

Mesure et Intégration

Notes de Cours

Master M1 — 2025–2026

Yaë Ulrich Gaba

*« Il faut savoir douter, là où il faut, se sou-
mettre là où il faut, croire là où il faut. »*

— Blaise Pascal

Table des matières

Préface	1
1 σ-Algèbres et Espaces Mesurables	5
1.1 Introduction	5
1.2 Définitions fondamentales	5
1.3 σ -Algèbre engendrée	6
1.4 La tribu borélienne	7
1.5 Tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$	8
1.6 σ -Algèbre produit	8
1.7 Sous- σ -algèbre et trace	9
1.8 Applications mesurables	9
1.9 Systèmes de Dynkin et lemme π - λ	9
1.10 Théorème d'unicité des mesures	10
1.11 Exercices	10
2 Mesures	13
2.1 Définition et premières propriétés	13
2.2 Continuité de la mesure	14
2.3 Exemples fondamentaux	15
2.4 Pré-mesures et extension	15
2.5 Théorème d'extension	16
2.6 Complétion d'une mesure	16
2.7 Mesure image	16
2.8 Exercices	17
3 Théorème de Carathéodory	19
3.1 Introduction	19
3.2 Mesures extérieures	19
3.3 Ensembles Carathéodory-mesurables	20
3.4 Le théorème principal	20
3.5 Application aux pré-mesures	21
3.6 Unicité de l'extension	22
3.7 Critère de Carathéodory pour les mesures métriques	22
3.8 Application : mesure de Hausdorff	22
3.9 Exercices	23

4	Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$	25
4.1	Construction	25
4.2	Propriétés fondamentales	26
4.3	Ensembles de mesure nulle	27
4.4	Ensembles non mesurables	27
4.5	L'ensemble de Cantor	27
4.6	Caractérisation des ensembles Lebesgue-mesurables	28
4.7	Exercices	28
5	Fonctions Mesurables	29
5.1	Définitions et critères de mesurabilité	29
5.2	Opérations sur les fonctions mesurables	30
5.3	Limites de fonctions mesurables	30
5.4	Fonctions simples (étagées)	31
5.5	Fonctions mesurables et fonctions boréliennes	32
5.6	Convergence presque partout et en mesure	32
5.7	Théorème de Lusin	32
5.8	Exercices	33
6	Intégrale de Lebesgue	35
6.1	Intégrale des fonctions simples	35
6.2	Intégrale des fonctions mesurables positives	36
6.3	Additivité de l'intégrale (fonctions positives)	36
6.4	Intégrale des fonctions intégrables	36
6.5	Comparaison avec l'intégrale de Riemann	37
6.6	La mesure ν_f associée à une fonction intégrable	38
6.7	Exercices	38
7	Théorèmes de Convergence	39
7.1	Introduction	39
7.2	Théorème de convergence monotone (Beppo Levi)	39
7.3	Lemme de Fatou	40
7.4	Théorème de convergence dominée (Lebesgue)	41
7.5	Applications	41
7.6	Convergence dans L^1	42
7.7	Exercices	42
8	Espaces L^p	43
8.1	Définitions	43
8.2	Inégalité de Hölder	43
8.3	Inégalité de Minkowski	44
8.4	Complétude : L^p est un espace de Banach	45
8.5	Relations d'inclusion entre espaces L^p	45
8.6	Densité et séparabilité	45
8.7	Dualité des espaces L^p	46
8.8	L'espace L^2 comme espace de Hilbert	46
8.9	Inégalités complémentaires	46
8.10	Exercices	46

9 Mesures Signées et Décomposition de Hahn-Jordan	49
9.1 Introduction	49
9.2 Définitions et premiers exemples	49
9.3 Décomposition de Hahn	50
9.4 Décomposition de Jordan et variation totale	51
9.5 Singularité mutuelle	52
9.6 Espace des mesures signées finies	52
9.7 Exercices	52
10 Théorème de Radon-Nikodym	55
10.1 Introduction	55
10.2 Continuité absolue	55
10.3 Théorème de Radon-Nikodym	56
10.4 Théorème de décomposition de Lebesgue	57
10.5 Applications en probabilités	57
10.6 Exercices	58
11 Mesures Produits et Théorème de Fubini-Tonelli	59
11.1 Introduction	59
11.2 σ -algèbre produit	59
11.3 Mesure produit	60
11.4 Théorème de Tonelli	60
11.5 Théorème de Fubini	60
11.6 Applications	61
11.6.1 Convolution	61
11.6.2 Formule de changement de variable	61
11.7 Compléments : produits infinis	62
11.8 Exercices	62
12 Mesures de Radon et Théorème de Riesz	63
12.1 Introduction	63
12.2 Rappels sur les espaces localement compacts	63
12.3 Mesures de Radon	64
12.4 Fonctionnelles linéaires positives	64
12.5 Théorème de représentation de Riesz	65
12.6 Support d'une mesure	65
12.7 Théorème de Riesz pour les mesures signées	66
12.8 Exercices	66

