

Théorie des Points Fixes

Notes de Cours

M1–Doctorat — 2025–2026

Yaë Ulrich Gaba

« Toute application continue d'un disque fermé dans lui-même possède au moins un point fixe. » — L.E.J. Brouwer

Table des matières

Préface	1
1 Introduction et Motivations	5
1.1 Qu'est-ce qu'un point fixe ?	5
1.2 Contexte historique	5
1.2.1 Les origines : Picard et Banach	6
1.2.2 Le théorème de Brouwer	6
1.2.3 Extensions en dimension infinie	6
1.2.4 Approche par l'ordre	6
1.3 Exemples élémentaires	6
1.4 Formulation comme équation fonctionnelle	7
1.4.1 Équations intégrales	7
1.4.2 Équations différentielles	7
1.4.3 Équations aux dérivées partielles	7
1.4.4 Équilibres de Nash	7
1.5 Trois familles de théorèmes	8
1.6 Rappels et préliminaires	8
1.6.1 Espaces métriques	8
1.6.2 Espaces de Banach	8
1.6.3 Convexité	9
1.7 Itération de Picard	9
1.8 Le théorème du point fixe en dimension 1	9
1.9 Degré topologique : aperçu	10
1.10 Plan du cours	10
1.11 Exercices	10
2 Principe de Contraction de Banach et Généralisations	13
2.1 Le théorème fondamental	13
2.2 Nécessité des hypothèses	14
2.3 Vitesse de convergence	15
2.4 Applications classiques	15
2.4.1 Théorème de Picard–Lindelöf	15
2.4.2 Équations intégrales de Fredholm	16
2.4.3 Théorème d'inversion locale	16
2.5 Généralisations directes	16
2.5.1 Contractions sur un fermé	16
2.5.2 Itérée contractante	16
2.5.3 Principe de Banach avec paramètre	17

2.6	Théorème de Banach–Caccioppoli généralisé	17
2.7	Applications non expansives	17
2.8	Contractions généralisées de Boyd–Wong	18
2.9	Contractions de Meir–Keeler	18
2.10	Théorème de point fixe de Matkowski	18
2.11	Exercices	19
3	Extensions Métriques	21
3.1	Introduction	21
3.2	Théorème d’Edelstein	21
3.3	Contractions de Kannan	22
3.4	Contractions de Chatterjea	23
3.5	Contraction de Ćirić	23
3.6	Théorème de Caristi	24
3.7	Équivalence de Caristi et du principe variationnel d’Ekeland	25
3.8	Contractions de Zamfirescu	25
3.9	Caractérisation de Subrahmanyam	26
3.10	Exercices	26
4	Espaces Métriques Généralisés	27
4.1	Introduction	27
4.2	b -Espaces métriques	27
4.2.1	Principe de contraction dans les b -espaces métriques	28
4.3	Espaces métriques partiels	29
4.4	G -Espaces métriques	29
4.5	Espaces métriques rectangulaires	30
4.6	Espaces métriques modulés	30
4.7	Comparaison des généralisations	31
4.8	Exercices	31
5	Théorème de Brouwer	33
5.1	Introduction et énoncé	33
5.2	Le lemme de non-rétraction	33
5.3	Preuve par le lemme de Sperner	34
5.3.1	Le lemme de Sperner	34
5.3.2	Preuve du théorème de Brouwer via Sperner	34
5.4	Preuve analytique	35
5.5	Conséquences du théorème de Brouwer	35
5.5.1	Théorème du point fixe pour les simplexes	35
5.5.2	Théorème de Borsuk–Ulam (dimension 1)	35
5.5.3	Théorème du sandwich au jambon	35
5.6	Contre-exemples : nécessité des hypothèses	36
5.7	Le degré topologique de Brouwer	36
5.8	Théorème du point fixe de Lefschetz	36
5.9	Exercices	37

6	Théorème de Schauder et Variantes	39
6.1	Motivation	39
6.2	Opérateurs compacts	39
6.3	Théorème de Schauder	39
6.4	Version de Schauder–Tychonoff	40
6.5	Théorème de Leray–Schauder	41
6.6	Mesure de non-compacité et théorème de Darbo	41
6.7	Théorème de Sadovskii	42
6.8	Théorème de Krasnoselskii	42
6.9	Applications	43
6.10	Exercices	43
7	Théorème de Kakutani et Correspondances	45
7.1	Correspondances et semi-continuité	45
7.2	Théorème de Kakutani	46
7.3	Extension de Glicksberg–Fan	47
7.4	Application : équilibre de Nash	47
7.5	Théorèmes minimax	48
7.6	Exercices	48
8	Points Fixes dans les Ensembles Ordonnés	49
8.1	Rappels sur les ensembles ordonnés	49
8.2	Théorème de Knaster–Tarski	50
8.3	Théorème de Bourbaki–Witt	50
8.4	Application à l’analyse formelle de concepts	51
8.5	Points fixes et opérateurs de fermeture	51
8.6	Exercices	52
9	Applications	53
9.1	Équations différentielles ordinaires : Picard–Lindelöf	53
9.2	Équations intégrales de Fredholm	54
9.3	Équations intégrales de Volterra	54
9.4	Théorème des fonctions implicites	55
9.5	Compléments : méthode de Newton et points fixes	56
9.6	Exercices	56
10	Théorème de Markov–Kakutani	57
10.1	Énoncé et preuve du théorème	57
10.2	Groupes moyennables	58
10.3	Exemples de groupes non moyennables	59
10.4	Variantes et généralisations	59
10.5	Exercices	59
11	Points Fixes Aléatoires	61
11.1	Opérateurs aléatoires	61
11.2	Théorème de sélection mesurable	61
11.3	Théorème de point fixe aléatoire de Banach	62
11.4	Point fixe aléatoire de Schauder	62
11.5	Applications en analyse stochastique	63

11.6 Théorème d'Itoh	63
11.7 Exercices	64

Préface

La théorie des points fixes constitue l'un des piliers fondamentaux de l'analyse mathématique moderne. Son influence s'étend bien au-delà des frontières de l'analyse fonctionnelle, irriguant des domaines aussi variés que la topologie, l'algèbre, l'optimisation, la théorie des jeux, l'économie mathématique et les équations aux dérivées partielles.

Objectifs du cours

Ce cours a été conçu pour les étudiants de Master et de Doctorat en mathématiques. Il vise à présenter de manière rigoureuse et complète les grands théorèmes de points fixes, leurs démonstrations, leurs généralisations et leurs applications.

Les objectifs pédagogiques principaux sont :

- Maîtriser les démonstrations complètes des théorèmes classiques (Banach, Brouwer, Schauder, Kakutani, Tarski-Knaster) ;
- Comprendre les liens profonds entre ces résultats et les structures mathématiques sous-jacentes (métriques, topologiques, ordonnées) ;
- Savoir appliquer ces théorèmes à la résolution de problèmes concrets : équations différentielles, équations intégrales, équilibres de Nash ;
- Explorer les extensions modernes : espaces métriques généralisés, points fixes aléatoires, correspondances multivoques.

Organisation du cours

Le cours est structuré en onze chapitres organisés en trois parties naturelles.

Partie I : Théorèmes métriques (Chapitres 1–4)

La première partie est consacrée aux résultats de type métrique. Après un chapitre d'introduction qui pose les motivations historiques et les définitions fondamentales, le Chapitre 2 présente le célèbre Principe de Contraction de Banach (1922) et ses généralisations directes. Le Chapitre 3 explore les extensions métriques dues à Edelstein, Kannan, Ćirić et Caristi, qui relâchent de différentes manières l'hypothèse de contraction. Le Chapitre 4 introduit les espaces métriques généralisés (b -métriques, G -métriques) et examine comment les théorèmes classiques s'y transposent.

Partie II : Théorèmes topologiques (Chapitres 5–7)

La deuxième partie aborde les théorèmes de nature topologique. Le Chapitre 5 est dédié au théorème de Brouwer (1911), véritable joyau de la topologie algébrique, avec plusieurs démonstrations (combinatoire via le lemme de Sperner, analytique, homologique). Le Chapitre 6 traite du théorème de Schauder (1930), généralisation en dimension infinie du théorème de Brouwer, et de ses variantes (Schauder–Tychonoff, Darbo). Le Chapitre 7 présente le théorème de Kakutani (1941) pour les correspondances multivoques, outil indispensable en théorie des jeux et en économie mathématique.

Partie III : Extensions et applications (Chapitres 8–11)

La troisième partie regroupe des thèmes avancés. Le Chapitre 8 étudie les points fixes dans les espaces ordonnés (théorèmes de Tarski, Knaster–Tarski, Bourbaki–Witt). Le Chapitre 9 est un chapitre transversal d’applications : équations différentielles ordinaires, équations aux dérivées partielles, équilibres de Nash, modèles économiques. Le Chapitre 10 présente le théorème de Markov–Kakutani et ses conséquences pour les points fixes communs de familles de transformations. Enfin, le Chapitre 11 introduit la théorie des points fixes aléatoires, domaine en plein essor.

Prérequis

Le lecteur doit posséder des connaissances solides en :

- **Analyse fonctionnelle** : espaces de Banach, espaces de Hilbert, opérateurs linéaires bornés, théorème de Hahn–Banach, compacité faible ;
- **Topologie générale** : espaces compacts, connexité, théorèmes de séparation, espaces métriques complets ;
- **Théorie de la mesure** : espaces mesurables, fonctions mesurables, intégration de Lebesgue (pour le Chapitre 11) ;
- **Algèbre linéaire** : espaces vectoriels de dimension finie, déterminants, formes multilinéaires.

Notations

Tout au long de ce cours, nous utiliserons les notations suivantes :

- $\mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$: les ensembles de nombres réels, naturels, entiers, rationnels et complexes ;
- (X, d) : un espace métrique, où d désigne la distance ;
- $\|\cdot\|$: une norme sur un espace vectoriel normé ;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$: un produit scalaire sur un espace de Hilbert ;
- $B(x, r)$: la boule ouverte de centre x et de rayon r ;

- $\overline{B}(x, r)$: la boule fermée de centre x et de rayon r ;
- $\overline{A}$: l'adhérence d'un ensemble A ;
- $\text{co}(A)$, $\overline{\text{co}}(A)$: l'enveloppe convexe et l'enveloppe convexe fermée de A ;
- $\text{Fix}(T)$: l'ensemble des points fixes de l'application T ;
- $\text{Lip}(T)$: la constante de Lipschitz de T .

Conventions

Sauf mention contraire :

- Les espaces vectoriels sont sur le corps $\mathbb{R}$ des réels ;
- Les espaces topologiques sont supposés séparés (Hausdorff) ;
- Les applications sont à valeurs réelles ou dans un espace de Banach ;
- Le symbole $\square$ marque la fin d'une démonstration ;
- Le symbole $\diamond$ marque la fin d'un exemple ou d'une remarque.

Guide de lecture

Ce cours peut être abordé de plusieurs manières selon le niveau et les intérêts du lecteur :

- **Parcours fondamental** (M1) : Chapitres 1, 2, 5 et 9. Ce parcours couvre le principe de contraction de Banach et le théorème de Brouwer avec leurs principales applications.
- **Parcours avancé** (M2) : Ajouter les Chapitres 3, 6, 7 et 8. Ce parcours complète la formation par les extensions métriques, le théorème de Schauder, le théorème de Kakutani et les espaces ordonnés.
- **Parcours recherche** (Doctorat) : L'intégralité du cours, avec une attention particulière aux Chapitres 4, 10 et 11 qui touchent à des thèmes de recherche actuels.

Remerciements

Ce cours doit beaucoup aux ouvrages classiques de la discipline, notamment ceux de Granas et Dugundji [2], Goebel et Kirk [10], Zeidler [8], Agarwal, Meehan et O'Regan [11], et Smart [4]. Nous remercions également les nombreux collègues et étudiants dont les remarques ont contribué à améliorer ce texte.

Comment utiliser ce cours

Chaque chapitre contient :

- Des **définitions** numérotées, précises et motivées ;
- Des **théorèmes** avec démonstrations complètes ;
- Des **exemples** illustratifs et des **contre-exemples** montrant la nécessité des hypothèses ;
- Des **remarques** éclairant les points subtils ;
- Des **exercices** de difficulté variée, certains avec indications.

Les encadrés spéciaux (formules clés, attention, intuition, algorithme) permettent de repérer rapidement les informations essentielles.

L'auteur
Mars 2026

Chapitre 1

Introduction et Motivations

Considérez un barman qui mélange un cocktail dans un verre. Après avoir vigoureusement agité le liquide, il est certain qu’au moins un point du liquide se retrouve exactement à sa position initiale. Ce résultat, connu sous le nom de théorème de Brouwer, illustre une idée simple mais profonde : sous certaines conditions, toute transformation possède au moins un *point fixe*, un point qui ne bouge pas. Cette idée traverse les mathématiques : elle apparaît en analyse, en topologie, en algèbre, en économie (l’équilibre de Nash), en informatique (la sémantique des programmes), et en théorie des jeux. Ce cours explore systématiquement les théorèmes de points fixes, leurs démonstrations, et leurs applications.

1.1 Qu’est-ce qu’un point fixe ?

La définition est d’une simplicité désarmante — mais ne vous y fiez pas.

Définition 1.1 (Point fixe). Soit X un ensemble et $T : X \rightarrow X$ une application. Un élément $x^* \in X$ est un *point fixe* de T si $T(x^*) = x^*$. L’ensemble des points fixes de T est noté

$$\text{Fix}(T) = \{x \in X : T(x) = x\}.$$

Cette définition, d’apparence élémentaire, conduit à des questions remarquablement profondes dès que l’on enrichit X d’une structure supplémentaire (métrique, topologie, ordre) et que l’on impose des conditions sur T .

Remarque 1.2. L’équation $T(x) = x$ peut être reformulée comme $F(x) = 0$ en posant $F = T - \text{Id}$. Réciproquement, toute équation $F(x) = 0$ peut se ramener à un problème de point fixe en posant $T(x) = x - F(x)$ (ou $T(x) = x + \alpha F(x)$ pour un paramètre α bien choisi). Cette dualité est à la base de nombreuses méthodes numériques.

1.2 Contexte historique

La théorie des points fixes a une histoire riche et fascinante.

1.2.1 Les origines : Picard et Banach

La méthode des approximations successives remonte aux travaux d'Émile Picard (1890) sur les équations différentielles ordinaires. Picard a montré que l'équation

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

possède une solution unique sous une condition de Lipschitz sur f par rapport à y , en construisant la suite d'itérées

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds.$$

C'est Stefan Banach qui, dans sa thèse de doctorat (1920, publiée en 1922), a formalisé cette idée en énonçant le *Principe de Contraction* dans le cadre général des espaces métriques complets.

1.2.2 Le théorème de Brouwer

En 1911, L. E. J. Brouwer a démontré qu'en dimension finie, toute application continue d'un convexe compact dans lui-même possède un point fixe. Ce résultat, de nature purement topologique (aucune hypothèse métrique), repose sur des arguments de degré topologique et de topologie algébrique.

1.2.3 Extensions en dimension infinie

Juliusz Schauder (1930) a généralisé le théorème de Brouwer aux espaces de Banach de dimension infinie, en remplaçant la compacité de l'ensemble par la compacité de l'application. Shizuo Kakutani (1941) a étendu le résultat aux correspondances multivoques (applications à valeurs ensemblistes).

1.2.4 Approche par l'ordre

Alfred Tarski (1955) a établi un théorème de point fixe dans les treillis complets, fondé uniquement sur la monotonie de l'application, sans aucune hypothèse métrique ou topologique. Ce résultat, souvent appelé théorème de Knaster–Tarski, trouve des applications en informatique théorique et en logique.

1.3 Exemples élémentaires

Exemple 1.3 (Point fixe en dimension 1). Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une application continue. Par le théorème des valeurs intermédiaires, f possède un point fixe.

En effet, posons $g(x) = f(x) - x$. Alors $g(0) = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x^* \in [0, 1]$ tel que $g(x^*) = 0$, c'est-à-dire $f(x^*) = x^*$.

Exemple 1.4 (Non-existence de point fixe). L'application $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $T(x) = x + 1$ n'a pas de point fixe. Cet exemple montre la nécessité de travailler dans un ensemble « suffisamment petit » (borné, compact, etc.).

Exemple 1.5 (Multiplicité des points fixes). L'application identité $T(x) = x$ a tous les points comme points fixes. L'application $T(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$ a exactement deux points fixes : 0 et 1.

Exemple 1.6 (Rotation sans point fixe). La rotation $R_\theta : S^1 \rightarrow S^1$ d'angle $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$ sur le cercle unité n'a pas de point fixe. Ceci montre que la convexité est essentielle dans le théorème de Brouwer : le cercle S^1 est compact mais non convexe.

1.4 Formulation comme équation fonctionnelle

De nombreux problèmes mathématiques classiques se reformulent comme des problèmes de points fixes.

1.4.1 Équations intégrales

L'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, s) u(s) ds$$

est de la forme $u = Tu$ où l'opérateur T est défini par

$$(Tu)(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, s) u(s) ds.$$

1.4.2 Équations différentielles

Le problème de Cauchy $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ est équivalent, sous des hypothèses de régularité, au problème de point fixe $y = Ty$ où

$$(Ty)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds.$$

1.4.3 Équations aux dérivées partielles

Les problèmes aux limites pour les EDP elliptiques se reformulent souvent comme des problèmes de points fixes dans des espaces de Sobolev. Par exemple, le problème

$$-\Delta u = g(u) \text{ dans } \Omega, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

s'écrit $u = (-\Delta)^{-1}g(u) = T(u)$.

1.4.4 Équilibres de Nash

Un équilibre de Nash dans un jeu à n joueurs peut être vu comme un point fixe d'une correspondance de meilleure réponse. Si S_i est l'ensemble des stratégies du joueur i et $BR_i(s_{-i})$ sa meilleure réponse aux stratégies des autres joueurs, alors un équilibre de Nash est un profil $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ tel que $s_i^* \in BR_i(s_{-i}^*)$ pour tout i .

1.5 Trois familles de théorèmes

Les théorèmes de points fixes se répartissent en trois grandes familles, selon la structure mathématique utilisée.

Les trois approches

1. **Approche métrique** : on suppose que T contracte les distances. Le point fixe est unique et obtenu par itération.
Prototype : théorème de Banach.
2. **Approche topologique** : on suppose la continuité de T et la compacité du domaine. L'existence est garantie, mais pas l'unicité ni la constructibilité.
Prototype : théorème de Brouwer.
3. **Approche par l'ordre** : on suppose la monotonie de T dans un treillis complet. L'existence est garantie, et l'ensemble des points fixes forme lui-même un treillis complet.
Prototype : théorème de Tarski.

1.6 Rappels et préliminaires

1.6.1 Espaces métriques

Définition 1.7 (Espace métrique). Un *espace métrique* est un couple (X, d) où X est un ensemble et $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ est une application vérifiant pour tous $x, y, z \in X$:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (séparation),
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie),
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

Définition 1.8 (Complétude). Un espace métrique (X, d) est *complet* si toute suite de Cauchy dans X converge. Rappelons qu'une suite (x_n) est de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ pour tous $m, n \geq N$.

Définition 1.9 (Application lipschitzienne). Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Une application $T : X \rightarrow Y$ est *lipschitzienne* de constante $L \geq 0$ si

$$d_Y(T(x), T(y)) \leq L d_X(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Si $L < 1$, on dit que T est une *contraction*. Si $L = 1$, on dit que T est *non expansive*.

