exemple 6.23 (Laser). Le laser à semi-conducteur est modélisé par les équations de taux :

$$\dot{n} = J - n - (1 + 2n)P, \quad \dot{P} = \gamma [(1 + 2n)P - P + \beta n].$$

La transition du laser (sous-seuil vers émission laser) est une bifurcation transcritique. Pour certains modèles avec rétroaction optique, une bifurcation de Hopf engendre des oscillations.

6.11 Exercices

Exercice 6.1 (Nœud-col en dimension 2). Étudier les bifurcations du système $\dot{x} = \mu - x^2$, $\dot{y} = -y$. Tracer le diagramme de bifurcation.

Exercice 6.2 (Fourche avec imperfection). Considérer $\dot{x} = h + \mu x - x^3$ avec h petit. Montrer que l'imperfection h brise la symétrie de la bifurcation fourche et tracer le diagramme dans le plan (μ, x^*) pour $h > 0$.

Exercice 6.3 (Hopf dans un système chimique). Pour le système de Brusselator $\dot{x} = 1 - (b + 1)x + ax^2y$, $\dot{y} = bx - ax^2y$, trouver la valeur de bifurcation de Hopf en fonction de a et b .

Exercice 6.4 (Diagramme complet). Pour $\dot{x} = \mu x + x^3 - x^5$, tracer le diagramme de bifurcation complet, identifier les bifurcations nœud-col et fourche, et déterminer la présence d'hystérésis.

Exercice 6.5 (Bifurcation de Hopf — calcul). Calculer le premier coefficient de Lyapunov pour le système $\dot{x} = \mu x - y - x(x^2 + y^2)$, $\dot{y} = x + \mu y - y(x^2 + y^2)$ et déterminer si la bifurcation est surcritique ou sous-critique.

Exercice 6.6 (Bifurcation homocline). Considérer le système $\dot{x} = y$, $\dot{y} = x - x^2 + \mu y$. Montrer qu'une orbite homocline existe pour une valeur particulière de μ et discuter la création/destruction d'un cycle limite.

Chapitre 7

Chaos — Définitions et Propriétés

7.1 Introduction

En 1963, Edward Lorenz, météorologue au MIT, découvre par accident que son modèle simplifié de convection atmosphérique produit des résultats radicalement différents selon que l'on arrondit une condition initiale à trois ou six décimales. Ce phénomène — la *sensibilité aux conditions initiales* — deviendra le symbole du chaos déterministe et sera popularisé sous le nom d'« effet papillon ». Mais qu'est-ce que le chaos, exactement ? La question est plus subtile qu'il n'y paraît. Robert Devaney proposera en 1989 une définition rigoureuse combinant trois ingrédients : sensibilité aux conditions initiales, transitivité topologique et densité des orbites périodiques. Li et Yorke, dans leur article célèbre « Period Three Implies Chaos » (1975), en avaient donné une autre. Ce chapitre explore ces définitions, leurs relations, et les propriétés fondamentales des systèmes chaotiques — ces systèmes déterministes qui, paradoxalement, produisent l'apparence du hasard.

7.2 Sensibilité aux conditions initiales

Définition 7.1 (Sensibilité aux conditions initiales). Un système dynamique $\dot{x} = f(x)$ (ou $x_{n+1} = f(x_n)$) possède une **sensibilité aux conditions initiales** (SCI) sur un ensemble invariant Λ s'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \Lambda$ et tout $\epsilon > 0$, il existe y avec $\|y - x\| < \epsilon$ et $t > 0$ (ou $n > 0$) tel que

$$\|\varphi(t, x) - \varphi(t, y)\| > \delta.$$

Intuition

La sensibilité aux conditions initiales est souvent appelée « effet papillon » : une perturbation infime peut conduire à des évolutions radicalement différentes. C'est la découverte fondamentale de Lorenz (1963).

Remarque 7.2. La sensibilité seule ne suffit pas à définir le chaos. L'application $x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$ est sensible aux conditions initiales mais n'est pas chaotique (les orbites s'échappent simplement vers l'infini).

7.3 Définition de Devaney du chaos

Définition 7.3 (Chaos au sens de Devaney). Un système dynamique $f : X \rightarrow X$ sur un espace métrique (X, d) est **chaotique au sens de Devaney** s'il satisfait les trois conditions :

1. **Transitivité topologique** : pour tous ouverts non vides $U, V \subseteq X$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.
2. **Densité des orbites périodiques** : l'ensemble des points périodiques est dense dans X .
3. **Sensibilité aux conditions initiales**.

Théorème 7.4 (Banks et al., 1992). *Si $f : X \rightarrow X$ est transitive topologiquement et a des orbites périodiques denses sur un espace métrique infini, alors f possède automatiquement la sensibilité aux conditions initiales. Ainsi, la condition (3) est **redondante** dans la définition de Devaney.*

7.4 Définition de Li-Yorke du chaos

Définition 7.5 (Paire de Li-Yorke). Deux points x, y forment une **paire de Li-Yorke** si

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|f^n(x) - f^n(y)\| > 0 \quad \text{et} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f^n(x) - f^n(y)\| = 0.$$

Définition 7.6 (Chaos au sens de Li-Yorke). Le système est **chaotique au sens de Li-Yorke** s'il existe un ensemble non dénombrable S (ensemble brouillé) tel que toute paire de points distincts de S est une paire de Li-Yorke.

Théorème 7.7 (Li-Yorke, 1975). *Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue. Si f possède une orbite de période 3, alors f possède des orbites de toute période $n \in \mathbb{N}^*$, et f est chaotique au sens de Li-Yorke.*

Remarque 7.8. L'énoncé populaire « Period three implies chaos » résume ce théorème. Plus généralement, l'ordre de Sharkovskii détermine quelles périodes impliquent quelles autres.

7.5 L'ordre de Sharkovskii

Théorème 7.9 (Sharkovskii, 1964). *Définissons l'ordre de Sharkovskii sur $\mathbb{N}^*$:*

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \dots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 4 \cdot 3 \triangleright 4 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright \dots \triangleright 8 \triangleright 4 \triangleright 2 \triangleright 1.$$

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et a une orbite de période m , alors f a des orbites de toute période n telle que $m \triangleright n$.

7.6 Exemples fondamentaux

7.6.1 L'application de décalage (shift)

Définition 7.10 (Espace des suites et shift). L'espace des suites binaires est $\Sigma_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{s = (s_0, s_1, s_2, \dots) : s_i \in \{0, 1\}\}$ muni de la métrique $d(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$. Le **shift** $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ est défini par $\sigma(s_0, s_1, s_2, \dots) = (s_1, s_2, s_3, \dots)$.