Préface

Objectifs et motivation

La théorie de la mesure et de l'intégration constitue l'un des piliers fondamentaux de l'analyse mathématique moderne. Née des travaux pionniers d'Émile Borel et d'Henri Lebesgue au début du XX^e siècle, cette théorie a profondément transformé notre compréhension des concepts de longueur, d'aire, de volume, et plus généralement de « taille » d'un ensemble. L'intégrale de Lebesgue, qui en découle, étend considérablement l'intégrale de Riemann et fournit le cadre naturel pour la théorie des probabilités, l'analyse fonctionnelle, les équations aux dérivées partielles et de nombreuses autres branches des mathématiques.

Ce cours s'adresse aux étudiants de niveau Master (M1/M2) en mathématiques fondamentales ou appliquées. Il suppose une maîtrise solide de l'analyse réelle (suites, séries, continuité, dérivabilité, intégrale de Riemann) ainsi que des notions de base de topologie générale. Une familiarité avec l'algèbre linéaire et les espaces vectoriels normés est également souhaitable.

Problématique historique

L'intégrale de Riemann, développée dans les années 1850, présente des limitations fondamentales. Considérons la fonction de Dirichlet :

$$f(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas Riemann-intégrable, alors qu'intuitivement, puisque $\mathbb{Q}$ est « négligeable » dans $\mathbb{R}$, on s'attendrait à ce que $\int_0^1 f = 0$.

De même, si (f_n) est une suite de fonctions Riemann-intégrables convergeant simplement vers une fonction f , il n'est en général pas vrai que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx,$$

même lorsque le membre de droite a un sens. Pour que l'échange limite-intégrale soit valide au sens de Riemann, on a besoin de la convergence *uniforme*, ce qui est une condition très restrictive.

L'intégrale de Lebesgue résout ces deux problèmes de manière élégante : la fonction de Dirichlet devient intégrable (d'intégrale nulle), et le théorème de convergence dominée permet l'échange limite-intégrale sous des hypothèses bien plus faibles que la convergence uniforme.

Idées directrices

L'approche de Lebesgue repose sur une idée fondamentalement différente de celle de Riemann. Alors que Riemann découpe le *domaine* de la fonction en petits intervalles, Lebesgue découpe l'*image* de la fonction et mesure les préimages :

Philosophie de Lebesgue

Imaginez que vous devez compter une grande somme d'argent composée de pièces de différentes valeurs. La méthode de Riemann consiste à prendre les pièces une par une, dans l'ordre où elles se trouvent. La méthode de Lebesgue consiste à trier d'abord les pièces par valeur, puis à compter combien il y en a de chaque type. Le résultat est le même, mais la seconde méthode est plus souple et s'applique à davantage de situations.

Pour que cette approche fonctionne, il faut pouvoir « mesurer » les préimages $f^{-1}([a, b])$. Cela nécessite :

1. Une théorie des **ensembles mesurables** (les σ -algèbres), qui détermine quels ensembles peuvent être mesurés.
2. Une théorie de la **mesure**, qui attribue une « taille » à chacun de ces ensembles.
3. Une définition des **fonctions mesurables**, dont les préimages d'ensembles raisonnables sont mesurables.
4. La construction de l'**intégrale** par approximation via des fonctions étagées (*fonctions simples*).

Plan du cours

Le cours est organisé en douze chapitres qui suivent cette progression :

Chapitre 1. σ -Algèbres et espaces mesurables : les structures fondamentales. Tribus engendrées, tribu borélienne.

Chapitre 2. Mesures : définitions, exemples, σ -additivité, mesures finies et σ -finies, lemme de continuité.

Chapitre 3. Théorème de Carathéodory : construction de mesures via des mesures extérieures, passage d'une pré-mesure à une mesure complète.

Chapitre 4. Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$: construction, propriétés d'invariance, ensembles non mesurables.