1.6.2 Espaces de Banach

Définition 1.10 (Espace de Banach). Un *espace de Banach* est un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ complet pour la distance induite $d(x, y) = \|x - y\|$.

Définition 1.11 (Compacité). Un sous-ensemble K d'un espace topologique est *compact* si de tout recouvrement ouvert de K on peut extraire un sous-recouvrement fini. Dans un espace métrique, ceci équivaut à la compacité séquentielle : toute suite dans K possède une sous-suite convergente dans K .

Remarque 1.12. En dimension infinie, les boules fermées bornées ne sont jamais compactes (théorème de Riesz). C'est pourquoi les théorèmes topologiques en dimension infinie (Schauder) nécessitent des hypothèses de compacité sur l'opérateur plutôt que sur le domaine.

1.6.3 Convexité

Définition 1.13 (Ensemble convexe). Un sous-ensemble C d'un espace vectoriel E est *convexe* si pour tous $x, y \in C$ et tout $t \in [0, 1]$, on a $(1 - t)x + ty \in C$.

Définition 1.14 (Enveloppe convexe). L'*enveloppe convexe* d'un ensemble $A \subset E$ est le plus petit convexe contenant A :

$$\text{co}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N}^*, x_i \in A, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

1.7 Itération de Picard

La méthode la plus élémentaire pour trouver un point fixe est l'itération de Picard (ou méthode des approximations successives).

Itération de Picard

Entrée : Application $T : X \rightarrow X$, point initial $x_0 \in X$.

Procédure : Définir la suite (x_n) par $x_{n+1} = T(x_n)$ pour $n \geq 0$.

Sortie : Si (x_n) converge vers x^* et si T est continue, alors x^* est un point fixe de T .

Remarque 1.15. La convergence de l'itération de Picard n'est pas garantie en général. Le théorème de Banach (Chapitre 2) fournit des conditions suffisantes.

1.8 Le théorème du point fixe en dimension 1

Théorème 1.16 (Théorème du point fixe en dimension 1). Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une application continue. Alors f possède au moins un point fixe dans $[a, b]$.

Démonstration. Considérons la fonction $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$. Puisque $f([a, b]) \subset [a, b]$, nous avons $g(a) = f(a) - a \geq 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x^* \in [a, b]$ tel que $g(x^*) = 0$, c'est-à-dire $f(x^*) = x^*$. $\square$

Hypothèses nécessaires

Les deux hypothèses sont essentielles :

- **Continuité** : l'application $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ définie par $f(x) = 0$ si $x > 1/2$ et $f(x) = 1$ si $x \leq 1/2$ n'a pas de point fixe.
- **Stabilité** ($f([a, b]) \subset [a, b]$) : l'application $f(x) = x + 1$ sur $[0, 1]$ n'a pas de point fixe car $f([0, 1]) = [1, 2] \not\subset [0, 1]$.

1.9 Degré topologique : aperçu

Le degré topologique est un invariant algébrique qui « compte » les solutions d'une équation $F(x) = p$ avec multiplicité et signe. Pour une application $F : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 , avec Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $p \notin F(\partial\Omega)$, le degré de Brouwer est défini par

$$\deg(F, \Omega, p) = \sum_{x \in F^{-1}(p)} \operatorname{sgn} \det(DF(x)).$$

Théorème 1.17 (Existence par degré non nul). *Si $\deg(F, \Omega, p) \neq 0$, alors l'équation $F(x) = p$ possède au moins une solution dans Ω .*

Ce lien entre topologie algébrique et existence de solutions sera développé en détail au Chapitre 5.

1.10 Plan du cours

Architecture du cours		
Ch.	Titre	Résultat principal
1	Introduction	Motivations, rappels
2	Banach	Principe de contraction
3	Extensions métriques	Edelstein, Kannan, Ćirić, Caristi
4	Espaces généralisés	b -métriques, G -métriques
5	Brouwer	Point fixe topologique (dim. finie)
6	Schauder	Point fixe topologique (dim. infinie)
7	Kakutani	Correspondances multivoques
8	Espaces ordonnés	Tarski–Knaster
9	Applications	EDO, EDP, jeux, économie
10	Markov–Kakutani	Points fixes communs
11	Points fixes aléatoires	Théorie mesurable

1.11 Exercices

Exercice 1.1. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une application croissante (non nécessairement continue). Montrer que f possède un point fixe. *Indication : considérer $x^* = \sup\{x \in [0, 1] : f(x) \geq x\}$.*

Exercice 1.2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ pour tous $x \neq y$. Montrer que f a au plus un point fixe. Donner un exemple où f n'a pas de point fixe.

Exercice 1.3. Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une isométrie affine (c'est-à-dire $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pour tous x, y). Montrer que soit T a un point fixe, soit T est une translation sans point fixe.

Exercice 1.4. Montrer que la rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle $\pi/4$ autour de l'origine a un unique point fixe. Plus généralement, que peut-on dire des points fixes d'une rotation d'angle θ en dimension n ?

Exercice 1.5. Soit (X, d) un espace métrique compact et $T : X \rightarrow X$ une isométrie (c'est-à-dire $d(T(x), T(y)) = d(x, y)$ pour tous x, y). Montrer que T est surjective. En déduire que si X est de plus convexe dans un espace normé, alors T possède un point fixe.

Exercice 1.6. Soit A une matrice $n \times n$ à coefficients positifs ou nuls telle que la somme des éléments de chaque colonne vaut 1 (matrice stochastique). Montrer que A possède un vecteur propre associé à la valeur propre 1 dans le simplexe $\Delta_n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \sum x_i = 1\}$. Interpréter ce résultat comme un théorème de point fixe.

Chapitre 2

Principe de Contraction de Banach et Généralisations

En 1922, Stefan Banach, un mathématicien polonais largement autodidacte, publie dans sa thèse de doctorat un théorème d'une simplicité éblouissante : si une application « rapproche » les points les uns des autres et si l'espace est complet, alors il existe un unique point fixe, et on peut le calculer par itération. Ce résultat est devenu l'un des outils les plus utilisés de toute l'analyse : il démontre l'existence et l'unicité des solutions d'équations différentielles (Picard-Lindelöf), justifie la méthode de Newton, et fonde la résolution de nombreuses équations intégrales et fonctionnelles.

2.1 Le théorème fondamental

Le principe de contraction de Banach est sans doute le théorème de point fixe le plus utilisé en mathématiques. Sa puissance réside dans la conjonction de trois propriétés : existence, unicité et méthode constructive de calcul.

Théorème 2.1 (Principe de Contraction de Banach, 1922). *Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow X$ une contraction, c'est-à-dire qu'il existe $k \in [0, 1)$ tel que*

$$d(T(x), T(y)) \leq k d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Alors :

1. *T possède un unique point fixe $x^* \in X$;*
2. *Pour tout $x_0 \in X$, la suite d'itérées $(T^n(x_0))_{n \geq 0}$ converge vers x^* ;*
3. *On a les estimations d'erreur :*

$$d(T^n(x_0), x^*) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, T(x_0)) \quad (a \text{ priori}), \quad (2.1)$$

$$d(T^n(x_0), x^*) \leq \frac{k}{1-k} d(T^{n-1}(x_0), T^n(x_0)) \quad (a \text{ posteriori}). \quad (2.2)$$

Démonstration. Existence et convergence. Fixons $x_0 \in X$ et posons $x_n = T^n(x_0)$ pour $n \geq 0$. Pour $n \geq 1$,

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq k d(x_n, x_{n-1}) \leq \cdots \leq k^n d(x_1, x_0).$$

Pour $m > n$, par l'inégalité triangulaire :

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{i=n}^{m-1} d(x_{i+1}, x_i) \leq \sum_{i=n}^{m-1} k^i d(x_1, x_0) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0).$$

Puisque $k < 1$, le membre de droite tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$, donc (x_n) est une suite de Cauchy. Par complétude de (X, d) , elle converge vers un point $x^* \in X$.

Point fixe. Par continuité de T (toute contraction est lipschitzienne, donc continue) :

$$T(x^*) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x^*.$$

Unicité. Si y^* est un autre point fixe, alors

$$d(x^*, y^*) = d(T(x^*), T(y^*)) \leq k d(x^*, y^*).$$

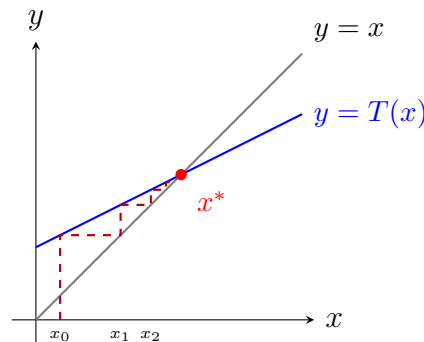
Puisque $k < 1$, ceci implique $d(x^*, y^*) = 0$, donc $x^* = y^*$.

Estimation a priori. En faisant $m \rightarrow \infty$ dans $d(x_m, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$, on obtient (2.1).

Estimation a posteriori. Pour $m > n$:

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{i=0}^{m-n-1} k^i d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{1}{1-k} d(x_{n+1}, x_n).$$

En passant à la limite $m \rightarrow \infty$ et en remplaçant $d(x_{n+1}, x_n)$ par $d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq k d(x_n, x_{n-1})$, on obtient (2.2). $\square$



Principe de Contraction de Banach

Soit (X, d) complet, $T : X \rightarrow X$ avec $d(Tx, Ty) \leq k d(x, y)$, $k < 1$. Alors :

$$\exists! x^* \in X : T(x^*) = x^*, \quad d(T^n x_0, x^*) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, T x_0).$$

2.2 Nécessité des hypothèses

Exemple 2.2 (Nécessité de la complétude). Considérons $X = (0, 1]$ muni de la distance usuelle et $T(x) = x/2$. Alors T est une contraction de constante $1/2$, mais T n'a pas de point fixe dans X (le point fixe 0 n'appartient pas à X). L'espace $(0, 1]$ n'est pas complet.

Exemple 2.3 (Nécessité de $k < 1$). Soit $X = [1, +\infty)$ muni de la distance usuelle et $T(x) = x + 1/x$. Alors pour $x \neq y$:

$$|T(x) - T(y)| = |x - y| \cdot \left| 1 - \frac{1}{xy} \right| < |x - y|$$

donc T est contractante au sens faible ($d(Tx, Ty) < d(x, y)$ pour $x \neq y$), mais il n'existe pas de $k < 1$ uniforme. L'application T n'a pas de point fixe dans $[1, +\infty)$.

Contraction stricte vs. contraction faible

La condition $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ pour $x \neq y$ (contraction faible) ne suffit **pas** pour garantir l'existence d'un point fixe, même dans un espace complet. Il faut la condition uniforme $d(Tx, Ty) \leq k d(x, y)$ avec $k < 1$ indépendant de x et y .

2.3 Vitesse de convergence

Proposition 2.4 (Convergence géométrique). Sous les hypothèses du Théorème 2.1, la convergence de (x_n) vers x^* est au moins géométrique de raison k :

$$d(x_n, x^*) \leq k d(x_{n-1}, x^*) \quad \forall n \geq 1.$$

Démonstration. $d(x_n, x^*) = d(T(x_{n-1}), T(x^*)) \leq k d(x_{n-1}, x^*)$. □

Remarque 2.5. En pratique, l'estimation a posteriori (2.2) est plus utile car elle ne nécessite pas de connaître $d(x_0, T x_0)$ mais seulement la dernière variation $d(x_{n-1}, x_n)$, qui est calculée au cours de l'itération.

2.4 Applications classiques

2.4.1 Théorème de Picard–Lindelöf

Théorème 2.6 (Picard–Lindelöf). Soient $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, et $f : [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}(y_0, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue et lipschitzienne en y de constante L . Posons $M = \sup \|f\|$ et $\delta = \min(a, b/M)$. Si $L\delta < 1$, alors le problème de Cauchy

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

possède une unique solution sur $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Démonstration. Soit $X = C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \overline{B}(y_0, b))$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Définissons l'opérateur de Picard :

$$(Ty)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds.$$

Vérifions que T envoie X dans X : pour $y \in X$,

$$\|(Ty)(t) - y_0\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s, y(s))\| ds \leq M\delta \leq b.$$

Vérifions que T est une contraction : pour $y, z \in X$,

$$\|(Ty)(t) - (Tz)(t)\| \leq \int_{t_0}^t L \|y(s) - z(s)\| ds \leq L\delta \|y - z\|_\infty.$$

Puisque $L\delta < 1$, le principe de Banach s'applique et fournit l'existence et l'unicité de la solution. □

2.4.2 Équations intégrales de Fredholm

Théorème 2.7 (Équation de Fredholm). Soit $K \in C([a, b]^2)$ et $f \in C([a, b])$. Si $|\lambda| \cdot \sup_t \int_a^b |K(t, s)| ds < 1$, alors l'équation

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, s) u(s) ds$$

admet une unique solution dans $C([a, b])$.

Démonstration. L'opérateur $(Tu)(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, s) u(s) ds$ est une contraction sur $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ de constante $k = |\lambda| \sup_t \int_a^b |K(t, s)| ds < 1$. $\square$

2.4.3 Théorème d'inversion locale

Théorème 2.8 (Inversion locale via Banach). Soit E un espace de Banach et $F : E \rightarrow E$ de classe C^1 avec $DF(x_0)$ inversible. Alors F est un difféomorphisme local au voisinage de x_0 .

Idée de la preuve. Sans perte de généralité, $x_0 = 0$ et $DF(0) = \text{Id}$, donc $F(x) = x - \varphi(x)$ avec $D\varphi(0) = 0$. Pour y proche de 0, l'équation $F(x) = y$ s'écrit $x = y + \varphi(x) = T_y(x)$. Par continuité de $D\varphi$, T_y est une contraction sur une boule suffisamment petite autour de 0. $\square$

2.5 Généralisations directes

2.5.1 Contractions sur un fermé

Proposition 2.9 (Contraction sur un fermé). Soit (X, d) un espace métrique complet et $F \subset X$ un fermé non vide. Si $T : F \rightarrow F$ est une contraction, alors T admet un unique point fixe dans F .

Démonstration. Un fermé d'un espace complet est complet, et on applique le Théorème 2.1. $\square$

2.5.2 Itérée contractante

Théorème 2.10 (Itérée contractante). Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow X$ continue. Si T^N est une contraction pour un certain $N \geq 1$, alors T possède un unique point fixe.

Démonstration. Par le théorème de Banach appliqué à T^N , il existe un unique x^* tel que $T^N(x^*) = x^*$. Alors $T^N(T(x^*)) = T(T^N(x^*)) = T(x^*)$, donc $T(x^*)$ est aussi un point fixe de T^N . Par unicité, $T(x^*) = x^*$.

Réciproquement, tout point fixe de T est un point fixe de T^N , donc T a un unique point fixe. $\square$

Exemple 2.11. L'application $T : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ définie par $(Tf)(x) = \int_0^x f(t) dt$ n'est pas contractante, mais T^N est contractante pour N assez grand car $\|T^N f\|_\infty \leq \frac{\|f\|_\infty}{N!}$.

2.5.3 Principe de Banach avec paramètre

Théorème 2.12 (Dépendance continue par rapport à un paramètre). *Soit (X, d) un espace métrique complet, Λ un espace topologique, et $T : X \times \Lambda \rightarrow X$ telle que :*

1. *Pour tout $\lambda \in \Lambda$, $T(\cdot, \lambda)$ est une contraction de constante $k < 1$ (uniforme en λ) ;*
2. *Pour tout $x \in X$, $T(x, \cdot) : \Lambda \rightarrow X$ est continue.*

Alors l'application $\lambda \mapsto x^(\lambda)$, où $x^*(\lambda)$ est l'unique point fixe de $T(\cdot, \lambda)$, est continue.*

Démonstration. Soient $\lambda_0 \in \Lambda$ et $\varepsilon > 0$. On a :

$$\begin{aligned} d(x^*(\lambda), x^*(\lambda_0)) &= d(T(x^*(\lambda), \lambda), T(x^*(\lambda_0), \lambda_0)) \\ &\leq d(T(x^*(\lambda), \lambda), T(x^*(\lambda_0), \lambda)) + d(T(x^*(\lambda_0), \lambda), T(x^*(\lambda_0), \lambda_0)) \\ &\leq k d(x^*(\lambda), x^*(\lambda_0)) + d(T(x^*(\lambda_0), \lambda), T(x^*(\lambda_0), \lambda_0)). \end{aligned}$$

Donc $(1 - k) d(x^*(\lambda), x^*(\lambda_0)) \leq d(T(x^*(\lambda_0), \lambda), T(x^*(\lambda_0), \lambda_0))$. Le membre de droite tend vers 0 quand $\lambda \rightarrow \lambda_0$ par l'hypothèse (2). $\square$

2.6 Théorème de Banach–Caccioppoli généralisé

Théorème 2.13 (Contraction sur boule). *Soit (X, d) un espace métrique complet, $x_0 \in X$, $r > 0$, et $T : \overline{B}(x_0, r) \rightarrow X$ une contraction de constante $k < 1$. Si*

$$d(x_0, T(x_0)) < (1 - k)r,$$

alors T admet un unique point fixe dans $\overline{B}(x_0, r)$.

Démonstration. Il suffit de montrer que $T(\overline{B}(x_0, r)) \subset \overline{B}(x_0, r)$. Pour $x \in \overline{B}(x_0, r)$:

$$d(T(x), x_0) \leq d(T(x), T(x_0)) + d(T(x_0), x_0) \leq k d(x, x_0) + d(T(x_0), x_0) \leq kr + (1 - k)r = r.$$

On applique alors le théorème de Banach à $T : \overline{B}(x_0, r) \rightarrow \overline{B}(x_0, r)$. $\square$

2.7 Applications non expansives

Définition 2.14 (Application non expansive). Une application $T : X \rightarrow X$ est *non expansive* si $d(T(x), T(y)) \leq d(x, y)$ pour tous $x, y \in X$.

Remarque 2.15. Une application non expansive n'a pas nécessairement de point fixe, même dans un espace complet. Par exemple, la translation $T(x) = x + 1$ sur $\mathbb{R}$ est non expansive sans point fixe.

Théorème 2.16 (Browder–Göhde–Kirk, 1965). *Soit C un sous-ensemble convexe, borné et fermé d'un espace de Hilbert H . Si $T : C \rightarrow C$ est non expansive, alors T possède un point fixe.*

Idée de la preuve. Pour $\lambda \in (0, 1)$, fixons $a \in C$ et définissons $T_\lambda(x) = \lambda a + (1 - \lambda)T(x)$. Alors T_λ est une contraction de constante $1 - \lambda$ et envoie C dans C par convexité. Soit x_λ son unique point fixe :

$$x_\lambda = \lambda a + (1 - \lambda)T(x_\lambda).$$

Quand $\lambda \rightarrow 0^+$, on montre (en utilisant la structure hilbertienne) que (x_λ) converge faiblement vers un point fixe de T . $\square$

2.8 Contractions généralisées de Boyd–Wong

Théorème 2.17 (Boyd–Wong, 1969). *Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow X$ vérifiant*

$$d(T(x), T(y)) \leq \psi(d(x, y)) \quad \forall x, y \in X,$$

où $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ est semi-continue supérieurement à droite et satisfait $\psi(t) < t$ pour tout $t > 0$. Alors T admet un unique point fixe.