Théorème 7.11. *Le shift σ sur Σ_2 est chaotique au sens de Devaney :*

1. *Il est topologiquement transitif.*
2. *Les points périodiques sont denses.*
3. *Il est sensible aux conditions initiales avec $\delta = 1$.*

7.6.2 L'application de la tente

Définition 7.12 (Application de la tente). L'**application de la tente** est $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ définie par

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2, \\ 2(1 - x) & \text{si } 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

Proposition 7.13. L'application de la tente est semi-conjuguée au shift sur Σ_2 et est chaotique au sens de Devaney.

7.6.3 L'application logistique à $r = 4$

Théorème 7.14. *L'application logistique $f_4(x) = 4x(1 - x)$ sur $[0, 1]$ est topologiquement conjuguée à l'application de la tente via le changement de variable $h(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{x})$. Elle est donc chaotique au sens de Devaney.*

7.7 Le fer à cheval de Smale

Définition 7.15 (Fer à cheval de Smale). Le **fer à cheval de Smale** est un difféomorphisme du plan qui étire un carré, le plie en forme de fer à cheval, et le remet dans le carré initial. L'ensemble invariant maximal est un ensemble de Cantor sur lequel la dynamique est conjuguée au shift sur Σ_2 .

Théorème 7.16 (Smale, 1967). *Sur l'ensemble invariant du fer à cheval, la dynamique est :*

1. *chaotique au sens de Devaney ;*
2. *hyperbolique (uniformly hyperbolic) ;*
3. *structurellement stable (persiste sous petites perturbations).*

Remarque 7.17. Le fer à cheval de Smale est le prototype du chaos **hyperbolique**. Il apparaît génériquement près des orbites homoclines transverses (théorème de Smale-Birkhoff).

7.8 Routes vers le chaos

Définition 7.18 (Cascade de doublements de période). La **cascade de Feigenbaum** est une suite infinie de bifurcations de doublement de période $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow \dots$ menant au chaos.

Théorème 7.19 (Universalité de Feigenbaum). Les valeurs de bifurcation μ_n satisfont

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n} = \delta_F \approx 4,6692 \dots$$

La constante δ_F est **universelle** : elle ne dépend pas de la famille d'applications considérée.

Constantes de Feigenbaum

$\delta_F \approx 4,669\,201\,609 \dots$ (rapport des intervalles de paramètre)

$\alpha_F \approx -2,502\,907\,875 \dots$ (facteur d'échelle spatial)

Autres routes vers le chaos :

- **Intermittence** (Pomeau-Manneville) : alternance de phases laminaires et de bursts chaotiques.
- **Quasi-périodicité** (Ruelle-Takens) : passage par un tore invariant qui se détruit.
- **Crise** : collision d'un attracteur chaotique avec un répulseur.

7.9 Chaos dans les systèmes continus

Dimension minimale pour le chaos continu

Un système autonome continu $\dot{x} = f(x)$ ne peut être chaotique qu'en dimension $n \geq 3$. En dimension 2, le théorème de Poincaré-Bendixson interdit le chaos.

Exemple 7.20 (Théorème de Mel'nikov). Le théorème de Mel'nikov permet de détecter le chaos dans les systèmes hamiltoniens perturbés. Pour le pendule forcé $\ddot{x} + \sin x = \epsilon(\gamma \cos \omega t - \delta \dot{x})$, la fonction de Mel'nikov prédit l'existence d'orbites homoclines transverses (et donc d'un fer à cheval de Smale) pour ϵ suffisamment petit.

Démonstration de la sensibilité aux conditions initiales

```
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp
import matplotlib.pyplot as plt

def lorenz(t, state, sigma=10, rho=28, beta=8/3):
    x, y, z = state
    return [sigma*(y - x), rho*x - y - x*z, x*y - beta*z]
```

```

# Two nearby initial conditions
x0_1 = [1.0, 1.0, 1.0]
x0_2 = [1.0 + 1e-10, 1.0, 1.0]

t_span = [0, 50]
t_eval = np.linspace(0, 50, 5000)
sol1 = solve_ivp(lorenz, t_span, x0_1, t_eval=t_eval, max_step=0.01)
sol2 = solve_ivp(lorenz, t_span, x0_2, t_eval=t_eval, max_step=0.01)

fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(2, 1, figsize=(12, 8))
ax1.plot(sol1.t, sol1.y[0], 'b-', lw=0.5, label='CI 1')
ax1.plot(sol2.t, sol2.y[0], 'r-', lw=0.5, label='CI 2')
ax1.set_xlabel('$t$'); ax1.set_ylabel('$x(t)$')
ax1.legend(); ax1.set_title('Sensibilite aux conditions initiales')

diff = np.sqrt(np.sum((sol1.y - sol2.y)**2, axis=0))
ax2.semilogy(sol1.t, diff, 'k-', lw=0.5)
ax2.set_xlabel('$t$'); ax2.set_ylabel('$\\|\\Delta x(t)\\|$')
ax2.set_title('Divergence exponentielle')
plt.tight_layout()
plt.savefig("sensitivity.pdf")
plt.show()

```

7.10 Exercices

Exercice 7.1 (Shift et chaos). Montrer que le shift σ sur Σ_2 est topologiquement transitif en construisant explicitement une orbite dense.

Exercice 7.2 (Période 3). Montrer que l'application $f(x) = x^2 - 7/4$ sur $\mathbb{R}$ a une orbite de période 3 et en déduire qu'elle est chaotique au sens de Li-Yorke.

Exercice 7.3 (Application de la tente). Trouver tous les points périodiques de période ≤ 3 de l'application de la tente et vérifier qu'ils sont instables.

Exercice 7.4 (Logistique). Pour l'application logistique $f_r(x) = rx(1 - x)$, montrer numériquement la cascade de doublement de période et estimer la constante de Feigenbaum.

Exercice 7.5 (Fer à cheval). Décrire géométriquement la construction du fer à cheval de Smale et montrer que l'ensemble invariant est un produit de Cantor.

Exercice 7.6 (Chaos en dimension 3). Pourquoi le système $\dot{x} = -y - z$, $\dot{y} = x + ay$, $\dot{z} = b + z(x - c)$ (Rössler) peut-il être chaotique alors qu'il n'a que trois équations ? Vérifier numériquement pour $a = 0.2$, $b = 0.2$, $c = 5.7$.

Chapitre 8

Exposants de Lyapunov

8.1 Introduction

Comment mesurer le chaos ? La sensibilité aux conditions initiales est une notion qualitative : deux orbites voisines divergent, mais à quelle vitesse ? Alexandre Lyapunov, dans sa thèse de 1892, avait déjà introduit les exposants caractéristiques pour étudier la stabilité des équations différentielles. Mais c'est dans les années 1960–1970, avec les travaux de Valery Oseledets (théorème multiplicatif ergodique, 1968), que ces exposants trouvent leur formulation définitive pour les systèmes dynamiques généraux. L'exposant de Lyapunov maximal quantifie le taux de divergence exponentielle des orbites voisines : s'il est positif, le système est chaotique. Le spectre complet des exposants révèle la géométrie de l'attracteur, distinguant les directions d'expansion, de contraction et de neutralité.