Chapitre 5. Fonctions mesurables : définitions, stabilité par opérations algébriques et limites, approximation par fonctions simples.

Chapitre 6. Intégrale de Lebesgue : construction en trois étapes (fonctions simples, fonctions positives, fonctions intégrables).

Chapitre 7. Théorèmes de convergence : convergence monotone (Beppo Levi), lemme de Fatou, convergence dominée (Lebesgue).

Chapitre 8. Espaces L^p : inégalités de Hölder et Minkowski, complétude, séparabilité, dualité.

Chapitre 9. Mesures signées : décomposition de Hahn et de Jordan, variation totale.

Chapitre 10. Théorème de Radon–Nikodym : absolue continuité, dérivée de Radon–Nikodym, décomposition de Lebesgue.

Chapitre 11. Mesures produits : σ -algèbre produit, théorèmes de Fubini et Tonelli.

Chapitre 12. Mesures de Radon et théorème de représentation de Riesz.

Conventions et notations

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ désigne l'ensemble des entiers naturels (incluant zéro).
- $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ et $\overline{\mathbb{R}}^+ = [0, +\infty]$.
- La droite réelle étendue est $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.
- 1_A désigne la fonction indicatrice de A .
- $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \max(-f, 0)$, $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$.
- $A_n \uparrow A$ signifie (A_n) croissante et $A = \bigcup_n A_n$.
- $A_n \downarrow A$ signifie (A_n) décroissante et $A = \bigcap_n A_n$.
- « p.p. » signifie « presque partout » (en dehors d'un ensemble de mesure nulle).
- $(X, \mathcal{A}, \mu)$ désigne un espace mesuré.
- $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ désigne la tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$.
- λ^n désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ ($\lambda = \lambda^1$).

Prérequis

- **Analyse réelle** : propriétés de $\mathbb{R}$, suites et séries numériques, continuité, dérivabilité, intégrale de Riemann, séries de fonctions, convergence uniforme.
- **Topologie générale** : espaces métriques, ouverts, fermés, compacité, connexité.
- **Algèbre linéaire** : espaces vectoriels, normes, espaces de Banach (notions de base).
- **Théorie des ensembles** : opérations ensemblistes, axiome du choix (pour la construction d'ensembles non mesurables).

Références bibliographiques

- H. L. Royden et P. M. Fitzpatrick, *Real Analysis*, 4^e éd., Pearson, 2010.
- W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3^e éd., McGraw-Hill, 1987.
- G. B. Folland, *Real Analysis : Modern Techniques and Their Applications*, 2^e éd., Wiley, 1999.
- P. Halmos, *Measure Theory*, Springer, 1974.
- H. Brézis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, 1983.
- J. Neveu, *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, Masson, 1970.
- C. Zuily et H. Queffelec, *Analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2013.
- R. L. Schilling, *Measures, Integrals and Martingales*, Cambridge University Press, 2005.

L'auteur
Mars 2026

Chapitre 1

σ -Algèbres et Espaces Mesurables

À la fin du XIX^e siècle, les mathématiciens se heurtaient à un problème fondamental : comment définir rigoureusement la « taille » d'un ensemble ? L'intégrale de Riemann, qui avait si bien servi pendant des décennies, commençait à montrer ses limites face aux fonctions pathologiques découvertes par Dirichlet, Weierstrass et d'autres. Henri Lebesgue, dans sa thèse de 1902, proposa une révolution : au lieu de découper l'axe des x en petits intervalles, il découpait l'axe des y . Mais pour que cette idée fonctionne, il fallait d'abord répondre à une question préalable : à quels ensembles peut-on attribuer une mesure de manière cohérente ?

La réponse — et c'est l'objet de ce premier chapitre — est qu'il faut se restreindre à une collection d'ensembles possédant de bonnes propriétés de clôture : une σ -algèbre, ou *tribu*. Ce concept, qui semble au premier abord purement technique, est en réalité la clé de voûte de toute la théorie de la mesure, de l'intégration, et par extension des probabilités modernes.

1.1 Introduction

La première étape dans la construction de la théorie de la mesure consiste à identifier les ensembles auxquels on souhaite attribuer une « taille ». On ne peut pas, en général, mesurer *tous* les sous-ensembles d'un ensemble donné de manière cohérente (nous verrons au chapitre 4 l'existence d'ensembles non mesurables au sens de Lebesgue). Il faut donc se restreindre à une collection d'ensembles suffisamment riche pour être utile, mais suffisamment structurée pour que la mesure soit bien définie. Cette collection est une σ -algèbre (ou *tribu*).