Démonstration. Fixons $x_0 \in X$ et posons $x_n = T^n(x_0)$. La suite (d_n) définie par $d_n = d(x_n, x_{n+1})$ est décroissante car $d_{n+1} \leq \psi(d_n) < d_n$ si $d_n > 0$. Elle converge donc vers une limite $\ell \geq 0$.

Si $\ell > 0$, par semi-continuité supérieure à droite de $\psi : \ell \leq \limsup_n \psi(d_n) \leq \psi(\ell) < \ell$, contradiction. Donc $\ell = 0$.

Montrons que (x_n) est de Cauchy. Raisonnons par l'absurde : il existerait $\varepsilon > 0$ et des sous-suites $m(k) > n(k) \rightarrow \infty$ avec $d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \geq \varepsilon$. On peut choisir $m(k)$ minimal, donc $d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) < \varepsilon$. Alors

$$\varepsilon \leq d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leq d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) < d_{m(k)-1} + \varepsilon.$$

Donc $d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \rightarrow \varepsilon$. Par le caractère contractant :

$$d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}) \leq \psi(d(x_{m(k)}, x_{n(k)})).$$

En passant à la limite : $\varepsilon \leq \psi(\varepsilon) < \varepsilon$, contradiction. Donc (x_n) est de Cauchy.

Par complétude, $x_n \rightarrow x^*$, et par continuité de T (conséquence de l'hypothèse), $T(x^*) = x^*$. L'unicité se démontre comme pour Banach. $\square$

2.9 Contractions de Meir–Keeler

Théorème 2.18 (Meir–Keeler, 1969). *Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow X$ vérifiant : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\varepsilon \leq d(x, y) < \varepsilon + \delta \implies d(T(x), T(y)) < \varepsilon.$$

Alors T admet un unique point fixe.

Remarque 2.19. La condition de Meir–Keeler implique $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ pour $x \neq y$ (prendre $\varepsilon = d(x, y)$), mais elle est strictement plus forte qu'une simple contraction faible. Toute contraction de Banach (constante $k < 1$) vérifie la condition de Meir–Keeler avec $\delta = \varepsilon(1 - k)/k$.

2.10 Théorème de point fixe de Matkowski

Théorème 2.20 (Matkowski, 1975). *Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow X$ vérifiant*

$$d(T(x), T(y)) \leq \psi(d(x, y)) \quad \forall x, y \in X,$$

où $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ est croissante et satisfait $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi^n(t) = 0$ pour tout $t > 0$. Alors T admet un unique point fixe.

Remarque 2.21. Notons que si ψ est croissante et $\psi^n(t) \rightarrow 0$, alors $\psi(t) < t$ pour tout $t > 0$. En effet, si $\psi(t_0) \geq t_0$ pour un $t_0 > 0$, alors par croissance $\psi^n(t_0) \geq t_0$ pour tout n , contredisant $\psi^n(t_0) \rightarrow 0$.

2.11 Exercices

Exercice 2.1. Soit $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $T(x) = \frac{1}{2}(x + a/x)$ pour $x > 0$, où $a > 0$. Montrer que pour tout $x_0 > 0$, la suite $(T^n(x_0))$ converge vers $\sqrt{a}$. S'agit-il d'une contraction de Banach ?

Exercice 2.2. Montrer que l'application $T : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ définie par $(Tf)(x) = \int_0^x f(t) dt$ n'est pas une contraction, mais que T^n est une contraction pour $n \geq 2$. En déduire que T a un unique point fixe (la fonction nulle).

Exercice 2.3. Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow X$ telle que $d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, T(x)) + \beta d(y, T(y))$ avec $\alpha + \beta < 1$. Montrer que T admet un unique point fixe. C'est la condition de Kannan, étudiée au Chapitre 3.

Exercice 2.4. Soit A une matrice $n \times n$ avec $\|A\| < 1$ (norme d'opérateur). Montrer que $(I - A)$ est inversible et que $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ (série de Neumann). Démontrer ce résultat en utilisant le principe de Banach.

Exercice 2.5 (Théorème de Nadler). Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow \mathcal{K}(X)$ une application multivoque à valeurs compactes non vides, contractante pour la métrique de Hausdorff :

$$H(T(x), T(y)) \leq k d(x, y), \quad k < 1.$$

Montrer que T possède un point fixe, c'est-à-dire un x^* tel que $x^* \in T(x^*)$.

Exercice 2.6. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que $\|Df(x)\| \leq k < 1$ pour tout x (norme d'opérateur). Montrer que f est une contraction et en déduire que l'équation $x = f(x)$ a une unique solution.

Exercice 2.7. Étudier la convergence de la méthode de Newton comme cas particulier du principe de contraction. Précisément, soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 avec $g(x^*) = 0$ et $g'(x^*) \neq 0$. Montrer que l'itération $x_{n+1} = x_n - g(x_n)/g'(x_n)$ converge vers x^* pour x_0 suffisamment proche de x^* , et que la convergence est quadratique.

Chapitre 3

Extensions Métriques

3.1 Introduction

Le théorème de Banach est élégant, mais sa condition — une contraction stricte et uniforme — est parfois trop restrictive. Dès les années 1960, toute une communauté de mathématiciens s'est lancée dans une quête : affaiblir les hypothèses tout en préservant la conclusion. Edelstein a montré qu'on pouvait se contenter d'une contraction *locale* si l'espace est compact. Kannan (1968) a découvert que le point fixe peut exister même lorsque T n'est pas continue — une surprise qui a profondément modifié notre compréhension de ce phénomène. Chatterjea a proposé sa propre variante, Ćirić a unifié ces résultats dans un cadre général, et Caristi a introduit une approche complètement différente fondée sur des fonctions d'énergie décroissante.

Chacune de ces extensions éclaire une facette différente du mécanisme qui force l'existence d'un point fixe, et ensemble, elles dessinent une théorie remarquablement riche.

3.2 Théorème d'Edelstein

Théorème 3.1 (Edelstein, 1962). *Soit (X, d) un espace métrique compact et $T : X \rightarrow X$ une contraction faible, c'est-à-dire*

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y) \quad \forall x, y \in X, x \neq y.$$

Alors T possède un unique point fixe, et pour tout $x_0 \in X$, la suite $(T^n(x_0))$ converge vers ce point fixe.

Démonstration. Définissons $\varphi : X \rightarrow [0, \infty)$ par $\varphi(x) = d(x, Tx)$. Cette fonction est continue sur le compact X , donc atteint son minimum en un point $x^* \in X$.

Supposons $\varphi(x^*) > 0$, c'est-à-dire $x^* \neq Tx^*$. Alors

$$\varphi(Tx^*) = d(Tx^*, T^2x^*) < d(x^*, Tx^*) = \varphi(x^*),$$

ce qui contredit la minimalité de $\varphi(x^*)$. Donc $\varphi(x^*) = 0$ et $Tx^* = x^*$.

L'unicité est immédiate : si y^* est un autre point fixe, alors $d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) < d(x^*, y^*)$, contradiction.

Pour la convergence, soit $x_0 \in X$ et $x_n = T^n(x_0)$. La suite $(d(x_n, x^*))$ est décroissante car $d(x_{n+1}, x^*) = d(Tx_n, Tx^*) < d(x_n, x^*)$ si $x_n \neq x^*$. Par compacité, (x_n) admet une sous-suite convergente $x_{n_k} \rightarrow z$. Alors $d(z, x^*) = \lim d(x_{n_k}, x^*) = \inf_n d(x_n, x^*)$. Si $z \neq x^*$,

$d(Tz, x^*) < d(z, x^*)$, mais $d(x_{n_k+1}, x^*) \rightarrow d(Tz, x^*)$, contredisant le fait que $(d(x_n, x^*))$ est décroissante de limite $d(z, x^*)$. Donc $z = x^*$ et $x_n \rightarrow x^*$. $\square$

Compacité essentielle

Sans compacité, le théorème d'Edelstein est faux. L'exemple $T(x) = x + 1/x$ sur $[1, +\infty)$ (espace complet non compact) est une contraction faible sans point fixe (voir Chapitre 2).

3.3 Contractions de Kannan

Définition 3.2 (Application de Kannan). Soit (X, d) un espace métrique. Une application $T : X \rightarrow X$ est une *contraction de Kannan* s'il existe $\alpha \in [0, 1/2)$ tel que

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha [d(x, Tx) + d(y, Ty)] \quad \forall x, y \in X.$$

Remarque 3.3. Contrairement à une contraction de Banach, une contraction de Kannan n'est pas nécessairement continue. En effet, la condition de Kannan ne contrôle la distance $d(Tx, Ty)$ qu'à travers les déplacements $d(x, Tx)$ et $d(y, Ty)$.

Théorème 3.4 (Kannan, 1968). Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow X$ une contraction de Kannan avec constante $\alpha \in [0, 1/2)$. Alors T possède un unique point fixe.

Démonstration. Soit $x_0 \in X$ et $x_n = T^n(x_0)$. On a :

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq \alpha [d(x_n, Tx_n) + d(x_{n-1}, Tx_{n-1})] = \alpha [d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n-1}, x_n)].$$

Donc $(1 - \alpha) d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1})$, soit

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} d(x_n, x_{n-1}) = \beta d(x_n, x_{n-1})$$

avec $\beta = \alpha/(1 - \alpha) < 1$ puisque $\alpha < 1/2$.

Ainsi $d(x_{n+1}, x_n) \leq \beta^n d(x_1, x_0)$. La suite (x_n) est de Cauchy (même argument que pour Banach) et converge vers $x^* \in X$.

Vérifions que x^* est un point fixe. On a :

$$d(x^*, Tx^*) \leq d(x^*, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx^*) = d(x^*, x_{n+1}) + d(Tx_n, Tx^*) \leq d(x^*, x_{n+1}) + \alpha [d(x_n, x_{n+1}) + d(x^*, Tx^*)]$$

Donc $(1 - \alpha) d(x^*, Tx^*) \leq d(x^*, x_{n+1}) + \alpha d(x_n, x_{n+1}) \rightarrow 0$, et $Tx^* = x^*$.

Unicité : si x^*, y^* sont deux points fixes, alors $d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \leq \alpha [d(x^*, Tx^*) + d(y^*, Ty^*)] = 0$. $\square$

Kannan vs. Banach

Les contractions de Banach et de Kannan sont des classes indépendantes :

- Il existe des contractions de Banach qui ne sont pas des contractions de Kannan ;
- Il existe des contractions de Kannan qui ne sont pas des contractions de Banach ;

Banach (et qui ne sont même pas continues).

Néanmoins, les deux conditions garantissent l'existence et l'unicité d'un point fixe dans un espace métrique complet.

Exemple 3.5 (Kannan non continue). Soit $X = [0, 1]$ et T définie par $T(x) = x/4$ pour $x \in [0, 1)$ et $T(1) = 1/6$. Alors T est une contraction de Kannan (avec α convenable) mais T n'est pas continue en $x = 1$. Son unique point fixe est $x^* = 0$.

3.4 Contractions de Chatterjea

Définition 3.6 (Application de Chatterjea). Une application $T : X \rightarrow X$ est une *contraction de Chatterjea* s'il existe $\beta \in [0, 1/2)$ tel que

$$d(Tx, Ty) \leq \beta [d(x, Ty) + d(y, Tx)] \quad \forall x, y \in X.$$

Théorème 3.7 (Chatterjea, 1972). Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow X$ une contraction de Chatterjea. Alors T possède un unique point fixe.

Démonstration. Soit $x_n = T^n(x_0)$. On a :

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq \beta [d(x_n, Tx_{n-1}) + d(x_{n-1}, Tx_n)] \\ &= \beta [d(x_n, x_n) + d(x_{n-1}, x_{n+1})] = \beta d(x_{n-1}, x_{n+1}) \\ &\leq \beta [d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})]. \end{aligned}$$

Donc $(1 - \beta)d(x_{n+1}, x_n) \leq \beta d(x_n, x_{n-1})$, et on conclut comme pour Kannan avec le ratio $\beta/(1 - \beta) < 1$.

La convergence de (x_n) vers un point fixe x^* et l'unicité se démontrent de manière analogue. $\square$

3.5 Contraction de Ćirić

Définition 3.8 (Contraction quasi-contractante de Ćirić). Une application $T : X \rightarrow X$ est une *quasi-contraction de Ćirić* s'il existe $q \in [0, 1)$ tel que

$$d(Tx, Ty) \leq q \cdot \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}$$

pour tous $x, y \in X$.

Remarque 3.9. La condition de Ćirić généralise simultanément celles de Banach ($q \cdot d(x, y)$), Kannan ($q \cdot [d(x, Tx) + d(y, Ty)]/2$) et Chatterjea ($q \cdot [d(x, Ty) + d(y, Tx)]/2$).

Théorème 3.10 (Ćirić, 1974). Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow X$ une quasi-contraction de Ćirić avec constante $q \in [0, 1)$. Alors T possède un unique point fixe x^* , et pour tout $x_0 \in X$, $T^n(x_0) \rightarrow x^*$.

Démonstration. Posons $x_n = T^n(x_0)$ et $d_n = d(x_n, x_{n+1})$. On a :

$$d_n = d(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq q \cdot \max\{d_{n-1}, d_{n-1}, d_n, d(x_{n-1}, x_{n+1}), 0\}.$$

Par l'inégalité triangulaire, $d(x_{n-1}, x_{n+1}) \leq d_{n-1} + d_n$, donc

$$d_n \leq q \cdot \max\{d_{n-1}, d_n, d_{n-1} + d_n\}.$$

Si $d_n > d_{n-1}$, alors $\max = d_{n-1} + d_n \leq 2d_n$, d'où $d_n \leq 2qd_n$ ce qui est impossible pour $q < 1/2$. Pour $q \geq 1/2$, un argument plus délicat montre que $d_n \leq q'd_{n-1}$ avec $q' = q/(1-q) < 1$ lorsque $q < 1/2$, ou par un argument direct de majorisation.

En général, on montre $d_n \leq q \cdot d_{n-1}$ (lorsque $d_n \leq d_{n-1}$, ce qui se vérifie). La suite est de Cauchy et converge vers x^* .

Pour vérifier que x^* est un point fixe, on estime :

$$d(Tx^*, x^*) \leq d(Tx^*, Tx_n) + d(x_{n+1}, x^*) \leq q \cdot \max\{d(x^*, x_n), d(x^*, Tx^*), d_n, d(x^*, x_{n+1}), d(x_n, Tx^*)\} + d(x_{n+1}, x^*)$$

En passant à la limite, $d(Tx^*, x^*) \leq q \cdot d(x^*, Tx^*)$, d'où $d(Tx^*, x^*) = 0$.

L'unicité : si $y^* = Ty^*$, alors $d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \leq q \cdot d(x^*, y^*)$, d'où $d(x^*, y^*) = 0$. $\square$

3.6 Théorème de Caristi

Le théorème de Caristi est remarquable car il ne suppose aucune condition de continuité sur T .

Théorème 3.11 (Caristi, 1976). *Soit (X, d) un espace métrique complet et $\varphi : X \rightarrow [0, \infty)$ une fonction semi-continue inférieurement. Si $T : X \rightarrow X$ vérifie*

$$d(x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \quad \forall x \in X,$$

alors T possède un point fixe.

Démonstration. Définissons une relation d'ordre partiel sur X par

$$x \preceq y \iff d(x, y) \leq \varphi(x) - \varphi(y).$$

Vérifions qu'il s'agit bien d'un ordre partiel :

- Réflexivité : $d(x, x) = 0 \leq \varphi(x) - \varphi(x) = 0$.
- Antisymétrie : si $x \preceq y$ et $y \preceq x$, alors $d(x, y) = 0$.
- Transitivité : si $x \preceq y$ et $y \preceq z$, alors $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \leq [\varphi(x) - \varphi(y)] + [\varphi(y) - \varphi(z)] = \varphi(x) - \varphi(z)$.

L'hypothèse du théorème dit que $x \preceq Tx$ pour tout x .

Par le lemme de Zorn, il suffit de montrer que toute chaîne $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ dans $(X, \preceq)$ admet un majorant. Soit (x_α) une chaîne totalement ordonnée. La fonction $\alpha \mapsto \varphi(x_\alpha)$ est décroissante et minorée par 0, donc le réseau (net) $(\varphi(x_\alpha))$ admet une limite inférieure ℓ . On peut en extraire une suite généralisée qui est de Cauchy : pour $\alpha \leq \beta$, $d(x_\alpha, x_\beta) \leq \varphi(x_\alpha) - \varphi(x_\beta) \rightarrow 0$. Par complétude, elle converge vers un $\bar{x}$. Par semi-continuité inférieure, $\varphi(\bar{x}) \leq \ell$. On vérifie que $\bar{x}$ est un majorant de la chaîne.

Par le lemme de Zorn, il existe un élément maximal x^* . Puisque $x^* \preceq Tx^*$ et que x^* est maximal, on a $Tx^* = x^*$. $\square$

Condition de Caristi

$d(x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$ avec φ s.c.i. et $\varphi \geq 0$ dans (X, d) complet $\implies T$ a un point fixe.

3.7 Équivalence de Caristi et du principe variationnel d'Ekeland

Théorème 3.12 (Principe variationnel d'Ekeland, 1974). *Soit (X, d) un espace métrique complet et $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ semi-continue inférieurement, minorée et non identiquement $+\infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x_0 \in X$ avec $\varphi(x_0) \leq \inf_X \varphi + \varepsilon$, il existe $x^* \in X$ tel que :*

1. $\varphi(x^*) \leq \varphi(x_0)$;
2. $d(x_0, x^*) \leq 1$;
3. $\varphi(x^*) < \varphi(x) + \varepsilon d(x, x^*)$ pour tout $x \neq x^*$.

Proposition 3.13. Le théorème de Caristi et le principe variationnel d'Ekeland sont équivalents.

Idée. Ekeland $\implies$ Caristi : Si T satisfait la condition de Caristi, soit x^* donné par Ekeland avec ε convenable. La condition (3) avec $x = Tx^*$ et la condition de Caristi conduisent à $Tx^* = x^*$.

Caristi $\implies$ Ekeland : C'est plus technique et utilise la construction d'une suite décroissante pour φ dans une boule appropriée. □

3.8 Contractions de Zamfirescu

Définition 3.14 (Contraction de Zamfirescu). $T : X \rightarrow X$ est une *contraction de Zamfirescu* s'il existe $a \in [0, 1)$, $b \in [0, 1/2)$, $c \in [0, 1/2)$ tels que pour tous x, y , au moins l'une des conditions suivantes est satisfaite :

1. $d(Tx, Ty) \leq a d(x, y)$;
2. $d(Tx, Ty) \leq b[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$;
3. $d(Tx, Ty) \leq c[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$.

Théorème 3.15 (Zamfirescu, 1972). *Toute contraction de Zamfirescu sur un espace métrique complet admet un unique point fixe.*

Démonstration. Posons $\delta = \max\{a, b/(1-b), c/(1-c)\}$. Alors $\delta < 1$ et $d(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y)$ pour tous x, y , ce qui ramène au théorème de Banach.

