

Processus Stochastiques

Notes de Cours

Master M1 — 2025–2026

Yaë Ulrich Gaba

« Le hasard ne favorise que les esprits préparés. »

— Louis Pasteur

Table des matières

Préface	1
1 Rappels de Probabilités	5
1.1 Espaces de probabilité	5
1.2 Variables aléatoires	6
1.3 Espérance et intégration	6
1.4 Espaces L^p et inégalités	7
1.5 Espérance conditionnelle	7
1.6 Indépendance	8
1.7 Modes de convergence	8
1.8 Lois des grands nombres	9
1.9 Lemme de Borel–Cantelli	9
1.10 Fonctions caractéristiques	9
1.11 Exercices	10
2 Processus Stochastiques — Définitions	11
2.1 Définition d’un processus stochastique	11
2.2 Classification des processus	11
2.3 Filtrations	12
2.4 Processus adaptés et prévisibles	13
2.5 Temps d’arrêt	13
2.6 Lois de dimension finie	14
2.7 Théorème de Kolmogorov–Čentsov	14
2.8 Processus gaussiens	14
2.9 Stationnarité et ergodicité	15
2.10 Exercices	15
3 Chaînes de Markov à Temps Discret	17
3.1 Propriété de Markov	17
3.2 Propriété de Markov forte	18
3.3 Classification des états	18
3.4 Mesures stationnaires	19
3.5 Théorème ergodique	19
3.6 Réversibilité	20
3.7 Exemples fondamentaux	20
3.8 Temps d’atteinte et problème de la ruine du joueur	20
3.9 Exercices	21

4	Chaînes de Markov à Temps Continu	23
4.1	Définition et propriété de Markov	23
4.2	Générateur infinitésimal	23
4.3	Équations de Kolmogorov	24
4.4	Mesures stationnaires et convergence	25
4.5	Processus de naissance et de mort	25
4.6	Explosion et régularité	25
4.7	Propriété de Markov forte	26
4.8	Réversibilité en temps continu	26
4.9	Exercices	26
5	Processus de Poisson	27
5.1	Définition axiomatique	27
5.2	Propriétés fondamentales	28
5.3	Construction comme CMTC	28
5.4	Propriété de Markov et absence de mémoire	28
5.5	Opérations sur le processus de Poisson	28
5.5.1	Superposition	28
5.5.2	Amécissage (thinning)	29
5.5.3	Statistiques d'ordre	29
5.6	Processus de Poisson composé	29
5.7	Processus de Poisson non homogène	29
5.8	Processus de Poisson comme martingale	30
5.9	Exercices	30
6	Martingales — Temps Discret	31
6.1	Définitions	31
6.2	Transformée de martingale	32
6.3	Inégalités fondamentales	32
6.4	Décomposition de Doob	32
6.5	Théorèmes de convergence	33
6.6	Théorème d'arrêt optionnel	33
6.7	Applications	34
6.7.1	Ruine du joueur revisitée	34
6.7.2	Loi du logarithme itéré — premier pas	34
6.8	Crochet prévisible	34
6.9	Exercices	34
7	Martingales — Temps Continu	37
7.1	Définitions	37
7.2	Régularité des trajectoires	37
7.3	Inégalités de Doob en temps continu	38
7.4	Variation quadratique	38
7.5	Décomposition de Doob–Meyer	39
7.6	Théorèmes d'arrêt en temps continu	39
7.7	Représentation des martingales	39
7.8	Théorème de Girsanov	40
7.9	Convergence en temps continu	40
7.10	Exercices	40

8	Mouvement Brownien	41
8.1	Définition	41
8.2	Existence : construction de Lévy–Ciesielski	42
8.3	Propriétés fondamentales	43
8.4	Régularité des trajectoires	44
8.5	Loi du logarithme itéré	45
8.6	Principe de réflexion et loi du maximum	45
8.7	Mouvement brownien et équations aux dérivées partielles	46
8.8	Temps locaux	47
8.9	Exercices	47
9	Intégrale Stochastique d'Itô	49
9.1	Motivation	49
9.2	Construction pour les processus étagés	49
9.3	Extension aux processus L^2	50
9.4	Propriétés de l'intégrale d'Itô	51
9.5	Extension aux intégrandes localement L^2	51
9.6	Intégrale de Stratonovich	51
9.7	Exemples de calcul	52
9.8	Exercices	52
10	Calcul d'Itô et Équations Différentielles Stochastiques	53
10.1	Construction de l'intégrale d'Itô	53
10.2	Formule d'Itô	54
10.3	Équations différentielles stochastiques	55
10.4	Mouvement brownien géométrique	56
10.5	Processus d'Ornstein–Uhlenbeck	56
10.6	Équation de Langevin	57
11	Applications	59
11.1	Formule de Black–Scholes	59
11.2	Théorème de Feynman–Kac	60
11.3	Filtrage de Kalman	61
11.4	Applications en biologie	61
11.5	Méthodes de Monte Carlo pour les EDS	62

Préface

Objectifs du cours

Ce cours de **Processus Stochastiques** s'adresse aux étudiants de niveau Master en mathématiques, physique théorique, finance quantitative et sciences de l'ingénieur. Il vise à fournir une présentation rigoureuse, fondée sur la théorie de la mesure, des principaux processus aléatoires et de leurs applications.

L'objectif principal est de conduire l'étudiant depuis les rappels de probabilités jusqu'à la construction de l'intégrale stochastique d'Itô et à la résolution d'équations différentielles stochastiques (EDS), en passant par l'étude approfondie des chaînes de Markov, du processus de Poisson, des martingales et du mouvement brownien.

À l'issue de ce cours, l'étudiant sera capable de :

- Maîtriser le formalisme mesure-théorique des processus stochastiques.
- Analyser les chaînes de Markov en temps discret et continu : classifier les états, calculer les distributions stationnaires, établir l'ergodicité.
- Manipuler les martingales : appliquer les inégalités fondamentales, les théorèmes de convergence et le théorème d'arrêt optionnel.
- Comprendre les propriétés fines du mouvement brownien.
- Construire l'intégrale stochastique d'Itô et appliquer la formule d'Itô.
- Résoudre des équations différentielles stochastiques et les appliquer en finance, en physique et en biologie.

Prérequis

Les prérequis essentiels sont :

- **Théorie de la mesure et intégration** : tribus, mesures, intégrale de Lebesgue, théorèmes de convergence (dominée, monotone), espaces L^p .
- **Probabilités de niveau licence** : variables aléatoires, espérance, variance, loi des grands nombres, théorème central limite.
- **Analyse fonctionnelle élémentaire** : espaces de Banach et de Hilbert, convergences, complétude.
- **Algèbre linéaire** : matrices, valeurs propres, décomposition spectrale.

- **Équations différentielles ordinaires** : théorèmes d'existence et d'unicité, méthodes de résolution.

Organisation du cours

Le cours est organisé en onze chapitres, suivant une progression logique :

1. **Rappels de probabilités** : espace de probabilité, espérance conditionnelle, modes de convergence. Ce chapitre fournit les fondations mesure-théoriques nécessaires à la suite du cours.
2. **Processus stochastiques — Définitions** : définition formelle d'un processus stochastique, filtrations, temps d'arrêt, processus adaptés et prévisibles. Ces notions constituent le langage de base.
3. **Chaînes de Markov en temps discret** : propriété de Markov, classification des états, théorèmes ergodiques, mesures stationnaires.
4. **Chaînes de Markov en temps continu** : générateur infinitésimal, équations de Kolmogorov, processus de naissance et de mort.
5. **Processus de Poisson** : construction axiomatique, propriétés fondamentales, processus de Poisson composé et non homogène.
6. **Martingales en temps discret** : définition, inégalités fondamentales (Doob), théorèmes de convergence, théorème d'arrêt optionnel.
7. **Martingales en temps continu** : régularité des trajectoires, décomposition de Doob–Meyer, martingales locales.
8. **Mouvement brownien** : construction (Lévy–Ciesielski), propriétés des trajectoires, non-dérivabilité, loi du logarithme itéré, principe de réflexion.
9. **Intégrale stochastique d'Itô** : construction par processus étagés, extension isométrique aux processus L^2 , propriétés de martingale.
10. **Formule d'Itô et EDS** : formule de changement de variables d'Itô, formule d'Itô multidimensionnelle, existence et unicité des solutions fortes.
11. **Applications** : finance (modèle de Black–Scholes, couverture), physique (équation de Langevin, diffusion), biologie (modèles de population stochastiques).

Conventions et notations

Tout au long de ce cours, nous adoptons les conventions suivantes :

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace de probabilité fixé.
- $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ ou $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$ désigne une filtration satisfaisant les conditions habituelles (complétude, continuité à droite).
- $\mathbb{E}[X]$ désigne l'espérance de la variable aléatoire X .

- $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ désigne l'espérance conditionnelle de X sachant la tribu $\mathcal{G}$.
- $\mathbb{P}(A)$ désigne la probabilité de l'événement A .
- $\text{Var}(X)$ et $\text{Cov}(X, Y)$ désignent la variance et la covariance.
- $\mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{C}$ désignent les ensembles des réels, naturels, entiers et complexes. On note $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$.
- $\|\cdot\|$ et $|\cdot|$ désignent respectivement une norme et la valeur absolue.
- $\mathbf{1}_A$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble A .
- p.s. signifie « presque sûrement », v.a. « variable aléatoire », EDS « équation différentielle stochastique ».
- $\xrightarrow{\text{p.s.}}, \xrightarrow{L^p}, \xrightarrow{\mathbb{P}}, \xrightarrow{\mathcal{L}}$ désignent les convergences presque sûre, dans L^p , en probabilité et en loi.

Approche pédagogique

Chaque chapitre contient :

- Des **définitions** précises dans le cadre de la théorie de la mesure.
- Des **théorèmes** avec démonstrations complètes ou esquissées.
- Des **exemples** détaillés pour illustrer les concepts abstraits.
- Des **exercices** de difficulté variée, certains avec indications.
- Des encadrés « Intuition » pour développer l'intuition probabiliste.
- Des encadrés « Attention » pour signaler les pièges classiques.
- Des encadrés « Formules clés » récapitulant les résultats essentiels.

Références bibliographiques

Les ouvrages suivants ont inspiré ce cours :

- BRÉMAUD, P. *Markov Chains : Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation and Queues*. Springer, 1999.
- DURRETT, R. *Probability : Theory and Examples*. Cambridge University Press, 5ème éd., 2019.
- KARATZAS, I. et SHREVE, S.E. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, 2ème éd., 1991.
- LE GALL, J.-F. *Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique*. Springer, 2013.

- NORRIS, J.R. *Markov Chains*. Cambridge University Press, 1997.
- ØKSENDAL, B. *Stochastic Differential Equations*. Springer, 6ème éd., 2003.
- REVUZ, D. et YOR, M. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer, 3ème éd., 1999.
- SHREVE, S.E. *Stochastic Calculus for Finance I & II*. Springer, 2004.
- WILLIAMS, D. *Probability with Martingales*. Cambridge University Press, 1991.

Remerciements

L'auteur remercie les collègues et étudiants qui, par leurs remarques et suggestions, ont contribué à améliorer ce cours au fil des années. Les discussions avec les praticiens de la finance quantitative et les physiciens ont également enrichi la présentation des applications.

L'auteur
Mars 2026

Chapitre 1

Rappels de Probabilités

Avant de plonger dans l'étude des processus stochastiques — ces fonctions aléatoires qui évoluent dans le temps — il est indispensable de s'assurer que nos fondations probabilistes sont solides. Ce chapitre rappelle les outils essentiels : espaces de probabilité, variables aléatoires, espérance conditionnelle et convergences. Si le lecteur maîtrise déjà ces notions, il peut parcourir ce chapitre rapidement en guise de référence ; sinon, c'est ici que tout commence.

1.1 Espaces de probabilité

Rappelons les trois ingrédients fondamentaux de la théorie de Kolmogorov.

Définition 1.1 (Tribu). Soit Ω un ensemble non vide. Une *tribu* (ou σ -algèbre) $\mathcal{F}$ sur Ω est une collection de sous-ensembles de Ω vérifiant :

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,
2. si $A \in \mathcal{F}$, alors $A^c \in \mathcal{F}$ (stabilité par complémentation),
3. si $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}$, alors $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ (stabilité par union dénombrable).

Le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ est appelé *espace mesurable*.

Définition 1.2 (Espace de probabilité). Un *espace de probabilité* est un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où :

- Ω est l'*univers* (ensemble de tous les résultats possibles),
- $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω (les événements),
- $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ est une *mesure de probabilité*, c'est-à-dire une mesure σ -additive avec $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Remarque 1.3. La σ -additivité de $\mathbb{P}$ signifie : pour toute suite $(A_n)_{n \geq 1}$ d'événements deux à deux disjoints,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Définition 1.4 (Tribu engendrée). Soit $\mathcal{C}$ une collection de sous-ensembles de Ω . La *tribu engendrée* par $\mathcal{C}$, notée $\sigma(\mathcal{C})$, est la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$:

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap \{ \mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ tribu sur } \Omega, \mathcal{C} \subset \mathcal{F} \}.$$

En particulier, la *tribu borélienne* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est σ -algèbre engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}$.

1.2 Variables aléatoires

Définition 1.5 (Variable aléatoire). Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Une *variable aléatoire* (v.a.) est une application mesurable $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, c'est-à-dire :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad X^{-1}(B) = \{ \omega \in \Omega : X(\omega) \in B \} \in \mathcal{F}.$$

Plus généralement, un *vecteur aléatoire* est une application mesurable $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

Définition 1.6 (Tribu engendrée par une v.a.). La tribu engendrée par une variable aléatoire X est

$$\sigma(X) = \{ X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \}.$$

C'est la plus petite tribu rendant X mesurable. Intuitivement, $\sigma(X)$ représente l'*information* contenue dans l'observation de X .

Théorème 1.7 (Lemme de Doob). Soit X une variable aléatoire et $\mathcal{G} = \sigma(X)$. Une variable aléatoire Y est $\mathcal{G}$ -mesurable si et seulement s'il existe une fonction borélienne $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $Y = g(X)$.

1.3 Espérance et intégration

Définition 1.8 (Espérance). L'*espérance* d'une variable aléatoire $X \geq 0$ est

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

Pour une v.a. générale, $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X^+] - \mathbb{E}[X^-]$ lorsque l'une au moins des deux quantités est finie, où $X^+ = \max(X, 0)$ et $X^- = \max(-X, 0)$. On dit que X est *intégrable* si $\mathbb{E}[|X|] < \infty$.

Théorème 1.9 (Convergence dominée de Lebesgue). Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. convergeant p.s. vers X . S'il existe une v.a. intégrable Y telle que $|X_n| \leq Y$ p.s. pour tout n , alors X est intégrable et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X].$$

Théorème 1.10 (Convergence monotone). Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante de v.a. positives : $0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \dots$ p.s. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n].$$

Théorème 1.11 (Lemme de Fatou). Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. positives. Alors

$$\mathbb{E}[\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n].$$

1.4 Espaces L^p et inégalités

Définition 1.12 (Espace L^p). Pour $p \in [1, \infty)$, l'espace $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est l'ensemble des (classes de) v.a. X telles que $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$, muni de la norme

$$\|X\|_{L^p} = (\mathbb{E}[|X|^p])^{1/p}.$$

L'espace L^∞ est l'ensemble des v.a. essentiellement bornées.

Théorème 1.13 (Inégalité de Hölder). Soient $p, q \in (1, \infty)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour $X \in L^p$ et $Y \in L^q$,

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \|X\|_{L^p} \|Y\|_{L^q}.$$

Le cas $p = q = 2$ donne l'inégalité de Cauchy–Schwarz.

Théorème 1.14 (Inégalité de Jensen). Si X est intégrable et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe, alors

$$\varphi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)],$$

pourvu que $\mathbb{E}[|\varphi(X)|] < \infty$.

1.5 Espérance conditionnelle

Définition 1.15 (Espérance conditionnelle). Soit $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ une sous-tribu. L'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$, notée $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$, est l'unique (p.s.) variable aléatoire vérifiant :

1. $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ est $\mathcal{G}$ -mesurable,
2. pour tout $G \in \mathcal{G}$, $\int_G \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] d\mathbb{P} = \int_G X d\mathbb{P}$.

L'existence est garantie par le théorème de Radon–Nikodym.

Théorème 1.16 (Propriétés de l'espérance conditionnelle). Soient $X, Y \in L^1$ et $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ des sous-tribus de $\mathcal{F}$.

1. **Linéarité** : $\mathbb{E}[aX + bY \mid \mathcal{G}] = a\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] + b\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}]$ p.s.
2. **Positivité** : si $X \geq 0$ p.s., alors $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \geq 0$ p.s.
3. **Tour de Babel (lissage)** : si $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, alors $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \mid \mathcal{H}] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{H}]$ p.s.
4. **Factorisation** : si Y est $\mathcal{G}$ -mesurable et bornée, $\mathbb{E}[XY \mid \mathcal{G}] = Y\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ p.s.
5. **Indépendance** : si $\sigma(X)$ et $\mathcal{G}$ sont indépendantes, $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$ p.s.
6. **Jensen conditionnel** : si φ est convexe et $\varphi(X) \in L^1$, $\varphi(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X) \mid \mathcal{G}]$ p.s.

Interprétation géométrique

Dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$ est la *projection orthogonale* de X sur le sous-espace fermé $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$. Cela justifie la propriété :

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X | \mathcal{G}])^2] \leq \mathbb{E}[(X - Z)^2]$$

pour tout $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$.