1.2 Définitions fondamentales

Définition 1.1 (σ -algèbre). Soit X un ensemble non vide. Une σ -algèbre (ou *tribu*) sur X est une collection $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ de sous-ensembles de X vérifiant :

- (i) $X \in \mathcal{A}$;
- (ii) si $A \in \mathcal{A}$, alors $A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$;
- (iii) si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Le couple $(X, \mathcal{A})$ est appelé *espace mesurable*.

Remarque 1.2. La condition (iii) porte sur les réunions *dénombrables*. C'est la différence essentielle avec la notion d'*algèbre* (ou algèbre de Boole), qui ne requiert la stabilité que par réunions *finies*.

Proposition 1.3 (Propriétés élémentaires). Soit $\mathcal{A}$ une σ -algèbre sur X . Alors :

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$;
2. $\mathcal{A}$ est stable par intersection dénombrable : si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, alors $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$;
3. $\mathcal{A}$ est stable par différence : si $A, B \in \mathcal{A}$, alors $A \setminus B \in \mathcal{A}$;
4. $\mathcal{A}$ est stable par réunion et intersection finies.

Démonstration. (1) $\emptyset = X^c \in \mathcal{A}$ par (i) et (ii).

(2) Par les lois de De Morgan : $\bigcap_n A_n = (\bigcup_n A_n^c)^c$. Comme chaque $A_n^c \in \mathcal{A}$ par (ii), la réunion $\bigcup_n A_n^c \in \mathcal{A}$ par (iii), et son complémentaire est dans $\mathcal{A}$ par (ii).

(3) $A \setminus B = A \cap B^c$, qui est dans $\mathcal{A}$ par (ii) et (2).

(4) Cas particulier de (iii) et (2) avec $A_n = \emptyset$ pour n assez grand. $\square$

Définition 1.4 (Algèbre). Une collection $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{P}(X)$ est une *algèbre* sur X si elle vérifie (i), (ii) et la stabilité par réunion *finie* : si $A, B \in \mathcal{A}_0$, alors $A \cup B \in \mathcal{A}_0$.

Exemple 1.5. Voici quelques exemples fondamentaux de σ -algèbres :

1. La *tribu triviale* $\{\emptyset, X\}$ est la plus petite σ -algèbre sur X .
2. La *tribu discrète* $\mathcal{P}(X)$ est la plus grande σ -algèbre sur X .
3. Pour tout $A \subset X$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A^c, X\}$ est une σ -algèbre.
4. Si X est non dénombrable, la collection des ensembles dénombrables ou à complémentaire dénombrable forme une σ -algèbre, appelée *tribu codénombrable*.

1.3 σ -Algèbre engendrée

En pratique, on ne définit pas une σ -algèbre en listant tous ses éléments, mais en la « engendrant » à partir d'une collection plus petite.

Théorème 1.6 (σ -algèbre engendrée). Soit $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ une collection quelconque de sous-ensembles de X . Il existe une plus petite σ -algèbre contenant $\mathcal{E}$, appelée la σ -algèbre engendrée par $\mathcal{E}$ et notée $\sigma(\mathcal{E})$. Elle est donnée par :

$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{A} \text{ } \sigma\text{-algèbre} \\ \mathcal{E} \subset \mathcal{A}}} \mathcal{A}.$$

Démonstration. L'intersection est bien définie car au moins $\mathcal{P}(X)$ est une σ -algèbre contenant $\mathcal{E}$, donc la famille n'est pas vide.

Vérifions que $\sigma(\mathcal{E})$ est une σ -algèbre :

- X appartient à toute σ -algèbre, donc $X \in \sigma(\mathcal{E})$.

- Si $A \in \sigma(\mathcal{E})$, alors A est dans toute σ -algèbre $\mathcal{A} \supset \mathcal{E}$, donc A^c l'est aussi, donc $A^c \in \sigma(\mathcal{E})$.
- De même pour les réunions dénombrables.

Enfin, $\sigma(\mathcal{E})$ est la *plus petite* car elle est contenue dans toute σ -algèbre contenant $\mathcal{E}$ (par définition comme intersection). $\square$

Remarque 1.7. La construction par intersection est non constructive : elle ne permet pas de décrire explicitement les éléments de $\sigma(\mathcal{E})$. En général, $\sigma(\mathcal{E})$ est beaucoup plus grande que $\mathcal{E}$ et sa structure est complexe.