En effet, si la condition (1) est satisfaite, $d(Tx, Ty) \leq a d(x, y)$. Si la condition (2) est satisfaite, $d(Tx, Ty) \leq b[d(x, Tx) + d(y, Ty)] \leq b[d(x, y) + 2d(y, Ty)] + b d(Tx, Ty)$, d'où $(1-b)d(Tx, Ty) \leq b[d(x, y) + 2d(y, Ty)]$, et un raisonnement soigneux montre que $d(Tx, Ty) \leq \frac{2b}{1-b} d(x, y)$. Un argument similaire s'applique pour la condition (3). □

3.9 Caractérisation de Subrahmanyam

Théorème 3.16 (Subrahmanyam, 1975). *Un espace métrique (X, d) est complet si et seulement si toute contraction de Kannan $T : X \rightarrow X$ possède un point fixe.*

Remarque 3.17. Ce résultat est remarquable car il montre que la condition de Kannan caractérise la complétude métrique, contrairement à la condition de Banach. Il existe des espaces métriques non complets dans lesquels toute contraction de Banach a un point fixe.

3.10 Exercices

Exercice 3.1. Montrer que $T(x) = \sin(x)$ est une contraction faible sur $[0, \pi]$ mais pas une contraction de Banach. Appliquer le théorème d'Edelstein.

Exercice 3.2. Construire une contraction de Kannan qui n'est pas continue et vérifier directement qu'elle admet un unique point fixe.

Exercice 3.3. Montrer que toute contraction de Banach est une quasi-contraction de Ćirić, mais que la réciproque est fausse.

Exercice 3.4. Appliquer le théorème de Caristi à l'opérateur $T : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ défini par $(Tf)(t) = \frac{1}{2}f(t)$, avec $\varphi(f) = \|f\|_\infty$.

Exercice 3.5. Démontrer en détail l'équivalence entre le théorème de Caristi et le principe variationnel d'Ekeland.

Exercice 3.6. Soit (X, d) complet et $T : X \rightarrow X$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ avec $\varepsilon \leq d(x, y) < \varepsilon + \delta \Rightarrow d(Tx, Ty) < \varepsilon$ (condition de Meir-Keeler). Montrer que cette condition est plus forte que la contraction faible d'Edelstein mais plus faible que la contraction de Banach.

Chapitre 4

Espaces Métriques Généralisés

4.1 Introduction

La notion d'espace métrique, telle que Fréchet l'a définie en 1906, repose sur trois axiomes simples. Mais que se passe-t-il si l'on assouplit l'un d'entre eux ? Si l'inégalité triangulaire n'est vérifiée qu'à une constante multiplicative près, on obtient un *b-espace métrique*. Si la distance d'un point à lui-même n'est pas nécessairement nulle, on entre dans le monde des *espaces métriques partiels*, inventés par Steve Matthews en 1994 pour modéliser les domaines de l'informatique. Chacune de ces généralisations naît d'un besoin concret — analyse fractale, sémantique des programmes, théorie de la mesure — et chacune soulève la même question : le théorème du point fixe survit-il ?

Ce chapitre montre que la réponse est oui, moyennant des adaptations subtiles, et présente les *b*-espaces métriques, les espaces métriques partiels et les *G*-espaces métriques, avec leurs théorèmes de points fixes associés.

4.2 *b*-Espaces métriques

Définition 4.1 (*b-espace métrique*). Soit X un ensemble et $s \geq 1$ un réel. Une application $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ est une *b-métrique* (avec constante s) si pour tous $x, y, z \in X$:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, z) \leq s[d(x, y) + d(y, z)]$ (*b-inégalité triangulaire*).

Le couple (X, d) est alors un *b-espace métrique*.

Remarque 4.2. Pour $s = 1$, on retrouve la définition classique d'espace métrique. La constante s mesure le « défaut » de l'inégalité triangulaire.

Exemple 4.3 (*b-métrique naturelle*). Soit $X = \mathbb{R}$ et $d(x, y) = (x - y)^2$. Alors (X, d) est un *b-espace métrique* avec $s = 2$. En effet, $(x - z)^2 = ((x - y) + (y - z))^2 \leq 2(x - y)^2 + 2(y - z)^2 = 2[d(x, y) + d(y, z)]$ par l'inégalité $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$.

Cependant, (X, d) n'est pas un espace métrique classique car $d(0, 2) = 4 > d(0, 1) + d(1, 2) = 1 + 1 = 2$.

Exemple 4.4 (Espace ℓ^p avec $0 < p < 1$). L'espace ℓ^p pour $0 < p < 1$ muni de $d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p$ est un b -espace métrique avec $s = 2^{1/p-1}$, mais ce n'est pas un espace métrique.

Définition 4.5 (Complétude dans un b -espace métrique). Les notions de suite de Cauchy et de complétude se définissent comme dans le cas classique : (x_n) est de Cauchy si $d(x_m, x_n) \rightarrow 0$ quand $m, n \rightarrow \infty$, et (X, d) est complet si toute suite de Cauchy converge.

Difficultés spécifiques aux b -métriques

Dans un b -espace métrique :

- La topologie induite peut ne pas être métrisable au sens classique ;
- Une b -métrique n'est pas nécessairement continue (la fonction $(x, y) \mapsto d(x, y)$ peut ne pas être continue pour la topologie induite) ;
- Les boules ouvertes peuvent ne pas être ouvertes pour la topologie induite.

4.2.1 Principe de contraction dans les b -espaces métriques

Théorème 4.6 (Banach pour les b -métriques). Soit (X, d) un b -espace métrique complet avec constante $s \geq 1$, et $T : X \rightarrow X$ une application vérifiant

$$d(Tx, Ty) \leq k d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

avec $0 \leq k < 1/s$. Alors T admet un unique point fixe.

Démonstration. Soit $x_0 \in X$ et $x_n = T^n(x_0)$. On a $d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$. Pour $m > n$, par la b -inégalité triangulaire appliquée récursivement :

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq s d(x_n, x_{n+1}) + s^2 d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + s^{m-n} d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq \sum_{i=0}^{m-n-1} s^{i+1} k^{n+i} d(x_1, x_0) = sk^n \sum_{i=0}^{m-n-1} (sk)^i d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Puisque $sk < 1$, la série géométrique converge et $d(x_n, x_m) \leq \frac{sk^n}{1-sk} d(x_1, x_0) \rightarrow 0$. Donc (x_n) est de Cauchy et converge vers $x^* \in X$.

En utilisant : $d(x^*, Tx^*) \leq s[d(x^*, x_{n+1}) + d(Tx_n, Tx^*)] \leq s[d(x^*, x_{n+1}) + k d(x_n, x^*)] \rightarrow 0$.

L'unicité suit le même argument que dans le cas classique. $\square$

Remarque 4.7. La condition $k < 1/s$ est plus restrictive que $k < 1$. Pour $s = 1$ (espace métrique classique), on retrouve la condition usuelle $k < 1$.

Théorème 4.8 (Version améliorée, Czerwik 1998). Si (X, d) est un b -espace métrique complet et $T : X \rightarrow X$ vérifie $d(Tx, Ty) \leq k d(x, y)$ avec $k < 1$ (sans la restriction $k < 1/s$), alors T a un unique point fixe, à condition que d soit continue.

4.3 Espaces métriques partiels

Définition 4.9 (Espace métrique partiel). Un *espace métrique partiel* est un couple (X, p) où $p : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ vérifie pour tous $x, y, z \in X$:

1. $x = y \Leftrightarrow p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$;
2. $p(x, x) \leq p(x, y)$ (petit auto-distance) ;
3. $p(x, y) = p(y, x)$ (symétrie) ;
4. $p(x, z) \leq p(x, y) + p(y, z) - p(y, y)$ (inégalité triangulaire modifiée).

Remarque 4.10. La différence essentielle avec une métrique classique est que $p(x, x)$ peut être strictement positif. Ceci est motivé par l'informatique théorique : $p(x, x)$ représente la « taille » ou le « coût » de l'information x .

Exemple 4.11. Sur $X = [0, +\infty)$, $p(x, y) = \max(x, y)$ est une métrique partielle. On a $p(x, x) = x \geq 0$, avec égalité seulement en $x = 0$.

Théorème 4.12 (Matthews, 1994). Soit (X, p) un espace métrique partiel complet et $T : X \rightarrow X$ une contraction, c'est-à-dire $p(Tx, Ty) \leq k p(x, y)$ avec $k \in [0, 1)$. Alors T admet un unique point fixe x^* , et $p(x^*, x^*) = 0$.

Démonstration. La métrique partielle p induit une métrique classique $d_p(x, y) = 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y)$, et T est aussi une contraction pour d_p . Par le théorème de Banach appliqué à (X, d_p) (qui est complet si (X, p) l'est), T a un unique point fixe x^* . De plus, $p(x^*, x^*) = p(Tx^*, Tx^*) \leq k p(x^*, x^*) \leq k^2 p(x^*, x^*) \leq \dots$, d'où $p(x^*, x^*) = 0$. $\square$

4.4 G -Espaces métriques

Définition 4.13 (G -espace métrique (Mustafa–Sims)). Un G -*espace métrique* est un couple (X, G) où $G : X \times X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ vérifie pour tous $x, y, z, a \in X$:

1. $G(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z$;
2. $0 < G(x, x, y)$ pour $x \neq y$;
3. $G(x, x, y) \leq G(x, y, z)$ pour $z \neq y$;
4. $G(x, y, z) = G(x, z, y) = G(y, z, x) = \dots$ (symétrie en toutes les variables) ;
5. $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$ (inégalité rectangulaire).

Exemple 4.14. Pour tout espace métrique (X, d) , on peut définir $G(x, y, z) = d(x, y) + d(y, z) + d(x, z)$ ou $G(x, y, z) = \max\{d(x, y), d(y, z), d(x, z)\}$. Les deux fonctions définissent des G -métriques.

Théorème 4.15 (Mustafa–Sims, 2006). Soit (X, G) un G -espace métrique complet et $T : X \rightarrow X$ une application vérifiant

$$G(Tx, Ty, Tz) \leq k G(x, y, z) \quad \forall x, y, z \in X$$

avec $k \in [0, 1)$. Alors T admet un unique point fixe.

Démonstration. Fixons x_0 et posons $x_n = T^n(x_0)$. On a :

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) = G(Tx_{n-1}, Tx_n, Tx_n) \leq k G(x_{n-1}, x_n, x_n) \leq k^n G(x_0, x_1, x_1).$$

Pour $m > n$:

$$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_m, x_m) \leq \sum_{i=n}^{m-1} k^i G(x_0, x_1, x_1) \leq \frac{k^n}{1-k} G(x_0, x_1, x_1).$$

Donc (x_n) est G -Cauchy et converge vers $x^* \in X$.

$G(x^*, Tx^*, Tx^*) \leq G(x^*, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, Tx^*, Tx^*) \leq G(x^*, x_{n+1}, x_{n+1}) + k G(x_n, x^*, x^*) \rightarrow 0$. Donc $Tx^* = x^*$. $\square$

Remarque 4.16. Jleli et Samet (2012) ont montré que de nombreux résultats de points fixes dans les G -espaces métriques peuvent se déduire de résultats classiques dans les espaces métriques ordinaires, via la métrique associée $d_G(x, y) = G(x, y, y) + G(x, x, y)$. Cette observation a suscité un débat sur l'utilité réelle de la notion de G -métrique.

4.5 Espaces métriques rectangulaires

Définition 4.17 (Espace métrique rectangulaire (Branciari)). Un espace métrique rectangulaire est un couple (X, d) où $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ vérifie les axiomes (1) et (2) d'un espace métrique, et où l'inégalité triangulaire est remplacée par l'*inégalité rectangulaire* : pour tous x, y distincts et tous $u, v \in X \setminus \{x, y\}$ distincts,

$$d(x, y) \leq d(x, u) + d(u, v) + d(v, y).$$

Théorème 4.18 (Branciari, 2000). Soit (X, d) un espace métrique rectangulaire complet et $T : X \rightarrow X$ une contraction de Banach ($d(Tx, Ty) \leq k d(x, y)$, $k < 1$). Alors T admet un unique point fixe.

Subtilités

La preuve originale de Branciari contenait des lacunes, notamment car dans un espace rectangulaire, les limites ne sont pas nécessairement uniques et la topologie peut être pathologique. Des corrections ont été apportées par Sarma et al. (2009).

4.6 Espaces métriques modulés

Définition 4.19 (Espace métrique modulé). Soit X un ensemble. Une application $\omega : (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ est un *modulaire métrique* si pour tous $x, y, z \in X$ et tous $\lambda, \mu > 0$:

1. $\omega(\lambda, x, y) = 0$ pour tout $\lambda > 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $\omega(\lambda, x, y) = \omega(\lambda, y, x)$;
3. $\omega(\lambda + \mu, x, z) \leq \omega(\lambda, x, y) + \omega(\mu, y, z)$.

Théorème 4.20. Soit $X_\omega = \{x \in X : \omega(\lambda, x, x_0) < \infty \text{ pour un } \lambda > 0\}$ l'espace métrique modulé associé. Si X_ω est ω -complet et $T : X_\omega \rightarrow X_\omega$ vérifie $\omega(\lambda, Tx, Ty) \leq k \omega(\lambda, x, y)$ pour tout $\lambda > 0$ avec $k < 1$, alors T a un unique point fixe.

4.7 Comparaison des généralisations

Synthèse des espaces généralisés

Espace	Modification	Condition FP
Métrique	–	$k < 1$
b -métrique	$d(x, z) \leq s[d(x, y) + d(y, z)]$	$k < 1/s$ ou $k < 1$
Partiel	$p(x, x) \geq 0$	$k < 1$
G -métrique	3 variables	$k < 1$
Rectangulaire	Inég. rectangulaire	$k < 1$

4.8 Exercices

Exercice 4.1. Montrer que $d(x, y) = |x - y|^2$ définit un b -espace métrique sur $\mathbb{R}$ avec $s = 2$, mais pas un espace métrique.

Exercice 4.2. Vérifier que ℓ^p pour $0 < p < 1$ muni de $d(x, y) = \sum |x_n - y_n|^p$ est un b -espace métrique complet et calculer la constante s .

Exercice 4.3. Soit (X, p) un espace métrique partiel. Montrer que $d_p(x, y) = 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y)$ est une métrique classique sur X .

Exercice 4.4. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que $G(x, y, z) = d(x, y) + d(y, z) + d(x, z)$ définit un G -espace métrique. Quel est le lien entre la complétude de (X, d) et celle de (X, G) ?

Exercice 4.5. Construire un espace métrique rectangulaire qui ne soit pas un espace métrique. *Indication : considérer un ensemble à quatre points avec une métrique bien choisie.*

Exercice 4.6. Soit (X, d) un b -espace métrique complet avec constante $s = 2$ et $T : X \rightarrow X$ avec $d(Tx, Ty) \leq \frac{1}{3}d(x, y)$. Montrer que T a un unique point fixe et calculer l'estimation d'erreur a priori.

Chapitre 5

Théorème de Brouwer

5.1 Introduction et énoncé

Remuez votre café dans une tasse, aussi vigoureusement que vous le souhaitez. Quand le liquide se stabilise, au moins un point se retrouve exactement à sa position initiale. Ce fait étonnant est une conséquence du théorème du point fixe de Brouwer (1911), l'un des joyaux de la topologie. L. E. J. Brouwer l'a démontré à l'aide de méthodes combinatoires (le lemme de Sperner), et depuis, le théorème a trouvé des applications en théorie des jeux (équilibre de Nash), en économie mathématique (théorème d'Arrow-Debreu) et en analyse non linéaire.

Contrairement au principe de Banach, il est de nature purement topologique : aucune hypothèse métrique sur T n'est requise, seule la continuité suffit.

Théorème 5.1 (Brouwer, 1911). *Soit $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$. Toute application continue $f : B^n \rightarrow B^n$ possède au moins un point fixe.*

Plus généralement :

Théorème 5.2 (Brouwer, version générale). *Soit K un sous-ensemble compact et convexe de $\mathbb{R}^n$, non vide. Toute application continue $f : K \rightarrow K$ possède un point fixe.*

Remarque 5.3. Les deux versions sont équivalentes. En effet, tout compact convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à B^m pour un certain $m \leq n$ (si K est de dimension m).

5.2 Le lemme de non-rétraction

Le théorème de Brouwer est équivalent au résultat topologique suivant.

Définition 5.4 (Rétraction). Soit $A \subset X$ un sous-espace. Une *rétraction* de X sur A est une application continue $r : X \rightarrow A$ telle que $r(a) = a$ pour tout $a \in A$.

Théorème 5.5 (Non-rétraction). *Il n'existe pas de rétraction continue de B^n sur $S^{n-1} = \partial B^n$.*

Proposition 5.6. Le Théorème 5.1 et le Théorème 5.5 sont équivalents.

Démonstration. Non-rétraction $\Rightarrow$ Brouwer. Supposons par l'absurde que $f : B^n \rightarrow B^n$ continue n'ait pas de point fixe. Alors $f(x) \neq x$ pour tout $x \in B^n$. Définissons $r : B^n \rightarrow S^{n-1}$ en envoyant x sur le point d'intersection de la demi-droite partant de $f(x)$

passant par x avec la sphère S^{n-1} . Cette application est continue (les formules explicites le montrent) et $r(x) = x$ pour $x \in S^{n-1}$, ce qui contredit le théorème de non-rétraction.

Brouwer $\Rightarrow$ Non-rétraction. Supposons qu'il existe une rétraction $r : B^n \rightarrow S^{n-1}$. Définissons $f : B^n \rightarrow B^n$ par $f(x) = -r(x)$. Alors f est continue et $f(B^n) \subset S^{n-1} \subset B^n$. Si $f(x^*) = x^*$, alors $x^* \in S^{n-1}$ et $-r(x^*) = x^*$, donc $-x^* = x^*$, soit $x^* = 0$, contradiction avec $x^* \in S^{n-1}$. $\square$

5.3 Preuve par le lemme de Sperner

Nous présentons d'abord la preuve combinatoire, due à Knaster, Kuratowski et Mazurkiewicz (1929), qui utilise le lemme de Sperner.

5.3.1 Le lemme de Sperner

Définition 5.7 (Triangulation et étiquetage de Sperner). Soit $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$ un n -simplexe dans $\mathbb{R}^n$. Une *triangulation* de σ est un complexe simplicial $\mathcal{T}$ dont la réunion est σ . Un *étiquetage de Sperner* est une application $\ell : V(\mathcal{T}) \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$ (où $V(\mathcal{T})$ est l'ensemble des sommets de $\mathcal{T}$) telle que :

- $\ell(v_i) = i$ pour chaque sommet v_i de σ ;
- Si v est sur la face $[v_{i_1}, \dots, v_{i_k}]$, alors $\ell(v) \in \{i_1, \dots, i_k\}$.

Lemme 5.8 (Sperner, 1928). Soit σ un n -simplexe muni d'une triangulation $\mathcal{T}$ et d'un étiquetage de Sperner. Alors le nombre de sous-simplexes de $\mathcal{T}$ dont les sommets portent toutes les étiquettes $\{0, 1, \dots, n\}$ est impair (et donc non nul).