1.6 Indépendance

Définition 1.17 (Indépendance de tribus). Des sous-tribus $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n$ de $\mathcal{F}$ sont *indépendantes* si pour tout choix $A_i \in \mathcal{G}_i$:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \dots \mathbb{P}(A_n).$$

Des v.a. $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si les tribus $\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_n)$ sont indépendantes.

Définition 1.18 (Indépendance mutuelle). Une famille $(X_i)_{i \in I}$ de v.a. est *mutuellement indépendante* si pour tout sous-ensemble fini $J \subset I$, les v.a. $(X_j)_{j \in J}$ sont indépendantes.

Théorème 1.19 (Loi 0–1 de Kolmogorov). Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes. La tribu terminale (ou queue)

$$\mathcal{T} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$$

est triviale : pour tout $A \in \mathcal{T}$, $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.

1.7 Modes de convergence

Définition 1.20 (Convergences). Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. et X une v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. **Convergence presque sûre** : $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X$ si $\mathbb{P}(\{\omega : X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)\}) = 1$.
2. **Convergence dans L^p** : $X_n \xrightarrow{L^p} X$ si $\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \rightarrow 0$.
3. **Convergence en probabilité** : $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ si pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \rightarrow 0$.
4. **Convergence en loi** : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si $\mathbb{E}[f(X_n)] \rightarrow \mathbb{E}[f(X)]$ pour toute $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée.

Hiérarchie des convergences

$$\text{p.s.} \implies \text{en probabilité} \implies \text{en loi}$$

$$L^p \implies L^q \ (q \leq p) \implies \text{en probabilité} \implies \text{en loi}$$

Les réciproques sont fausses en général. Cependant :

- $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \implies$ il existe une sous-suite $X_{n_k} \xrightarrow{\text{p.s.}} X$.
- Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c$ (constante), alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$.

1.8 Loïs des grands nombres

Théorème 1.21 (Loi forte des grands nombres). Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. intégrables, de moyenne $\mu = \mathbb{E}[X_1]$. Alors

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{\text{p.s.}} \mu.$$

Théorème 1.22 (Théorème central limite). Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. avec $\mathbb{E}[X_1] = \mu$ et $\text{Var}(X_1) = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Alors

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{X_k - \mu}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

1.9 Lemme de Borel–Cantelli

Théorème 1.23 (Lemme de Borel–Cantelli). Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'événements.

1. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, alors $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$, c'est-à-dire p.s. un nombre fini de A_n se réalisent.
2. Si les A_n sont indépendants et $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$, alors $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 1$, c'est-à-dire p.s. une infinité de A_n se réalisent.

Hypothèse d'indépendance

La seconde partie du lemme de Borel–Cantelli nécessite l'indépendance des événements. Sans cette hypothèse, la divergence de la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ ne suffit pas à garantir $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$.

1.10 Fonctions caractéristiques

Définition 1.24 (Fonction caractéristique). La fonction caractéristique d'une v.a. X est

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Proposition 1.25 (Propriétés). 1. $\varphi_X(0) = 1$ et $|\varphi_X(t)| \leq 1$ pour tout t .

2. φ_X est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
3. φ_X caractérise la loi de X : si $\varphi_X = \varphi_Y$, alors $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y$.
4. Si X et Y sont indépendantes, $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$.
5. Si $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$, $\varphi_X^{(n)}(0) = i^n \mathbb{E}[X^n]$.

Théorème 1.26 (Théorème de continuité de Lévy). $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si et seulement si $\varphi_{X_n}(t) \rightarrow \varphi_X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1.11 Exercices

Exercice 1.1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et X une v.a. positive. Montrer que $\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t) dt$.

Exercice 1.2. Montrer que la convergence p.s. n'implique pas la convergence L^1 en construisant un contre-exemple.

Exercice 1.3. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes avec $\mathbb{P}(X_n = n) = 1/n$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - 1/n$. Montrer que $X_n \rightarrow 0$ p.s.

Exercice 1.4. Démontrer la propriété de lissage de l'espérance conditionnelle (théorème 1.16, point 3).

Exercice 1.5. Soit X une v.a. intégrable et $\mathcal{G}_n \uparrow \mathcal{G}_\infty$ une filtration croissante de sous-tribus. Montrer que $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}_n] \rightarrow \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}_\infty]$ p.s. et dans L^1 . (*C'est le théorème de convergence des martingales de Lévy.*)

Chapitre 2

Processus Stochastiques — Définitions

Qu'est-ce qu'un processus stochastique ? Intuitivement, c'est une quantité aléatoire qui évolue dans le temps : le cours d'une action, la position d'une particule, le nombre de clients dans une file d'attente. Mais formellement, c'est un objet mathématique bien plus riche qu'une simple variable aléatoire : c'est une *famille* de variables aléatoires indexées par le temps, et l'on peut l'étudier soit « à temps fixé » (les lois fini-dimensionnelles), soit « à événement fixé » (les trajectoires). Ce double point de vue est au cœur de toute la théorie.

2.1 Définition d'un processus stochastique

Définition 2.1 (Processus stochastique). Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et T un ensemble d'indices (typiquement $T = \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$ ou $\mathbb{R}_+$). Un *processus stochastique* à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ est une famille de v.a.

$$X = (X_t)_{t \in T}, \quad X_t : \Omega \rightarrow E,$$

où chaque X_t est $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ -mesurable.

De manière équivalente, X est une application mesurable $X : (T \times \Omega, \mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{F}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ (lorsque la mesurabilité jointe est requise).

Définition 2.2 (Trajectoire). Pour $\omega \in \Omega$ fixé, l'application $t \mapsto X_t(\omega)$ est appelée la *trajectoire* (ou *réalisation*, ou *chemin d'échantillon*) du processus associée à ω .

Exemple 2.3. 1. **Marche aléatoire simple** : soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. avec $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(Y_n = -1) = 1/2$. Le processus $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ pour $n \geq 0$ (avec $S_0 = 0$) est un processus stochastique à temps discret et à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

2. **Processus de Poisson** : $N = (N_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, à trajectoires croissantes et càdlàg.

3. **Mouvement brownien** : $B = (B_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, à trajectoires continues.

2.2 Classification des processus

Définition 2.4 (Temps discret vs. continu). • Un processus est à *temps discret* si T est dénombrable (par exemple $T = \mathbb{N}$ ou $T = \mathbb{Z}$).

- Un processus est à *temps continu* si T est un intervalle de $\mathbb{R}$ (par exemple $T = \mathbb{R}_+$ ou $T = [0, T_0]$).

Définition 2.5 (Espace d'états). L'espace $(E, \mathcal{E})$ est appelé l'*espace d'états* du processus.

- Si E est dénombrable (fini ou infini), on parle de processus à *espace d'états discret*.
- Si $E = \mathbb{R}^d$, on parle de processus à *espace d'états continu*.

Définition 2.6 (Régularité des trajectoires). Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs réelles est dit :

- *continu* si p.s. $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue,
- *càdlàg* (continu à droite avec limites à gauche) si p.s. pour tout t , $X_t = X_{t+}$ et X_{t-} existe,
- *càglàd* (continu à gauche avec limites à droite) si p.s. $X_t = X_{t-}$ et X_{t+} existe.

2.3 Filtrations

Définition 2.7 (Filtration). Une *filtration* sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille croissante de sous-tribus $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$:

$$s \leq t \implies \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}.$$

L'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est appelé *espace de probabilité filtré*.

Information croissante

La filtration modélise l'*information disponible au cours du temps*. La tribu $\mathcal{F}_t$ représente l'ensemble des événements que l'on peut observer (décider s'ils sont réalisés ou non) à l'instant t . La croissance de la filtration traduit le fait que l'information ne se perd pas : ce qu'on sait à l'instant s reste connu à l'instant $t > s$.

Définition 2.8 (Filtration naturelle). La *filtration naturelle* (ou *filtration engendrée*) par un processus $(X_t)_{t \in T}$ est

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s : s \leq t), \quad t \in T.$$

C'est la plus petite filtration par rapport à laquelle (X_t) est adapté.

Définition 2.9 (Conditions habituelles). Une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ satisfait les *conditions habituelles* (de Dellacherie–Meyer) si :

1. **Complétude** : $\mathcal{F}_0$ contient tous les ensembles $\mathbb{P}$ -négligeables de $\mathcal{F}$.
2. **Continuité à droite** : pour tout $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s$.

Remarque 2.10. On peut toujours « compléter » et « régulariser » une filtration. Soit $\mathcal{N}$ la collection des ensembles $\mathbb{P}$ -négligeables. On définit

$$\overline{\mathcal{F}}_t = \sigma(\mathcal{F}_t \cup \mathcal{N}), \quad \widehat{\mathcal{F}}_t = \bigcap_{s > t} \overline{\mathcal{F}}_s.$$

La filtration $(\widehat{\mathcal{F}}_t)$ satisfait les conditions habituelles.

2.4 Processus adaptés et prévisibles

Définition 2.11 (Processus adapté). Un processus $(X_t)_{t \in T}$ est dit *adapté* à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ si pour tout $t \in T$, la variable X_t est $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

Définition 2.12 (Processus prévisible — temps discret). En temps discret, un processus $(X_n)_{n \geq 0}$ est *prévisible* par rapport à $(\mathcal{F}_n)$ si X_0 est déterministe (ou $\mathcal{F}_0$ -mesurable) et X_n est $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurable pour tout $n \geq 1$.

Définition 2.13 (Tribu prévisible — temps continu). En temps continu, la *tribu prévisible* $\mathcal{P}$ sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ est engendrée par les ensembles de la forme $(s, t] \times F$ avec $0 \leq s < t$ et $F \in \mathcal{F}_s$, et les ensembles $\{0\} \times F_0$ avec $F_0 \in \mathcal{F}_0$.

Un processus est *prévisible* s'il est mesurable par rapport à $\mathcal{P}$.

Remarque 2.14. Tout processus adapté continu à gauche est prévisible. Tout processus prévisible est adapté. En revanche, un processus adapté càdlàg n'est pas nécessairement prévisible.

2.5 Temps d'arrêt

Définition 2.15 (Temps d'arrêt). Soit $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ une filtration. Une v.a. $\tau : \Omega \rightarrow T \cup \{+\infty\}$ est un *temps d'arrêt* (ou *temps de Markov*) si :

- En temps discret ($T = \mathbb{N}$) : $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- En temps continu ($T = \mathbb{R}_+$) : $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ pour tout $t \geq 0$.

Remarque 2.16. En temps discret, la condition $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ est équivalente à $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$. En temps continu, si la filtration est continue à droite, la condition $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ est équivalente.

Exemple 2.17. 1. Toute constante $\tau = t_0$ est un temps d'arrêt.

2. Le *temps de premier passage* $\tau_a = \inf\{t \geq 0 : X_t = a\}$ est un temps d'arrêt si le processus (X_t) est adapté et a des trajectoires continues (ou càdlàg sous les conditions habituelles).
3. Le *temps de premier entrée* dans un ouvert G : $\tau_G = \inf\{t \geq 0 : X_t \in G\}$ est un temps d'arrêt sous les conditions habituelles.

Définition 2.18 (Tribu des événements antérieurs à τ). Si τ est un temps d'arrêt, la *tribu des événements antérieurs à τ* est

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : \forall t \in T, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

Proposition 2.19 (Propriétés des temps d'arrêt). Soient σ, τ des temps d'arrêt.

1. $\sigma \wedge \tau = \min(\sigma, \tau)$ et $\sigma \vee \tau = \max(\sigma, \tau)$ sont des temps d'arrêt.
2. Si $\sigma \leq \tau$ p.s., alors $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$.
3. En temps discret, $\tau + 1$ est un temps d'arrêt.
4. $\{\sigma \leq \tau\}$, $\{\sigma < \tau\}$, $\{\sigma = \tau\}$ appartiennent à $\mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$.

Définition 2.20 (Processus arrêté). Le *processus arrêté* au temps d'arrêt τ est

$$X_t^\tau = X_{t \wedge \tau} = X_{\min(t, \tau)}, \quad t \in T.$$

2.6 Lois de dimension finie

Définition 2.21 (Lois de dimension finie). Les *lois de dimension finie* (ou *distributions fini-dimensionnelles*) d'un processus $(X_t)_{t \in T}$ sont les lois des vecteurs aléatoires $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ pour tout choix $t_1 < \dots < t_n$ dans T et tout $n \geq 1$.

Théorème 2.22 (Théorème d'extension de Kolmogorov). *Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace polonais. Soit $(\mu_{t_1, \dots, t_n})$ une famille de mesures de probabilité sur $(E^n, \mathcal{E}^{\otimes n})$ satisfaisant les conditions de cohérence :*

1. **Invariance par permutation** : pour toute permutation π de $\{1, \dots, n\}$,

$$\mu_{t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(n)}}(B_{\pi(1)} \times \dots \times B_{\pi(n)}) = \mu_{t_1, \dots, t_n}(B_1 \times \dots \times B_n).$$

2. **Marginalisation** : $\mu_{t_1, \dots, t_n}(B_1 \times \dots \times B_n \times E) = \mu_{t_1, \dots, t_n}(B_1 \times \dots \times B_n)$.

Alors il existe un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et un processus $(X_t)_{t \in T}$ sur cet espace dont les lois fini-dimensionnelles sont les $(\mu_{t_1, \dots, t_n})$.

Limites du théorème de Kolmogorov

Le théorème de Kolmogorov garantit l'existence d'un processus avec les bonnes lois fini-dimensionnelles, mais *pas* la régularité des trajectoires. Des propriétés comme la continuité des trajectoires nécessitent des résultats supplémentaires (par exemple le théorème de Kolmogorov–Čentsov).

2.7 Théorème de Kolmogorov–Čentsov

Théorème 2.23 (Kolmogorov–Čentsov). *Soit $(X_t)_{t \in [0, T]}$ un processus stochastique à valeurs réelles. S'il existe des constantes $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $C > 0$ telles que*

$$\mathbb{E}[|X_t - X_s|^\alpha] \leq C |t - s|^{1+\beta}, \quad \forall s, t \in [0, T],$$

alors il existe une modification $(\tilde{X}_t)$ de (X_t) dont les trajectoires sont p.s. höldériennes d'exposant γ pour tout $\gamma < \beta/\alpha$.

Remarque 2.24. Rappelons qu'une *modification* de (X_t) est un processus $(\tilde{X}_t)$ défini sur le même espace de probabilité tel que $\mathbb{P}(X_t = \tilde{X}_t) = 1$ pour tout t .

2.8 Processus gaussiens

Définition 2.25 (Processus gaussien). Un processus $(X_t)_{t \in T}$ est *gaussien* si pour tout choix $t_1, \dots, t_n \in T$, le vecteur $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ suit une loi gaussienne multivariée.

Un processus gaussien est entièrement déterminé par sa *fonction moyenne* $m(t) = \mathbb{E}[X_t]$ et sa *fonction de covariance* $K(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t)$.

Exemple 2.26. Le mouvement brownien standard est le processus gaussien avec $m(t) = 0$ et $K(s, t) = \min(s, t)$. Le *pont brownien* sur $[0, 1]$ est le processus gaussien avec $m(t) = 0$ et $K(s, t) = \min(s, t) - st$.

2.9 Stationnarité et ergodicité

Définition 2.27 (Stationnarité forte). Un processus $(X_t)_{t \in T}$ est *strictement stationnaire* si pour tout $h > 0$ et tout $n \geq 1$,

$$(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}).$$

Définition 2.28 (Stationnarité faible). Un processus (X_t) de carré intégrable est *faiblement stationnaire* (ou *stationnaire au second ordre*, ou *stationnaire au sens large*) si :

1. $\mathbb{E}[X_t] = \mu$ est constante,
2. $\text{Cov}(X_s, X_t) = R(t - s)$ ne dépend que de $t - s$.

La fonction R est appelée la *fonction d'autocorrélation*.

2.10 Exercices

Exercice 2.1. Montrer que la filtration naturelle d'un processus continu satisfait la condition de continuité à droite après complétion.

Exercice 2.2. Soit τ un temps d'arrêt par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$. Montrer que X_τ est $\mathcal{F}_\tau$ -mesurable lorsque le processus (X_n) est adapté.

Exercice 2.3. Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard et $a > 0$. Montrer que $\tau_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$ est un temps d'arrêt par rapport à la filtration naturelle complétée de B .

Exercice 2.4. Vérifier que le pont brownien $(X_t)_{t \in [0,1]}$ défini par $X_t = B_t - tB_1$ est un processus gaussien et calculer sa fonction de covariance.

Exercice 2.5. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus vérifiant les hypothèses du théorème de Kolmogorov–Čentsov avec $\alpha = 4$ et $\beta = 1$. Quels sont les exposants de Hölder possibles pour la modification continue ?

Chapitre 3

Chaînes de Markov à Temps Discret

« L'avenir ne dépend du passé qu'à travers le présent. » Cette phrase, d'une simplicité désarmante, résume l'essence de la propriété de Markov, formulée par Andreï Markov en 1906 dans son étude des suites de lettres dans le poème *Eugène Onéguine* de Pouchkine. Markov voulait démontrer que la loi des grands nombres pouvait s'appliquer au-delà des variables indépendantes, et il a découvert, ce faisant, l'une des structures les plus universelles des mathématiques appliquées. Des moteurs de recherche aux modèles génétiques, des files d'attente aux algorithmes MCMC, les chaînes de Markov sont partout.

Ce chapitre développe la théorie des chaînes de Markov à espace d'états dénombrable et à temps discret : classification des états, récurrence, ergodicité et convergence vers l'équilibre.