Intuition

Imaginons deux particules très proches dans un flot. Si elles s'éloignent exponentiellement vite, l'exposant de Lyapunov est positif et le système est chaotique. Si elles se rapprochent, l'exposant est négatif et le système est stable. L'exposant mesure précisément ce taux exponentiel.

8.2 Définition pour les systèmes discrets

Définition 8.1 (Exposant de Lyapunov pour une application unidimensionnelle). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et x_0 un point initial. L'**exposant de Lyapunov** en x_0 est

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |f'(x_k)|,$$

où $x_k = f^k(x_0)$, lorsque cette limite existe.

Remarque 8.2. Par la règle de la chaîne, $|(f^n)'(x_0)| = \prod_{k=0}^{n-1} |f'(x_k)|$, donc $\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |(f^n)'(x_0)|$. Le nombre e^λ représente le facteur moyen d'étirement par itération.

Exemple 8.3 (Application logistique). Pour $f_r(x) = rx(1-x)$ avec $r = 4$, on sait que

la mesure invariante est $\mu(dx) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}dx$. L'exposant de Lyapunov vaut

$$\lambda = \int_0^1 \ln |f'_4(x)| \mu(dx) = \int_0^1 \ln |4 - 8x| \frac{dx}{\pi\sqrt{x(1-x)}} = \ln 2.$$

8.3 Exposants de Lyapunov en dimension supérieure

Définition 8.4 (Matrice de Lyapunov). Soit $\dot{x} = f(x)$ un système en dimension n et $\Phi(t, x_0)$ la matrice fondamentale de l'équation variationnelle $\dot{Y} = Df(\varphi(t, x_0))Y$. La **matrice de Lyapunov** est

$$\Lambda(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} [\Phi(t, x_0)^\top \Phi(t, x_0)]^{1/(2t)}.$$

Définition 8.5 (Spectre de Lyapunov). Les **exposants de Lyapunov** du système en x_0 sont les logarithmes des valeurs propres de $\Lambda(x_0)$, notés

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n.$$

Ils mesurent les taux de dilatation dans les n directions principales.

Interprétation géométrique des exposants

- $\lambda_i > 0$: dilatation exponentielle dans la i -ème direction.
- $\lambda_i = 0$: ni contraction ni expansion (direction du flot).
- $\lambda_i < 0$: contraction exponentielle.
- $\lambda_1 > 0$: le système est **chaotique**.
- $\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$: le système est **dissipatif**.

8.4 Le théorème ergodique multiplicatif d'Oseledets

Théorème 8.6 (Oseledets, 1968). Soit $f : M \rightarrow M$ un difféomorphisme préservant une mesure de probabilité ergodique μ , et soit $A(x) = Df(x)$. Supposons $\int \ln^+ \|A(x)\| d\mu(x) < \infty$. Alors, pour μ -presque tout x , il existe des réels $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_s$ et une décomposition

$$\mathbb{R}^n = E_1(x) \oplus E_2(x) \oplus \dots \oplus E_s(x)$$

tels que pour tout $v \in E_i(x) \setminus \{0\}$:

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \ln \|Df^n(x) \cdot v\| = \lambda_i.$$

De plus, $Df(x) \cdot E_i(x) = E_i(f(x))$ et $\dim E_i(x)$ est constant μ -presque partout.

Remarque 8.7. Le théorème d'Oseledets généralise le concept d'exposants de Lyapunov à tout cocycle linéaire au-dessus d'un système ergodique. Les entiers $m_i = \dim E_i(x)$ sont les **multiplicités** des exposants.

Définition 8.8 (Sous-espaces d'Oseledets). Les espaces $E_i(x)$ du théorème 8.6 sont appelés **sous-espaces d'Oseledets**. La décomposition $\bigoplus E_i(x)$ est la **décomposition d'Oseledets**.

8.5 Propriétés fondamentales

Proposition 8.9 (Exposant le long du flot). Pour un système autonome continu $\dot{x} = f(x)$, la direction du flot $f(x)$ est toujours associée à un exposant de Lyapunov nul. Pour un attracteur chaotique en dimension n , le spectre satisfait $\lambda_1 > 0 = \lambda_2 > \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n$.

Proposition 8.10 (Formule de Liouville). La somme des exposants de Lyapunov est liée à la divergence du champ :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \text{tr}(Df(\varphi(t, x_0))) dt.$$

Pour le système de Lorenz ($\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 8/3$) : $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -(\sigma + 1 + \beta) \approx -13,67$.

Théorème 8.11 (Formule de Pesin). Soit f un difféomorphisme $\mathcal{C}^2$ d'une variété compacte préservant une mesure ergodique μ absolument continue par rapport à Lebesgue. Alors l'entropie métrique de f vérifie

$$h_\mu(f) = \sum_{\lambda_i > 0} m_i \lambda_i,$$

où la somme porte sur les exposants positifs comptés avec multiplicité.

Exposants et dimension

La formule de Kaplan-Yorke relie les exposants de Lyapunov à la dimension de l'attracteur : $D_{KY} = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}$, où j est le plus grand entier tel que $\sum_{i=1}^j \lambda_i \geq 0$. Cette formule est conjecturalement égale à la dimension d'information.

8.6 Calcul numérique des exposants de Lyapunov

Définition 8.12 (Méthode de Benettin et al.). L'algorithme standard pour calculer les p premiers exposants de Lyapunov :

1. Initialiser une base orthonormée $\{v_1, \dots, v_p\}$.
2. Intégrer simultanément l'orbite et les p vecteurs tangents sur un intervalle τ .
3. Appliquer Gram-Schmidt aux vecteurs tangents pour les réorthogonaliser. Enregistrer les normes avant orthogonalisation.
4. Répéter les étapes 2–3 pendant N itérations.
5. Estimer $\lambda_i \approx \frac{1}{N\tau} \sum_{k=1}^N \ln \|v_i^{(k)}\|$.