Preuve en dimension $n = 1$. Considérons le segment $[v_0, v_1]$ subdivisé en sous-segments. Les sommets sont étiquetés 0 ou 1, avec v_0 étiqueté 0 et v_1 étiqueté 1. En parcourant le segment de gauche à droite, le nombre de changements d'étiquette est impair (on passe d'un 0 initial à un 1 final). $\square$

Preuve en dimension générale (esquisse). On utilise un argument de parité. Considérons le graphe dual : chaque n -simplexe de $\mathcal{T}$ est un sommet, et deux sommets sont reliés s'ils partagent une face $(n-1)$ -dimensionnelle portant les étiquettes $\{0, \dots, n-1\}$. On montre que les sommets de degré impair sont exactement les simplexes complètement étiquetés et ceux dont une face sur le bord porte les étiquettes $\{0, \dots, n-1\}$. Par le lemme des poignées de main et par récurrence (Sperner en dimension $n-1$), le nombre de simplexes complètement étiquetés est impair. $\square$

5.3.2 Preuve du théorème de Brouwer via Sperner

Preuve du Théorème 5.1. Soit $\sigma = [e_0, e_1, \dots, e_n]$ le simplexe standard dans $\mathbb{R}^{n+1}$ (où e_i sont les vecteurs de base). Soit $f : \sigma \rightarrow \sigma$ continue. Pour chaque $m \geq 1$, considérons la triangulation barycentrique de σ de maille $\leq 1/m$.

Définissons l'étiquetage : pour un sommet v de la triangulation, écrivons $v = \sum \lambda_i e_i$ en coordonnées barycentriques. On pose $\ell(v) = \min\{i : f(v)_i \leq v_i\}$, où $f(v)_i$ et v_i sont les i -èmes coordonnées barycentriques. Un tel i existe car $\sum f(v)_i = \sum v_i = 1$ implique $f(v)_i \leq v_i$ pour au moins un i .

Cet étiquetage est un étiquetage de Sperner (si v est sur la face $\{i : v_i = 0\}^c$, alors $\ell(v) \in \{i : v_i > 0\}$).

Par le lemme de Sperner, il existe un sous-simplexe σ_m complètement étiqueté. Ses sommets $v_m^0, \dots, v_m^n$ satisfont $f(v_m^i)_i \leq (v_m^i)_i$ et $\text{diam}(\sigma_m) \leq 1/m$.

Par compacité, on extrait une sous-suite telle que $v_m^i \rightarrow x^*$ pour tout i . Par continuité de f et passage à la limite : $f(x^*)_i \leq x_i^*$ pour tout i . Puisque $\sum f(x^*)_i = \sum x_i^* = 1$, on a $f(x^*)_i = x_i^*$ pour tout i , donc $f(x^*) = x^*$. $\square$

5.4 Preuve analytique

Nous présentons une preuve analytique du théorème de non-rétraction, basée sur le calcul différentiel.

Preuve analytique du Théorème 5.5. Étape 1 : réduction au cas C^∞ . Par le théorème d'approximation de Weierstrass, toute application continue $r : B^n \rightarrow S^{n-1}$ avec $r|_{S^{n-1}} = \text{Id}$ peut être approchée uniformément par des applications C^∞ . Par un argument de troncature, on peut supposer r de classe C^∞ .

Étape 2 : utilisation de la formule de changement de variables. Si $r : B^n \rightarrow S^{n-1}$ est C^∞ avec $r|_{S^{n-1}} = \text{Id}$, considérons la forme différentielle $\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$ sur S^{n-1} . Alors $\int_{S^{n-1}} \omega = \text{Vol}(S^{n-1}) \neq 0$.

Mais $r^*\omega = \omega$ sur S^{n-1} , et par le théorème de Stokes :

$$\int_{S^{n-1}} \omega = \int_{S^{n-1}} r^*\omega = \int_{B^n} d(r^*\omega).$$

Or r prend ses valeurs dans S^{n-1} , qui est de dimension $n-1$, donc $r^*\omega$ est exacte sur B^n et $d(r^*\omega) = r^*(d\omega) = 0$ car $d\omega = n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ et r est à valeurs dans une variété de dimension $n-1$. Contradiction. $\square$

5.5 Conséquences du théorème de Brouwer

5.5.1 Théorème du point fixe pour les simplexes

Corollaire 5.9. *Toute application continue d'un simplexe dans lui-même a un point fixe.*

5.5.2 Théorème de Borsuk–Ulam (dimension 1)

Théorème 5.10 (Borsuk–Ulam en dimension 1). *Pour toute application continue $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$, il existe $x \in S^1$ tel que $f(x) = f(-x)$.*

Démonstration. Posons $g(x) = f(x) - f(-x)$. Alors $g(-x) = -g(x)$. Si g ne s'annule pas, g est de signe constant, disons $g(x_0) > 0$, mais $g(-x_0) = -g(x_0) < 0$, contradiction par le théorème des valeurs intermédiaires (sur un arc reliant x_0 à $-x_0$). $\square$

5.5.3 Théorème du sandwich au jambon

Théorème 5.11 (Ham Sandwich). *Soient $A_1, \dots, A_n$ des sous-ensembles mesurables bornés de $\mathbb{R}^n$, chacun de mesure positive. Il existe un hyperplan qui coupe chaque A_i en deux parties de mesure égale.*

Remarque 5.12. Ce théorème est une conséquence du théorème de Borsuk–Ulam.

5.6 Contre-exemples : nécessité des hypothèses

Exemple 5.13 (Non-convexité). La rotation d'angle $\pi/3$ sur le cercle S^1 est une application continue de S^1 dans S^1 sans point fixe. Le cercle est compact mais non convexe.

Exemple 5.14 (Non-compacité). La translation $T(x) = x + e_1$ sur $\mathbb{R}^n$ est continue sans point fixe. L'espace $\mathbb{R}^n$ est convexe mais non compact (ni borné).

Exemple 5.15 (Dimension infinie). Considérons la boule unité B de ℓ^2 et le décalage

$$T(x_1, x_2, \dots) = (\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, \dots).$$

On vérifie que $T : B \rightarrow B$ est continue mais n'a pas de point fixe (si $Tx = x$, alors $x_1 = \sqrt{1 - \|x\|^2}$ et $x_{n+1} = x_n$ pour tout n , donc $x = (c, c, c, \dots)$ qui n'est pas dans ℓ^2 sauf si $c = 0$, mais $c = \sqrt{1 - 0} = 1$, contradiction). Ceci montre que le théorème de Brouwer ne s'étend pas à la dimension infinie (voir le théorème de Schauder au Chapitre 6).

5.7 Le degré topologique de Brouwer

Définition 5.16 (Degré de Brouwer). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue, et $p \notin f(\partial\Omega)$. Le *degré de Brouwer* $\deg(f, \Omega, p) \in \mathbb{Z}$ est l'unique entier satisfaisant :

1. **Normalisation** : $\deg(\text{Id}, \Omega, p) = 1$ si $p \in \Omega$;
2. **Additivité** : si $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ avec $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ et $p \notin f(\partial\Omega_i)$, alors $\deg(f, \Omega, p) = \deg(f, \Omega_1, p) + \deg(f, \Omega_2, p)$;
3. **Invariance par homotopie** : si $H : [0, 1] \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue avec $p \notin H(t, \partial\Omega)$ pour tout t , alors $\deg(H(t, \cdot), \Omega, p)$ est constant en t .

Théorème 5.17 (Brouwer via le degré). Soit $f : B^n \rightarrow B^n$ continue. Alors $\deg(\text{Id} - f, B^n, 0) = 1$, donc f a un point fixe.

Démonstration. L'homotopie $H(t, x) = x - tf(x)$ vérifie $H(0, x) = x$ et $H(1, x) = x - f(x)$. Pour $x \in S^{n-1}$ et $t \in [0, 1]$: $H(t, x) = 0$ impliquerait $x = tf(x)$, donc $1 = \|x\| = t\|f(x)\| \leq t$, d'où $t = 1$ et $f(x) = x$, ce qui signifie que x est un point fixe sur le bord. Même dans ce cas, le degré est bien défini et égal à 1 par normalisation.

Donc $\deg(\text{Id} - f, B^n, 0) = \deg(\text{Id}, B^n, 0) = 1 \neq 0$, et l'équation $x - f(x) = 0$ a une solution. $\square$

5.8 Théorème du point fixe de Lefschetz

Théorème 5.18 (Lefschetz). Soit X un rétracte absolu de voisinage (ANR) compact et $f : X \rightarrow X$ continue. Si le nombre de Lefschetz

$$\Lambda(f) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \text{tr}(f_{*k} : H_k(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H_k(X; \mathbb{Q}))$$

est non nul, alors f a un point fixe.

Remarque 5.19. Le théorème de Brouwer est un cas particulier : pour $X = B^n$, tous les groupes d'homologie sont triviaux sauf $H_0 \cong \mathbb{Q}$, et $f_{*0} = \text{Id}$, donc $\Lambda(f) = 1 \neq 0$.

5.9 Exercices

Exercice 5.1. Montrer directement (sans le lemme de Sperner) le théorème de Brouwer en dimension $n = 1$, c'est-à-dire que toute $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue a un point fixe.

Exercice 5.2. Démontrer le lemme de Sperner en dimension $n = 2$ par l'argument de parité (graphe dual).

Exercice 5.3. Utiliser le théorème de Brouwer pour montrer que toute matrice $n \times n$ à coefficients réels positifs ou nuls, dont la somme de chaque colonne vaut 1, a un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

Exercice 5.4. Montrer que le théorème de Brouwer implique le théorème fondamental de l'algèbre : tout polynôme à coefficients complexes de degré $n \geq 1$ a une racine. *Indication : utiliser le degré topologique.*

Exercice 5.5. Soit A une matrice $n \times n$ réelle. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in S^{n-1}$ tel que $Ax = \lambda x$ (c'est-à-dire que A a un « vecteur propre généralisé » sur la sphère).

Exercice 5.6. Construire explicitement une application continue $f : B^\infty \rightarrow B^\infty$ sans point fixe, où B^∞ est la boule unité fermée d'un espace de Hilbert de dimension infinie.

Chapitre 6

Théorème de Schauder et Variantes

6.1 Motivation

Le théorème de Brouwer est un bijou de la topologie en dimension finie, mais il échoue spectaculairement en dimension infinie : la boule unité fermée d'un espace de Banach de dimension infinie n'est pas compacte, et des applications continues sans point fixe existent. Juliusz Schauder, mathématicien polonais de l'école de Lwów, a surmonté cet obstacle en 1930 en remplaçant la compacité de l'ensemble par la *compacité de l'opérateur* : si T envoie un convexe fermé borné dans un sous-ensemble relativement compact de lui-même, alors T a un point fixe. Ce résultat est le pilier des méthodes d'existence pour les équations différentielles et intégrales non linéaires.

Le théorème de Brouwer (Chapitre 5) ne s'applique qu'en dimension finie. En dimension infinie, la boule unité fermée n'est pas compacte, et des applications continues sans point fixe existent. Schauder a résolu ce problème en remplaçant la compacité de l'ensemble par celle de l'opérateur.

6.2 Opérateurs compacts

Définition 6.1 (Opérateur compact). Soit E un espace de Banach et $C \subset E$. Un opérateur continu $T : C \rightarrow E$ est *compact* si $T(B)$ est relativement compact (c'est-à-dire $\overline{T(B)}$ est compact) pour tout sous-ensemble borné $B \subset C$.

Définition 6.2 (Opérateur complètement continu). Un opérateur $T : C \rightarrow E$ est *complètement continu* s'il est continu et envoie tout ensemble borné sur un ensemble relativement compact.

Remarque 6.3. Dans un espace de Banach, tout opérateur complètement continu est compact. La réciproque est vraie si le domaine est borné.

Exemple 6.4 (Opérateur intégral de Fredholm). L'opérateur $(Tu)(t) = \int_0^1 K(t, s)u(s) ds$ sur $C([0, 1])$ est compact dès que $K \in C([0, 1]^2)$. C'est une conséquence du théorème d'Arzelà–Ascoli.

6.3 Théorème de Schauder

Théorème 6.5 (Schauder, 1930). Soit E un espace de Banach, $C \subset E$ un sous-ensemble convexe, fermé et borné, et $T : C \rightarrow C$ un opérateur compact. Alors T possède au moins

un point fixe.

La preuve repose sur le lemme d'approximation suivant.

Lemme 6.6 (Approximation de Schauder). *Soit K un sous-ensemble compact d'un espace de Banach E et $\varepsilon > 0$. Il existe un sous-espace de dimension finie $F \subset E$ et une application continue $P_\varepsilon : K \rightarrow \text{co}(K) \cap F$ telle que $\|P_\varepsilon(x) - x\| < \varepsilon$ pour tout $x \in K$.*

Démonstration. Par compacité, il existe $x_1, \dots, x_n \in K$ tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$. Définissons $\mu_i(x) = \max(0, \varepsilon - \|x - x_i\|)$ et

$$P_\varepsilon(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i(x) x_i}{\sum_{i=1}^n \mu_i(x)}.$$

Cette application est bien définie (le dénominateur est positif car x est à distance $< \varepsilon$ d'au moins un x_i), continue, et $P_\varepsilon(x) \in \text{co}(\{x_1, \dots, x_n\})$. De plus,

$$\|P_\varepsilon(x) - x\| = \left\| \frac{\sum \mu_i(x)(x_i - x)}{\sum \mu_i(x)} \right\| \leq \frac{\sum \mu_i(x) \|x_i - x\|}{\sum \mu_i(x)} < \varepsilon$$

car $\mu_i(x) > 0$ implique $\|x_i - x\| < \varepsilon$. □

Preuve du Théorème 6.5. Posons $K = \overline{T(C)}$, qui est compact. Pour chaque $n \geq 1$, soit $P_n = P_{1/n}$ l'approximation de Schauder du Lemme 6.6. L'application $P_n \circ T : C \rightarrow \text{co}(K) \cap F_n$ est continue et à valeurs dans un espace de dimension finie.

Posons $C_n = C \cap F_n$, qui est convexe, fermé et borné dans F_n . L'application $P_n \circ T|_{C_n} : C_n \rightarrow C_n$ est continue (en ajustant le domaine si nécessaire pour assurer la stabilité). Par le théorème de Brouwer, il existe $x_n \in C_n$ tel que $P_n(T(x_n)) = x_n$.

On a $\|x_n - T(x_n)\| = \|P_n(T(x_n)) - T(x_n)\| < 1/n$. Par compacité de T , la suite $(T(x_n))$ admet une sous-suite convergente : $T(x_{n_k}) \rightarrow y$. Alors $x_{n_k} \rightarrow y$ aussi, et par continuité de T : $T(y) = \lim T(x_{n_k}) = y$. Puisque C est fermé, $y \in C$. □

Théorème de Schauder

C convexe fermé borné dans un Banach, $T : C \rightarrow C$ compact $\implies \exists x^* \in C : T(x^*) = x^*$.

6.4 Version de Schauder–Tychonoff

Théorème 6.7 (Schauder–Tychonoff). *Soit E un espace localement convexe séparé, $C \subset E$ un sous-ensemble convexe compact non vide, et $T : C \rightarrow C$ continue. Alors T possède un point fixe.*

Remarque 6.8. Ce théorème généralise à la fois Brouwer (dimension finie) et Schauder (espace de Banach). L'hypothèse de convexité locale de l'espace ambiant est essentielle.

6.5 Théorème de Leray–Schauder

Définition 6.9 (Degré de Leray–Schauder). Soit E un espace de Banach, $\Omega \subset E$ un ouvert borné, et $T : \overline{\Omega} \rightarrow E$ un opérateur compact tel que $x \neq T(x)$ pour tout $x \in \partial\Omega$. Le *degré de Leray–Schauder* $\deg_{LS}(\text{Id} - T, \Omega, 0) \in \mathbb{Z}$ est défini par approximation en dimension finie.

Théorème 6.10 (Leray–Schauder, 1934). Soit E un espace de Banach, $\Omega \subset E$ un ouvert borné contenant 0, et $T : \overline{\Omega} \rightarrow E$ un opérateur compact. Supposons que

$$x \neq \lambda T(x) \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Alors T possède un point fixe dans Ω .

Idée de la preuve. L'homotopie $H(\lambda, x) = x - \lambda T(x)$ vérifie $H(\lambda, x) \neq 0$ pour $x \in \partial\Omega$ et $\lambda \in [0, 1]$. Par invariance homotopique du degré :

$$\deg_{LS}(\text{Id} - T, \Omega, 0) = \deg_{LS}(\text{Id}, \Omega, 0) = 1.$$

Puisque le degré est non nul, l'équation $x - T(x) = 0$ a une solution. □

Corollaire 6.11 (Alternative de Leray–Schauder). Soit E un espace de Banach et $T : E \rightarrow E$ un opérateur complètement continu. Alors, au moins l'une des deux alternatives suivantes est vérifiée :

1. L'équation $x = T(x)$ a une solution ;
2. L'ensemble $\{x \in E : x = \lambda T(x) \text{ pour un } \lambda \in (0, 1)\}$ est non borné.

6.6 Mesure de non-compacité et théorème de Darbo

Définition 6.12 (Mesure de non-compacité de Kuratowski). Soit A un sous-ensemble borné d'un espace métrique. La *mesure de non-compacité de Kuratowski* est

$$\alpha(A) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : A \subset \bigcup_{i=1}^n A_i \text{ avec } \text{diam}(A_i) \leq \varepsilon \right\}.$$

Proposition 6.13 (Propriétés de α). Pour des sous-ensembles bornés A, B d'un espace de Banach :

1. $\alpha(A) = 0 \Leftrightarrow \overline{A}$ est compact ;
2. $A \subset B \Rightarrow \alpha(A) \leq \alpha(B)$;
3. $\alpha(A \cup B) = \max(\alpha(A), \alpha(B))$;
4. $\alpha(\overline{\text{co}}(A)) = \alpha(A)$;
5. $\alpha(A + B) \leq \alpha(A) + \alpha(B)$;
6. $\alpha(\lambda A) = |\lambda| \alpha(A)$.

Définition 6.14 (Application condensante). Un opérateur continu $T : C \rightarrow C$ (où C est convexe fermé borné) est α -condensant s'il existe $k \in [0, 1)$ tel que $\alpha(T(A)) \leq k \alpha(A)$ pour tout $A \subset C$ borné.

Théorème 6.15 (Darbo, 1955). *Soit E un espace de Banach, $C \subset E$ convexe fermé borné non vide, et $T : C \rightarrow C$ un opérateur α -condensant. Alors T possède un point fixe.*

Démonstration. Définissons par récurrence $C_0 = C$ et $C_{n+1} = \overline{\text{co}}(T(C_n))$. La suite (C_n) est décroissante ($C_{n+1} \subset C_n$) car $T(C_n) \subset C_n$ implique $C_{n+1} = \overline{\text{co}}(T(C_n)) \subset \overline{\text{co}}(C_n) = C_n$.

Posons $\alpha_n = \alpha(C_n)$. Alors $\alpha_{n+1} = \alpha(\overline{\text{co}}(T(C_n))) = \alpha(T(C_n)) \leq k \alpha_n$. Donc $\alpha_n \leq k^n \alpha_0 \rightarrow 0$.

Posons $C_\infty = \bigcap_{n \geq 0} C_n$. Comme intersection décroissante de fermés dans un espace complet avec $\alpha(C_n) \rightarrow 0$, l'ensemble C_∞ est compact non vide (par Cantor généralisé). De plus, C_∞ est convexe. On a $T(C_\infty) \subset T(C_n) \subset C_{n+1}$ pour tout n , donc $T(C_\infty) \subset C_\infty$.

Par le théorème de Schauder appliqué à $T : C_\infty \rightarrow C_\infty$ (continu sur un convexe compact), T a un point fixe. $\square$

Remarque 6.16. Le théorème de Schauder est un cas particulier de celui de Darbo : si T est compact, alors $\alpha(T(A)) = 0$ pour tout borné A , donc T est α -condensant avec $k = 0$.