3.1 Propriété de Markov

Définition 3.1 (Chaîne de Markov). Soit E un ensemble dénombrable (l'espace d'états). Un processus $(X_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans E , adapté à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$, est une *chaîne de Markov* si pour tout $n \geq 0$ et tout $j \in E$:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n) \quad \text{p.s.}$$

Absence de mémoire

La propriété de Markov signifie que le futur du processus, conditionnellement au présent, est indépendant du passé. Tout le passé pertinent est résumé dans l'état courant X_n .

Définition 3.2 (Homogénéité temporelle). Une chaîne de Markov est *homogène* (en temps) si les probabilités de transition ne dépendent pas de n : il existe une *matrice de transition* $P = (p_{ij})_{i,j \in E}$ avec

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i), \quad \forall n \geq 0.$$

Les coefficients vérifient $p_{ij} \geq 0$ et $\sum_{j \in E} p_{ij} = 1$ pour tout i (matrice stochastique).

Définition 3.3 (Noyau de transition en n pas). La matrice de transition en n pas est $P^n = (p_{ij}^{(n)})$ où

$$p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i).$$

Théorème 3.4 (Équations de Chapman–Kolmogorov). *Pour tous $m, n \geq 0$ et $i, j \in E$:*

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k \in E} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}.$$

En notation matricielle : $P^{m+n} = P^m P^n$.

3.2 Propriété de Markov forte

Théorème 3.5 (Propriété de Markov forte). *Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov homogène et τ un temps d'arrêt tel que $\mathbb{P}(\tau < \infty) > 0$. Alors, conditionnellement à $\{\tau < \infty\}$ et $X_\tau = i$, le processus $(X_{\tau+n})_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov de même matrice de transition P , partant de i , indépendante de $\mathcal{F}_\tau$.*

3.3 Classification des états

Définition 3.6 (Communication). On dit que i *communique avec* j , noté $i \rightarrow j$, s'il existe $n \geq 1$ tel que $p_{ij}^{(n)} > 0$. On dit que i et j *communiquent*, noté $i \leftrightarrow j$, si $i \rightarrow j$ et $j \rightarrow i$.

Proposition 3.7. La relation $\leftrightarrow$ est une relation d'équivalence sur E . Les classes d'équivalence sont appelées *classes de communication*.

Définition 3.8 (Chaîne irréductible). Une chaîne de Markov est *irréductible* si E forme une seule classe de communication, c'est-à-dire si $i \leftrightarrow j$ pour tous $i, j \in E$.

Définition 3.9 (Période). La *période* d'un état i est

$$d(i) = \gcd\{n \geq 1 : p_{ii}^{(n)} > 0\}.$$

Si $d(i) = 1$, l'état i est dit *apériodique*. Si la chaîne est irréductible, tous les états ont la même période d .

Définition 3.10 (Récurrence et transience). Soit $\tau_i = \inf\{n \geq 1 : X_n = i\}$ le temps de premier retour en i .

- L'état i est *récurrent* si $\mathbb{P}_i(\tau_i < \infty) = 1$.
- L'état i est *transient* si $\mathbb{P}_i(\tau_i < \infty) < 1$.

Théorème 3.11 (Critère de récurrence). *Un état i est récurrent si et seulement si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = +\infty.$$

Équivalamment, i est transient si et seulement si $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$.

Démonstration. Soit $N_i = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n=i\}}$ le nombre de visites en i après le temps 0. Par la propriété de Markov forte, $\mathbb{P}_i(N_i \geq k) = (\mathbb{P}_i(\tau_i < \infty))^k$ pour tout $k \geq 1$. Donc :

$$\mathbb{E}_i[N_i] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_i(N_i \geq k) = \frac{\mathbb{P}_i(\tau_i < \infty)}{1 - \mathbb{P}_i(\tau_i < \infty)}$$

(avec la convention $= +\infty$ si $\mathbb{P}_i(\tau_i < \infty) = 1$). Or $\mathbb{E}_i[N_i] = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$, d'où le résultat. $\square$

Définition 3.12 (Récurrence positive et nulle). Un état récurrent i est :

- *récurrent positif* si $\mathbb{E}_i[\tau_i] < \infty$,
- *récurrent nul* si $\mathbb{E}_i[\tau_i] = +\infty$.

Classification des états

$$\text{État } i \begin{cases} \text{transient} & \mathbb{P}_i(\tau_i < \infty) < 1 \\ \text{récurrent} & \mathbb{P}_i(\tau_i < \infty) = 1 \end{cases} \begin{cases} \text{récurrent nul} & \mathbb{E}_i[\tau_i] = +\infty \\ \text{récurrent positif} & \mathbb{E}_i[\tau_i] < +\infty \end{cases}$$

Dans une chaîne irréductible, tous les états sont de même type.

3.4 Mesures stationnaires

Définition 3.13 (Mesure stationnaire). Une mesure $\pi = (\pi_j)_{j \in E}$ sur E (avec $\pi_j \geq 0$) est *stationnaire* (ou *invariante*) pour P si :

$$\pi_j = \sum_{i \in E} \pi_i p_{ij}, \quad \forall j \in E,$$

c'est-à-dire $\pi P = \pi$ en notation vectorielle. Si de plus $\sum_j \pi_j = 1$, on parle de *distribution stationnaire*.

Théorème 3.14 (Existence et unicité). Soit (X_n) une chaîne de Markov irréductible.

1. Il existe une mesure stationnaire si et seulement si la chaîne est récurrente.
2. La mesure stationnaire est unique (à un facteur multiplicatif près) et donnée par $\pi_j = \mathbb{E}_j[\tau_j]^{-1}$ (où τ_j est le temps de retour en j). Elle est normalisable (donc est une distribution) si et seulement si la chaîne est récurrente positive.

3.5 Théorème ergodique

Théorème 3.15 (Théorème ergodique pour les chaînes de Markov). Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov irréductible, apériodique et récurrente positive, de distribution stationnaire π . Alors pour tout $i \in E$ et toute fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\sum_j |f(j)| \pi_j < \infty$:

1. **Convergence ergodique** : $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) \xrightarrow{p.s.} \sum_{j \in E} f(j) \pi_j$.
2. **Convergence en loi** : $p_{ij}^{(n)} \rightarrow \pi_j$ quand $n \rightarrow \infty$.

Rôle de l'apériodicité

L'apériodicité est nécessaire pour la convergence $p_{ij}^{(n)} \rightarrow \pi_j$. Si la chaîne est périodique de période d , on a seulement la convergence césarienne : $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} p_{ij}^{(k)} \rightarrow \pi_j$.

3.6 Réversibilité

Définition 3.16 (Réversibilité). Une chaîne de Markov de matrice P est *réversible* par rapport à une distribution π si les *équations de bilan détaillé* sont satisfaites :

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}, \quad \forall i, j \in E.$$

Proposition 3.17. Si π satisfait les équations de bilan détaillé, alors π est une distribution stationnaire.

Démonstration. En sommant sur i : $\sum_i \pi_i p_{ij} = \sum_i \pi_j p_{ji} = \pi_j \sum_i p_{ji} = \pi_j$. $\square$

Exemple 3.18. La marche aléatoire sur un graphe non orienté fini $G = (V, E)$ avec $p_{ij} = 1/\deg(i)$ si $(i, j) \in E$ est réversible par rapport à $\pi_i = \deg(i)/(2|E|)$.

3.7 Exemples fondamentaux

Exemple 3.19 (Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$). Soit (X_n) la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ avec $p = \mathbb{P}(Y_n = 1)$ et $q = 1 - p = \mathbb{P}(Y_n = -1)$.

- Si $p = q = 1/2$: la chaîne est récurrente nulle (pas de distribution stationnaire).
- Si $p \neq 1/2$: la chaîne est transiente.

Exemple 3.20 (Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$). La marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}^d$ est :

- récurrente pour $d = 1$ et $d = 2$ (théorème de Pólya),
- transiente pour $d \geq 3$.

Exemple 3.21 (Chaîne d'Ehrenfest). Deux urnes contiennent au total N boules. À chaque étape, on choisit une boule au hasard et on la déplace dans l'autre urne. Si X_n est le nombre de boules dans la première urne :

$$p_{i,i+1} = 1 - \frac{i}{N}, \quad p_{i,i-1} = \frac{i}{N}.$$

La distribution stationnaire est $\pi_i = \binom{N}{i} 2^{-N}$ (binomiale). La chaîne est réversible.

3.8 Temps d'atteinte et problème de la ruine du joueur

Proposition 3.22 (Temps d'atteinte). Pour une chaîne irréductible, le temps moyen d'atteinte $h_i = \mathbb{E}_i[\tau_j]$ (pour $j \neq i$ fixé) satisfait le système :

$$h_i = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} h_k, \quad i \neq j, \quad h_j = 0.$$

Exemple 3.23 (Ruine du joueur). Un joueur possède initialement i euros et joue contre un casino. À chaque tour, il gagne 1 euro avec probabilité p et perd 1 euro avec probabilité $q = 1 - p$. Le jeu s'arrête quand la fortune atteint 0 ou N . La probabilité de ruine est :

$$\mathbb{P}_i(\text{ruine}) = \begin{cases} \frac{(q/p)^i - (q/p)^N}{1 - (q/p)^N} & \text{si } p \neq q, \\ 1 - i/N & \text{si } p = q = 1/2. \end{cases}$$

3.9 Exercices

Exercice 3.1. Soit (X_n) une chaîne de Markov sur $E = \{1, 2, 3\}$ avec matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si la chaîne est irréductible, calculer la période et la distribution stationnaire.

Exercice 3.2. Montrer que dans une chaîne irréductible, si un état est récurrent, alors tous les états sont récurrents. *Indication : utiliser $i \leftrightarrow j$.*

Exercice 3.3. Démontrer le théorème de Pólya : la marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}^2$ est récurrente. *Indication : utiliser le critère de récurrence (théorème 3.11) et un développement asymptotique de $p_{00}^{(2n)}$.*

Exercice 3.4. Soit (X_n) la chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ avec $p_{i,i+1} = p$ et $p_{i,0} = q = 1 - p$ pour $i \geq 0$. Trouver la distribution stationnaire (si elle existe) et les conditions sur p pour la récurrence positive.

Exercice 3.5. Démontrer que si (X_n) est une chaîne de Markov réversible par rapport à π , alors la chaîne renversée $(X_{N-n})_{0 \leq n \leq N}$ a la même loi que $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ lorsque $X_0 \sim \pi$.

Chapitre 4

Chaînes de Markov à Temps Continu

Le passage du temps discret au temps continu n'est pas une simple formalité : il transforme profondément la nature des chaînes de Markov. En temps discret, les transitions se produisent à des instants réguliers. En temps continu, le processus peut sauter d'un état à un autre à tout instant, et le temps de séjour dans chaque état suit une loi exponentielle — la seule loi continue sans mémoire. Ce lien entre la propriété de Markov et la loi exponentielle est l'une des observations les plus élégantes de la théorie. Les CMTC modélisent les files d'attente, les réactions chimiques stochastiques, les réseaux de télécommunications et bien d'autres systèmes où les événements surviennent de manière aléatoire dans le temps.

4.1 Définition et propriété de Markov

Définition 4.1 (Chaîne de Markov à temps continu). Soit E un espace d'états dénombrable. Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans E , à trajectoires càdlàg, est une *chaîne de Markov à temps continu* (CMTC) si pour tous $s, t \geq 0$ et tout $j \in E$:

$$\mathbb{P}(X_{t+s} = j \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X_{t+s} = j \mid X_s) \quad \text{p.s.}$$

La chaîne est *homogène* si $\mathbb{P}(X_{t+s} = j \mid X_s = i) = p_{ij}(t)$ ne dépend pas de s .

Définition 4.2 (Semi-groupe de transition). La famille de matrices $(P(t))_{t \geq 0}$ avec $P(t) = (p_{ij}(t))_{i,j \in E}$ est appelée *semi-groupe de transition*. Elle vérifie :

1. $P(0) = I$ (matrice identité),
2. $P(s+t) = P(s)P(t)$ pour tous $s, t \geq 0$ (propriété de semi-groupe),
3. $p_{ij}(t) \geq 0$ et $\sum_j p_{ij}(t) = 1$ pour tout i .

4.2 Générateur infinitésimal

Définition 4.3 (Générateur infinitésimal). Le *générateur infinitésimal* (ou *matrice des taux*) de la CMTC est la matrice $Q = (q_{ij})_{i,j \in E}$ définie par :

$$Q = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{P(t) - I}{t}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad q_{ij} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p_{ij}(t) - \delta_{ij}}{t}.$$

Proposition 4.4 (Propriétés de Q). La matrice Q vérifie :

1. $q_{ij} \geq 0$ pour $i \neq j$,
2. $q_{ii} \leq 0$ pour tout i ,
3. $\sum_{j \in E} q_{ij} = 0$ pour tout i , c'est-à-dire $q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$.

On note $q_i = -q_{ii} = \sum_{j \neq i} q_{ij}$ le *taux de sortie* de l'état i . Si $q_i > 0$, le temps de séjour en i suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(q_i)$.

Construction par temps de séjour

Une CMTC peut être construite comme suit :

1. Partant de l'état i , le processus y reste un temps exponentiel de paramètre q_i .
2. À la fin de ce temps, il saute en $j \neq i$ avec probabilité q_{ij}/q_i .
3. Le processus recommence depuis le nouvel état.

La chaîne discrète sous-jacente (les états visités successivement) a pour matrice de transition $\tilde{P}$ avec $\tilde{p}_{ij} = q_{ij}/q_i$ pour $j \neq i$.

4.3 Équations de Kolmogorov

Théorème 4.5 (Équation de Kolmogorov progressive (forward)). *Sous des conditions de régularité (par exemple $\sup_i q_i < \infty$) :*

$$P'(t) = P(t)Q, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{d}{dt}p_{ij}(t) = \sum_{k \in E} p_{ik}(t)q_{kj}.$$

Théorème 4.6 (Équation de Kolmogorov rétrograde (backward)). *Sous les mêmes conditions :*

$$P'(t) = QP(t), \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{d}{dt}p_{ij}(t) = \sum_{k \in E} q_{ik}p_{kj}(t).$$

Remarque 4.7. Si E est fini, la solution est $P(t) = e^{Qt}$, où l'exponentielle matricielle est définie par $e^{Qt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Qt)^n}{n!}$.

Équations de Kolmogorov

Rétrograde (backward) :	$P'(t) = QP(t), \quad P(0) = I,$
Progressive (forward) :	$P'(t) = P(t)Q, \quad P(0) = I.$

Solution (espace d'états fini) : $P(t) = e^{Qt}$.

4.4 Mesures stationnaires et convergence

Définition 4.8 (Distribution stationnaire). Un vecteur de probabilité $\pi = (\pi_i)_{i \in E}$ est une *distribution stationnaire* pour la CMTC si :

$$\pi Q = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{i \in E} \pi_i q_{ij} = 0 \quad \forall j \in E.$$

Équivalemment, $\pi P(t) = \pi$ pour tout $t \geq 0$.

Théorème 4.9 (Convergence à l'équilibre). *Si la CMTC est irréductible et récurrente positive, il existe une unique distribution stationnaire π , et pour tous $i, j \in E$:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = \pi_j.$$

4.5 Processus de naissance et de mort

Définition 4.10 (Processus de naissance et de mort). Un processus de naissance et de mort sur $E = \mathbb{N}$ est une CMTC de générateur :

$$q_{i,i+1} = \lambda_i \quad (\text{taux de naissance}), \quad q_{i,i-1} = \mu_i \quad (\text{taux de mort}), \quad i \geq 0,$$

avec $\mu_0 = 0$, $\lambda_i > 0$ pour $i \geq 0$, $\mu_i > 0$ pour $i \geq 1$, et $q_{ij} = 0$ pour $|i - j| > 1$.

Théorème 4.11 (Distribution stationnaire). *Le processus de naissance et de mort admet une distribution stationnaire si et seulement si*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} < \infty.$$

Dans ce cas, $\pi_0 = (1 + S)^{-1}$ et $\pi_n = \pi_0 \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n}$.

Démonstration. Les équations de bilan détaillé $\pi_i q_{i,i+1} = \pi_{i+1} q_{i+1,i}$ donnent $\pi_i \lambda_i = \pi_{i+1} \mu_{i+1}$, d'où la formule par récurrence. La normalisabilité équivaut à $S < \infty$. $\square$

Exemple 4.12 (File d'attente $M/M/1$). Arrivées selon un processus de Poisson de taux λ , services exponentiels de taux μ : $\lambda_i = \lambda$, $\mu_i = \mu$ pour tout i . La condition de stabilité est $\rho = \lambda/\mu < 1$, et la distribution stationnaire est géométrique : $\pi_n = (1 - \rho)\rho^n$.

Exemple 4.13 (File $M/M/c$). Avec c serveurs : $\lambda_i = \lambda$ pour tout i et $\mu_i = \min(i, c)\mu$. La condition de stabilité est $\rho = \lambda/(c\mu) < 1$.

Exemple 4.14 (File $M/M/\infty$). Nombre infini de serveurs : $\lambda_i = \lambda$, $\mu_i = i\mu$. La distribution stationnaire est de Poisson : $\pi_n = e^{-\lambda/\mu} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}$.

4.6 Explosion et régularité

Définition 4.15 (Explosion). Une CMTC *explose* si le nombre de sauts en temps fini est infini, c'est-à-dire si $T_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} S_n < \infty$ p.s., où S_n est le n -ième temps de séjour.