Calcul des exposants de Lyapunov du système de Lorenz

```
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp
```

```

def lorenz(t, state, sigma=10, rho=28, beta=8/3):
    x, y, z = state[:3]
    dxdt = [sigma*(y - x), rho*x - y - x*z, x*y - beta*z]
    # Jacobian times perturbation vectors
    J = np.array([[ -sigma, sigma, 0],
                  [rho - z, -1, -x],
                  [y, x, -beta]])
    Y = state[3:].reshape(3, 3)
    dYdt = J @ Y
    return dxdt + dYdt.flatten().tolist()

n = 3
x0 = [1.0, 1.0, 1.0] + list(np.eye(n).flatten())
dt, N_steps = 0.01, 10000
lyap = np.zeros(n)

for i in range(N_steps):
    sol = solve_ivp(lorenz, [0, dt], x0, max_step=dt/2)
    x0[:3] = sol.y[:3, -1]
    Y = sol.y[3:, -1].reshape(n, n)
    Q, R = np.linalg.qr(Y)
    lyap += np.log(np.abs(np.diag(R)))
    x0[3:] = Q.flatten()

lyap /= (N_steps * dt)
print(f"Exposants de Lyapunov: {lyap}")
# Resultat typique: [0.91, 0.00, -14.57]

```

8.7 Applications à la détection du chaos

Proposition 8.13 (Critère de chaos). Un système déterministe est chaotique si et seulement si son plus grand exposant de Lyapunov est strictement positif : $\lambda_1 > 0$.

Exemple 8.14 (Classification par les exposants de Lyapunov). Pour un système tridimensionnel :

- $(-, -, -)$: point fixe stable.
- $(0, -, -)$: cycle limite stable.
- $(0, 0, -)$: tore quasi-périodique T^2 .
- $(+, 0, -)$: attracteur étrange (chaos).

Lemme 8.15 (Temps de prédictibilité). Le temps de Lyapunov $\tau_L = 1/\lambda_1$ définit l'échelle de temps caractéristique au-delà de laquelle la prédiction devient impossible. Après un temps t , l'incertitude initiale δ_0 croît selon $\delta(t) \sim \delta_0 e^{\lambda_1 t}$.

Exemple 8.16 (Prévision météorologique). Pour l'atmosphère, $\lambda_1 \approx 1/(2 \text{ jours})$. Une erreur initiale de 10^{-6} atteint l'échelle synoptique (~ 1) après environ $t = \frac{\ln(10^6)}{\lambda_1} \approx 28$ jours, ce qui fixe la limite théorique de la prévision météorologique.

8.8 Exposants conditionnels et applications

Définition 8.17 (Exposants de Lyapunov conditionnels). Pour deux systèmes couplés $\dot{x} = f(x)$ et $\dot{y} = g(x, y)$, les exposants de Lyapunov **conditionnels** du système esclave y sont définis par la linéarisation $\dot{\delta y} = D_y g(x(t), y(t)) \cdot \delta y$. Ils déterminent si la synchronisation $y(t) \rightarrow x(t)$ est stable.

Théorème 8.18 (Synchronisation chaotique). *Deux systèmes chaotiques identiques couplés se synchronisent si et seulement si tous les exposants de Lyapunov conditionnels transverses sont strictement négatifs.*

8.9 Exercices

Exercice 8.1 (Exposant de la tente). Calculer analytiquement l'exposant de Lyapunov de l'application de la tente $T(x) = 1 - |2x - 1|$ sur $[0, 1]$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Exercice 8.2 (Spectre du chat d'Arnold). Soit l'application du chat d'Arnold $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \pmod{1}$. Calculer les deux exposants de Lyapunov et vérifier que leur somme est nulle (système conservatif).

Exercice 8.3 (Dimension de Kaplan-Yorke). Pour le système de Lorenz avec les paramètres standard, les exposants sont approximativement $\lambda_1 \approx 0,91$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \approx -14,57$. Calculer la dimension de Kaplan-Yorke.

Exercice 8.4 (Convergence numérique). Implémenter l'algorithme de Benettin pour l'application de Hénon $H(x, y) = (1 - 1,4x^2 + y, 0,3x)$ et étudier la convergence des exposants en fonction du nombre d'itérations.

Exercice 8.5 (Formule de Pesin). Vérifier numériquement la formule de Pesin pour l'application du chat d'Arnold en calculant indépendamment l'entropie métrique et la somme des exposants positifs.

Chapitre 9

Attracteurs Étranges

9.1 Introduction

En 1971, David Ruelle et Floris Takens proposent le terme d'« attracteur étrange » pour décrire les ensembles géométriques qui gouvernent la dynamique des systèmes chaotiques. L'attracteur de Lorenz, découvert en 1963, en est le prototype : un ensemble en forme de papillon, de dimension fractale $\approx 2,06$, sur lequel les trajectoires s'enroulent sans jamais se recouper. L'attracteur de Hénon, l'attracteur de Rössler, et bien d'autres suivront. Ce qui rend ces objets « étranges », c'est la coexistence de deux comportements contradictoires : l'attraction (les orbites voisines convergent vers l'attracteur) et le chaos (une fois sur l'attracteur, les orbites divergent exponentiellement). Géométriquement, cette coexistence se traduit par une structure fractale auto-similaire, résultat de l'étirement et du repliement répétés de l'espace des phases.

Intuition

Un attracteur étrange fonctionne comme une machine à pétrir la pâte : il étire les orbites voisines (créant la sensibilité aux conditions initiales) puis les replie dans un volume borné (assurant la compacité). Le résultat est une structure feuilletée infiniment fine — un fractal.

9.2 Définitions formelles

Définition 9.1 (Attracteur). Soit φ_t un flot sur $\mathbb{R}^n$. Un ensemble compact invariant A est un **attracteur** s'il existe un voisinage ouvert $U \supset A$ (bassin d'attraction) tel que :

1. $\varphi_t(U) \subset U$ pour tout $t > 0$;
2. $A = \bigcap_{t>0} \varphi_t(U)$;
3. A est topologiquement transitif (contient une orbite dense).

Définition 9.2 (Attracteur étrange). Un attracteur est dit **étrange** s'il possède une structure fractale (dimension non entière) et s'il exhibe une sensibilité aux conditions initiales (au moins un exposant de Lyapunov strictement positif).

Étrange $\neq$ chaotique

Il existe des attracteurs étranges non chaotiques (dimension fractale mais exposants de Lyapunov négatifs ou nuls) et des attracteurs chaotiques non étranges (chaos sur un tore lisse). Les deux notions sont logiquement indépendantes.

9.3 L'attracteur de Lorenz

Définition 9.3 (Système de Lorenz). Le **système de Lorenz** (1963) est

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = \rho x - y - xz, \\ \dot{z} = xy - \beta z, \end{cases}$$

avec les paramètres classiques $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = 8/3$.

Théorème 9.4 (Tucker, 2002). *Pour les paramètres classiques $(\sigma, \rho, \beta) = (10, 28, 8/3)$, le système de Lorenz possède un **attracteur étrange robuste**. Ce résultat, démontré par assistance informatique rigoureuse, a confirmé une conjecture ouverte depuis 1963.*

Proposition 9.5 (Propriétés de l'attracteur de Lorenz). L'attracteur de Lorenz satisfait :

1. **Dissipativité** : $\nabla \cdot f = -(\sigma + 1 + \beta) < 0$, donc les volumes se contractent exponentiellement.
2. **Symétrie** : invariance par $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, z)$.
3. **Spectre de Lyapunov** : $\lambda_1 \approx 0,91$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \approx -14,57$.
4. **Dimension fractale** : $D_{KY} \approx 2,06$.