6.7 Théorème de Sadovskii

Théorème 6.17 (Sadovskii, 1967). *Soit C un sous-ensemble convexe, fermé et borné d'un espace de Banach, et $T : C \rightarrow C$ continue telle que $\alpha(T(A)) < \alpha(A)$ pour tout $A \subset C$ avec $\alpha(A) > 0$. Alors T a un point fixe.*

Remarque 6.18. Sadovskii généralise Darbo en remplaçant la condition $\alpha(T(A)) \leq k \alpha(A)$ ($k < 1$) par $\alpha(T(A)) < \alpha(A)$. La preuve utilise un argument de Zorn.

6.8 Théorème de Krasnoselskii

Théorème 6.19 (Krasnoselskii, 1958). *Soit C un sous-ensemble convexe, fermé et borné d'un espace de Banach E . Soient $A : C \rightarrow E$ un opérateur compact et $B : C \rightarrow E$ une contraction de constante $k < 1$. Si $A(x) + B(y) \in C$ pour tous $x, y \in C$, alors l'équation $x = A(x) + B(x)$ a une solution dans C .*

Démonstration. Pour chaque $x \in C$, l'application $y \mapsto A(x) + B(y)$ est une contraction de C dans C (par hypothèse). Par Banach, elle a un unique point fixe $y(x) : y(x) = A(x) + B(y(x))$. L'application $x \mapsto y(x)$ est continue (par dépendance continue du point fixe par rapport au paramètre) et compacte (car $y(x) = A(x) + B(y(x))$ et A est compact). Par Schauder, $y(\cdot)$ a un point fixe $x^* = y(x^*)$, et donc $x^* = A(x^*) + B(x^*)$. $\square$

Remarque 6.20. Le théorème de Krasnoselskii est particulièrement utile pour les équations intégrales de la forme $x = Ax + Bx$ où A est un opérateur intégral (compact) et B est une contraction.

6.9 Applications

Exemple 6.21 (Équation intégrale non linéaire). Considérons l'équation

$$u(t) = g(t) + \int_0^1 K(t, s) h(s, u(s)) ds, \quad t \in [0, 1]$$

où $g \in C([0, 1])$, $K \in C([0, 1]^2)$ et $h : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et bornée. L'opérateur $(Tu)(t) = g(t) + \int_0^1 K(t, s)h(s, u(s)) ds$ est compact sur la boule $\overline{B}(0, R) \subset C([0, 1])$ pour R assez grand, et $T(\overline{B}(0, R)) \subset \overline{B}(0, R)$ si $R \geq \|g\|_\infty + \|K\|_\infty \|h\|_\infty$. Par Schauder, l'équation a une solution.

6.10 Exercices

Exercice 6.1. Montrer que l'opérateur de Volterra $(Tu)(t) = \int_0^t K(t, s)u(s) ds$ est compact sur $C([0, 1])$ lorsque $K \in C([0, 1]^2)$.

Exercice 6.2. Vérifier que $\alpha(\overline{B}(0, r)) = 2r$ dans un espace de Banach de dimension infinie, et $\alpha(\overline{B}(0, r)) = 0$ en dimension finie.

Exercice 6.3. Utiliser le théorème de Schauder pour prouver l'existence d'une solution au problème de Cauchy–Peano : $y' = f(t, y)$, $y(0) = y_0$, où f est continue (mais pas nécessairement lipschitzienne).

Exercice 6.4. Montrer que le théorème de Darbo implique celui de Schauder.

Exercice 6.5. Appliquer le théorème de Krasnoselskii pour montrer l'existence d'une solution à l'équation $u(t) = \frac{1}{3}u(t) + \int_0^1 K(t, s)g(u(s)) ds$ dans $C([0, 1])$, sous des hypothèses convenables sur K et g .

Exercice 6.6. Montrer que dans un espace de Banach réflexif, la boule unité fermée est faiblement compacte. En déduire une version du théorème de Schauder pour la topologie faible.

Chapitre 7

Théorème de Kakutani et Correspondances

En 1941, Shizuo Kakutani, jeune mathématicien japonais formé à l'université d'Osaka, publie un résultat qui semble n'être qu'une extension technique du théorème de Brouwer : au lieu d'exiger qu'une fonction ait un point fixe, il montre qu'une *correspondance* — une application qui associe à chaque point non pas une valeur unique mais un *ensemble* de valeurs — possède elle aussi un point fixe, pourvu que les images soient convexes et que la correspondance soit semi-continue supérieurement. Le résultat aurait pu rester confiné aux cercles topologiques. Mais neuf ans plus tard, John Nash l'utilise comme pièce maîtresse de sa démonstration de l'existence d'équilibres dans les jeux non coopératifs, un travail qui lui vaudra le prix Nobel d'économie en 1994. Le théorème de Kakutani est ainsi devenu l'un des piliers de la théorie des jeux et de l'économie mathématique.

Intuition

Le théorème de Kakutani généralise le théorème de Brouwer aux applications multivoques (correspondances). Au lieu d'une fonction $f: C \rightarrow C$, on considère une correspondance $F: C \rightrightarrows C$ qui associe à chaque point un *ensemble* de valeurs. Kakutani montre qu'une telle correspondance possède un point fixe (un point x^* tel que $x^* \in F(x^*)$) sous des hypothèses de convexité et de semi-continuité. Ce résultat est fondamental en théorie des jeux, où il permet de démontrer l'existence d'équilibres de Nash.

7.1 Correspondances et semi-continuité

Définition 7.1 (Correspondance (application multivoque)). Soient X et Y deux espaces topologiques. Une *correspondance* (ou application multivoque) $F: X \rightrightarrows Y$ est une application $F: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$, c'est-à-dire que pour tout $x \in X$, $F(x)$ est un sous-ensemble de Y . Le *graphe* de F est $\text{Gr}(F) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}$.

Définition 7.2 (Semi-continuité supérieure (s.c.s.)). Une correspondance $F: X \rightrightarrows Y$ est *semi-continue supérieurement* (ou *hémi-continue supérieurement*) si pour tout ouvert $V \subseteq Y$, l'ensemble

$$F^+(V) = \{x \in X : F(x) \subseteq V\}$$

est ouvert dans X .

Définition 7.3 (Semi-continuité inférieure (s.c.i.)). Une correspondance $F: X \rightrightarrows Y$ est *semi-continue inférieurement* si pour tout ouvert $V \subseteq Y$, l'ensemble

$$F^-(V) = \{x \in X : F(x) \cap V \neq \emptyset\}$$

est ouvert dans X .

Proposition 7.4 (Caractérisation par le graphe fermé). Soit $F: X \rightrightarrows Y$ une correspondance à valeurs compactes et Y compact de Hausdorff. Alors F est s.c.s. si et seulement si son graphe $\text{Gr}(F)$ est fermé dans $X \times Y$.

Démonstration. $(\Rightarrow)$: Soit (x_α, y_α) un filet dans $\text{Gr}(F)$ convergeant vers (x, y) . Supposons $y \notin F(x)$. Comme $F(x)$ est compact et Y est de Hausdorff, il existe un ouvert V contenant $F(x)$ tel que $y \notin \bar{V}$. Par s.c.s., $F^+(V)$ est un voisinage de x , donc $F(x_\alpha) \subseteq V$ pour α assez grand, d'où $y_\alpha \in V$. À la limite, $y \in \bar{V}$, contradiction.

$(\Leftarrow)$: Soit V ouvert avec $F(x) \subseteq V$. Si $F^+(V)$ n'était pas un voisinage de x , il existerait un filet $x_\alpha \rightarrow x$ avec $F(x_\alpha) \not\subseteq V$. On trouverait $y_\alpha \in F(x_\alpha) \setminus V$. Par compacité de Y , on peut extraire un sous-filet convergeant vers $y \in Y \setminus V$. Alors $(x, y) \in \text{Gr}(F)$ car le graphe est fermé, d'où $y \in F(x) \subseteq V$, contradiction. $\square$

Remarque 7.5. Pour une fonction univoque $f: X \rightarrow Y$ (vue comme correspondance $F(x) = \{f(x)\}$), la s.c.s. coïncide avec la continuité usuelle.

7.2 Théorème de Kakutani

Théorème 7.6 (Kakutani, 1941). Soit C un sous-ensemble convexe compact non vide de $\mathbb{R}^n$ et $F: C \rightrightarrows C$ une correspondance telle que :

1. pour tout $x \in C$, $F(x)$ est non vide et convexe ;
2. F est semi-continue supérieurement (graphe fermé).

Alors F possède un point fixe : il existe $x^* \in C$ tel que $x^* \in F(x^*)$.

Démonstration. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, considérons une triangulation simpliciale de C de maille inférieure à $1/n$, dont les sommets sont $v_1^n, \dots, v_{k_n}^n$. Pour chaque sommet v_i^n , choisissons $w_i^n \in F(v_i^n)$. Définissons l'application affine par morceaux $f_n: C \rightarrow C$ par $f_n(v_i^n) = w_i^n$ et extension affine sur chaque simplexe.

Comme C est convexe compact et f_n est continue, par le théorème de Brouwer, il existe $x_n \in C$ tel que $f_n(x_n) = x_n$.

Par compacité, (x_n) admet une sous-suite convergente $x_{n_k} \rightarrow x^*$. Montrons que $x^* \in F(x^*)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, pour k assez grand, la maille de la triangulation est inférieure à ε , et x_{n_k} appartient à un simplexe dont les sommets $v_i^{n_k}$ vérifient $\|v_i^{n_k} - x_{n_k}\| < \varepsilon$. Comme $f_{n_k}(x_{n_k}) = x_{n_k}$ est une combinaison convexe des $w_i^{n_k} \in F(v_i^{n_k})$, et comme $\text{Gr}(F)$ est fermé (Proposition 7.4), on conclut que $x^* \in F(x^*)$. $\square$

Attention

L'hypothèse de convexité de $F(x)$ est essentielle. Considérons $C = [0, 1]$ et $F(x) = \{0, 1\} \setminus \{x\}$: cette correspondance à graphe fermé n'a pas de point fixe car $F(x)$ n'est pas convexe.

7.3 Extension de Glicksberg–Fan

Théorème 7.7 (Glicksberg–Fan). *Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe et $C \subseteq E$ un convexe compact non vide. Soit $F: C \rightrightarrows C$ une correspondance à valeurs non vides, convexes et fermées, semi-continue supérieurement. Alors F possède un point fixe.*

Remarque 7.8. Ce théorème généralise Kakutani à la dimension infinie, comme le théorème de Schauder généralise celui de Brouwer.

7.4 Application : équilibre de Nash

Définition 7.9 (Jeu sous forme normale). Un jeu sous forme normale à n joueurs est un triplet $\Gamma = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ où :

- $N = \{1, \dots, n\}$ est l'ensemble des joueurs ;
- S_i est l'ensemble des stratégies du joueur i ;
- $u_i: S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction d'utilité du joueur i .

L'ensemble des stratégies mixtes du joueur i est $\Delta(S_i) = \{\sigma_i \in \mathbb{R}^{S_i} : \sigma_i \geq 0, \sum_{s \in S_i} \sigma_i(s) = 1\}$.

Définition 7.10 (Équilibre de Nash). Un profil de stratégies mixtes $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*)$ est un *équilibre de Nash* si pour tout joueur i et toute stratégie mixte $\sigma_i \in \Delta(S_i)$:

$$u_i(\sigma^*) \geq u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*)$$

où σ_{-i}^* désigne les stratégies des autres joueurs.

Définition 7.11 (Correspondance de meilleure réponse). La *correspondance de meilleure réponse* du joueur i est

$$BR_i(\sigma_{-i}) = \arg \max_{\sigma_i \in \Delta(S_i)} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}).$$

Théorème 7.12 (Nash, 1950). *Tout jeu fini sous forme normale (c'est-à-dire avec S_i fini pour tout i) possède au moins un équilibre de Nash en stratégies mixtes.*

Démonstration. Posons $C = \prod_{i=1}^n \Delta(S_i)$. C'est un produit de simplexes, donc un convexe compact non vide de $\mathbb{R}^{\sum |S_i|}$.

Définissons la correspondance de meilleure réponse globale :

$$BR(\sigma) = BR_1(\sigma_{-1}) \times \dots \times BR_n(\sigma_{-n}).$$

Vérifions les hypothèses du théorème de Kakutani :

Non-vacuité et convexité : $BR_i(\sigma_{-i})$ est non vide (maximum d'une fonction continue sur un compact) et convexe (car u_i est linéaire en σ_i : si σ_i, σ'_i maximisent $u_i(\cdot, \sigma_{-i})$, alors toute combinaison convexe aussi).

Semi-continuité supérieure : le théorème du maximum de Berge assure que BR est s.c.s., car u_i est continue et $\Delta(S_i)$ ne dépend pas de σ_{-i} .

Par le théorème de Kakutani, BR possède un point fixe σ^* , c'est-à-dire $\sigma_i^* \in BR_i(\sigma_{-i}^*)$ pour tout i . C'est un équilibre de Nash. $\square$

7.5 Théorèmes minimax

Théorème 7.13 (Minimax de von Neumann). *Soit A une matrice $m \times n$ réelle. Alors :*

$$\max_{\sigma \in \Delta_m} \min_{\tau \in \Delta_n} \sigma^T A \tau = \min_{\tau \in \Delta_n} \max_{\sigma \in \Delta_m} \sigma^T A \tau.$$

Démonstration. L'inégalité $\max \min \leq \min \max$ est toujours vraie. Pour l'égalité, considérons le jeu à somme nulle à deux joueurs défini par la matrice A . Par le théorème de Nash (ou directement par Kakutani), ce jeu admet un équilibre (σ^*, τ^*) . La valeur du jeu est $v = \sigma^{*T} A \tau^* = \max_{\sigma} \min_{\tau} \sigma^T A \tau = \min_{\tau} \max_{\sigma} \sigma^T A \tau$. $\square$

Corollaire 7.14. *Tout jeu matriciel à somme nulle possède une valeur, et les deux joueurs ont des stratégies optimales mixtes.*

Récapitulatif

Théorème	Hypothèses clés
Kakutani	C convexe compact $\subseteq \mathbb{R}^n$, $F(x)$ convexe, s.c.s.
Glicksberg–Fan	C convexe compact dans evtlc , $F(x)$ convexe fermé, s.c.s.
Nash	Jeu fini à n joueurs
von Neumann	Jeu matriciel à somme nulle

7.6 Exercices

Exercice 7.1. Montrer que la correspondance $F: [0, 1] \rightrightarrows [0, 1]$ définie par $F(x) = [1 - x, 1]$ si $x \leq 1/2$ et $F(x) = [0, 1 - x]$ si $x > 1/2$ vérifie les hypothèses de Kakutani. Trouver explicitement les points fixes.

Exercice 7.2. Soit $C = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ la boule unité fermée. Montrer que la correspondance $F(x) = \{y \in C : \langle x, y \rangle \geq 0\}$ satisfait les hypothèses de Kakutani et trouver l'ensemble des points fixes.

Exercice 7.3 (Théorème du maximum de Berge). Soient X, Y des espaces topologiques, $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $\Gamma: X \rightrightarrows Y$ une correspondance s.c.s. à valeurs compactes non vides. Montrer que la correspondance de maximiseurs $M(x) = \arg \max_{y \in \Gamma(x)} f(x, y)$ est s.c.s.

Exercice 7.4. Trouver les équilibres de Nash en stratégies mixtes du jeu de Pierre-Feuille-Ciseaux, défini par la matrice de gains :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7.5. Montrer que l'hypothèse de convexité des valeurs $F(x)$ ne peut pas être remplacée par la connexité. *Indication : considérer un cercle dans $\mathbb{R}^2$.*

Exercice 7.6. Soit Γ un jeu à deux joueurs où les ensembles de stratégies sont des convexes compacts de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement, et les fonctions d'utilité sont continues et quasi-concaves en la stratégie propre de chaque joueur. Montrer l'existence d'un équilibre de Nash en stratégies pures.

Chapitre 8

Points Fixes dans les Ensembles Ordonnés

En 1928, Bronislaw Knaster et Alfred Tarski démontrent un résultat d’une simplicité et d’une portée extraordinaires : toute application croissante sur un treillis complet possède un point fixe. Mieux encore, l’ensemble de *tous* les points fixes forme lui-même un treillis complet. Ce théorème n’utilise ni métrique, ni topologie, ni continuité : seule la structure d’ordre intervient. Il trouvera des applications spectaculaires en informatique théorique, où il fonde la sémantique dénotationnelle des programmes récursifs (les travaux de Dana Scott dans les années 1970), et en logique, où il sous-tend la théorie des définitions inductives. Avec les itérés transfinis de Bourbaki–Witt et le théorème de Kleene pour les ω -cpo, ce chapitre explore la troisième grande famille de théorèmes de points fixes — celle fondée sur l’ordre.

Intuition

Les théorèmes de points fixes dans les ensembles ordonnés constituent la troisième grande famille de résultats, après les théorèmes métriques (Banach) et topologiques (Brouwer, Schauder). Ici, aucune structure métrique ou topologique n’est requise : seule la structure d’ordre intervient. Le résultat fondamental est le théorème de Knaster–Tarski, qui affirme que toute application croissante sur un treillis complet possède un point fixe, et que l’ensemble des points fixes forme lui-même un treillis complet.

8.1 Rappels sur les ensembles ordonnés

Définition 8.1 (Ordre partiel et treillis). Un *ensemble partiellement ordonné* (poset) est un couple $(P, \leq)$ où $\leq$ est une relation réflexive, antisymétrique et transitive. Un *treillis* est un poset dans lequel toute paire $\{a, b\}$ admet un supremum $a \vee b$ et un infimum $a \wedge b$. Un treillis est *complet* si toute partie admet un supremum et un infimum.

Exemple 8.2 (Treillis complets fondamentaux). • $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ pour tout ensemble X .

- $([0, 1], \leq)$ avec l’ordre usuel.
- Le treillis des sous-espaces vectoriels d’un espace vectoriel.
- Le treillis des relations d’équivalence sur un ensemble.

Définition 8.3 (Application croissante et décroissante). Soit $(P, \leq)$ un poset. Une application $f: P \rightarrow P$ est *croissante* (ou monotone) si $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. Elle est *inflationnaire* si $x \leq f(x)$ pour tout x , et *déflationnaire* si $f(x) \leq x$ pour tout x .

8.2 Théorème de Knaster–Tarski

Théorème 8.4 (Knaster–Tarski). Soit $(L, \leq)$ un treillis complet et $f: L \rightarrow L$ une application croissante. Alors :

1. f admet un plus petit point fixe : $\text{lfp}(f) = \bigwedge \{x \in L : f(x) \leq x\}$.
2. f admet un plus grand point fixe : $\text{gfp}(f) = \bigvee \{x \in L : x \leq f(x)\}$.
3. L l'ensemble $\text{Fix}(f) = \{x \in L : f(x) = x\}$ est un treillis complet (pour l'ordre induit).

Démonstration. Posons $\text{Pre}(f) = \{x \in L : f(x) \leq x\}$ (les pré-points fixes) et $a = \bigwedge \text{Pre}(f)$.

Étape 1 : $f(a) \leq a$. En effet, pour tout $x \in \text{Pre}(f)$, on a $a \leq x$, donc $f(a) \leq f(x) \leq x$. Ainsi $f(a)$ minore $\text{Pre}(f)$, d'où $f(a) \leq a$.