Théorème 4.16 (Critère de non-explosion). *Si $\sup_{i \in E} q_i < \infty$ (taux de sortie bornés), alors la CMTC n'explose pas. Plus généralement, la chaîne n'explose pas si et seulement si la solution minimale des équations de Kolmogorov rétrogrades est stochastique (c'est-à-dire $\sum_j p_{ij}(t) = 1$).*

Exemple 4.17 (Processus de Yule). Le processus de naissance pure avec $\lambda_n = n\lambda$ (chaque individu se reproduit indépendamment au taux λ). On a $X_t = e^{\lambda t} X_0$ en moyenne, et la chaîne n'explose pas car $\sum_n \frac{1}{q_n} = \sum_n \frac{1}{n\lambda} = +\infty$.

4.7 Propriété de Markov forte

Théorème 4.18 (Propriété de Markov forte — temps continu). *Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une CMTC régulière (sans explosion) et τ un temps d'arrêt fini p.s. Alors, conditionnellement à $X_\tau = i$, le processus $(X_{\tau+t})_{t \geq 0}$ est une CMTC de même générateur, partant de i , indépendante de $\mathcal{F}_\tau$.*

4.8 Réversibilité en temps continu

Définition 4.19 (Réversibilité). Une CMTC de générateur Q est réversible par rapport à une distribution π si :

$$\pi_i q_{ij} = \pi_j q_{ji}, \quad \forall i, j \in E.$$

Théorème 4.20 (Théorème de Burke). *Dans une file $M/M/1$ en régime stationnaire ($X_0 \sim \pi$), le processus de départ est un processus de Poisson de taux λ .*

4.9 Exercices

Exercice 4.1. Soit une CMTC sur $E = \{1, 2, 3\}$ de générateur

$$Q = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Calculer la distribution stationnaire. Vérifier si la chaîne est réversible.

Exercice 4.2. Pour un processus de naissance et de mort avec $\lambda_n = \lambda$ et $\mu_n = n\mu$ ($n \geq 1$), trouver la distribution stationnaire et montrer que la chaîne n'explose pas.

Exercice 4.3. Montrer que pour une CMTC sur un espace d'états fini, l'exponentielle matricielle $P(t) = e^{Qt}$ vérifie les équations de Kolmogorov (progressive et rétrograde).

Exercice 4.4. Considérer une file $M/M/1$ avec $\lambda = 2$ et $\mu = 3$. Calculer la probabilité que le système soit vide en régime stationnaire, le nombre moyen de clients, et le temps moyen de séjour (formule de Little).

Exercice 4.5. Montrer qu'un processus de naissance pure avec $\lambda_n = n^2$ explose en temps fini. *Indication : montrer que $\sum_n 1/\lambda_n < \infty$.*

Exercice 4.6. Pour la chaîne d'Ehrenfest en temps continu (chaque boule est déplacée indépendamment au taux 1), écrire le générateur Q et trouver la distribution stationnaire.

Chapitre 5

Processus de Poisson

Combien d'appels arrivent dans un centre téléphonique entre 14h et 15h ? Combien de désintégrations radioactives se produisent en une seconde ? Combien de clients entrent dans un magasin en une heure ? Dans chacun de ces scénarios, des événements surviennent aléatoirement dans le temps, de manière indépendante et à un taux moyen constant. Le processus qui modélise exactement cette situation est le *processus de Poisson*, l'un des objets les plus fondamentaux de la théorie des probabilités. Découvert par Siméon Denis Poisson en 1837 sous forme de loi de probabilité, il a été élevé au rang de processus stochastique par les travaux de Palm, Feller et Khintchine dans les années 1940.

5.1 Définition axiomatique

Définition 5.1 (Processus de Poisson). Un processus $(N_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ est un *processus de Poisson* d'intensité $\lambda > 0$ si :

1. $N_0 = 0$,
2. (N_t) a des *accroissements indépendants* : pour tous $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, les v.a. $N_{t_2} - N_{t_1}, N_{t_3} - N_{t_2}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ sont indépendantes,
3. (N_t) a des *accroissements stationnaires* : $N_{t+s} - N_s \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ pour tous $s, t \geq 0$,
4. les trajectoires de (N_t) sont càdlàg (continues à droite, croissantes, à sauts de taille 1).

Remarque 5.2. Les conditions (1)–(3) suffisent à caractériser la loi du processus. La condition (4) porte sur la régularité des trajectoires et peut être obtenue par construction.

Théorème 5.3 (Existence). *Il existe un processus de Poisson d'intensité λ pour tout $\lambda > 0$.*

Idée de la preuve. On construit (N_t) à partir de temps inter-arrivées i.i.d. exponentiels : soit $(T_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. $\mathcal{E}(\lambda)$. On pose $S_n = T_1 + \dots + T_n$ (le n -ième temps d'arrivée) et $N_t = \max\{n \geq 0 : S_n \leq t\}$. On vérifie que (N_t) satisfait les axiomes de la définition 5.1. $\square$

5.2 Propriétés fondamentales

Proposition 5.4 (Moments). Pour tout $t \geq 0$:

$$\mathbb{E}[N_t] = \lambda t, \quad \text{Var}(N_t) = \lambda t.$$

Proposition 5.5 (Temps inter-arrivées). Les temps entre sauts consécutifs $T_n = S_n - S_{n-1}$ (avec $S_0 = 0$) sont i.i.d. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

Proposition 5.6 (Temps d'arrivée). Le n -ième temps d'arrivée $S_n = T_1 + \dots + T_n$ suit une loi Gamma : $S_n \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$, de densité :

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}, \quad t > 0.$$

Propriétés du processus de Poisson

$$\begin{aligned} N_{t+s} - N_s &\sim \text{Poisson}(\lambda t) \\ \mathbb{E}[N_t] &= \lambda t, \quad \text{Var}(N_t) = \lambda t \\ T_n &\sim \mathcal{E}(\lambda) \text{ (i.i.d.)} \\ S_n &\sim \text{Gamma}(n, \lambda) \\ \mathbb{P}(N_t = k) &= \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

5.3 Construction comme CMTC

Remarque 5.7. Le processus de Poisson est un cas particulier de processus de naissance pure : c'est une CMTC sur $\mathbb{N}$ avec $q_{n,n+1} = \lambda$ pour tout n et $q_{ij} = 0$ pour $j \neq i+1$. Le générateur est :

$$(Qf)(n) = \lambda[f(n+1) - f(n)].$$

5.4 Propriété de Markov et absence de mémoire

Théorème 5.8 (Propriété de Markov forte). *Le processus de Poisson satisfait la propriété de Markov forte : pour tout temps d'arrêt τ fini p.s., le processus $(N_{\tau+t} - N_\tau)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité λ , indépendant de $\mathcal{F}_\tau$.*

Proposition 5.9 (Absence de mémoire de l'exponentielle). La loi exponentielle est la seule loi continue à la propriété d'absence de mémoire : si $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors

$$\mathbb{P}(T > t + s \mid T > t) = \mathbb{P}(T > s) = e^{-\lambda s}, \quad \forall s, t \geq 0.$$

5.5 Opérations sur le processus de Poisson

5.5.1 Superposition

Théorème 5.10 (Superposition). *Soient $(N_t^{(1)})$ et $(N_t^{(2)})$ deux processus de Poisson indépendants d'intensités λ_1 et λ_2 . Alors $(N_t^{(1)} + N_t^{(2)})$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda_1 + \lambda_2$.*

5.5.2 Amécissage (thinning)

Théorème 5.11 (Amécissage). Soit (N_t) un processus de Poisson d'intensité λ . Chaque saut est indépendamment classé en type 1 avec probabilité p et type 2 avec probabilité $1 - p$. Alors les processus de comptage $N_t^{(1)}$ et $N_t^{(2)}$ des types 1 et 2 sont des processus de Poisson indépendants d'intensités λp et $\lambda(1 - p)$.

Démonstration. Pour tout t , conditionnellement à $N_t = n$, les n sauts sont classés indépendamment. Donc $N_t^{(1)} \mid (N_t = n) \sim \text{Bin}(n, p)$. On calcule :

$$\mathbb{P}(N_t^{(1)} = k) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda p t)^k}{k!} e^{-\lambda p t}.$$

L'indépendance de $N_t^{(1)}$ et $N_t^{(2)}$ se démontre de manière analogue. $\square$

5.5.3 Statistiques d'ordre

Théorème 5.12 (Statistiques d'ordre). Conditionnellement à $N_t = n$, les n temps de saut $(S_1, \dots, S_n)$ ont la même loi que les statistiques d'ordre de n v.a. i.i.d. uniformes sur $[0, t]$.

5.6 Processus de Poisson composé

Définition 5.13 (Processus de Poisson composé). Soit $(N_t)_{t \geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité λ et $(Y_k)_{k \geq 1}$ une suite i.i.d. indépendante de (N_t) . Le processus de Poisson composé est

$$Z_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k, \quad t \geq 0.$$

Proposition 5.14 (Moments du processus composé).

$$\mathbb{E}[Z_t] = \lambda t \mathbb{E}[Y_1], \quad \text{Var}(Z_t) = \lambda t \mathbb{E}[Y_1^2].$$

Exemple 5.15. Un modèle de réclamations en assurance : les réclamations arrivent selon un processus de Poisson de taux λ , chaque réclamation ayant un montant aléatoire Y_k (i.i.d.). Le montant total des réclamations jusqu'au temps t est $Z_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$.

5.7 Processus de Poisson non homogène

Définition 5.16 (Processus de Poisson non homogène). Un processus $(N_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson non homogène de fonction d'intensité $\lambda(t) \geq 0$ si :

1. $N_0 = 0$,
2. (N_t) a des accroissements indépendants,
3. $N_{t+s} - N_s \sim \text{Poisson}\left(\int_s^{t+s} \lambda(u) du\right)$.

Proposition 5.17 (Changement de temps). Soit $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du$ la fonction d'intensité cumulée. Si $(M_s)_{s \geq 0}$ est un processus de Poisson standard (d'intensité 1), alors $N_t = M_{\Lambda(t)}$ est un processus de Poisson non homogène de fonction d'intensité $\lambda(t)$.

5.8 Processus de Poisson comme martingale

Proposition 5.18 (Martingale compensée). Si (N_t) est un processus de Poisson d'intensité λ , alors :

1. $M_t = N_t - \lambda t$ est une martingale (le *processus de Poisson compensé*).
2. $M_t^2 - \lambda t$ est une martingale.
3. $e^{\theta N_t - \lambda t(e^\theta - 1)}$ est une martingale pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Pour le point (1), on calcule :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_{t+s} - M_s \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[N_{t+s} - N_s - \lambda t \mid \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[N_{t+s} - N_s] - \lambda t = \lambda t - \lambda t = 0.\end{aligned}$$

□

5.9 Exercices

Exercice 5.1. Montrer que si (N_t) est un processus de Poisson d'intensité λ , alors pour $s < t$ fixés, $\mathbb{E}[N_s \mid N_t] = N_t \cdot s/t$.

Exercice 5.2. Des appels téléphoniques arrivent selon un processus de Poisson de taux $\lambda = 5$ par heure. Calculer la probabilité d'avoir au moins 3 appels en 30 minutes.

Exercice 5.3. Soit (N_t) un processus de Poisson d'intensité λ et $T > 0$. Montrer que $\mathbb{E}[S_1 \mid N_T = n] = T/(n+1)$ où S_1 est le premier temps de saut.

Exercice 5.4. Soit $Z_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$ un processus de Poisson composé avec $Y_k \sim \mathcal{E}(\mu)$ et N_t Poisson d'intensité λ . Calculer $\mathbb{E}[e^{-\alpha Z_t}]$ pour $\alpha > 0$.

Exercice 5.5. Montrer le théorème de superposition 5.10 en utilisant les fonctions génératrices des probabilités.

Exercice 5.6. Des bus arrivent à un arrêt selon un processus de Poisson d'intensité λ . Un voyageur arrive à un instant déterministe $t_0 > 0$. Montrer que le temps d'attente du voyageur est exponentiel $\mathcal{E}(\lambda)$, indépendant du passé.

Chapitre 6

Martingales — Temps Discret

Le terme « martingale » vient du monde des jeux de hasard : c'est la stratégie qui consiste à doubler sa mise après chaque perte, dans l'espoir de tout regagner d'un coup. Joseph Leo Doob a emprunté ce mot pour désigner un concept mathématique beaucoup plus profond : un processus dont la meilleure prédiction du futur, étant donné le passé, est la valeur actuelle. Les martingales sont l'outil central de la théorie moderne des probabilités : elles interviennent dans les théorèmes de convergence, la théorie de l'intégration stochastique, la finance mathématique (les prix actualisés sont des martingales sous la mesure risque-neutre), et la théorie de l'arrêt optimal.

6.1 Définitions

Définition 6.1 (Martingale en temps discret). Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré. Un processus adapté $(M_n)_{n \geq 0}$ est une *martingale* si :

1. $\mathbb{E}[|M_n|] < \infty$ pour tout $n \geq 0$,
2. $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = M_n$ p.s. pour tout $n \geq 0$.

On définit de manière analogue :

- *sur-martingale* : $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \leq M_n$ p.s.
- *sous-martingale* : $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \geq M_n$ p.s.

Remarque 6.2. Par la propriété de tour, la condition de martingale est équivalente à : pour tous $m \leq n$, $\mathbb{E}[M_n \mid \mathcal{F}_m] = M_m$ p.s. En particulier, $\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_0]$ pour tout n .

Exemple 6.3. 1. **Marche aléatoire** : si $(Y_k)_{k \geq 1}$ sont i.i.d. centrées et $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$, alors (S_n) est une martingale par rapport à $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$.

2. **Transformée de martingale** : si (M_n) est une martingale et (H_n) est prévisible borné, alors $(H \cdot M)_n = \sum_{k=1}^n H_k(M_k - M_{k-1})$ est une martingale.
3. **Martingale exponentielle** : si (Y_k) sont i.i.d. et $\psi(\theta) = \log \mathbb{E}[e^{\theta Y_1}] < \infty$, alors $\exp(\theta S_n - n\psi(\theta))$ est une martingale.
4. **Martingale de Lévy** : si $X \in L^1$ et $\mathcal{F}_n$ est une filtration, alors $M_n = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_n]$ est une martingale.

6.2 Transformée de martingale

Définition 6.4 (Transformée de martingale). Soit $(M_n)_{n \geq 0}$ une martingale et $(H_n)_{n \geq 1}$ un processus prévisible. La *transformée de martingale* est

$$(H \cdot M)_n = \sum_{k=1}^n H_k(M_k - M_{k-1}), \quad (H \cdot M)_0 = 0.$$

Théorème 6.5 (Stabilité). Si (M_n) est une martingale (resp. sur-martingale) et (H_n) est prévisible avec $0 \leq H_n \leq C$ pour une constante C , alors $(H \cdot M)_n$ est une martingale (resp. sur-martingale).

Stratégie de jeu

La transformée de martingale modélise les gains cumulés d'un joueur qui mise H_n à l'étape n dans un jeu équitable (M_n) . La prévisibilité signifie que la mise est décidée avant de connaître le résultat. Le théorème de stabilité dit qu'aucune stratégie de mise bornée ne peut rendre un jeu équitable favorable.

6.3 Inégalités fondamentales

Théorème 6.6 (Inégalité maximale de Doob). Soit $(M_n)_{0 \leq n \leq N}$ une sous-martingale. Alors pour tout $\lambda > 0$:

$$\lambda \mathbb{P}\left(\max_{0 \leq n \leq N} M_n \geq \lambda\right) \leq \mathbb{E}[M_N^+].$$

Théorème 6.7 (Inégalité L^p de Doob). Soit $(M_n)_{0 \leq n \leq N}$ une martingale et $p > 1$. Alors

$$\mathbb{E}\left[\max_{0 \leq n \leq N} |M_n|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|M_N|^p].$$

Théorème 6.8 (Inégalité de Doob pour les martingales L^2). Pour une martingale (M_n) de carré intégrable :

$$\mathbb{E}\left[\max_{0 \leq n \leq N} M_n^2\right] \leq 4\mathbb{E}[M_N^2].$$

6.4 Décomposition de Doob

Théorème 6.9 (Décomposition de Doob). Tout processus adapté intégrable $(X_n)_{n \geq 0}$ admet une décomposition unique :

$$X_n = M_n + A_n,$$

où (M_n) est une martingale et (A_n) est un processus prévisible avec $A_0 = 0$. Le processus A est donné par

$$A_n = \sum_{k=1}^n (\mathbb{E}[X_k | \mathcal{F}_{k-1}] - X_{k-1}).$$

Si (X_n) est une sous-martingale, alors (A_n) est croissant.

6.5 Théorèmes de convergence

Théorème 6.10 (Convergence des martingales — Théorème de Doob). *Soit $(M_n)_{n \geq 0}$ une sous-martingale telle que $\sup_n \mathbb{E}[M_n^+] < \infty$. Alors il existe une v.a. $M_\infty \in L^1$ telle que $M_n \rightarrow M_\infty$ p.s.*

Esquisse de la preuve. On utilise le lemme d'upcrossing de Doob : si $U_N([a, b])$ désigne le nombre de remontées de $(M_n)_{0 \leq n \leq N}$ de a à b (avec $a < b$), alors

$$(b - a)\mathbb{E}[U_N([a, b])] \leq \mathbb{E}[(M_N - a)^+].$$

Sous l'hypothèse $\sup_n \mathbb{E}[M_n^+] < \infty$, on obtient $\mathbb{E}[U_\infty([a, b])] < \infty$ pour tous $a < b$ rationnels, ce qui implique la convergence p.s. $\square$

Convergence p.s. vs. L^1

Le théorème de Doob donne la convergence p.s., mais *pas* la convergence L^1 en général. Pour avoir $M_n \rightarrow M_\infty$ dans L^1 , il faut une condition supplémentaire (uniforme intégrabilité).