Points d'équilibre du système de Lorenz

$C_0 = (0, 0, 0)$, instable pour $\rho > 1$.

$C_{\pm} = (\pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$, instables pour $\rho > \rho_H = \sigma \frac{\sigma + \beta + 3}{\sigma - \beta - 1}$.

9.4 Le système de Rössler

Définition 9.6 (Système de Rössler). Le **système de Rössler** (1976) est

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z, \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = b + z(x - c), \end{cases}$$

avec les paramètres typiques $a = 0,2$, $b = 0,2$, $c = 5,7$.

Remarque 9.7. Contrairement à l'attracteur de Lorenz qui a deux lobes, l'attracteur de Rössler a une structure en bande unique avec un mécanisme de repliement plus simple. Il est souvent utilisé comme modèle minimal du chaos à bande unique.

Proposition 9.8. Pour les paramètres standards, le système de Rössler exhibe une cascade de doublements de période lorsque c augmente : orbite périodique ($c \approx 2,5$), doublement ($c \approx 3,5$), chaos ($c \approx 4,2$), fenêtre périodique ($c \approx 5,2$), chaos développé ($c \approx 5,7$).

9.5 L'application de Hénon

Définition 9.9 (Application de Hénon). L'**application de Hénon** est le difféomorphisme du plan

$$H(x, y) = (1 - ax^2 + y, bx),$$

avec les paramètres classiques $a = 1,4$, $b = 0,3$.

Proposition 9.10 (Propriétés de Hénon). 1. Le jacobien est constant : $\det DH = -b$. L'application contracte les aires d'un facteur $|b| = 0,3$.

2. L'attracteur a une dimension fractale $D \approx 1,26$.

3. Les exposants de Lyapunov sont $\lambda_1 \approx 0,42$ et $\lambda_2 \approx -1,62$.

4. L'attracteur possède une structure de Cantor dans la direction transverse (produit d'une courbe par un ensemble de Cantor).

Théorème 9.11 (Benedicks-Carleson, 1991). *Pour un ensemble de paramètres (a, b) de mesure de Lebesgue positive avec b petit, l'application de Hénon possède un attracteur étrange portant une unique mesure SRB (Sinai-Ruelle-Bowen) ergodique.*

9.6 Dimension fractale

Définition 9.12 (Dimension de boîte (box-counting)). Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble borné. La **dimension de boîte** est

$$D_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{-\ln \epsilon},$$

où $N(\epsilon)$ est le nombre minimal de boîtes de côté ϵ nécessaires pour couvrir A .

Définition 9.13 (Dimension de Hausdorff). La **dimension de Hausdorff** de A est

$$D_H = \inf \{d \geq 0 : \mathcal{H}^d(A) = 0\},$$

où $\mathcal{H}^d(A) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_i (\text{diam } U_i)^d : A \subset \bigcup_i U_i, \text{diam } U_i < \epsilon \right\}$ est la mesure de Hausdorff d -dimensionnelle.

Proposition 9.14 (Inégalité entre dimensions). Pour tout ensemble borné $A \subset \mathbb{R}^n$:

$$D_H(A) \leq \underline{D}_0(A) \leq \overline{D}_0(A),$$

où $\underline{D}_0$ et $\overline{D}_0$ sont les dimensions de boîte inférieure et supérieure.

Exemple 9.15 (Ensemble de Cantor triadique). L'ensemble de Cantor triadique C a pour dimension $D_H = D_0 = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,631$. En effet, à l'étape n , on a $N(\epsilon) = 2^n$ intervalles de longueur $\epsilon = 3^{-n}$, donc $D_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln 2}{n \ln 3}$.

Définition 9.16 (Dimension de corrélation). La **dimension de corrélation** est définie par

$$D_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln C(\epsilon)}{\ln \epsilon},$$

où $C(\epsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \#\{(i, j) : \|x_i - x_j\| < \epsilon\}$ est l'intégrale de corrélation (Grassberger-Procaccia).

9.7 Attracteurs dans les systèmes physiques

Exemple 9.17 (Convection de Rayleigh-Bénard). Le système de Lorenz est une troncation des équations de Navier-Stokes pour la convection de Rayleigh-Bénard entre deux plaques horizontales chauffées. Le paramètre ρ correspond au nombre de Rayleigh normalisé.

Exemple 9.18 (Circuit de Chua). Le **circuit de Chua** est un circuit électronique simple (condensateurs, inductance, résistance non linéaire) qui produit un attracteur étrange à double enroulement. C'est le premier système physique pour lequel le chaos a été rigoureusement démontré.

Visualisation de l'attracteur de Lorenz

```
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp
import matplotlib.pyplot as plt

def lorenz(t, state, sigma=10, rho=28, beta=8/3):
    x, y, z = state
    return [sigma*(y - x), rho*x - y - x*z, x*y - beta*z]

sol = solve_ivp(lorenz, [0, 100], [1, 1, 1],
                max_step=0.01, t_eval=np.linspace(0, 100, 100000))
fig = plt.figure(figsize=(10, 8))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot(sol.y[0], sol.y[1], sol.y[2], lw=0.3, color='darkblue')
ax.set_xlabel('$x$'); ax.set_ylabel('$y$'); ax.set_zlabel('$z$')
ax.set_title('Attracteur de Lorenz')
plt.savefig("lorenz_attractor.pdf")
plt.show()
```

9.8 Exercices

Exercice 9.1 (Dissipativité). Montrer que le système de Lorenz est dissipatif et que tout ensemble de volume initial V_0 évolue en un volume $V(t) = V_0 e^{-(\sigma+1+\beta)t}$. En déduire l'existence d'un attracteur de mesure de Lebesgue nulle.

Exercice 9.2 (Dimension de boîte). Calculer la dimension de boîte de l'ensemble $\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$ et de l'éponge de Menger.

Exercice 9.3 (Attracteur de Hénon). Écrire un programme qui trace l'attracteur de Hénon pour $a = 1,4$, $b = 0,3$ en itérant 10^6 fois. Estimer sa dimension de corrélation par la méthode de Grassberger-Procaccia.

Exercice 9.4 (Section de Poincaré). Pour le système de Rössler, tracer la section de Poincaré dans le plan $z = z_{\max}/2$ et montrer qu'elle a l'apparence d'une application unidimensionnelle (presque).

Exercice 9.5 (Stabilité structurelle). L'attracteur de Lorenz est-il structurellement stable ? Discuter en comparant avec le fer à cheval de Smale et justifier la notion d'attracteur robuste (au sens de Morales-Pacifico-Pujals).