Étape 2 : $a \leq f(a)$. De l'étape 1, $f(a) \leq a$, donc par croissance, $f(f(a)) \leq f(a)$. Ainsi $f(a) \in \text{Pre}(f)$, d'où $a \leq f(a)$.

Étape 3 : $f(a) = a$ par les étapes 1 et 2.

Plus petit point fixe : si b est un point fixe, alors $b \in \text{Pre}(f)$, d'où $a \leq b$.

Treillis complet des points fixes : Soit $S \subseteq \text{Fix}(f)$. Définissons $L_S = \{x \in L : x \geq s \ \forall s \in S \text{ et } f(x) \leq x\}$. Alors L_S est non vide ($\top \in L_S$) et $\bigwedge L_S$ est un point fixe de f qui est le supremum de S dans $\text{Fix}(f)$. Duale, $\text{Fix}(f)$ admet les infima. $\square$

Exemple 8.5 (Application en logique). Soit X un ensemble et $\Phi: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ un opérateur croissant. Le plus petit point fixe de Φ est le plus petit ensemble A tel que $\Phi(A) = A$. Si Φ est un opérateur de conséquence logique, $\text{lfp}(\Phi)$ est l'ensemble des formules déductibles.

8.3 Théorème de Bourbaki–Witt

Théorème 8.6 (Bourbaki–Witt). Soit $(P, \leq)$ un ensemble ordonné dans lequel toute chaîne admet un majorant, et soit $f: P \rightarrow P$ une application inflationnaire ($x \leq f(x)$ pour tout x). Si P possède un plus petit élément $\perp$, alors f admet un point fixe.

Démonstration. Considérons l'ensemble A de toutes les chaînes C de P telles que :

- $\perp \in C$;
- C est stable par f ;
- si $C' \subseteq C$ est une chaîne, tout majorant de C' dans P qui est dans C est bien un majorant.

On définit $C_0 = \bigcap_{C \in A} C$. On montre que C_0 est une chaîne bien ordonnée. Soit m un majorant de C_0 dans P (qui existe par hypothèse). Alors $f(m) \geq m$. Si $f(m) = m$, c'est un point fixe. Sinon, $C_0 \cup \{m\}$ serait une chaîne strictement plus grande, ce qui contredit la minimalité de C_0 . $\square$

Remarque 8.7. Le théorème de Bourbaki–Witt est équivalent au lemme de Zorn dans $\text{ZF} + \text{axiome du choix}$. Sans l’axiome du choix, l’énoncé reste vrai pour les fonctions inflationnaires explicitement définies.

8.4 Application à l’analyse formelle de concepts

Définition 8.8 (Contexte formel). Un *contexte formel* est un triplet (G, M, I) où G est un ensemble d’objets, M un ensemble d’attributs, et $I \subseteq G \times M$ une relation d’incidence (gIm signifie que l’objet g possède l’attribut m).

Définition 8.9 (Opérateurs de dérivation). Pour $A \subseteq G$ et $B \subseteq M$, on définit :

$$A' = \{m \in M : \forall g \in A, gIm\}, \quad B' = \{g \in G : \forall m \in B, gIm\}.$$

Proposition 8.10 (Connexion de Galois). Les opérateurs $A \mapsto A'$ et $B \mapsto B'$ forment une *connexion de Galois* entre $(\mathcal{P}(G), \subseteq)$ et $(\mathcal{P}(M), \supseteq)$:

1. $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow A_2' \subseteq A_1'$;
2. $A \subseteq A''$;
3. $A' = A'''$.

Définition 8.11 (Concept formel). Un *concept formel* est un couple (A, B) avec $A \subseteq G$, $B \subseteq M$, $A' = B$ et $B' = A$. L’ensemble A est l’*extension* et B l’*intension* du concept.

Théorème 8.12 (Treillis des concepts). *L’ensemble des concepts formels d’un contexte (G, M, I) , ordonné par $(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2) \Leftrightarrow A_1 \subseteq A_2$ (ou de manière équivalente $B_2 \subseteq B_1$), est un treillis complet.*

Démonstration. L’opérateur de fermeture $\varphi: \mathcal{P}(G) \rightarrow \mathcal{P}(G)$ défini par $\varphi(A) = A''$ est croissant, extensif ($A \subseteq A''$) et idempotent ($A'' = A'''$). Les ensembles fermés (points fixes de φ) forment un treillis complet, et correspondent bijectivement aux concepts formels. $\square$

Exemple 8.13. Considérons le contexte avec $G = \{1, 2, 3\}$, $M = \{a, b, c\}$ et $I = \{(1, a), (1, b), (2, b), (2, c), (3, a), (3, c)\}$. L’extension $\{1, 2\}' = \{b\}$, et le concept correspondant est $(\{1, 2\}, \{b\})$.

8.5 Points fixes et opérateurs de fermeture

Définition 8.14 (Opérateur de fermeture). Un *opérateur de fermeture* sur un poset $(P, \leq)$ est une application croissante, extensive et idempotente $\varphi: P \rightarrow P$.

Théorème 8.15. *Soit $(L, \leq)$ un treillis complet et $\varphi: L \rightarrow L$ un opérateur de fermeture. Alors $\text{Fix}(\varphi)$ est un treillis complet (avec les suprema de L refermés par φ , et les infima inchangés).*

Démonstration. Les points fixes de φ sont les éléments fermés, c’est-à-dire les x tels que $\varphi(x) = x$. Pour $S \subseteq \text{Fix}(\varphi)$, l’infimum dans $\text{Fix}(\varphi)$ est $\bigwedge_L S$ (car $\varphi(\bigwedge_L S) \leq \varphi(s) = s$ pour tout $s \in S$, d’où $\varphi(\bigwedge_L S) \leq \bigwedge_L S$, et par extensivité l’égalité). Le supremum dans $\text{Fix}(\varphi)$ est $\varphi(\bigvee_L S)$. $\square$

Points fixes dans les ensembles ordonnés

Théorème	Hypothèses	Conclusion
Knaster–Tarski	Treillis complet, f croissante	$\text{Fix}(f)$ treillis complet
Bourbaki–Witt	Chaînes bornées, f inflat.	Point fixe
Op. fermeture	Treillis complet, φ fermeture	$\text{Fix}(\varphi)$ treillis complet

8.6 Exercices

Exercice 8.1. Montrer que le théorème de Knaster–Tarski implique le théorème de Cantor–Bernstein : si $f: A \hookrightarrow B$ et $g: B \hookrightarrow A$ sont des injections, alors il existe une bijection $h: A \rightarrow B$. *Indication : appliquer le théorème à $\varphi(S) = A \setminus g(B \setminus f(S))$ sur $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$.*

Exercice 8.2. Soit $(L, \leq)$ un treillis complet et $f: L \rightarrow L$ croissante. Montrer que si $a \leq f(a)$ et $f(b) \leq b$ avec $a \leq b$, alors f admet un point fixe dans l'intervalle $[a, b]$.

Exercice 8.3. Donner un exemple d'ensemble ordonné (non complet) et d'application croissante sans point fixe.

Exercice 8.4. Soit $G = (\{1, 2, 3, 4\}, E)$ un graphe et $f: \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}) \rightarrow \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$ défini par $f(S) = S \cup \{v : \exists u \in S, (u, v) \in E\}$. Calculer $\text{lfp}(f)$ et $\text{gfp}(f)$ pour le graphe $E = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ avec f démarrant de $\{1\}$.

Exercice 8.5 (Connexion de Galois et points fixes). Soit (f, g) une connexion de Galois entre deux treillis complets L_1 et L_2 ($f \dashv g$). Montrer que $g \circ f$ est un opérateur de fermeture sur L_1 et $f \circ g$ un opérateur de noyau sur L_2 .

Exercice 8.6. Construire le treillis des concepts du contexte formel avec $G = \{\text{chien, chat, poisson}\}$, $M = \{\text{poils, nage, 4 pattes}\}$ et la relation d'incidence naturelle.

Chapitre 9

Applications

Les théorèmes de points fixes ne sont pas des curiosités abstraites : ils sont les outils qui, dans les coulisses, font fonctionner une grande partie de l'analyse classique. Le théorème d'existence et d'unicité de Picard-Lindelöf pour les équations différentielles ordinaires ? C'est le principe de contraction de Banach appliqué à un opérateur intégral. Les équations intégrales de Fredholm ? Encore Banach. Le théorème des fonctions implicites, pilier du calcul différentiel ? Le principe de contraction, une fois de plus. Ce chapitre rassemble ces applications classiques, montrant comment un seul résultat abstrait — l'existence d'un point fixe pour une contraction — irrigue des pans entiers des mathématiques appliquées.

Intuition

Ce chapitre illustre la puissance des théorèmes de points fixes en les appliquant à trois domaines classiques de l'analyse : les équations différentielles ordinaires (via le théorème de Picard-Lindelöf comme conséquence du principe de contraction de Banach), les équations intégrales (Fredholm et Volterra), et le théorème des fonctions implicites. Dans chaque cas, le problème est reformulé comme un problème de point fixe dans un espace fonctionnel adéquat.

9.1 Équations différentielles ordinaires : Picard-Lindelöf

Théorème 9.1 (Picard-Lindelöf (Cauchy-Lipschitz)). *Soit $f: [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}(y_0, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue, lipschitzienne en y de constante L :*

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\|$$

pour tous t, y_1, y_2 . Posons $M = \sup \|f\|$ et $\delta = \min(a, b/M)$. Alors le problème de Cauchy

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

admet une unique solution $y \in C^1([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Le problème de Cauchy est équivalent à l'équation intégrale

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds =: (Ty)(t).$$

Considérons l'espace $E = \{y \in C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n) : \|y(t) - y_0\| \leq b \ \forall t\}$ muni de la norme

$$\|y\|_\lambda = \sup_t e^{-\lambda|t-t_0|} \|y(t) - y_0\|$$

pour $\lambda > L$ à choisir.

T envoie E dans E : Pour $y \in E$, $\|(Ty)(t) - y_0\| \leq M|t - t_0| \leq M\delta \leq b$.

T est une contraction : Pour $y_1, y_2 \in E$,

$$\begin{aligned} e^{-\lambda|t-t_0|} \|(Ty_1)(t) - (Ty_2)(t)\| &\leq e^{-\lambda|t-t_0|} \int_{t_0}^t L \|y_1(s) - y_2(s)\| ds \\ &\leq L \|y_1 - y_2\|_\lambda \int_{t_0}^t e^{\lambda(|s-t_0|-|t-t_0|)} ds \\ &\leq \frac{L}{\lambda} \|y_1 - y_2\|_\lambda. \end{aligned}$$

En choisissant $\lambda > L$, on obtient $\|Ty_1 - Ty_2\|_\lambda \leq \frac{L}{\lambda} \|y_1 - y_2\|_\lambda$ avec $L/\lambda < 1$.

Par le principe de contraction de Banach, T admet un unique point fixe dans E . $\square$

Remarque 9.2. La norme $\|\cdot\|_\lambda$ (norme de Bielecki) est une astuce classique qui évite de devoir restreindre l'intervalle de temps pour obtenir la contraction.

Corollaire 9.3 (Dépendance continue). *La solution $y(t; t_0, y_0)$ dépend continûment des données initiales (t_0, y_0) .*

9.2 Équations intégrales de Fredholm

Définition 9.4 (Équation de Fredholm de seconde espèce). Soient $K \in C([a, b]^2, \mathbb{R})$ un noyau, $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. L'équation de Fredholm de seconde espèce est :

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, s) u(s) ds.$$

Théorème 9.5 (Existence et unicité pour Fredholm). *Si $|\lambda| < \frac{1}{(b-a)\|K\|_\infty}$, alors l'équation de Fredholm admet une unique solution $u \in C([a, b], \mathbb{R})$.*

Démonstration. Définissons l'opérateur $T: C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ par

$$(Tu)(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, s) u(s) ds.$$

Alors :

$$\|Tu_1 - Tu_2\|_\infty \leq |\lambda| (b-a) \|K\|_\infty \|u_1 - u_2\|_\infty.$$

Sous l'hypothèse $|\lambda| (b-a) \|K\|_\infty < 1$, l'opérateur T est une contraction sur l'espace de Banach $C([a, b])$, et le théorème de Banach s'applique. $\square$

Exemple 9.6. L'équation $u(t) = \sin(t) + \frac{1}{4} \int_0^1 ts u(s) ds$ a un noyau $K(t, s) = ts$ avec $\|K\|_\infty = 1$. Comme $|\lambda| (b-a) \|K\|_\infty = \frac{1}{4} < 1$, la solution existe et est unique.

9.3 Équations intégrales de Volterra

Définition 9.7 (Équation de Volterra de seconde espèce). L'équation de Volterra de seconde espèce est :

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t, s) u(s) ds.$$

La différence avec Fredholm est que la borne supérieure d'intégration est t (et non b).

Théorème 9.8 (Existence et unicité pour Volterra). *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout noyau K continu, l'équation de Volterra de seconde espèce admet une unique solution $u \in C([a, b], \mathbb{R})$.*

Démonstration. L'opérateur T défini par $(Tu)(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t, s)u(s)ds$ n'est pas nécessairement une contraction pour la norme uniforme. Cependant, utilisons la norme de Bielecki :

$$\|u\|_\mu = \sup_{t \in [a, b]} e^{-\mu(t-a)} |u(t)|.$$

Alors :

$$\begin{aligned} e^{-\mu(t-a)} |(Tu_1)(t) - (Tu_2)(t)| &\leq |\lambda| \|K\|_\infty \int_a^t e^{-\mu(t-s)} e^{-\mu(s-a)} |u_1(s) - u_2(s)| ds \\ &\leq |\lambda| \|K\|_\infty \|u_1 - u_2\|_\mu \int_a^t e^{-\mu(t-s)} ds \\ &\leq \frac{|\lambda| \|K\|_\infty}{\mu} \|u_1 - u_2\|_\mu. \end{aligned}$$

En choisissant $\mu > |\lambda| \|K\|_\infty$, T est une contraction. □

Attention

Contrairement à Fredholm, l'équation de Volterra admet toujours une solution unique, sans condition sur λ . C'est une conséquence du caractère « triangulaire » de l'opérateur de Volterra.

9.4 Théorème des fonctions implicites

Théorème 9.9 (Fonctions implicites via point fixe). *Soit $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Soit $(a, b) \in U$ tel que $F(a, b) = 0$ et $D_y F(a, b)$ est inversible. Alors il existe des voisinages V de a et W de b et une unique application $\varphi: V \rightarrow W$ de classe C^1 telle que*

$$F(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in V.$$

Démonstration. On ramène le problème à un point fixe. Posons $A = D_y F(a, b)$ et $G(x, y) = y - A^{-1}F(x, y)$. Alors $F(x, y) = 0$ équivaut à $y = G(x, y)$.

Montrons que pour x proche de a , $y \mapsto G(x, y)$ est une contraction au voisinage de b . On a $D_y G(a, b) = I - A^{-1}D_y F(a, b) = 0$. Par continuité de $D_y G$, il existe $r > 0$ tel que $\|D_y G(x, y)\| \leq 1/2$ pour (x, y) dans un voisinage de (a, b) .

Ainsi, pour x fixé proche de a , $y \mapsto G(x, y)$ est une contraction de constante $1/2$ sur $\overline{B}(b, r)$ (quitte à ajuster r). Par le théorème de Banach, il existe un unique $y = \varphi(x)$ tel que $G(x, \varphi(x)) = \varphi(x)$, soit $F(x, \varphi(x)) = 0$.

La régularité C^1 de φ s'obtient par différentiation de la relation $F(x, \varphi(x)) = 0$, ce qui donne $D\varphi(x) = -[D_y F(x, \varphi(x))]^{-1} D_x F(x, \varphi(x))$. □

Remarque 9.10. Cette démonstration par point fixe est plus constructive que la démonstration classique (par le théorème d'inversion locale) car elle fournit un algorithme d'approximation : la suite $y_{n+1} = G(x, y_n)$ converge vers $\varphi(x)$.

9.5 Compléments : méthode de Newton et points fixes

Proposition 9.11 (Convergence de Newton comme point fixe). La méthode de Newton pour résoudre $F(x) = 0$ dans $\mathbb{R}^n$ s'écrit :

$$x_{n+1} = x_n - [DF(x_n)]^{-1}F(x_n) =: T(x_n).$$

Sous des conditions de régularité (Lipschitz sur DF , inversibilité de $DF(x^*)$), l'application T n'est pas une contraction globale, mais elle l'est localement au voisinage de la solution x^* , avec un taux de convergence quadratique : $\|x_{n+1} - x^*\| \leq C \|x_n - x^*\|^2$.

Récapitulatif des applications

Problème	Théorème utilisé	Espace fonctionnel
EDO (Picard-Lindelöf)	Banach	$C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$
Fredholm	Banach	$C([a, b], \mathbb{R})$
Volterra	Banach (norme Bielecki)	$C([a, b], \mathbb{R})$
Fonctions implicites	Banach	$\mathbb{R}^m$

9.6 Exercices

Exercice 9.1. Considérons l'EDO $y' = y^2$, $y(0) = 1$. Calculer les trois premières itérées de Picard $y_0(t) = 1$, $y_{n+1}(t) = 1 + \int_0^t y_n(s)^2 ds$. Comparer avec la solution exacte $y(t) = \frac{1}{1-t}$.

Exercice 9.2. Résoudre l'équation de Fredholm $u(t) = 1 + \lambda \int_0^1 u(s) ds$ explicitement pour tout $\lambda \neq 1$. Vérifier que la solution diverge quand $\lambda \rightarrow 1$.

Exercice 9.3. Résoudre l'équation de Volterra $u(t) = 1 + \int_0^t u(s) ds$ en reconnaissant une EDO. Vérifier le résultat par la méthode des itérées successives.

Exercice 9.4. Montrer que l'équation $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ définit y comme fonction de x au voisinage de $(0, 1)$. Calculer $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.

Exercice 9.5. Soit $K(t, s) = e^{ts}$ et $f(t) = 1$. Étudier la convergence des itérées de l'opérateur T associé à l'équation de Fredholm $u(t) = 1 + \lambda \int_0^1 e^{ts} u(s) ds$ en fonction de λ .

Exercice 9.6 (Systèmes d'EDO). Appliquer le théorème de Picard-Lindelöf au système $y'_1 = y_2$, $y'_2 = -y_1$, $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$. Calculer explicitement les itérées de Picard et montrer qu'elles convergent vers $(\cos t, -\sin t)$.

Chapitre 10

Théorème de Markov-Kakutani

En 1936, Andrei Markov (fils du célèbre probabiliste) et, indépendamment, Shizuo Kakutani démontrent un résultat remarquable : toute famille d'applications affines continues qui commutent, agissant sur un convexe compact d'un espace localement convexe, possède un point fixe commun. Ce théorème, dont l'énoncé semble purement géométrique, a des ramifications profondes en analyse harmonique abstraite : il est à la base de l'existence de *moyennes invariantes* sur les groupes abéliens et joue un rôle fondateur dans la théorie des *groupes moyennables*, développée par John von Neumann et poursuivie par Mahlon Day et Erling Følner.

Intuition

Le théorème de Markov-Kakutani garantit l'existence d'un point fixe commun pour une famille d'applications affines continues qui commutent, agissant sur un convexe compact d'un espace vectoriel topologique localement convexe. Ce résultat, simple dans son énoncé, a des applications profondes : il est à la base de la théorie des moyennes invariantes et joue un rôle central dans l'étude des groupes moyennables.