Définition 6.11 (Uniforme intégrabilité). Une famille $(X_i)_{i \in I}$ de v.a. est *uniformément intégrable* (UI) si

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sup_{i \in I} \mathbb{E}[|X_i| \mathbf{1}_{\{|X_i| > a\}}] = 0.$$

Théorème 6.12 (Convergence L^1). *Soit (M_n) une martingale. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. (M_n) est uniformément intégrable,
2. M_n converge p.s. et dans L^1 vers M_∞ ,
3. il existe $X \in L^1$ tel que $M_n = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_n]$ pour tout n .

Dans ce cas, $M_\infty = X$ p.s. et on dit que la martingale est fermée.

Corollaire 6.13 (Convergence L^p pour $p > 1$). *Si (M_n) est une martingale bornée dans L^p pour $p > 1$ (c'est-à-dire $\sup_n \mathbb{E}[|M_n|^p] < \infty$), alors (M_n) converge p.s. et dans L^p .*

6.6 Théorème d'arrêt optionnel

Théorème 6.14 (Théorème d'arrêt optionnel — version bornée). *Soit $(M_n)_{n \geq 0}$ une martingale et τ un temps d'arrêt borné ($\tau \leq N$ p.s. pour un $N < \infty$). Alors*

$$\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0].$$

Démonstration. On écrit $M_\tau = M_0 + \sum_{k=1}^N H_k(M_k - M_{k-1})$ où $H_k = \mathbf{1}_{\{\tau \geq k\}}$ est prévisible (car $\{\tau \geq k\} = \{\tau \leq k-1\}^c \in \mathcal{F}_{k-1}$). La transformée de martingale étant une martingale, on a $\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0]$. $\square$

Théorème 6.15 (Théorème d'arrêt optionnel — version générale). *Soit $(M_n)_{n \geq 0}$ une martingale uniformément intégrable et σ, τ deux temps d'arrêt avec $\sigma \leq \tau$ p.s. Alors*

$$\mathbb{E}[M_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma] = M_\sigma \quad \text{p.s.}$$

En particulier, $\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0]$.

Conditions du théorème d'arrêt

Le théorème d'arrêt optionnel ne s'applique *pas* à un temps d'arrêt quelconque sans condition supplémentaire. Contre-exemple classique : la marche aléatoire symétrique (S_n) avec $\tau = \inf\{n : S_n = 1\}$. On a $\mathbb{E}[S_0] = 0$ mais $S_\tau = 1$, car τ n'est pas borné et (S_n) n'est pas UI.

6.7 Applications

6.7.1 Ruine du joueur revisitée

Exemple 6.16. Marche aléatoire (S_n) avec $S_0 = i$ et barrières absorbantes en 0 et N . On pose $\tau = \inf\{n : S_n \in \{0, N\}\}$.

Si $p \neq 1/2$, la martingale exponentielle $M_n = (q/p)^{S_n}$ est bornée entre $(q/p)^0 = 1$ et $(q/p)^N$, donc τ est un temps d'arrêt borné pour $(M_{n \wedge \tau})$. Par le théorème d'arrêt :

$$(q/p)^i = \mathbb{E}[(q/p)^{S_\tau}] = (q/p)^0 \mathbb{P}_i(\text{ruine}) + (q/p)^N (1 - \mathbb{P}_i(\text{ruine})),$$

$$\text{d'où } \mathbb{P}_i(\text{ruine}) = \frac{(q/p)^i - (q/p)^N}{1 - (q/p)^N}.$$

6.7.2 Loi du logarithme itéré — premier pas

Proposition 6.17. Si (M_n) est une martingale de carré intégrable avec $\mathbb{E}[(M_n - M_{n-1})^2 | \mathcal{F}_{n-1}] = \sigma^2$ p.s., alors $\langle M \rangle_n = n\sigma^2$ et $M_n^2 - n\sigma^2$ est une martingale.

6.8 Crochet prévisible

Définition 6.18 (Crochet prévisible). Soit (M_n) une martingale de carré intégrable. Le *crochet prévisible* $(\langle M \rangle_n)$ est l'unique processus prévisible croissant tel que $(M_n^2 - \langle M \rangle_n)$ soit une martingale. Il est donné par :

$$\langle M \rangle_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(M_k - M_{k-1})^2 | \mathcal{F}_{k-1}].$$

Théorème 6.19 (Convergence par le crochet). Soit (M_n) une martingale de carré intégrable. Si $\langle M \rangle_\infty = \lim_n \langle M \rangle_n < \infty$ p.s., alors (M_n) converge p.s. et dans L^2 .

6.9 Exercices

Exercice 6.1. Montrer que si (M_n) est une martingale et φ est convexe, alors $(\varphi(M_n))$ est une sous-martingale (sous réserve d'intégrabilité).

Exercice 6.2. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ partant de 0. Montrer que $X_n^2 - n$ est une martingale.

Exercice 6.3. Soit $\tau = \inf\{n \geq 0 : |S_n| = a\}$ où (S_n) est la marche aléatoire symétrique. Utiliser le théorème d'arrêt pour calculer $\mathbb{E}[\tau]$.

Exercice 6.4. Démontrer l'inégalité maximale de Doob (théorème 6.6). *Indication : utiliser $M_N^+ \geq M_\sigma^+$ où $\sigma = \inf\{n : M_n \geq \lambda\} \wedge N$.*

Exercice 6.5. Soit (M_n) une martingale positive avec $M_0 = 1$. Montrer que $\mathbb{P}(\sup_n M_n \geq a) \leq 1/a$ pour tout $a > 0$.

Exercice 6.6. Soit (M_n) une martingale bornée dans L^2 . Montrer qu'elle est uniformément intégrable.

Chapitre 7

Martingales — Temps Continu

Le passage des martingales en temps discret au temps continu est l'une des transitions les plus délicates de la théorie des processus stochastiques. En temps discret, on conditionne par rapport à un passé fini ; en temps continu, la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ forme un continuum d'informations, et des phénomènes subtils apparaissent : régularité des trajectoires, temps d'arrêt non dénombrables, inégalités maximales. Joseph Doob, dans les années 1950, a montré que toute martingale en temps continu admet une version à trajectoires càdlàg (continues à droite, avec limites à gauche), un résultat technique mais essentiel. Les inégalités de Doob, le théorème d'arrêt optionnel, et la décomposition de Doob–Meyer forment le socle sur lequel repose tout le calcul stochastique — et, par extension, la finance mathématique moderne.

7.1 Définitions

Définition 7.1 (Martingale en temps continu). Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré satisfaisant les conditions habituelles. Un processus adapté $(M_t)_{t \geq 0}$ est une *martingale* (en temps continu) si :

1. $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$ pour tout $t \geq 0$,
2. $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$ p.s. pour tous $0 \leq s \leq t$.

Définition 7.2 (Martingale locale). Un processus adapté continu $(M_t)_{t \geq 0}$ est une *martingale locale* s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt $(\tau_n)_{n \geq 1}$ avec $\tau_n \uparrow \infty$ p.s. telle que pour chaque n , le processus arrêté $(M_{t \wedge \tau_n})_{t \geq 0}$ est une martingale.

La suite (τ_n) est appelée *suite localisante*.

Martingale locale $\neq$ martingale

Toute martingale est une martingale locale, mais la réciproque est fausse. Une martingale locale positive est une sur-martingale (lemme de Fatou), mais pas nécessairement une martingale.

7.2 Régularité des trajectoires

Théorème 7.3 (Modification càdlàg). Soit $(M_t)_{t \geq 0}$ une martingale (ou sur-martingale) à valeurs réelles. Si $t \mapsto \mathbb{E}[M_t]$ est continue à droite, alors (M_t) admet une modification càdlàg.

Remarque 7.4. Sous les conditions habituelles de la filtration, la modification càdlàg est encore une martingale. Dorénavant, nous supposons que les martingales en temps continu sont càdlàg.

Théorème 7.5 (Continuité des martingales L^2). *Si (M_t) est une martingale de carré intégrable dont les trajectoires sont continues, alors le processus de variation quadratique $\langle M \rangle_t$ est continu et $(M_t^2 - \langle M \rangle_t)$ est une martingale.*

7.3 Inégalités de Doob en temps continu

Théorème 7.6 (Inégalité maximale de Doob). *Soit $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$ une martingale càdlàg. Pour tout $\lambda > 0$:*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t| \geq \lambda\right) \leq \frac{\mathbb{E}[|M_T|]}{\lambda}.$$

Théorème 7.7 (Inégalité L^p de Doob en temps continu). *Pour $p > 1$ et une martingale càdlàg (M_t) :*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|M_T|^p].$$

Théorème 7.8 (Inégalité de Burkholder–Davis–Gundy). *Il existe des constantes universelles $c_p, C_p > 0$ telles que pour toute martingale locale continue (M_t) avec $M_0 = 0$ et pour tout $p > 0$:*

$$c_p \mathbb{E}[\langle M \rangle_T^{p/2}] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t|^p\right] \leq C_p \mathbb{E}[\langle M \rangle_T^{p/2}].$$

Pour $p = 2$, on peut prendre $c_2 = 1$ et $C_2 = 4$ (inégalité de Doob).

7.4 Variation quadratique

Définition 7.9 (Variation quadratique). Soit $(M_t)_{t \geq 0}$ une martingale locale continue. La *variation quadratique* (ou *crochet*) de M est l'unique processus continu croissant $(\langle M \rangle_t)_{t \geq 0}$ avec $\langle M \rangle_0 = 0$ tel que $(M_t^2 - \langle M \rangle_t)$ soit une martingale locale.

On a la représentation :

$$\langle M \rangle_t = \lim_{|\Pi| \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} (M_{t_{k+1}} - M_{t_k})^2 \quad (\text{limite en probabilité}),$$

où $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$ est une partition de $[0, t]$.

Définition 7.10 (Covariation). Pour deux martingales locales continues M et N , la *covariation* (ou *crochet croisé*) est

$$\langle M, N \rangle_t = \frac{1}{4} (\langle M + N \rangle_t - \langle M - N \rangle_t),$$

et c'est l'unique processus continu à variation finie tel que $(M_t N_t - \langle M, N \rangle_t)$ soit une martingale locale.

Variations quadratiques fondamentales

Pour le mouvement brownien (B_t) :

$$\begin{aligned}\langle B \rangle_t &= t \\ \langle B^{(i)}, B^{(j)} \rangle_t &= \delta_{ij}t \quad (\text{brownien multidimensionnel})\end{aligned}$$

7.5 Décomposition de Doob–Meyer

Théorème 7.11 (Décomposition de Doob–Meyer). *Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une sur-martingale càd-làg de classe (D). Alors il existe une décomposition unique :*

$$X_t = M_t - A_t,$$

où (M_t) est une martingale càd-làg et (A_t) est un processus croissant prévisible avec $A_0 = 0$.

Définition 7.12 (Classe (D)). Une sur-martingale (X_t) est de classe (D) si la famille $\{X_\tau : \tau \text{ temps d'arrêt fini}\}$ est uniformément intégrable.

Remarque 7.13. La décomposition de Doob–Meyer est l'analogue en temps continu de la décomposition de Doob en temps discret. Elle est fondamentale pour la construction de l'intégrale stochastique.

7.6 Théorèmes d'arrêt en temps continu

Théorème 7.14 (Théorème d'arrêt optionnel — temps continu). *Soit $(M_t)_{t \geq 0}$ une martingale continue uniformément intégrable et τ un temps d'arrêt (éventuellement infini). Alors*

$$\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0].$$

Plus généralement, si $\sigma \leq \tau$ sont deux temps d'arrêt :

$$\mathbb{E}[M_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma] = M_\sigma \quad p.s.$$

Théorème 7.15 (Théorème d'arrêt pour les sur-martingales positives). *Si $(M_t)_{t \geq 0}$ est une sur-martingale positive continue et τ est un temps d'arrêt, alors*

$$\mathbb{E}[M_\tau] \leq \mathbb{E}[M_0].$$

7.7 Représentation des martingales

Théorème 7.16 (Théorème de représentation des martingales browniennes). *Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien et $(\mathcal{F}_t)$ sa filtration naturelle complétée. Toute martingale locale continue (M_t) par rapport à $(\mathcal{F}_t)$ admet la représentation :*

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dB_s,$$

où (H_t) est un processus prévisible avec $\int_0^t H_s^2 ds < \infty$ p.s. pour tout t .

Complétude de la filtration brownienne

Ce théorème exprime que la filtration brownienne est « complète » au sens où toute martingale peut s'écrire comme intégrale stochastique par rapport au brownien. C'est un résultat central pour les applications en finance (théorème de complétude des marchés).

7.8 Théorème de Girsanov

Théorème 7.17 (Girsanov). Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien sous $\mathbb{P}$ et $(\theta_t)_{t \geq 0}$ un processus adapté avec $\int_0^T \theta_s^2 ds < \infty$ p.s. Définissons l'exponentielle de Doléans–Dade :

$$Z_t = \exp\left(-\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds\right).$$

Si (Z_t) est une martingale (condition de Novikov : $\mathbb{E}[\exp(\frac{1}{2} \int_0^T \theta_s^2 ds)] < \infty$), alors sous la mesure $\mathbb{Q}$ définie par $d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_T} = Z_T$, le processus

$$\tilde{B}_t = B_t + \int_0^t \theta_s ds$$

est un mouvement brownien.

7.9 Convergence en temps continu

Théorème 7.18 (Convergence des martingales continues). Soit $(M_t)_{t \geq 0}$ une sur-martingale continue à droite avec $\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[M_t^+] < \infty$. Alors $M_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} M_t$ existe p.s. et $M_\infty \in L^1$.

7.10 Exercices

Exercice 7.1. Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien. Vérifier que $M_t = \exp(\theta B_t - \theta^2 t/2)$ est une martingale pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 7.2. Démontrer que si (M_t) est une martingale locale continue positive, alors c'est une sur-martingale. *Indication : utiliser le lemme de Fatou.*

Exercice 7.3. Soit (M_t) une martingale continue de carré intégrable. Montrer que $\mathbb{E}[M_t^2] = \mathbb{E}[M_0^2] + \mathbb{E}[\langle M \rangle_t]$.

Exercice 7.4. Calculer $\langle M \rangle_t$ pour $M_t = B_t^2 - t$ où (B_t) est un mouvement brownien.

Exercice 7.5. Soit (B_t) un mouvement brownien et $\tau_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$. Utiliser le théorème d'arrêt avec la martingale exponentielle pour calculer $\mathbb{E}[e^{-\alpha \tau_a}]$ pour $\alpha > 0$ et $a > 0$.

Exercice 7.6. Énoncer et démontrer le théorème de Girsanov dans le cas où $\theta_t = \theta$ est constant. Vérifier la condition de Novikov.

Exercice 7.7. Montrer que l'inégalité de Burkholder–Davis–Gundy (théorème 7.8) implique l'inégalité L^2 de Doob pour les martingales continues.

Chapitre 8

Mouvement Brownien

En 1827, le botaniste Robert Brown observe au microscope des grains de pollen suspendus dans l'eau. Ils tremblent, s'agitent, changent de direction sans cesse — et personne ne comprend pourquoi. Il faudra attendre 1905 et un employé du bureau des brevets de Berne, un certain Albert Einstein, pour que le mystère commence à se dissiper : ces grains sont bombardés par des milliards de molécules d'eau, et leur trajectoire erratique reflète l'agitation thermique du fluide. Parallèlement, le mathématicien Louis Bachelier avait déjà, dans sa thèse de 1900, modélisé les fluctuations boursières par un processus aux propriétés remarquablement similaires.

Ce qui nous amène à la question fondamentale de ce chapitre : peut-on construire un objet mathématique rigoureux qui capture cette agitation aléatoire perpétuelle ? Un processus continu, qui repart de zéro, dont les incréments ne gardent aucune mémoire les uns des autres, et dont chaque pas suit une loi gaussienne ? La réponse est oui, et cet objet s'appelle le *mouvement brownien*.

8.1 Définition

Commençons par énoncer précisément ce que nous cherchons à construire. Quatre propriétés, ni plus ni moins, suffisent à caractériser le mouvement brownien. Chacune encode un aspect physique : le départ de l'origine, l'absence de mémoire, la normalité des fluctuations, et la continuité du mouvement.

Définition 8.1 (Mouvement brownien standard). Un processus stochastique $(B_t)_{t \geq 0}$ à valeurs réelles est un *mouvement brownien standard* (ou *processus de Wiener*) s'il vérifie :

1. $B_0 = 0$ p.s.,
2. (B_t) a des *accroissements indépendants* : pour tous $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, les v.a. $B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_3} - B_{t_2}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont indépendantes,
3. (B_t) a des *accroissements gaussiens stationnaires* : $B_{t+s} - B_s \sim \mathcal{N}(0, t)$ pour tous $s, t \geq 0$,
4. les trajectoires $t \mapsto B_t(\omega)$ sont p.s. *continues*.

La première condition fixe le point de départ. La deuxième dit que ce que fait le processus entre les instants t_1 et t_2 n'a aucune influence sur ce qu'il fera entre t_3 et t_4 : c'est la traduction mathématique du chaos moléculaire. La troisième impose que chaque

incrément suive une loi normale dont la variance est proportionnelle au temps écoulé : plus on attend, plus la particule s'éloigne, mais en $\sqrt{t}$ seulement. La quatrième, enfin, demande que les trajectoires soient continues : la particule ne « saute » jamais.

Remarque 8.2. Ces quatre conditions impliquent que le mouvement brownien est un processus gaussien centré de fonction de covariance $\text{Cov}(B_s, B_t) = \min(s, t)$. Pour le voir, il suffit d'écrire $B_s = B_s - B_0$ et $B_t = B_s + (B_t - B_s)$ pour $s \leq t$, puis d'exploiter l'indépendance de B_s et $B_t - B_s$.