Chapitre 10

Systèmes Dynamiques Discrets

10.1 Introduction

En 1976, le biologiste Robert May publie un article dans *Nature* montrant que l'application logistique $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$, un modèle élémentaire de dynamique de population, produit un comportement d'une richesse stupéfiante : points fixes stables, cycles de période 2, 4, 8..., puis chaos. Mitchell Feigenbaum découvre bientôt que les rapports entre les valeurs du paramètre où se produisent les doublements de période convergent vers une constante universelle, $\delta \approx 4,669$, indépendante de la famille d'applications considérée. Cette *universalité* relie la dynamique discrète à la physique statistique. Ce chapitre explore les systèmes définis par l'itération $x_{n+1} = f(x_n)$, le cadre le plus simple pour étudier le chaos : cascades de doublements, dynamique symbolique et entropie topologique.

Intuition

Même une application aussi simple que $f(x) = rx(1 - x)$ engendre, lorsque r augmente, toute la complexité du chaos : bifurcations, auto-similarité, universalité. Les systèmes discrets sont le laboratoire idéal pour comprendre les mécanismes fondamentaux.

10.2 L'application logistique

Définition 10.1 (Famille logistique). La **famille logistique** est $f_r : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ définie par $f_r(x) = rx(1 - x)$, $r \in [0, 4]$.

Proposition 10.2 (Points fixes et stabilité). 1. Le point fixe $x^* = 0$ existe pour tout r ; il est stable si $r < 1$.

2. Le point fixe $x^* = 1 - 1/r$ existe pour $r > 1$; il est stable si $1 < r < 3$ (car $f'_r(x^*) = 2 - r$).

3. À $r = 3$, une bifurcation de doublement de période crée un cycle de période 2.

Théorème 10.3 (Cascade de doublements de période). *Il existe une suite croissante $r_1 < r_2 < r_3 < \dots$ avec $r_1 = 3$ telle qu'en $r = r_n$, le cycle de période 2^{n-1} perd sa stabilité et un cycle stable de période 2^n apparaît par bifurcation flip. La suite r_n converge vers $r_\infty \approx 3,5699 \dots$*

Théorème 10.4 (Universalité de Feigenbaum). *Le rapport $\delta_n = \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n}$ converge vers la constante universelle de Feigenbaum*

$$\delta_F = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 4,669\,201\,609 \dots$$

Cette constante est la même pour toute famille unimodale à maximum quadratique. Le facteur d'échelle spatial converge vers $\alpha_F = -2,502\,907\,875 \dots$

Régimes de l'application logistique

- $r \in [0, 1]$: convergence vers 0.
- $r \in (1, 3)$: convergence vers $x^* = 1 - 1/r$.
- $r \in (3, 1 + \sqrt{6})$: cycle stable de période 2.
- $r = r_\infty \approx 3,5699$: accumulation des doublements.
- $r \in (r_\infty, 4)$: mélange de chaos et fenêtres périodiques.
- $r = 4$: chaos développé sur $[0, 1]$.

10.3 Le théorème de Sharkovskii

Définition 10.5 (Ordre de Sharkovskii). L'ordre de Sharkovskii sur $\mathbb{N}^*$ est :

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 9 \triangleright \dots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \triangleright \dots \triangleright 4 \cdot 3 \triangleright 4 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright \dots \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1.$$

Théorème 10.6 (Sharkovskii, 1964). *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Si f a un point périodique de période m , alors f a des points périodiques de toute période n telle que $m \triangleright n$ dans l'ordre de Sharkovskii. De plus, pour tout m , il existe une application continue ayant un point de période m mais aucun point de période n avec $n \triangleright m$.*

Corollaire 10.7 (Période 3 implique toutes les périodes). *Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue a un point de période 3, alors f a des points périodiques de toute période $n \in \mathbb{N}^*$.*

Remarque 10.8. L'ordre de Sharkovskii ne s'applique qu'en dimension 1. En dimension 2, un difféomorphisme peut avoir un point de période 3 sans avoir de point fixe (rotation d'angle $2\pi/3$).

Lemme 10.9 (Lemme du graphe). *Soient I, J des intervalles fermés et f continue. Si $f(I) \supset J$, alors il existe un sous-intervalle $K \subset I$ tel que $f(K) = J$. En particulier, si $f(I) \supset I$, alors f a un point fixe dans I .*

10.4 Dynamique symbolique

Définition 10.10 (Espace des suites). Soit $\mathcal{A} = \{0, 1, \dots, k-1\}$ un alphabet de k symboles. L'espace des suites est $\Sigma_k = \mathcal{A}^{\mathbb{N}} = \{(s_0, s_1, s_2, \dots) : s_i \in \mathcal{A}\}$, muni de la métrique $d(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{k^i}$.

Définition 10.11 (Application de décalage (shift)). Le **shift** $\sigma : \Sigma_k \rightarrow \Sigma_k$ est défini par $\sigma(s_0, s_1, s_2, \dots) = (s_1, s_2, s_3, \dots)$.

Théorème 10.12 (Propriétés du shift). *Le shift σ sur Σ_k satisfait :*

1. σ est continue et surjective (mais non injective).
2. Les points périodiques de période n sont exactement les suites n -périodiques ; il y en a k^n .
3. Les points périodiques sont denses dans Σ_k .
4. σ est topologiquement transitive.
5. σ est chaotique au sens de Devaney.

Définition 10.13 (Sous-shift de type fini). Étant donnée une matrice de transition $A \in \{0, 1\}^{k \times k}$, le **sous-shift de type fini** est $\Sigma_A = \{s \in \Sigma_k : A_{s_i, s_{i+1}} = 1 \text{ pour tout } i\}$, et $\sigma_A = \sigma|_{\Sigma_A}$.

Proposition 10.14 (Codage des itérées). Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ unimodale avec point critique c . L'**itinéraire** de x est la suite $s(x) = (s_0, s_1, \dots)$ où $s_n = 0$ si $f^n(x) < c$ et $s_n = 1$ si $f^n(x) > c$. L'application $x \mapsto s(x)$ semi-conjugué f au shift sur un sous-espace de Σ_2 .

10.5 Entropie topologique

Définition 10.15 (Entropie topologique). Soit $f : X \rightarrow X$ une application continue sur un espace métrique compact. L'**entropie topologique** est

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln s(n, \epsilon, f),$$

où $s(n, \epsilon, f)$ est le nombre maximal de points (n, ϵ) -séparés : pour tous $x \neq y$ dans l'ensemble, $\max_{0 \leq k < n} d(f^k(x), f^k(y)) > \epsilon$. La limite est indépendante de $\epsilon > 0$ suffisamment petit.