10.1 Énoncé et preuve du théorème

Définition 10.1 (Application affine). Soit E un espace vectoriel et $C \subseteq E$ un convexe. Une application $T: C \rightarrow C$ est *affine* si pour tous $x, y \in C$ et tout $\lambda \in [0, 1]$:

$$T(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda T(x) + (1 - \lambda)T(y).$$

Théorème 10.2 (Markov-Kakutani). Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe et $C \subseteq E$ un convexe compact non vide. Soit $\mathcal{F}$ une famille d'applications affines continues $T: C \rightarrow C$ qui commutent deux à deux ($T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$ pour tous $T_1, T_2 \in \mathcal{F}$). Alors il existe $x^* \in C$ tel que $T(x^*) = x^*$ pour tout $T \in \mathcal{F}$.

Démonstration. Étape 1 : cas d'une seule application. Soit $T: C \rightarrow C$ affine continue. Pour tout $x \in C$ et $n \geq 1$, posons

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k(x).$$

Comme C est convexe et $T(C) \subseteq C$, on a $\sigma_n(x) \in C$. Définissons $C_n = \sigma_n(C) = \{\sigma_n(x) : x \in C\}$. Alors C_n est compact (image continue d'un compact) et non vide.

Montrons que $(C_n)_{n \geq 1}$ a la propriété d'intersection finie, ce qui implique $\bigcap_n \overline{C_n} \neq \emptyset$ par compacité de C .

Soit $y \in \bigcap_n \overline{C_n}$. Pour tout ε -voisinage V de 0, il existe $x_n \in C$ tel que $\sigma_n(x_n) - y \in V$. On vérifie que $T(\sigma_n(x_n)) - \sigma_n(x_n) = \frac{1}{n}(T^n(x_n) - x_n) \rightarrow 0$ car C est borné. Ainsi $T(y) = y$.

Étape 2 : famille commutante. Pour chaque $T \in \mathcal{F}$, définissons $\text{Fix}(T) = \{x \in C : T(x) = x\}$. Par l'étape 1, $\text{Fix}(T)$ est non vide. De plus :

- $\text{Fix}(T)$ est fermé (préimage du fermé diagonal par $(x, T(x))$) et contenu dans le compact C , donc compact.
- $\text{Fix}(T)$ est convexe car T est affine : si $T(x) = x$ et $T(y) = y$, alors $T(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda x + (1 - \lambda)y$.

Si T_1, T_2 commutent et $x \in \text{Fix}(T_1)$, alors $T_1(T_2(x)) = T_2(T_1(x)) = T_2(x)$, donc $T_2(\text{Fix}(T_1)) \subseteq \text{Fix}(T_1)$. Ainsi T_2 restreinte à $\text{Fix}(T_1)$ est une application affine continue d'un convexe compact dans lui-même, et par l'étape 1, elle admet un point fixe dans $\text{Fix}(T_1)$.

Par une récurrence transfinie (ou par la propriété d'intersection finie), $\bigcap_{T \in \mathcal{F}} \text{Fix}(T) \neq \emptyset$. $\square$

10.2 Groupes moyennables

Définition 10.3 (Moyenne invariante). Soit G un groupe discret. Une *moyenne invariante à gauche* sur G est une forme linéaire $m : \ell^\infty(G) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

1. $m(\mathbb{1}_G) = 1$ (normalisation) ;
2. $m(f) \geq 0$ si $f \geq 0$ (positivité) ;
3. $m(L_g f) = m(f)$ pour tout $g \in G$ (invariance), où $(L_g f)(x) = f(g^{-1}x)$.

Définition 10.4 (Groupe moyennable). Un groupe discret G est *moyennable* s'il admet une moyenne invariante à gauche.

Théorème 10.5 (Les groupes abéliens sont moyennables). *Tout groupe abélien discret est moyennable.*

Démonstration. Soit G un groupe abélien. L'ensemble des moyennes

$$\mathcal{M} = \{m \in (\ell^\infty(G))^* : m \geq 0, m(\mathbb{1}_G) = 1\}$$

est un convexe compact non vide pour la topologie faible-* (par le théorème de Banach-Alaoglu).

Pour chaque $g \in G$, l'application $T_g : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ définie par $(T_g m)(f) = m(L_{g^{-1}} f)$ est affine et continue (pour la topologie faible-*). Elle envoie $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}$ car $L_{g^{-1}}$ préserve la positivité et $L_{g^{-1}} \mathbb{1}_G = \mathbb{1}_G$.

Comme G est abélien, $L_g \circ L_h = L_{gh} = L_{hg} = L_h \circ L_g$, donc les T_g commutent. Par le théorème de Markov-Kakutani, il existe $m^* \in \bigcap_{g \in G} \text{Fix}(T_g)$, c'est-à-dire une moyenne invariante. $\square$

Exemple 10.6 (Moyenne invariante sur $\mathbb{Z}$). La moyenne de Banach sur $\mathbb{Z}$, construite ci-dessus, n'est pas explicite. Néanmoins, on peut montrer que pour toute suite bornée $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, si la limite de Cesàro $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N a_n$ existe, alors elle coïncide avec $m^*((a_n))$.

10.3 Exemples de groupes non moyennables

Théorème 10.7 (von Neumann). *Le groupe libre à deux générateurs F_2 n'est pas moyennable.*

Idée de la preuve. On utilise le paradoxe de Banach-Tarski : si F_2 était moyennable, on pourrait construire une mesure finiment additive invariante sur F_2 , ce qui contredit le fait que F_2 admet une décomposition paradoxale (partition en quatre morceaux qui, par translations, reconstituent deux copies de F_2). $\square$

Proposition 10.8 (Propriétés de la moyennabilité). 1. Les sous-groupes d'un groupe moyennable sont moyennables.

2. Les quotients d'un groupe moyennable sont moyennables.

3. Les extensions de groupes moyennables par des groupes moyennables sont moyennables.

4. Tout groupe fini est moyennable (prendre la moyenne uniforme).

5. Un groupe contenant F_2 comme sous-groupe n'est pas moyennable.

10.4 Variantes et généralisations

Théorème 10.9 (Ryll-Nardzewski). *Soit E un espace de Banach et $C \subseteq E$ un convexe faiblement compact non vide. Soit $\mathcal{F}$ un semi-groupe d'isométries affines de C . Alors $\bigcap_{T \in \mathcal{F}} \text{Fix}(T) \neq \emptyset$.*

Remarque 10.10. Le théorème de Ryll-Nardzewski généralise Markov-Kakutani en remplaçant la commutativité par une condition de non-expansivité et en affaiblissant la compacité en compacité faible.

Points fixes communs

Théorème	Famille	Espace
Markov-Kakutani	Affines commutantes	Convexe compact, evtlc
Ryll-Nardzewski	Isométries affines	Convexe faiblement compact, Banach

10.5 Exercices

Exercice 10.1. Montrer que le théorème de Markov-Kakutani est faux sans l'hypothèse de commutativité. *Indication : considérer deux rotations du disque.*

Exercice 10.2. Appliquer le théorème de Markov-Kakutani pour montrer que tout groupe abélien compact G admet une mesure de Haar (en prenant C l'ensemble des mesures de probabilité sur G).

Exercice 10.3. Montrer que le groupe des isométries du plan euclidien n'est pas moyennable. *Indication : montrer qu'il contient F_2 comme sous-groupe.*

Exercice 10.4. Soit $T: C \rightarrow C$ une application affine continue sur un convexe compact C d'un espace de Banach. Montrer directement (sans Markov-Kakutani) que les moyennes de Cesàro $\sigma_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k(x)$ convergent (au moins le long d'une sous-suite) vers un point fixe de T .

Exercice 10.5. Soit G un groupe moyennable discret agissant sur un espace compact X par homéomorphismes. Montrer qu'il existe une mesure de probabilité borélienne sur X invariante par l'action de G .

Exercice 10.6 (Moyennabilité et suites de Følner). Montrer qu'un groupe dénombrable G est moyennable si et seulement s'il admet une *suite de Følner* : une suite (F_n) d'ensembles finis non vides de G tels que pour tout $g \in G$,

$$\frac{|gF_n \Delta F_n|}{|F_n|} \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Vérifier que $F_n = \{-n, \dots, n\}$ est une suite de Følner pour $\mathbb{Z}$.

Chapitre 11

Points Fixes Aléatoires

Intuition

La théorie des points fixes aléatoires étend les résultats classiques au cadre stochastique : on considère des opérateurs $T(\omega, \cdot)$ qui dépendent d'un paramètre aléatoire $\omega \in \Omega$, et l'on cherche un point fixe $x^*(\omega)$ qui soit lui-même mesurable en ω . Les difficultés principales sont de nature mesurable : il faut s'assurer que les constructions (itérations, passages à la limite) préservent la mesurabilité. Ces résultats trouvent des applications en analyse stochastique, en économie mathématique et en théorie des jeux stochastiques.

11.1 Opérateurs aléatoires

Définition 11.1 (Espace mesurable séparable). Un espace topologique (X, τ) est *séparable* s'il contient un sous-ensemble dénombrable dense. On munit X de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(X) = \sigma(\tau)$.

Définition 11.2 (Opérateur aléatoire). Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et (X, d) un espace métrique séparable. Un *opérateur aléatoire* est une application $T: \Omega \times X \rightarrow X$ telle que :

1. pour tout $x \in X$, l'application $\omega \mapsto T(\omega, x)$ est $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(X))$ -mesurable ;
2. pour tout $\omega \in \Omega$ (ou $\mathbb{P}$ -presque tout ω), l'application $x \mapsto T(\omega, x)$ satisfait certaines propriétés (continuité, contraction, etc.).

Définition 11.3 (Point fixe aléatoire). Un *point fixe aléatoire* de T est une variable aléatoire $\xi: \Omega \rightarrow X$ (mesurable) telle que

$$T(\omega, \xi(\omega)) = \xi(\omega) \quad \text{pour } \mathbb{P}\text{-presque tout } \omega \in \Omega.$$

Remarque 11.4. L'existence d'un point fixe pour chaque ω (par un théorème déterministe) ne garantit pas l'existence d'un point fixe aléatoire : la mesurabilité de $\omega \mapsto x^*(\omega)$ est un problème non trivial.

11.2 Théorème de sélection mesurable

Définition 11.5 (Correspondance mesurable). Une correspondance $F: \Omega \rightrightarrows X$ est *mesurable* si pour tout ouvert $U \subseteq X$, l'ensemble $\{\omega : F(\omega) \cap U \neq \emptyset\}$ appartient à $\mathcal{A}$.

Théorème 11.6 (Sélection mesurable de Kuratowski–Ryll–Nardzewski). *Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et (X, d) un espace métrique complet séparable. Si $F: \Omega \rightrightarrows X$ est une correspondance mesurable à valeurs fermées non vides, alors F admet une sélection mesurable : il existe $f: \Omega \rightarrow X$ mesurable telle que $f(\omega) \in F(\omega)$ pour tout ω .*

Idée de la preuve. On construit une suite (f_n) de sélections ε_n -approchées (avec $\varepsilon_n \rightarrow 0$) par récurrence. Soit $(x_k)_{k \geq 1}$ une suite dense dans X . Pour chaque n , on partitionne Ω en ensembles mesurables $A_k^n = \{\omega : F(\omega) \cap B(x_k, \varepsilon_n) \neq \emptyset\} \setminus \bigcup_{j < k} A_j^n$ et on pose $f_n(\omega) = x_k$ pour $\omega \in A_k^n$. La suite (f_n) converge uniformément vers une sélection mesurable f . $\square$

11.3 Théorème de point fixe aléatoire de Banach

Théorème 11.7 (Point fixe aléatoire contractant). *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, (X, d) un espace métrique complet séparable, et $T: \Omega \times X \rightarrow X$ un opérateur aléatoire tel que :*

1. *pour tout $x \in X$, $\omega \mapsto T(\omega, x)$ est mesurable ;*
2. *pour $\mathbb{P}$ -presque tout ω , $x \mapsto T(\omega, x)$ est une contraction de constante $k(\omega) < 1$.*

Alors T admet un unique point fixe aléatoire.

Démonstration. Pour chaque ω , le théorème de Banach déterministe fournit un unique point fixe $\xi(\omega) \in X$. Il reste à montrer que ξ est mesurable.

Fixons $x_0 \in X$ et définissons la suite d'itérées :

$$\xi_0(\omega) = x_0, \quad \xi_{n+1}(\omega) = T(\omega, \xi_n(\omega)).$$

Par hypothèse, ξ_0 est mesurable (constante). Si ξ_n est mesurable, alors $\omega \mapsto T(\omega, \xi_n(\omega))$ est mesurable comme composition de fonctions mesurables (théorème de Carathéodory). Donc ξ_{n+1} est mesurable.

Pour presque tout ω , $\xi_n(\omega) \rightarrow \xi(\omega)$ (convergence du théorème de Banach). Comme limite ponctuelle de fonctions mesurables, ξ est mesurable. $\square$

Attention

L'hypothèse de séparabilité de X est essentielle pour garantir la mesurabilité conjointe et la mesurabilité de la limite. Sans cette hypothèse, le résultat est faux en général.

11.4 Point fixe aléatoire de Schauder

Théorème 11.8 (Point fixe aléatoire de Schauder). *Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable, C un sous-ensemble convexe fermé borné d'un espace de Banach séparable E , et $T: \Omega \times C \rightarrow C$ un opérateur aléatoire tel que :*

1. *pour tout $x \in C$, $\omega \mapsto T(\omega, x)$ est mesurable ;*
2. *pour tout ω , $x \mapsto T(\omega, x)$ est continue ;*

3. pour tout ω , $T(\omega, \cdot)$ est compacte (envoie les bornés sur des ensembles relativement compacts).

Alors T admet un point fixe aléatoire.

Idée de la preuve. Par le théorème de Schauder déterministe, pour chaque ω , l'ensemble des points fixes $F(\omega) = \{x \in C : T(\omega, x) = x\}$ est non vide et fermé. On montre que la correspondance $\omega \mapsto F(\omega)$ est mesurable. Le théorème de sélection mesurable de Kuratowski–Ryll–Nardzewski fournit alors une sélection mesurable, qui est le point fixe aléatoire cherché. $\square$

11.5 Applications en analyse stochastique

Proposition 11.9 (Équations différentielles aléatoires). Considérons l'équation différentielle aléatoire

$$y'(t, \omega) = f(\omega, t, y(t, \omega)), \quad y(t_0, \omega) = Y_0(\omega)$$

où $Y_0: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une variable aléatoire et f vérifie :

- $f(\omega, \cdot, \cdot)$ est continue en (t, y) pour tout ω ;
- $f(\cdot, t, y)$ est mesurable en ω pour tous t, y ;
- f est lipschitzienne en y uniformément en ω .

Alors il existe une unique solution $y(\cdot, \omega)$ qui est un processus mesurable.

Démonstration. L'opérateur de Picard $T(\omega, u)(t) = Y_0(\omega) + \int_{t_0}^t f(\omega, s, u(s))ds$ est un opérateur aléatoire contractant sur $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$ muni de la norme de Bielecki. Le Théorème 11.7 s'applique. $\square$

Proposition 11.10 (Équations intégrales stochastiques). L'équation intégrale aléatoire de Fredholm

$$u(\omega, t) = f(\omega, t) + \lambda \int_a^b K(\omega, t, s)u(\omega, s) ds$$

admet un unique point fixe aléatoire dès que $|\lambda| < 1/((b-a) \sup_{\omega} \|K(\omega, \cdot, \cdot)\|_{\infty})$.

11.6 Théorème d'Itoh

Théorème 11.11 (Itoh). Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable complet, C un sous-ensemble fermé séparable d'un espace de Banach, et $T: \Omega \times C \rightarrow C$ un opérateur aléatoire non expansif ($d(T(\omega, x), T(\omega, y)) \leq d(x, y)$) tel que pour tout ω , $T(\omega, C)$ est contenu dans un compact de C . Alors T admet un point fixe aléatoire.

Récapitulatif des théorèmes de points fixes aléatoires

Théorème	Hypothèse sur $T(\omega, \cdot)$	Unicité
PF aléatoire de Banach	Contraction	Oui
PF aléatoire de Schauder	Continue, compacte	Non
Itoh	Non expansif, image compacte	Non

11.7 Exercices

Exercice 11.1. Soit $\Omega = [0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue et $X = \mathbb{R}$. Définir $T(\omega, x) = \omega x/2$. Vérifier que T est un opérateur aléatoire contractant et déterminer explicitement le point fixe aléatoire.

Exercice 11.2. Soit $T(\omega, x) = a(\omega)x + b(\omega)$ où $a, b: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sont mesurables avec $|a(\omega)| < 1$ p.s. Montrer que le point fixe aléatoire est $\xi(\omega) = b(\omega)/(1 - a(\omega))$. Vérifier sa mesurabilité.

Exercice 11.3. Soit (X, d) un espace métrique compact et $T: \Omega \times X \rightarrow X$ un opérateur aléatoire continu. Montrer que la correspondance $F(\omega) = \{x : T(\omega, x) = x\}$ est mesurable. *Indication : montrer que $\{\omega : F(\omega) \cap U \neq \emptyset\}$ est mesurable pour tout ouvert U .*

Exercice 11.4. Considérons l'EDO aléatoire $y' = A(\omega)y$, $y(0) = 1$, où $A(\omega)$ est une variable aléatoire réelle. Reformuler comme problème de point fixe et appliquer le théorème de point fixe aléatoire contractant.

Exercice 11.5. Donner un exemple d'opérateur aléatoire $T: \Omega \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continu en x et mesurable en ω , qui admet un point fixe pour chaque ω , mais pour lequel il n'existe aucune sélection mesurable de points fixes. *Indication : utiliser un espace $(\Omega, \mathcal{A})$ non complet.*

Exercice 11.6 (Itérations aléatoires). Soit $(T_1, \dots, T_k)$ une famille de contractions de $\mathbb{R}^n$ avec des probabilités $(p_1, \dots, p_k)$. On définit $x_{n+1} = T_{\sigma_n}(x_n)$ où (σ_n) est i.i.d. de loi (p_i) . Montrer que la suite (x_n) converge p.s. vers une mesure invariante (attracteur aléatoire), indépendamment du point initial x_0 .

Bibliographie

- [1] Granas, A. and Dugundji, J., *Fixed Point Theory*, Springer, 2003.
- [2] Granas, A. and Dugundji, J., *Fixed Point Theory*, Springer, 2003.
- [3] Smart, D.R., *Fixed Point Theorems*, Cambridge, 1974.
- [4] Smart, D.R., *Fixed Point Theorems*, Cambridge, 1974.
- [5] Kirk, W.A. and Shahzad, N., *Fixed Point Theory in Distance Spaces*, Springer, 2014.
- [6] Berinde, V., *Iterative Approximation of Fixed Points*, Springer, 2007.
- [7] Zeidler, E., *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications I*, Springer, 1986.
- [8] Zeidler, E., *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications I*, Springer, 1986.
- [9] Border, K.C., *Fixed Point Theorems with Applications to Economics*, Cambridge, 1985.
- [10] Goebel, K. and Kirk, W.A., *Topics in Metric Fixed Point Theory*, Cambridge, 1990.
- [11] Agarwal, R.P., Meehan, M. and O'Regan, D., *Fixed Point Theory and Applications*, Cambridge, 2001.