La généralisation à plusieurs dimensions est naturelle : on lance d mouvements browniens indépendants en parallèle.

Définition 8.3 (Mouvement brownien multidimensionnel). Un mouvement brownien d -dimensionnel est $B_t = (B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(d)})$ où $B^{(1)}, \dots, B^{(d)}$ sont des mouvements browniens standards indépendants.

8.2 Existence : construction de Lévy–Ciesielski

Mais voilà où les choses deviennent intéressantes : la définition ne garantit pas qu'un tel objet *existe*. Nous avons écrit une liste de souhaits — encore faut-il montrer que quelqu'un peut les exaucer. C'est là qu'intervient la construction de Lévy–Ciesielski, l'une des plus élégantes de l'analyse stochastique.

Théorème 8.4 (Existence du mouvement brownien). *Il existe un processus stochastique vérifiant les quatre propriétés de la définition 8.1.*

L'idée est de construire le mouvement brownien comme une série aléatoire dans l'espace des fonctions continues, un peu comme on décompose un signal en série de Fourier — sauf qu'ici, les coefficients sont des variables aléatoires gaussiennes.

Construction de Lévy–Ciesielski (esquisse). On utilise la base de Schauder de $C([0, 1])$: une famille de fonctions « chapeau » dyadiques s_n qui forment une base de cet espace. Soit $(Z_n)_{n \geq 0}$ une suite de v.a. i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose :

$$B_t = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n s_n(t).$$

Chaque terme de la série ajoute un « tremblement » à une échelle de plus en plus fine. La beauté de la construction est que la série converge uniformément p.s. dans $C([0, 1])$, et la limite est un mouvement brownien sur $[0, 1]$. L'extension à $\mathbb{R}_+$ se fait par concaténation de copies indépendantes. $\square$

Norbert Wiener avait déjà donné une construction en 1923, mais celle de Lévy–Ciesielski, plus tardive, a l'avantage de rendre la convergence uniforme transparente. Aujourd'hui, d'autres constructions existent (interpolation gaussienne, théorème de Kolmogorov–Chentsov), mais celle-ci reste la plus éclairante pédagogiquement.

8.3 Propriétés fondamentales

Maintenant que nous savons que le mouvement brownien existe, explorons ses symétries et ses structures cachées. Ces propriétés ne sont pas de simples curiosités : chacune d'entre elles sera un outil de calcul puissant dans la suite du cours.

Commençons par un fait remarquable : le mouvement brownien est une martingale. Intuitivement, cela signifie que la meilleure prédiction de B_t connaissant le passé est simplement sa valeur actuelle — le brownien ne « dérive » dans aucune direction.

Proposition 8.5 (Propriétés de martingale). Le mouvement brownien vérifie :

1. (B_t) est une martingale par rapport à sa filtration naturelle.
2. $(B_t^2 - t)$ est une martingale.
3. $\exp(\theta B_t - \theta^2 t/2)$ est une martingale pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

La deuxième propriété dit que B_t^2 croît en moyenne comme t : c'est la signature de la diffusion. La troisième — la martingale exponentielle — est l'outil clé du changement de mesure de Girsanov.

Ce qui nous amène aux *symétries* du mouvement brownien, qui révèlent à quel point cet objet est « autosimilaire ». On peut le retoquer, le dilater, le décaler dans le temps, voire le retourner — et on obtient à chaque fois un nouveau mouvement brownien.

Proposition 8.6 (Propriétés d'invariance). Les processus suivants sont encore des mouvements browniens standards :

1. **Symétrie** : $(-B_t)_{t \geq 0}$.
2. **Scaling** : $(c^{-1/2} B_{ct})_{t \geq 0}$ pour tout $c > 0$.
3. **Translation temporelle** : $(B_{t+s} - B_s)_{t \geq 0}$ pour tout $s \geq 0$.
4. **Inversion temporelle** : $(tB_{1/t})_{t > 0}$ (avec la convention $B_{1/t}|_{t=0} = 0$).

L'invariance par scaling est particulièrement frappante : elle dit que si vous zoomez sur une trajectoire brownienne (en ajustant l'échelle verticale en $\sqrt{c}$), vous obtenez exactement la même loi. C'est une propriété *fractale* — et nous verrons bientôt qu'elle se manifeste dans la régularité des trajectoires.

Proposition 8.7 (Propriété de Markov forte). Pour tout temps d'arrêt τ fini p.s., le processus $(B_{\tau+t} - B_\tau)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_\tau$.

La propriété de Markov forte est la version « améliorée » de la propriété de Markov : elle dit que l'on peut redémarrer le brownien non seulement à un instant déterministe, mais aussi à un temps d'arrêt aléatoire. C'est cette propriété qui rend possible l'analyse des temps de premier passage.

8.4 Régularité des trajectoires

Imaginons que vous tracez une trajectoire brownienne sur un papier, avec un crayon infiniment fin. Quelle serait la nature de cette courbe ? La réponse est à la fois belle et troublante : la courbe est continue — vous ne leveriez jamais le crayon — mais elle est si tourmentée qu'elle n'admet de tangente *nulle part*. C'est un objet continu mais infiniment rugueux, une courbe qui défie l'intuition géométrique classique.

Théorème 8.8 (Hölder-continuité). *Les trajectoires du mouvement brownien sont p.s. höldériennes d'exposant γ pour tout $\gamma < 1/2$, mais pas pour $\gamma = 1/2$.*

L'exposant $1/2$ est le seuil critique : les trajectoires sont « presque » lipschitziennes d'exposant $1/2$, mais pas tout à fait. Ce « presque » a des conséquences profondes.

Théorème 8.9 (Non-dérivabilité). *Les trajectoires du mouvement brownien sont p.s. nulle part dérivables. Plus précisément, pour presque tout ω , il n'existe aucun $t \geq 0$ tel que $\lim_{h \rightarrow 0} (B_{t+h}(\omega) - B_t(\omega))/h$ existe (même comme limite infinie).*

Ce résultat est stupéfiant quand on y réfléchit : nous avons une fonction continue définie sur $\mathbb{R}_+$ tout entier qui n'est dérivable en aucun point. Avant Weierstrass (1872), les mathématiciens pensaient qu'une telle chose était impossible. Le mouvement brownien nous offre un exemple « naturel » — produit par la physique elle-même, pas par un contre-exemple artificiel.

Mais les surprises ne s'arrêtent pas là. La question suivante est : si les trajectoires browniennes sont si irrégulières, quelle est leur « longueur » ? Et leur « énergie » ?

Théorème 8.10 (Variation quadratique). *Pour toute suite de partitions $\Pi_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{k_n}^n = t\}$ de $[0, t]$ avec $|\Pi_n| \rightarrow 0$:*

$$\sum_{i=0}^{k_n-1} (B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 \xrightarrow{L^2} t.$$

Autrement dit, $\langle B \rangle_t = t$.

Démonstration. La preuve est étonnamment courte pour un résultat aussi fondamental. Posons $Q_n = \sum_{i=0}^{k_n-1} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2$. Par linéarité de l'espérance et stationnarité des accroissements : $\mathbb{E}[Q_n] = \sum_i (t_{i+1} - t_i) = t$. Il reste à montrer que la variance de Q_n tend vers zéro :

$$\begin{aligned} \text{Var}(Q_n) &= \sum_i \text{Var}((B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2) = \sum_i 2(t_{i+1} - t_i)^2 \\ &\leq 2 |\Pi_n| \sum_i (t_{i+1} - t_i) = 2 |\Pi_n| \cdot t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Donc $Q_n \rightarrow t$ dans L^2 , ce qui signifie que la somme des carrés des incréments converge vers t , quelle que soit la partition choisie. $\square$

Théorème 8.11 (Variation totale infinie). *Les trajectoires du mouvement brownien ont p.s. une variation totale infinie sur tout intervalle $[0, t]$ avec $t > 0$:*

$$\sup_{\Pi} \sum_i |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}| = +\infty \quad p.s.$$

Variation quadratique finie, variation totale infinie

Voici le paradoxe central qui motive toute la théorie de l'intégration stochastique : le mouvement brownien a une variation quadratique finie ($= t$) mais une variation totale infinie. Concrètement, la « longueur » de la trajectoire est infinie (on ne peut pas la mesurer au sens classique), mais la « somme des carrés » des oscillations converge. C'est précisément cette propriété qui empêche de définir l'intégrale stochastique $\int_0^t f dB$ au sens de Stieltjes et nécessite la construction spéciale d'Itô, que nous verrons au chapitre suivant.

8.5 Loi du logarithme itéré

Nous savons désormais que le mouvement brownien oscille sans cesse, sans jamais dériver dans une direction précise. Mais à quelle « vitesse » s'écarte-t-il de l'origine ? Sa variance croît comme t , donc sa déviation typique est de l'ordre de $\sqrt{t}$. Mais le mouvement brownien peut-il aller beaucoup plus loin que $\sqrt{t}$, ne serait-ce qu'occasionnellement ? La loi du logarithme itéré — l'un des théorèmes les plus fins de la théorie des probabilités — répond avec une précision chirurgicale.

Théorème 8.12 (Loi du logarithme itéré).

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1 \quad p.s.$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log t}} = -1 \quad p.s.$$

Il existe un résultat analogue en $t \rightarrow 0$:

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log(1/t)}} = 1 \quad p.s.$$

Ce théorème, dû à Khintchine (1924), est remarquable. Il dit que l'enveloppe exacte du mouvement brownien est $\pm \sqrt{2t \log \log t}$. Le brownien dépasse cette enveloppe infiniment souvent, mais revient toujours en dessous. Et la version en $t \rightarrow 0$ révèle que même au voisinage de l'origine, les oscillations sont déjà aussi violentes : il n'y a pas d'« instant calme ».

8.6 Principe de réflexion et loi du maximum

Changeons de perspective. Supposons que nous lançons un mouvement brownien et que nous nous demandons : quand atteindra-t-il pour la première fois le niveau $a > 0$? Et quel est le maximum atteint sur l'intervalle $[0, t]$? Ces questions, fondamentales en finance (barrières d'options) et en physique (temps de premier passage), trouvent une réponse élégante grâce au *principe de réflexion*.

L'idée géométrique est limpide : une fois que le brownien a touché le niveau a , par la propriété de Markov forte, il redémarre comme un brownien neuf. Mais un brownien neuf est symétrique. Donc on peut « refléter » la trajectoire après le temps d'atteinte, et cette réflexion a exactement la même loi que la trajectoire originale.

Théorème 8.13 (Principe de réflexion). Soit $\tau_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$ pour $a > 0$. Pour tout $b \leq a$:

$$\mathbb{P}(\tau_a \leq t, B_t \leq b) = \mathbb{P}(B_t \geq 2a - b).$$

De ce principe découlent immédiatement la loi du maximum et celle du temps de premier passage.

Corollaire 8.14 (Loi du maximum). Soit $M_t = \max_{0 \leq s \leq t} B_s$. Alors :

$$\mathbb{P}(M_t \geq a) = 2\mathbb{P}(B_t \geq a) = 2(1 - \Phi(a/\sqrt{t})), \quad a \geq 0,$$

où Φ est la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0, 1)$. De plus, $M_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} |B_t|$.

L'identité $M_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} |B_t|$ est surprenante : le maximum du brownien sur $[0, t]$ a la même loi que la valeur absolue du brownien en t . Ce n'est pas une coïncidence, mais une conséquence profonde de la symétrie du processus.

Corollaire 8.15 (Loi de τ_a). Pour $a > 0$:

$$\mathbb{P}(\tau_a \leq t) = 2(1 - \Phi(a/\sqrt{t})), \quad f_{\tau_a}(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}t^{3/2}} \exp\left(-\frac{a^2}{2t}\right), \quad t > 0.$$

En particulier, $\mathbb{E}[\tau_a] = +\infty$.

Ce dernier résultat mérite qu'on s'y arrête : le temps moyen pour atteindre *n'importe quel* niveau $a \neq 0$ est *infini*. Le mouvement brownien finit toujours par atteindre a (c'est la récurrence), mais il met en moyenne un temps infini à le faire. La queue de la distribution de τ_a est si lourde ($\sim t^{-3/2}$) que l'espérance diverge.

8.7 Mouvement brownien et équations aux dérivées partielles

L'un des ponts les plus profonds des mathématiques modernes relie les probabilités aux équations aux dérivées partielles. Ce pont, c'est la formule de Feynman–Kac, qui dit en substance : résoudre l'équation de la chaleur, c'est calculer une espérance sur les trajectoires browniennes. Richard Feynman et Mark Kac l'ont découverte indépendamment à la fin des années 1940, et elle est devenue l'un des outils les plus puissants de la physique mathématique.

Théorème 8.16 (Formule de Feynman–Kac (cas simple)). Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bornée et continue. La fonction

$$u(t, x) = \mathbb{E}_x[g(B_T)] = \mathbb{E}[g(x + B_{T-t})], \quad 0 \leq t \leq T,$$

est l'unique solution bornée de l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u(T, x) = g(x).$$

L'équation de la chaleur décrit la diffusion de la température dans une barre métallique. La formule de Feynman–Kac dit que la température au point x et au temps t est exactement la valeur moyenne de la condition finale g , évaluée en un point où le brownien issu de x se retrouverait au temps T . La chaleur se propage comme une marche aléatoire continue.

8.8 Temps locaux

Terminons ce chapitre par un concept plus subtil : le *temps local*. Imaginons que nous équipions le niveau a d'un compteur qui s'incrémente chaque fois que le brownien « passe du temps » au voisinage de a . Ce compteur, c'est le temps local L_t^a : il mesure la quantité de temps que le brownien passe autour du point a jusqu'à l'instant t .

Plus précisément, le temps local est la densité de la mesure d'occupation du brownien.

Définition 8.17 (Temps local). Le *temps local* du mouvement brownien au niveau $a \in \mathbb{R}$ est le processus $(L_t^a)_{t \geq 0}$ défini par la *formule de densité d'occupation* :

$$\int_0^t f(B_s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a) L_t^a da$$

pour toute fonction borélienne $f \geq 0$. Équivalamment :

$$L_t^a = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{\{|B_s - a| < \varepsilon\}} ds.$$

Le temps local est l'ingrédient clé de la formule de Tanaka, qui est elle-même une généralisation de la formule d'Itô aux fonctions non lisses. Là où Itô exige C^2 , Tanaka s'applique à la fonction valeur absolue — qui n'est pas dérivable en zéro — au prix de l'apparition du temps local.

Théorème 8.18 (Formule de Tanaka). *Pour tout $a \in \mathbb{R}$:*

$$|B_t - a| = |a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s - a) dB_s + L_t^a,$$

où $\operatorname{sgn}(x) = \mathbf{1}_{\{x > 0\}} - \mathbf{1}_{\{x \leq 0\}}$.

Remarque 8.19. La convention $\operatorname{sgn}(0) = -1$ adoptée ici est arbitraire : certains auteurs utilisent $\operatorname{sgn}(0) = 0$ ou $\operatorname{sgn}(0) = +1$. Le choix n'affecte pas la formule de Tanaka, car l'ensemble $\{s : B_s = a\}$ est de mesure de Lebesgue nulle p.s., donc la valeur de sgn en 0 ne modifie pas l'intégrale stochastique $\int_0^t \operatorname{sgn}(B_s - a) dB_s$.

8.9 Exercices

Exercice 8.1. Montrer que le mouvement brownien est p.s. non monotone sur tout intervalle.

Exercice 8.2. Calculer $\mathbb{E}[B_s B_t]$ pour $s, t \geq 0$ directement à partir de la définition.

Exercice 8.3. Vérifier que $(tB_{1/t})_{t > 0}$ est un mouvement brownien (avec la convention $= 0$ en $t = 0$).

Exercice 8.4. Utiliser le principe de réflexion pour calculer $\mathbb{P}(\tau_1 \leq 4)$.

Exercice 8.5. Soit (B_t) un mouvement brownien et $f \in C^2(\mathbb{R})$ avec $f'' \leq 0$. Montrer que $(f(B_t))$ est une sur-martingale locale.

Exercice 8.6. Démontrer que $\mathbb{E}[\tau_a] = +\infty$ pour tout $a \neq 0$ en utilisant la densité de τ_a .

Exercice 8.7. Montrer que le pont brownien $X_t = B_t - tB_1$ ($0 \leq t \leq 1$) est un processus gaussien et calculer sa fonction de covariance. Vérifier que $X_0 = X_1 = 0$ p.s.

Chapitre 9

Intégrale Stochastique d'Itô

9.1 Motivation

En 1942, à Kyoto, le mathématicien Kiyosi Itô s'attaque à un problème fondamental : comment définir une intégrale par rapport au mouvement brownien ? Les trajectoires du brownien sont continues mais nulle part différentiables, et leur variation totale est infinie sur tout intervalle. L'intégrale de Stieltjes classique ne s'applique donc pas. Itô contourne l'obstacle par une construction ingénieuse : il approche l'intégrande par des processus étagés et montre que la limite existe dans L^2 , grâce à l'isométrie d'Itô. Le choix du point d'évaluation à *gauche* de chaque intervalle (contrairement à Stratonovich, qui prend le milieu) donne à l'intégrale d'Itô la propriété d'être une martingale — propriété cruciale pour la finance et les probabilités.

L'objectif de ce chapitre est de donner un sens rigoureux à l'intégrale

$$\int_0^t H_s dB_s,$$

où (B_t) est un mouvement brownien et (H_t) un processus adapté. Comme les trajectoires du brownien sont à variation totale infinie (théorème 8.11), cette intégrale ne peut pas être définie au sens de Stieltjes. La construction d'Itô procède par approximation.