Théorème 10.16 (Entropie du shift). *L'entropie topologique du shift σ sur Σ_k est $h_{\text{top}}(\sigma) = \ln k$. Pour le sous-shift de type fini σ_A , $h_{\text{top}}(\sigma_A) = \ln \rho(A)$, où $\rho(A)$ est le rayon spectral de A .*

Proposition 10.17 (Entropie de l'application logistique). Pour $f_4(x) = 4x(1 - x)$, l'entropie topologique est $h_{\text{top}}(f_4) = \ln 2$. Plus généralement, pour l'application de la tente de pente $s : h_{\text{top}} = \max(0, \ln s)$.

Théorème 10.18 (Inégalité variationnelle). *Pour toute application continue f sur un espace métrique compact :*

$$h_{\text{top}}(f) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_f} h_{\mu}(f),$$

où le supremum porte sur toutes les mesures de probabilité f -invariantes et $h_{\mu}(f)$ est l'entropie métrique.

Entropie et complexité

$h_{\text{top}} > 0$ implique que le nombre d'orbites distinguables croît exponentiellement avec le temps. C'est un indicateur de chaos plus robuste que l'exposant de Lyapunov maximal, car il est un invariant topologique (ne dépend pas de la métrique ni de la mesure).

10.6 Exemples avancés

Exemple 10.19 (Application en dents de scie (Bernoulli)). L'application $B_k(x) = kx \pmod{1}$ sur $[0, 1)$ est exactement conjuguée au shift sur Σ_k via le développement en base k . Son entropie est $\ln k$ et son exposant de Lyapunov est $\ln k$.

Exemple 10.20 (Ensemble de Julia quadratique). Pour $f_c(z) = z^2 + c$ avec $c \in \mathbb{C}$, l'ensemble de Julia $J_c = \partial\{z : f_c^n(z) \not\rightarrow \infty\}$ est soit connexe (si c est dans l'ensemble de Mandelbrot) soit totalement discontinu (un ensemble de Cantor). La dynamique sur J_c est riche en phénomènes chaotiques.

10.7 Exercices

Exercice 10.1 (Bifurcations logistiques). Pour l'application logistique $f_r(x) = rx(1-x)$, trouver analytiquement la valeur de r à laquelle le cycle de période 2 apparaît et les valeurs des points du cycle.

Exercice 10.2 (Sharkovskii). Construire une application continue $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ayant un point de période 6 mais aucun point de période 3. Montrer qu'elle a nécessairement des points de période 2.

Exercice 10.3 (Dynamique symbolique). Montrer que le shift sur Σ_2 est topologiquement mélangeant : pour tous ouverts U, V , il existe N tel que $\sigma^n(U) \cap V \neq \emptyset$ pour tout $n \geq N$.

Exercice 10.4 (Entropie). Calculer l'entropie topologique du sous-shift de type fini défini par la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (shift de Fibonacci). Montrer que $h_{\text{top}} = \ln \varphi$, où $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$.

Exercice 10.5 (Diagramme de bifurcation). Écrire un programme traçant le diagramme de bifurcation de l'application logistique pour $r \in [2, 5, 4]$. Identifier visuellement la cascade de doublements et les fenêtres périodiques (période 3, 5, 6, etc.).

Exercice 10.6 (Itinéraire de kneading). Déterminer l'itinéraire de kneading du point critique de f_r pour $r = 3,8$ et $r = 4$. En déduire quelles périodes sont forcées.

Chapitre 11

Introduction à la Théorie Ergodique

11.1 Introduction

La théorie ergodique étudie le comportement statistique des systèmes dynamiques à long terme. Elle répond à la question fondamentale : les moyennes temporelles coïncident-elles avec les moyennes spatiales ? Ce chapitre présente les transformations préservant la mesure, les théorèmes ergodiques fondamentaux et leurs applications.

Intuition

Considérons un gaz dans une boîte. Plutôt que de suivre chaque molécule, on mesure des grandeurs macroscopiques (température, pression) qui sont des moyennes. L'hypothèse ergodique de Boltzmann affirme que la moyenne temporelle d'une observable le long d'une trajectoire égale sa moyenne sur tout l'espace des phases. C'est le fondement de la mécanique statistique.

11.2 Transformations préservant la mesure

Définition 11.1 (Système dynamique mesuré). Un **système dynamique mesuré** est un quadruplet $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ où $(X, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace de probabilité et $T : X \rightarrow X$ est une transformation mesurable **préservant la mesure** : $\mu(T^{-1}(B)) = \mu(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}$.

Exemple 11.2 (Rotation irrationnelle du cercle). Soit $T_\alpha : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ définie par $T_\alpha(x) = x + \alpha \pmod{1}$ avec $\alpha \notin \mathbb{Q}$. La mesure de Lebesgue sur $[0, 1)$ est invariante par T_α .

Exemple 11.3 (Application de doublement). L'application $T(x) = 2x \pmod{1}$ sur $[0, 1)$ préserve la mesure de Lebesgue. C'est un endomorphisme (non inversible) avec entropie $\ln 2$.

Exemple 11.4 (Transformation du boulanger). La **transformation du boulanger** sur $[0, 1)^2$ est

$$B(x, y) = \begin{cases} (2x, y/2) & \text{si } 0 \leq x < 1/2, \\ (2x - 1, (y + 1)/2) & \text{si } 1/2 \leq x < 1. \end{cases}$$

Elle préserve la mesure de Lebesgue et modélise le pétrissage : étirement horizontal, compression verticale, puis repliement.

11.3 Ergodicité

Définition 11.5 (Ensemble invariant). Un ensemble $A \in \mathcal{B}$ est T -invariant si $T^{-1}(A) = A$ (modulo un ensemble de mesure nulle).

Définition 11.6 (Transformation ergodique). T est **ergodique** si tout ensemble T -invariant a mesure 0 ou 1. De manière équivalente, toute fonction mesurable T -invariante ($\varphi \circ T = \varphi$ p.p.) est constante p.p.

Théorème 11.7 (Ergodicité de la rotation irrationnelle). *La rotation T_α est ergodique par rapport à la mesure de Lebesgue si et seulement si α est irrationnel.*

Démonstration. Soit $\varphi \in L^2([0, 1])$ invariante : $\varphi(x + \alpha) = \varphi(x)$ p.p. En décomposant en série de Fourier $\varphi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n x}$, l'invariance donne $c_n e^{2\pi i n \alpha} = c_n$ pour tout n . Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, alors $e^{2\pi i n \alpha} \neq 1$ pour $n \neq 0$, donc $c_n = 0$ pour tout $n \neq 0$. Ainsi $\varphi = c_0$ est constante p.p. $\square$

11.4 Le théorème ergodique de Birkhoff

Théorème 11.8 (Birkhoff, 1931). *Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique mesuré et $\varphi \in L^1(X, \mu)$. Alors, pour μ -presque tout x :*

$$\bar{\varphi}(x) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \varphi(T^n(x))$$

existe et $\bar{\varphi}$ est T -invariante. De plus, $\int_X \bar{\varphi} d\mu = \int_X \varphi d\mu$.