1.4 La tribu borélienne

Définition 1.8 (Tribu borélienne). Soit (X, τ) un espace topologique. La *tribu borélienne* de X , notée $\mathcal{B}(X)$, est la σ -algèbre engendrée par les ouverts de X :

$$\mathcal{B}(X) = \sigma(\tau).$$

Les éléments de $\mathcal{B}(X)$ sont appelés les *ensembles boréliens* (ou *boréliens*) de X .

Théorème 1.9 (Générateurs de la tribu borélienne de $\mathbb{R}$). *La tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par chacune des collections suivantes :*

1. les ouverts de $\mathbb{R}$;
2. les fermés de $\mathbb{R}$;
3. les intervalles ouverts (a, b) , $a < b$;
4. les intervalles semi-ouverts $[a, b)$, $a < b$;
5. les intervalles semi-ouverts $(a, b]$, $a < b$;
6. les demi-droites $(-\infty, a)$, $a \in \mathbb{R}$;
7. les demi-droites $(-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$;
8. les demi-droites $(a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Notons $\mathcal{B}$ la tribu borélienne et σ_i la σ -algèbre engendrée par la i -ème collection. Il suffit de montrer les inclusions circulaires.

$$\sigma_6 \subset \sigma_7 : (-\infty, a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, a - 1/n] \text{ donc } (-\infty, a) \in \sigma_7.$$

$$\sigma_7 \subset \sigma_6 : (-\infty, a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, a + 1/n) \text{ donc } (-\infty, a] \in \sigma_6.$$

$\sigma_3 \subset \sigma_6 : (a, b) = (-\infty, b) \setminus (-\infty, a] = (-\infty, b) \cap (a, +\infty)$. Or $(a, +\infty) = (-\infty, a]^c \in \sigma_6$ (car $\sigma_6 = \sigma_7$ comme montré ci-dessus).

$\sigma_1 \subset \sigma_3$: tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts (propriété de Lindelöf).

Comme $\sigma_1 = \mathcal{B}$ par définition et que $\sigma_1 \subset \sigma_3 \subset \sigma_6 \subset \mathcal{B}$, on a égalité. Les autres cas se traitent de manière analogue. $\square$

Générateurs courants de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{(a, b) : a < b\}) = \sigma(\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}).$$

1.5 Tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$

Définition 1.10. La tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$ est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\tau_n)$, où τ_n est la topologie usuelle de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1.11. On a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{R}_n)$, où $\mathcal{R}_n$ est la collection des pavés ouverts $\prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$ avec $a_i < b_i$ pour tout i .

Démonstration. Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est réunion dénombrable de pavés ouverts à sommets rationnels (car $\mathbb{Q}^{2n}$ est dénombrable), donc $\sigma(\tau_n) \subset \sigma(\mathcal{R}_n)$. Réciproquement, chaque pavé ouvert est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, donc $\sigma(\mathcal{R}_n) \subset \sigma(\tau_n)$. $\square$

1.6 σ -Algèbre produit

Définition 1.12 (σ -algèbre produit). Soient $(X_1, \mathcal{A}_1)$ et $(X_2, \mathcal{A}_2)$ deux espaces mesurables. La σ -algèbre produit est :

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \sigma(\{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}).$$

Plus généralement, pour une famille $(X_i, \mathcal{A}_i)_{i \in I}$:

$$\bigotimes_{i \in I} \mathcal{A}_i = \sigma(\{\pi_i^{-1}(A_i) : i \in I, A_i \in \mathcal{A}_i\}),$$

où $\pi_i : \prod_{j \in I} X_j \rightarrow X_i$ est la projection canonique.

Théorème 1.13. Si X_1 et X_2 sont des espaces métriques séparables, alors

$$\mathcal{B}(X_1) \otimes \mathcal{B}(X_2) = \mathcal{B}(X_1 \times X_2).$$

En particulier, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (n fois).

Démonstration. Soit U un ouvert de $X_1 \times X_2$. Pour tout $(x_1, x_2) \in U$, il existe des ouverts $V_1 \ni x_1$ et $V_2 \ni x_2$ tels que $V_1 \times V_2 \subset U$. Par séparabilité, on peut choisir V_1 et V_2 dans des bases dénombrables $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de X_1 et X_2 respectivement. Donc $U = \bigcup_k V_1^{(k)} \times V_2^{(k)}$, réunion dénombrable de rectangles mesurables. Ceci montre $\mathcal{B}(X_1 \times X_2) \subset \mathcal{B}(X_1) \otimes \mathcal{B}(X_2)$.