9.2 Construction pour les processus étagés

Définition 9.1 (Processus étagé). Un processus $(H_t)_{t \in [0, T]}$ est *étagé* (ou *simple*, ou *en escalier*) s'il existe une partition $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ et des v.a. bornées $\mathcal{F}_{t_k}$ -mesurables H_k telles que :

$$H_t = H_0 \mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} H_k \mathbf{1}_{(t_k, t_{k+1}]}(t).$$

On note $\mathcal{S}$ l'espace des processus étagés.

Définition 9.2 (Intégrale d'Itô pour les processus étagés). Pour $H \in \mathcal{S}$, on définit :

$$I(H) = \int_0^T H_s dB_s := \sum_{k=0}^{n-1} H_k (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}).$$

Évaluation à gauche

Dans la définition d'Itô, l'intégrande H_k est évalué au temps *gauche* t_k de l'intervalle $(t_k, t_{k+1}]$. Ce choix est crucial pour la propriété de martingale. Un choix différent (par exemple au milieu, comme dans l'intégrale de Stratonovich) donne un résultat différent.

Proposition 9.3 (Propriétés de l'intégrale pour les processus étagés). Pour $H, G \in \mathcal{S}$ et $a, b \in \mathbb{R}$:

1. **Linéarité** : $I(aH + bG) = aI(H) + bI(G)$.
2. **Espérance nulle** : $\mathbb{E}[I(H)] = 0$.
3. **Isométrie d'Itô** : $\mathbb{E}[I(H)^2] = \mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2 ds\right]$.
4. **Propriété de martingale** : le processus $t \mapsto \int_0^t H_s dB_s$ est une martingale.

Preuve de l'isométrie d'Itô.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I(H)^2] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} H_k \Delta B_k\right)^2\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[H_k^2 (\Delta B_k)^2] + 2 \sum_{j < k} \mathbb{E}[H_j \Delta B_j H_k \Delta B_k]. \end{aligned}$$

Les termes croisés s'annulent car, pour $j < k$:

$$\mathbb{E}[H_j \Delta B_j H_k \Delta B_k] = \underbrace{\mathbb{E}[H_j \Delta B_j H_k]}_{\mathcal{F}_{t_k}\text{-mesurable}} \underbrace{\mathbb{E}[\Delta B_k | \mathcal{F}_{t_k}]}_{=0} = 0.$$

Pour les termes diagonaux :

$$\mathbb{E}[H_k^2 (\Delta B_k)^2] = \mathbb{E}[H_k^2 \mathbb{E}[(\Delta B_k)^2 | \mathcal{F}_{t_k}]] = \mathbb{E}[H_k^2 (t_{k+1} - t_k)].$$

Donc $\mathbb{E}[I(H)^2] = \sum_k \mathbb{E}[H_k^2 (t_{k+1} - t_k)] = \mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2 ds\right]$. □

9.3 Extension aux processus L^2

Définition 9.4 (Espace $\mathcal{H}^2$). On définit l'espace des intégrandes admissibles :

$$\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}^2([0, T]) = \left\{ H \text{ adapté} : \mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2 ds\right] < \infty \right\}.$$

Muni de la norme $\|H\|_{\mathcal{H}^2} = (\mathbb{E}[\int_0^T H_s^2 ds])^{1/2}$, c'est un espace de Hilbert.

Théorème 9.5 (Extension de l'intégrale d'Itô). *L'application linéaire isométrique $I : \mathcal{S} \rightarrow L^2(\Omega)$ s'étend de manière unique en une isométrie $I : \mathcal{H}^2 \rightarrow L^2(\Omega)$. L'intégrale étendue, notée*

$$\int_0^T H_s dB_s = I(H),$$

vérifie les mêmes propriétés que pour les processus étagés : linéarité, espérance nulle, isométrie d'Itô.

Idee de la preuve. L'espace $\mathcal{S}$ est dense dans $\mathcal{H}^2$ (on peut approcher tout processus adapté de carré intégrable par des processus étagés). L'isométrie d'Itô garantit que I est une isométrie de $(\mathcal{S}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}^2})$ dans $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2})$. Par complétude de $L^2(\Omega)$, I s'étend de manière unique. $\square$

9.4 Propriétés de l'intégrale d'Itô

Théorème 9.6 (Propriétés fondamentales). *Soit $H \in \mathcal{H}^2([0, T])$. Le processus $M_t = \int_0^t H_s dB_s$ vérifie :*

1. **Continuité** : (M_t) a une version à trajectoires continues.
2. **Martingale** : $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$ est une martingale de carré intégrable par rapport à $(\mathcal{F}_t)$.
3. **Isométrie d'Itô** : $\mathbb{E}[M_t^2] = \mathbb{E}[\int_0^t H_s^2 ds]$.
4. **Variation quadratique** : $\langle M \rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds$.

Propriétés clés de l'intégrale d'Itô

Pour $M_t = \int_0^t H_s dB_s$ avec $H \in \mathcal{H}^2$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_t] &= 0 \\ \mathbb{E}[M_t^2] &= \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 ds\right] \quad (\text{isométrie d'Itô}) \\ \langle M \rangle_t &= \int_0^t H_s^2 ds \\ dM_t &= H_t dB_t \end{aligned}$$

9.5 Extension aux intégrandes localement L^2

Définition 9.7 (Intégrale d'Itô généralisée). Pour un processus adapté H avec $\int_0^T H_s^2 ds < \infty$ p.s. (mais pas nécessairement $\mathbb{E}[\int_0^T H_s^2 ds] < \infty$), on définit l'intégrale d'Itô par localisation : on pose $\tau_n = \inf\{t : \int_0^t H_s^2 ds \geq n\}$ et $\int_0^t H_s dB_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{t \wedge \tau_n} H_s dB_s$.

Le processus résultant est une *martingale locale* continue.

9.6 Intégrale de Stratonovich

Définition 9.8 (Intégrale de Stratonovich). L'intégrale de Stratonovich est définie par :

$$\int_0^T H_s \circ dB_s = \lim_{|\Pi| \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{H_{t_k} + H_{t_{k+1}}}{2} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}).$$

Proposition 9.9 (Relation Itô–Stratonovich). Si $H_t = f(B_t)$ avec $f \in C^1(\mathbb{R})$, alors :

$$\int_0^T f(B_s) \circ dB_s = \int_0^T f(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^T f'(B_s) ds.$$

Remarque 9.10. L'intégrale de Stratonovich obéit aux règles classiques du calcul différentiel (pas de terme correctif d'Itô) mais n'est pas une martingale en général. L'intégrale d'Itô est privilégiée en finance (propriété de martingale), tandis que l'intégrale de Stratonovich est naturelle en physique (invariance par changement de coordonnées).

9.7 Exemples de calcul

Exemple 9.11 ($\int_0^t B_s dB_s$). Pour une partition $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} B_{t_k} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{1}{2} (B_{t_{k+1}}^2 - B_{t_k}^2) - \frac{1}{2} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta B_k)^2. \end{aligned}$$

En passant à la limite et utilisant $\sum (\Delta B_k)^2 \rightarrow t$ (variation quadratique) :

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t.$$

Le terme $-t/2$

Le résultat $\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t$ montre que le calcul stochastique diffère du calcul classique. En calcul ordinaire, on aurait $\int_0^t x dx = x^2/2$. Le terme $-t/2$ est le « terme correctif d'Itô », conséquence de la variation quadratique non nulle du brownien.

Exemple 9.12 ($\int_0^t e^{B_s-s/2} dB_s$). Posons $M_t = e^{B_t-t/2}$. On vérifiera au chapitre suivant (formule d'Itô) que $dM_t = M_t dB_t$, donc :

$$\int_0^t e^{B_s-s/2} dB_s = M_t - M_0 = e^{B_t-t/2} - 1.$$

9.8 Exercices

Exercice 9.1. Calculer $\mathbb{E}[(\int_0^1 B_s dB_s)^2]$ en utilisant l'isométrie d'Itô.

Exercice 9.2. Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\int_0^t f(s) dB_s$ est une v.a. gaussienne et calculer sa loi.

Exercice 9.3. Calculer $\int_0^t s dB_s$ et vérifier que c'est une v.a. gaussienne de variance $t^3/3$.

Exercice 9.4. Montrer que $\int_0^t B_s^2 dB_s = \frac{1}{3} B_t^3 - \int_0^t B_s ds$ en utilisant la formule d'Itô (anticiper le chapitre suivant, ou démontrer directement par approximation).

Exercice 9.5. Soit $H_t = \text{sgn}(B_t)$ (signe du brownien). Vérifier que $H \in \mathcal{H}^2$ et que $\int_0^t \text{sgn}(B_s) dB_s = |B_t| - L_t^0$ (formule de Tanaka).

Exercice 9.6. Comparer les intégrales d'Itô et de Stratonovich de $\int_0^t B_s dB_s$ et vérifier la formule de correction.

Chapitre 10

Calcul d'Itô et Équations Différentielles Stochastiques

« Le calcul stochastique est l'art de donner un sens rigoureux à des intégrales que l'analyse classique refuse. »

La formule d'Itô est au calcul stochastique ce que la règle de la chaîne est au calcul différentiel classique — mais avec un terme supplémentaire. Quand on applique une fonction f à un processus d'Itô X_t , la différentielle de $f(X_t)$ contient non seulement le terme $f'(X_t) dX_t$ attendu, mais aussi un terme en $\frac{1}{2}f''(X_t)(dX_t)^2$ qui provient de la variation quadratique non nulle du mouvement brownien. Ce terme correctif, absent en analyse classique, est la signature du calcul stochastique. Il conduit aux équations différentielles stochastiques (EDS), dont les solutions décrivent l'évolution de systèmes soumis au bruit : le modèle de Black–Scholes en finance, le processus d'Ornstein–Uhlenbeck en physique, les équations de Langevin en chimie moléculaire.

Ce chapitre développe la théorie de l'intégrale d'Itô, établit la formule d'Itô (le « changement de variable » stochastique), puis étudie l'existence et l'unicité des solutions d'équations différentielles stochastiques (EDS). On traite en détail le mouvement brownien géométrique et le processus d'Ornstein–Uhlenbeck.

10.1 Construction de l'intégrale d'Itô

Définition 10.1 (Intégrale d'Itô pour les processus étagés). Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$. Pour un processus étagé $H_t = \sum_{i=0}^{n-1} h_i \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t)$ où chaque h_i est $\mathcal{F}_{t_i}$ -mesurable et borné, on définit :

$$\int_0^T H_s dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} h_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

Théorème 10.2 (Isométrie d'Itô). Pour tout processus étagé H adapté, on a :

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T H_s dB_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T H_s^2 ds \right].$$

Démonstration. On développe le carré :

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_i h_i \Delta B_i \right)^2 \right] = \sum_i \mathbb{E}[h_i^2] \mathbb{E}[(\Delta B_i)^2] + 2 \sum_{i < j} \mathbb{E}[h_i \Delta B_i h_j \Delta B_j].$$

Le premier terme donne $\sum_i \mathbb{E}[h_i^2] (t_{i+1} - t_i)$. Pour $i < j$, $h_j \Delta B_j$ est indépendant de $\mathcal{F}_{t_j}$ et $\mathbb{E}[\Delta B_j] = 0$, donc les termes croisés sont nuls. Ainsi $\mathbb{E}[(\int_0^T H dB)^2] = \mathbb{E}[\int_0^T H_s^2 ds]$. $\square$

Intuition

L'isométrie d'Itô est l'analogue stochastique de l'identité de Parseval en analyse de Fourier. Elle permet d'étendre l'intégrale d'Itô par continuité à tous les processus adaptés de carré intégrable, en utilisant la complétude de L^2 .

Définition 10.3 (Extension à L^2). Soit $\mathcal{H}_T^2$ l'espace des processus adaptés $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ tels que $\mathbb{E}[\int_0^T H_s^2 ds] < \infty$. L'intégrale d'Itô s'étend de manière unique à $\mathcal{H}_T^2$ par densité des processus étagés et par l'isométrie d'Itô.

Proposition 10.4 (Propriétés fondamentales). L'intégrale d'Itô $M_t = \int_0^t H_s dB_s$ vérifie :

1. **Martingale** : (M_t) est une martingale de carré intégrable.
2. **Linéarité** : $\int_0^t (\alpha H_s + \beta K_s) dB_s = \alpha \int_0^t H_s dB_s + \beta \int_0^t K_s dB_s$.
3. **Trajectoires continues** : $t \mapsto M_t$ est p.s. continu.

Attention

L'intégrale d'Itô n'est *pas* une intégrale de Riemann–Stieltjes car les trajectoires du brownien sont à variation infinie. L'évaluation au bord *gauche* de chaque intervalle est cruciale : choisir le milieu donnerait l'intégrale de Stratonovich, qui obéit à des règles de calcul différentes.

10.2 Formule d'Itô

Théorème 10.5 (Formule d'Itô, cas unidimensionnel). Soit $X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$ un processus d'Itô et $f \in C^2(\mathbb{R})$. Alors :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) b_s ds + \int_0^t f'(X_s) \sigma_s dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \sigma_s^2 ds.$$

Idée de la preuve. On écrit le développement de Taylor à l'ordre 2 : $f(X_{t+dt}) - f(X_t) \approx f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) (dX_t)^2$. La règle clé est $(dB_t)^2 = dt$ (en moyenne quadratique), tandis que $dt dB_t = 0$ et $(dt)^2 = 0$. Donc $(dX_t)^2 = \sigma_t^2 (dB_t)^2 + \dots = \sigma_t^2 dt$. L'intégration donne le résultat. $\square$

Remarque 10.6. Le terme supplémentaire $\frac{1}{2} f''(X_s) \sigma_s^2 ds$, absent en calcul classique, est appelé *terme correctif d'Itô*. Il provient de la variation quadratique non nulle du brownien.

Formules clés

Règles de calcul d'Itô

$$\begin{aligned}(dB_t)^2 &= dt, & dt \cdot dB_t &= 0, & (dt)^2 &= 0 \\ d(X_t Y_t) &= X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t dY_t & (\text{formule du produit}) \\ df(X_t) &= f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) (dX_t)^2\end{aligned}$$

Corollaire 10.7 (Formule d'Itô multidimensionnelle). Soit $\mathbf{X}_t = (X_t^1, \dots, X_t^d)$ un vecteur de processus d'Itô et $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$. Alors :

$$df(\mathbf{X}_t) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i} dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} d\langle X^i, X^j \rangle_t.$$

Exemple 10.8. Calculons $d(B_t^2)$ où B_t est un brownien standard. Avec $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$:

$$d(B_t^2) = 2B_t dB_t + \frac{1}{2} \cdot 2 dt = 2B_t dB_t + dt.$$

Ainsi $\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$, ce qui montre que l'intégrale d'Itô diffère de l'intégrale de Riemann–Stieltjes naïve.

10.3 Équations différentielles stochastiques

Définition 10.9 (Équation différentielle stochastique). Une **EDS** est une équation de la forme :

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t, \quad X_0 = x_0,$$

où $b : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est le *coefficient de dérive* et $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le *coefficient de diffusion*.

Théorème 10.10 (Existence et unicité (Itô–Lipschitz)). Si b et σ sont lipschitziens en x uniformément en t :

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K |x - y|,$$

et à croissance linéaire : $|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|)$, alors l'EDS admet une unique solution forte $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ adaptée et à trajectoires continues, vérifiant $\mathbb{E}[\sup_{0 \leq t \leq T} X_t^2] < \infty$.

Idée de la preuve. On procède par itération de Picard. On pose $X_t^{(0)} = x_0$ et :

$$X_t^{(n+1)} = x_0 + \int_0^t b(s, X_s^{(n)}) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)}) dB_s.$$

Grâce à la condition de Lipschitz et à l'isométrie d'Itô, on montre que $\mathbb{E}[\sup_{s \leq t} |X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)}|^2] \leq \frac{(Ct)^n}{n!}$ (lemme de Gronwall stochastique), d'où la convergence uniforme en L^2 . $\square$

10.4 Mouvement brownien géométrique

Définition 10.11 (Mouvement brownien géométrique). Le **mouvement brownien géométrique** (MBG) est la solution de :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t, \quad S_0 > 0.$$

Théorème 10.12 (Solution explicite du MBG). *La solution du MBG est :*

$$S_t = S_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right].$$

Démonstration. Posons $Y_t = \ln S_t$. Par la formule d'Itô avec $f(x) = \ln x$:

$$dY_t = \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} (dS_t)^2 = \mu dt + \sigma dB_t - \frac{\sigma^2}{2} dt = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dB_t.$$

Intégrant, $Y_t = Y_0 + (\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t$, d'où le résultat. $\square$

Intuition

Le MBG est le modèle canonique des prix d'actifs financiers (modèle de Black–Scholes). Le terme $-\sigma^2/2$ dans l'exponentielle est la correction d'Itô : sans lui, on aurait $\mathbb{E}[S_t] = S_0 e^{(\mu+\sigma^2/2)t}$ au lieu de $\mathbb{E}[S_t] = S_0 e^{\mu t}$.

10.5 Processus d'Ornstein–Uhlenbeck

Définition 10.13 (Processus d'Ornstein–Uhlenbeck). Le processus d'**Ornstein–Uhlenbeck** est solution de :

$$dX_t = -\theta (X_t - \mu) dt + \sigma dB_t, \quad X_0 = x_0,$$

où $\theta > 0$ est le taux de rappel, μ la moyenne à long terme et $\sigma > 0$ la volatilité.