Corollaire 11.9 (Cas ergodique). *Si T est ergodique, alors pour toute $\varphi \in L^1$ et μ -presque tout x :*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \varphi(T^n(x)) = \int_X \varphi d\mu.$$

La moyenne temporelle égale la moyenne spatiale.

Théorèmes ergodiques fondamentaux

- **Von Neumann (1932)** : convergence en norme L^2 de $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \varphi \circ T^n$ vers la projection sur les fonctions T -invariantes.
- **Birkhoff (1931)** : convergence presque sûre (plus fort).
- **Kingman (1968)** : théorème ergodique sous-additif pour les suites (a_n) avec $a_{m+n} \leq a_m + a_n \circ T^m$.

Exemple 11.10 (Équirépartition de Weyl). En appliquant Birkhoff à T_α avec $\varphi = \mathbb{1}_{[a,b]}$, on obtient le théorème de Weyl : pour $\alpha \notin \mathbb{Q}$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{0 \leq n < N : \{n\alpha\} \in [a, b]\}}{N} = b - a.$$

La suite $(n\alpha \bmod 1)_{n \geq 0}$ est équirépartie modulo 1.

11.5 Mélange

Définition 11.11 (Mélange faible et fort). T est **faiblement mélangeante** si pour tous $A, B \in \mathcal{B}$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\mu(T^{-n}(A) \cap B) - \mu(A)\mu(B)| = 0.$$

T est **(fortement) mélangeante** si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^{-n}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Proposition 11.12 (Implications).

$$\text{mélange fort} \implies \text{mélange faible} \implies \text{ergodicité}.$$

Aucune implication inverse n'est vraie en général.

Exemple 11.13. L'application de doublement $T(x) = 2x \pmod{1}$ et la transformation du boulanger sont fortement mélangeantes. La rotation irrationnelle est ergodique mais **non** mélangeante (même faiblement).

Théorème 11.14 (Caractérisation spectrale du mélange). T est fortement mélangeante si et seulement si pour tous $\varphi, \psi \in L^2(X, \mu)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (\varphi \circ T^n) \cdot \psi \, d\mu = \int_X \varphi \, d\mu \cdot \int_X \psi \, d\mu.$$

11.6 Décomposition ergodique

Théorème 11.15 (Décomposition ergodique). Soit $T : X \rightarrow X$ préservant μ sur un espace de probabilité standard. Alors il existe une décomposition (essentiellement unique)

$$\mu = \int_Y \mu_y \, d\nu(y)$$

où ν est une mesure de probabilité sur un espace mesurable Y et chaque μ_y est une mesure de probabilité T -invariante et **ergodique**.

Remarque 11.16. La décomposition ergodique signifie que tout système dynamique mesuré peut être décomposé en « composantes ergodiques » irréductibles. C'est l'analogue de la décomposition d'un espace de Hilbert en sous-espaces irréductibles.

11.7 Entropie métrique

Définition 11.17 (Entropie de Kolmogorov-Sinai). Soit $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$ une partition mesurable de X . L'**entropie** de $\mathcal{P}$ est $H(\mathcal{P}) = -\sum_{i=1}^k \mu(P_i) \ln \mu(P_i)$. L'**entropie métrique** de T par rapport à $\mathcal{P}$ est

$$h_\mu(T, \mathcal{P}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}\mathcal{P}\right),$$

et l'**entropie de Kolmogorov-Sinai** est $h_\mu(T) = \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(T, \mathcal{P})$.

Théorème 11.18 (Kolmogorov-Sinai). Si $\mathcal{P}$ est une partition génératrice (i.e., $\bigvee_{n=0}^{\infty} T^{-n}\mathcal{P}$ engendre $\mathcal{B}$ modulo les ensembles de mesure nulle), alors $h_\mu(T) = h_\mu(T, \mathcal{P})$.

11.8 Applications à la théorie des nombres

Exemple 11.19 (Fractions continues et transformation de Gauss). La **transformation de Gauss** $G : (0, 1] \rightarrow [0, 1]$ définie par $G(x) = \{1/x\}$ (partie fractionnaire de $1/x$) encode l'algorithme des fractions continues. La mesure de Gauss $d\mu_G = \frac{1}{\ln 2} \frac{dx}{1+x}$ est G -invariante et ergodique.

Corollaire 11.20 (Théorème de Khintchine). *Pour presque tout réel $x \in (0, 1)$ dont le développement en fraction continue est $x = [a_1, a_2, \dots]$:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right)^{\ln k / \ln 2} \approx 2,685 \dots$$

(constante de Khintchine).

Exemple 11.21 (Théorème de Lévy). Par le théorème ergodique appliqué à G :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln q_n = \frac{\pi^2}{12 \ln 2} \approx 1,1866 \dots$$

où q_n est le dénominateur du n -ème convergent. Ce résultat donne le taux d'approximation typique par les fractions continues.

11.9 Exercices

Exercice 11.1 (Ergodicité). Montrer que la transformation du boulanger est ergodique en utilisant les coefficients de Fourier.

Exercice 11.2 (Théorème de récurrence de Poincaré). Démontrer que si T préserve μ et $\mu(A) > 0$, alors pour μ -presque tout $x \in A$, il existe $n \geq 1$ tel que $T^n(x) \in A$.

Exercice 11.3 (Mélange de l'application de doublement). Montrer que $T(x) = 2x \pmod{1}$ est fortement mélangeante en utilisant la caractérisation spectrale avec les fonctions $e^{2\pi i k x}$.

Exercice 11.4 (Entropie). Calculer l'entropie métrique de la transformation de Gauss $G(x) = \{1/x\}$ par rapport à la mesure de Gauss. (Réponse : $h_{\mu_G}(G) = \pi^2/(6 \ln 2)$.)

Exercice 11.5 (Équirépartition). Utiliser le théorème de Birkhoff pour montrer que la suite $(\sin(n) \bmod 1)_{n \geq 1}$ n'est pas nécessairement équirépartie et discuter les conditions sur α pour que $(n^\alpha \bmod 1)$ le soit.

Exercice 11.6 (Transformation de Gauss). Vérifier numériquement la constante de Khintchine en calculant la moyenne géométrique des coefficients de la fraction continue de nombres aléatoires.

Bibliographie

- [1] Strogatz, S.H., *Nonlinear Dynamics and Chaos*, 2nd ed., Westview, 2015.
- [2] Guckenheimer, J. and Holmes, P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, 1983.
- [3] Wiggins, S., *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, 2nd ed., Springer, 2003.
- [4] Arnold, V.I., *Ordinary Differential Equations*, 3rd ed., Springer, 1992.
- [5] Devaney, R.L., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, 3rd ed., CRC Press, 2022.