Réciproquement, si $A_1 \in \mathcal{B}(X_1)$, alors $\pi_1^{-1}(A_1) = A_1 \times X_2$ est borélien dans $X_1 \times X_2$ car π_1 est continue. De même pour π_2 . Les ensembles $A_1 \times A_2 = \pi_1^{-1}(A_1) \cap \pi_2^{-1}(A_2)$ sont boréliens, d'où l'inclusion réciproque. $\square$

1.7 Sous- σ -algèbre et trace

Définition 1.14 (Trace). Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $Y \subset X$. La *trace* de $\mathcal{A}$ sur Y est :

$$\mathcal{A}|_Y = \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}.$$

C'est une σ -algèbre sur Y .

Proposition 1.15. Si $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$, alors $\mathcal{A}|_Y = \sigma(\mathcal{E}|_Y)$, où $\mathcal{E}|_Y = \{E \cap Y : E \in \mathcal{E}\}$.

Démonstration. Posons $\mathcal{F} = \{A \subset X : A \cap Y \in \sigma(\mathcal{E}|_Y)\}$. On vérifie que $\mathcal{F}$ est une σ -algèbre contenant $\mathcal{E}$, donc $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}$, ce qui donne $\mathcal{A}|_Y \subset \sigma(\mathcal{E}|_Y)$. L'inclusion réciproque est immédiate. $\square$

1.8 Applications mesurables

Définition 1.16 (Application mesurable). Soient $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. Une application $f : X \rightarrow Y$ est dite $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -mesurable (ou simplement *mesurable*) si :

$$\forall B \in \mathcal{B}, \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

Proposition 1.17 (Critère de mesurabilité par générateurs). Soit $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E})$. Alors $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ est mesurable si et seulement si :

$$\forall E \in \mathcal{E}, \quad f^{-1}(E) \in \mathcal{A}.$$

Démonstration. Le sens direct est évident. Pour la réciproque, posons $\mathcal{C} = \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$. Vérifions que $\mathcal{C}$ est une σ -algèbre :

- $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{A}$, donc $Y \in \mathcal{C}$.
- Si $B \in \mathcal{C}$, alors $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c \in \mathcal{A}$, donc $B^c \in \mathcal{C}$.
- Si $(B_n) \subset \mathcal{C}$, alors $f^{-1}(\bigcup_n B_n) = \bigcup_n f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$, donc $\bigcup_n B_n \in \mathcal{C}$.

Par hypothèse, $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$, donc $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{C}$, ce qui signifie que f est mesurable. $\square$

Corollaire 1.18. Une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est borélienne (i.e. $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable) si et seulement si $f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.19 (Composition). Si $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ et $g : (Y, \mathcal{B}) \rightarrow (Z, \mathcal{C})$ sont mesurables, alors $g \circ f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Z, \mathcal{C})$ est mesurable.

Démonstration. Pour tout $C \in \mathcal{C}$, $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$. Comme g est mesurable, $g^{-1}(C) \in \mathcal{B}$, puis comme f est mesurable, $f^{-1}(g^{-1}(C)) \in \mathcal{A}$. $\square$

1.9 Systèmes de Dynkin et lemme π - λ

Le lemme π - λ de Dynkin est un outil fondamental pour prouver que deux mesures coïncident.

Définition 1.20 (π -système et λ -système). • Un π -système sur X est une collection $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(X)$ stable par intersection finie.

- Un λ -système (ou système de Dynkin) sur X est une collection $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ telle que :
 - (i) $X \in \mathcal{D}$;
 - (ii) si $A, B \in \mathcal{D}$ et $A \subset B$, alors $B \setminus A \in \mathcal{D}$;
 - (iii) si (A_n) est une suite croissante dans $\mathcal{D}$, alors $\bigcup_n A_n \in \mathcal{D}$.

Théorème 1.21 (Lemme π - λ de Dynkin). *Si $\mathcal{P}$ est un π -système et $\mathcal{D}$ est un λ -système avec $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}$, alors $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{D}$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $d(\mathcal{P})$, le plus petit λ -système contenant $\mathcal{P}$, est une σ -algèbre (car alors $\sigma(\mathcal{P}) \subset d(\mathcal{P}) \subset \mathcal{D}$).