Proposition 10.14 (Solution explicite). La solution est :

$$X_t = \mu + (x_0 - \mu) e^{-\theta t} + \sigma \int_0^t e^{-\theta(t-s)} dB_s.$$

En particulier, X_t est gaussien avec $\mathbb{E}[X_t] = \mu + (x_0 - \mu) e^{-\theta t}$ et $\text{Var}(X_t) = \frac{\sigma^2}{2\theta} (1 - e^{-2\theta t})$.

Démonstration. Posons $Y_t = e^{\theta t} (X_t - \mu)$. Par la formule d'Itô, $dY_t = \theta e^{\theta t} (X_t - \mu) dt + e^{\theta t} dX_t = \sigma e^{\theta t} dB_t$. Intégrant : $Y_t = Y_0 + \sigma \int_0^t e^{\theta s} dB_s$, soit $X_t - \mu = (x_0 - \mu) e^{-\theta t} + \sigma \int_0^t e^{-\theta(t-s)} dB_s$. La variance se calcule par l'isométrie d'Itô. $\square$

Remarque 10.15. Le processus d'Ornstein–Uhlenbeck est le seul processus gaussien qui soit à la fois stationnaire (pour $t \rightarrow \infty$), markovien et à trajectoires continues. Sa mesure invariante est $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/(2\theta))$.

10.6 Équation de Langevin

Définition 10.16 (Équation de Langevin). L'équation de Langevin pour une particule de masse m soumise à une force de friction $-\gamma v$ et à un bruit thermique s'écrit :

$$m dv_t = -\gamma v_t dt + \sqrt{2\gamma k_B T} dB_t,$$

où k_B est la constante de Boltzmann et T la température.

Proposition 10.17 (Relation de fluctuation-dissipation). À l'équilibre thermodynamique, la variance de la vitesse vérifie :

$$\text{Var}(v_\infty) = \frac{k_B T}{m},$$

ce qui est cohérent avec le théorème d'équipartition de l'énergie. Cette relation lie l'intensité du bruit ($2\gamma k_B T$) au coefficient de friction (γ).

Exercice 10.1. Montrer que $\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$ en utilisant la formule d'Itô. Interpréter la différence avec le calcul déterministe $\int_0^t x dx = x^2/2$.

Exercice 10.2. Résoudre l'EDS $dX_t = X_t dt + X_t dB_t$ avec $X_0 = 1$. Calculer $\mathbb{E}[X_t]$ et $\text{Var}(X_t)$.

Exercice 10.3. Simuler numériquement le processus d'Ornstein–Uhlenbeck par le schéma d'Euler–Maruyama :

$$X_{n+1} = X_n - \theta(X_n - \mu)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_n, \quad Z_n \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Vérifier que la distribution stationnaire est bien $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/(2\theta))$.

Exercice 10.4. Soit $f(t, x) = e^{-rt} x^\alpha$ et X_t un MBG de paramètres (μ, σ) . Appliquer la formule d'Itô pour calculer $df(t, X_t)$ et déterminer la valeur de α pour laquelle $f(t, X_t)$ est une martingale.

Exercice 10.5 (Conversion Stratonovich–Itô). Considérer l'EDS au sens de Stratonovich :

$$dX_t = X_t \circ dB_t.$$

1. Rappeler la relation générale entre l'intégrale de Stratonovich $\int_0^t \sigma(X_s) \circ dB_s$ et l'intégrale d'Itô, faisant intervenir le terme correctif $\frac{1}{2} \int_0^t \sigma'(X_s) \sigma(X_s) ds$.
2. Convertir l'EDS ci-dessus en une EDS au sens d'Itô.
3. Résoudre l'EDS d'Itô obtenue et vérifier que la solution est $X_t = X_0 e^{B_t}$. Comparer avec le MBG de paramètres $\mu = \sigma^2/2$, $\sigma = 1$.

Exercice 10.6 (Théorème de Girsanov). Soit $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$ un brownien standard sous $\mathbb{P}$ et soit $\theta \in \mathbb{R}$ une constante. On définit la martingale exponentielle :

$$Z_t = \exp\left(\theta B_t - \frac{\theta^2}{2} t\right).$$

1. Vérifier par la formule d'Itô que Z_t est une martingale sous $\mathbb{P}$.

2. On définit la mesure $\mathbb{Q}$ par $d\mathbb{Q} = Z_T d\mathbb{P}$. Montrer que $\tilde{B}_t = B_t - \theta t$ est un brownien standard sous $\mathbb{Q}$ (théorème de Girsanov).
3. Application : soit X_t solution de $dX_t = \mu dt + \sigma dB_t$ sous $\mathbb{P}$. Trouver une mesure $\mathbb{Q}$ sous laquelle X_t est un mouvement brownien (sans dérive). Donner $d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}$ explicitement.

Exercice 10.7 (Solutions fortes et faibles). Considérer l'EDS de Tanaka :

$$dX_t = \text{sign}(X_t) dB_t, \quad X_0 = 0,$$

où $\text{sign}(x) = \mathbb{1}_{x>0} - \mathbb{1}_{x\leq 0}$.

1. Montrer que le coefficient de diffusion $\sigma(x) = \text{sign}(x)$ ne satisfait pas la condition de Lipschitz en $x = 0$. Pourquoi le théorème d'existence forte (Itô–Lipschitz) ne s'applique-t-il pas ?
2. Montrer que si X_t est une solution, alors $Y_t = |X_t|$ satisfait l'équation $Y_t = |B_t|$ en loi (on pourra utiliser la formule de Tanaka). En déduire qu'une solution *faible* existe.
3. Expliquer pourquoi il n'existe pas de solution *forte* (c'est-à-dire une solution mesurable par rapport à la filtration engendrée par B). *Indication* : montrer que $\text{sign}(X_t)$ ne peut pas être déterminé par le seul brownien B .

Chapitre 11

Applications

« La théorie, c'est quand on sait tout et que rien ne fonctionne. La pratique, c'est quand tout fonctionne et que personne ne sait pourquoi. »

— Albert Einstein (attribué)

Ce chapitre présente des applications majeures du calcul stochastique : la formule de Black–Scholes en finance, le théorème de Feynman–Kac reliant EDP et EDS, le filtrage de Kalman, les applications en biologie et les méthodes de Monte Carlo pour les EDS.

11.1 Formule de Black–Scholes

Définition 11.1 (Modèle de Black–Scholes). Dans le modèle de **Black–Scholes**, le prix d'un actif risqué suit un mouvement brownien géométrique :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t,$$

et il existe un actif sans risque de rendement r . On suppose l'absence d'opportunité d'arbitrage et la possibilité de négocier en continu sans coûts de transaction.

Théorème 11.2 (Formule de Black–Scholes). *Le prix à l'instant t d'une option d'achat (call) européenne de prix d'exercice K et de maturité T est :*

$$C(t, S_t) = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2),$$

où Φ est la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0, 1)$ et :

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Démonstration. Sous la mesure risque-neutre $\mathbb{Q}$, le prix actualisé est une martingale : $C(t, S_t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t]$. Sous $\mathbb{Q}$, $S_T = S_t \exp[(r - \sigma^2/2)(T-t) + \sigma(B_T^{\mathbb{Q}} - B_t^{\mathbb{Q}})]$ où $B^{\mathbb{Q}}$ est un $\mathbb{Q}$ -brownien (théorème de Girsanov). Posant $Z = (B_T^{\mathbb{Q}} - B_t^{\mathbb{Q}})/\sqrt{T-t} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, on calcule :

$$C = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(S_t e^{(r-\sigma^2/2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}z} - K \right)^+ \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz.$$

L'intégrale se sépare sur $\{z > -d_2\}$, et après changement de variable $z' = z - \sigma\sqrt{T-t}$ dans le premier terme, on obtient les expressions annoncées. $\square$

Intuition

La formule de Black–Scholes dit que le prix de l’option ne dépend *pas* du rendement moyen μ de l’actif, mais uniquement de sa volatilité σ . C’est la conséquence de l’absence d’arbitrage : on peut couvrir parfaitement l’option en ajustant dynamiquement un portefeuille d’actions et d’actif sans risque.

Définition 11.3 (EDP de Black–Scholes). La fonction de prix $V(t, S)$ satisfait l’EDP :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + r S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - r V = 0,$$

avec la condition terminale $V(T, S) = (S - K)^+$ pour un call.

Formules clés**Formules de Black–Scholes et grecques**

$$C = S \Phi(d_1) - K e^{-r\tau} \Phi(d_2), \quad \tau = T - t$$

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = \Phi(d_1), \quad \Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\varphi(d_1)}{S \sigma \sqrt{\tau}}$$

$$\Theta = \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{S \sigma \varphi(d_1)}{2\sqrt{\tau}} - r K e^{-r\tau} \Phi(d_2), \quad \mathcal{V} = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = S \sqrt{\tau} \varphi(d_1)$$

11.2 Théorème de Feynman–Kac

Théorème 11.4 (Feynman–Kac). Soit $u(t, x)$ la solution de l’EDP :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b(x) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - r u = 0, \quad u(T, x) = g(x).$$

Alors u admet la représentation probabiliste :

$$u(t, x) = \mathbb{E}[e^{-r(T-t)} g(X_T) \mid X_t = x],$$

où X est solution de $dX_s = b(X_s) ds + \sigma(X_s) dB_s$.

Idée de la preuve. On applique la formule d’Itô à $e^{-rs} u(s, X_s)$ sur $[t, T]$. Le terme en ds s’annule grâce à l’EDP vérifiée par u , et il reste une intégrale stochastique (de martingale). En prenant l’espérance conditionnelle, l’intégrale stochastique disparaît et on obtient $e^{-rt} u(t, x) = \mathbb{E}[e^{-rT} g(X_T) \mid X_t = x]$. $\square$

Remarque 11.5. Le théorème de Feynman–Kac établit un lien fondamental entre EDP paraboliques et processus de diffusion. Il permet de résoudre des EDP par simulation de Monte Carlo, et réciproquement, d’analyser des problèmes stochastiques par des techniques d’EDP.

11.3 Filtrage de Kalman

Définition 11.6 (Modèle de filtrage linéaire). On considère le système linéaire à temps continu :

$$\begin{aligned} dX_t &= A X_t dt + \sigma_X dB_t^{(1)} \quad (\text{signal}), \\ dY_t &= H X_t dt + \sigma_Y dB_t^{(2)} \quad (\text{observation}), \end{aligned}$$

où $B^{(1)}$ et $B^{(2)}$ sont des browniens indépendants. Le problème de *filtrage* consiste à estimer X_t à partir des observations $(Y_s)_{0 \leq s \leq t}$.

Théorème 11.7 (Filtre de Kalman–Bucy). *L'estimateur optimal $\hat{X}_t = \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_t^Y]$ satisfait l'EDS :*

$$d\hat{X}_t = A \hat{X}_t dt + \frac{P_t H^T}{\sigma_Y^2} (dY_t - H \hat{X}_t dt),$$

où $P_t = \mathbb{E}[(X_t - \hat{X}_t)^2 | \mathcal{F}_t^Y]$ est la variance de l'erreur, solution de l'équation de Riccati :

$$\frac{dP_t}{dt} = 2A P_t + \sigma_X^2 - \frac{P_t^2 H^2}{\sigma_Y^2}.$$

Intuition

Le filtre de Kalman réalise un compromis optimal entre la prédiction du modèle dynamique ($A \hat{X}_t dt$) et l'innovation apportée par l'observation ($dY_t - H \hat{X}_t dt$). Le gain de Kalman $K_t = P_t H^T / \sigma_Y^2$ pondère ces deux sources : plus l'incertitude P_t est grande, plus on fait confiance aux observations.

11.4 Applications en biologie

Définition 11.8 (Expression génétique stochastique). L'expression d'un gène est un processus intrinsèquement stochastique. Le nombre de molécules de protéine P_t peut être modélisé par l'EDS de type Langevin :

$$dP_t = (k_{\text{prod}} - k_{\text{deg}} P_t) dt + \sqrt{k_{\text{prod}} + k_{\text{deg}} P_t} dB_t,$$

où k_{prod} est le taux de production et k_{deg} le taux de dégradation.

Proposition 11.9 (Bruit d'expression génétique). À l'équilibre, le nombre moyen de protéines est $\bar{P} = k_{\text{prod}}/k_{\text{deg}}$ et le *coefficient de variation* (mesure du bruit) est :

$$\text{CV}^2 = \frac{\text{Var}(P)}{\mathbb{E}[P]^2} \approx \frac{1}{\bar{P}}.$$

Le bruit est donc d'autant plus important que le nombre moyen de molécules est faible.

Remarque 11.10. Cette relation $\text{CV}^2 \approx 1/\bar{P}$ est connue sous le nom de *bruit poissonnien*. Elle a été vérifiée expérimentalement dans les cellules bactériennes par Elowitz et al. (2002).

11.5 Méthodes de Monte Carlo pour les EDS

Définition 11.11 (Schéma d'Euler–Maruyama). Le **schéma d'Euler–Maruyama** pour l'EDS $dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t$ est :

$$X_{n+1} = X_n + b(X_n) \Delta t + \sigma(X_n) \sqrt{\Delta t} Z_n, \quad Z_n \sim \mathcal{N}(0, 1) \text{ i.i.d.}$$

Théorème 11.12 (Convergence forte d'Euler–Maruyama). *Sous les conditions de Lipschitz sur b et σ , le schéma d'Euler–Maruyama converge avec l'ordre fort $1/2$:*

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - X_t^{(\Delta t)}|^2 \right]^{1/2} \leq C \sqrt{\Delta t}.$$

Définition 11.13 (Schéma de Milstein). Le **schéma de Milstein** améliore Euler–Maruyama en ajoutant le terme de correction d'Itô–Taylor :

$$X_{n+1} = X_n + b(X_n) \Delta t + \sigma(X_n) \sqrt{\Delta t} Z_n + \frac{1}{2} \sigma(X_n) \sigma'(X_n) (Z_n^2 - 1) \Delta t.$$

Ce schéma atteint l'ordre fort 1 : $(\mathbb{E}[\sup_t |X_t - X_t^{(\Delta t)}|^2])^{1/2} \leq C \Delta t$.

Attention

Pour le calcul de prix d'options (convergence *faible*), l'ordre faible d'Euler–Maruyama est déjà 1, donc Milstein n'apporte pas d'amélioration pour $\mathbb{E}[g(X_T)]$. La distinction entre convergence forte et faible est cruciale en pratique.

Formules clés

Résumé des schémas numériques pour EDS

Euler–Maruyama : $X_{n+1} = X_n + b \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z_n$ (ordre fort $1/2$)

Milstein : $X_{n+1} = X_n + b \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z_n + \frac{1}{2} \sigma \sigma' (Z_n^2 - 1) \Delta t$ (ordre fort 1)

Monte Carlo : $\mathbb{E}[g(X_T)] \approx \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M g(X_T^{(m)})$ (erreur $O(1/\sqrt{M})$)

```
import numpy as np
```

```
def euler_maruyama(b, sigma, x0, T, n_steps, n_paths):
    """Schema d'Euler-Maruyama pour une EDS scalaire."""
    dt = T / n_steps
    sqrt_dt = np.sqrt(dt)
    X = np.zeros((n_paths, n_steps + 1))
    X[:, 0] = x0
    for k in range(n_steps):
        Z = np.random.randn(n_paths)
        X[:, k+1] = (X[:, k] + b(X[:, k]) * dt
                    + sigma(X[:, k]) * sqrt_dt * Z)
```

```

return X

# Exemple : mouvement brownien geometrique
mu_val, sigma_val, S0 = 0.05, 0.2, 100.0
paths = euler_maruyama(
    b=lambda x: mu_val * x,
    sigma=lambda x: sigma_val * x,
    x0=S0, T=1.0, n_steps=1000, n_paths=10000
)
# Prix d'un call par Monte Carlo
K = 105.0
r = 0.03
call_price = np.exp(-r) * np.mean(np.maximum(paths[:, -1] - K, 0))

```

Exercice 11.1. Dériver la formule de Black–Scholes pour une option de vente (put) en utilisant la parité call-put : $C - P = S - K e^{-r(T-t)}$. Vérifier que $P = K e^{-r\tau} \Phi(-d_2) - S \Phi(-d_1)$.

Exercice 11.2. Appliquer le théorème de Feynman–Kac pour montrer que le prix d’une option barrière de type « knock-out » satisfait l’EDP de Black–Scholes avec condition au bord $V(t, B) = 0$ sur la barrière $S = B$.

Exercice 11.3. Implémenter le filtre de Kalman discret pour suivre la position d’un objet mobile observé avec bruit. Comparer les performances avec et sans modèle de vitesse.

Exercice 11.4. Comparer les schémas d’Euler–Maruyama et de Milstein pour le MBG : simuler $M = 10\,000$ trajectoires, estimer $\mathbb{E}[S_T]$ et comparer l’erreur numérique pour différents pas Δt . Vérifier les ordres de convergence théoriques.

Exercice 11.5. Simuler un modèle d’expression génétique stochastique avec $k_{\text{prod}} = 10$, $k_{\text{deg}} = 0.1$ par l’algorithme de Gillespie. Vérifier que la distribution stationnaire est approximativement de Poisson et calculer le coefficient de variation.

Bibliographie

- [1] Revuz, D. and Yor, M., *Continuous Martingales and Brownian Motion*, 3rd ed., Springer, 1999.
- [2] Karatzas, I. and Shreve, S.E., *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2nd ed., Springer, 1991.
- [3] Durrett, R., *Probability : Theory and Examples*, 5th ed., Cambridge, 2019.
- [4] Norris, J.R., *Markov Chains*, Cambridge, 1997.
- [5] Protter, P.E., *Stochastic Integration and Differential Equations*, 2nd ed., Springer, 2005.