Pour cela, il suffit de montrer que $d(\mathcal{P})$ est stable par intersection finie (car un λ -système stable par intersection finie est une σ -algèbre).

Pour $A \in d(\mathcal{P})$, posons $\mathcal{G}_A = \{B \in d(\mathcal{P}) : A \cap B \in d(\mathcal{P})\}$.

Étape 1. Si $A \in \mathcal{P}$, alors $\mathcal{G}_A$ est un λ -système contenant $\mathcal{P}$ (car $\mathcal{P}$ est un π -système), donc $\mathcal{G}_A \supset d(\mathcal{P})$.

Étape 2. Pour tout $A \in d(\mathcal{P})$, $\mathcal{G}_A$ est un λ -système. Par l'étape 1, $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}_A$ pour tout $A \in d(\mathcal{P})$, donc $\mathcal{G}_A \supset d(\mathcal{P})$.

Ainsi $d(\mathcal{P})$ est stable par intersection finie, ce qui conclut. $\square$

Utilisation du lemme π - λ

Ce lemme est très utile pour montrer qu'une propriété vraie sur un π -système s'étend à la σ -algèbre engendrée. Typiquement, pour montrer que deux mesures μ et ν sur $\sigma(\mathcal{P})$ coïncident, il suffit de vérifier que $\mu = \nu$ sur le π -système $\mathcal{P}$ (sous une condition de σ -finitude).

1.10 Théorème d'unicité des mesures

Théorème 1.22 (Unicité des mesures). *Soient μ et ν deux mesures sur $(X, \sigma(\mathcal{P}))$, où $\mathcal{P}$ est un π -système. Supposons qu'il existe une suite $(E_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{P}$ avec $E_n \uparrow X$ et $\mu(E_n) = \nu(E_n) < \infty$ pour tout n . Si $\mu = \nu$ sur $\mathcal{P}$, alors $\mu = \nu$ sur $\sigma(\mathcal{P})$.*

Démonstration. Fixons n et posons $\mu_n(\cdot) = \mu(\cdot \cap E_n)$ et $\nu_n(\cdot) = \nu(\cdot \cap E_n)$. Ce sont des mesures finies. La collection

$$\mathcal{D}_n = \{A \in \sigma(\mathcal{P}) : \mu_n(A) = \nu_n(A)\}$$

est un λ -système (vérification directe). Par hypothèse, $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}_n$. Par le lemme π - λ , $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{D}_n$, donc $\mu_n = \nu_n$ sur $\sigma(\mathcal{P})$.

Pour tout $A \in \sigma(\mathcal{P})$, $A \cap E_n \uparrow A$, donc par continuité monotone : $\mu(A) = \lim_n \mu_n(A) = \lim_n \nu_n(A) = \nu(A)$. $\square$

1.11 Exercices

Exercice 1.1. Soit X un ensemble non dénombrable. Montrer que la collection

$$\mathcal{A} = \{A \subset X : A \text{ est dénombrable ou } A^c \text{ est dénombrable}\}$$

est une σ -algèbre sur X .

Exercice 1.2. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les intervalles ouverts à extrémités rationnelles.

Exercice 1.3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que f est borélienne.

Exercice 1.4. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ n'est *pas* égale à $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. *Indication* : utiliser un argument de cardinalité ($|\mathcal{B}(\mathbb{R})| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$ alors que $|\mathcal{P}(\mathbb{R})| = 2^{\mathfrak{c}}$).

Exercice 1.5. Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables. Montrer que $\{x \in X : f(x) < g(x)\} \in \mathcal{A}$.

Exercice 1.6 (Atomes d'une σ -algèbre). Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Pour $x \in X$, on définit l'*atome* de x comme $[x] = \bigcap_{A \in \mathcal{A}, x \in A} A$.

1. Montrer que si $\mathcal{A}$ est engendrée par une partition dénombrable, alors $[x] \in \mathcal{A}$ pour tout x .
2. Donner un exemple où $[x] \notin \mathcal{A}$.

Chapitre 2

Mesures

Maintenant que nous disposons des σ -algèbres — les collections d'ensembles auxquels nous souhaitons attribuer une taille — il est temps de définir cette « taille » elle-même. C'est l'objet de la notion de *mesure*, qui généralise simultanément la longueur, l'aire, le volume et la probabilité. Cette unification, due à Lebesgue et perfectionnée par Carathéodory, est l'une des grandes réussites des mathématiques modernes.

2.1 Définition et premières propriétés

Définition 2.1 (Mesure). Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Une *mesure* sur $(X, \mathcal{A})$ est une application $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ vérifiant :

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$;
- (ii) (σ -additivité) pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux *disjoints* :

$$\mu\left(\bigsqcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

Le triplet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est appelé *espace mesuré*.

Définition 2.2 (Types de mesures). Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

- μ est *finie* si $\mu(X) < \infty$.
- μ est une *mesure de probabilité* si $\mu(X) = 1$.
- μ est σ -*finie* s'il existe une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ avec $X = \bigcup_n X_n$ et $\mu(X_n) < \infty$ pour tout n .
- μ est *complète* si pour tout $N \in \mathcal{A}$ avec $\mu(N) = 0$ et tout $A \subset N$, on a $A \in \mathcal{A}$.

Proposition 2.3 (Monotonie et sous-additivité). Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

1. **Monotonie** : si $A \subset B$ avec $A, B \in \mathcal{A}$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$.
2. **Différence** : si $A \subset B$ et $\mu(A) < \infty$, alors $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.
3. **Sous-additivité dénombrable** : pour toute suite $(A_n) \subset \mathcal{A}$, $\mu(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$.

Démonstration. (1) On écrit $B = A \sqcup (B \setminus A)$, donc $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$.

(2) Découle directement de la décomposition $B = A \sqcup (B \setminus A)$ et de la finitude de $\mu(A)$.

(3) Posons $B_0 = A_0$ et $B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$ pour $n \geq 1$. Alors (B_n) est une suite disjointe avec $\bigcup_n B_n = \bigcup_n A_n$ et $B_n \subset A_n$. Donc

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \mu\left(\bigsqcup_n B_n\right) = \sum_n \mu(B_n) \leq \sum_n \mu(A_n). \quad \square$$

2.2 Continuité de la mesure

Théorème 2.4 (Continuité monotone). *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.*

1. **Continuité croissante** : si $A_n \uparrow A$ (suite croissante), alors $\mu(A_n) \uparrow \mu(A)$.
2. **Continuité décroissante** : si $A_n \downarrow A$ (suite décroissante) et $\mu(A_1) < \infty$, alors $\mu(A_n) \downarrow \mu(A)$.

Démonstration. (1) Posons $B_0 = A_0$ et $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ pour $n \geq 1$. Alors (B_n) est disjointe et $\bigsqcup_{k=0}^n B_k = A_n$, $\bigsqcup_{k=0}^{\infty} B_k = A$. Par σ -additivité :

$$\mu(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(B_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \mu(B_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

(2) Posons $C_n = A_1 \setminus A_n$. Alors $C_n \uparrow A_1 \setminus A$. Par (1), $\mu(C_n) \uparrow \mu(A_1 \setminus A)$. Comme $\mu(A_1) < \infty$: $\mu(C_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n)$ et $\mu(A_1 \setminus A) = \mu(A_1) - \mu(A)$, d'où $\mu(A_n) \downarrow \mu(A)$. $\square$

Condition de finitude

L'hypothèse $\mu(A_1) < \infty$ dans (2) est essentielle. Contre-exemple : $A_n = [n, +\infty)$ avec la mesure de Lebesgue. On a $A_n \downarrow \emptyset$ mais $\mu(A_n) = +\infty$ pour tout n .

Lemme 2.5 (Lemme de Borel–Cantelli). *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n) \subset \mathcal{A}$. Si $\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$, alors*

$$\mu\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 0,$$

où $\limsup_n A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ est l'ensemble des points appartenant à une infinité de A_n .

Démonstration. Posons $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Alors $B_n \downarrow \limsup_n A_n$ et

$$\mu(B_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

car le reste d'une série convergente tend vers zéro. Comme $\mu(B_0) \leq \sum_k \mu(A_k) < \infty$, la continuité décroissante donne $\mu(\limsup_n A_n) = \lim_n \mu(B_n) = 0$. $\square$

2.3 Exemples fondamentaux

Exemple 2.6 (Mesure de comptage). Soit X un ensemble quelconque et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. La *mesure de comptage* est définie par :

$$\mu(A) = \begin{cases} |A| & \text{si } A \text{ est fini,} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est une mesure sur $(X, \mathcal{P}(X))$, σ -finie si et seulement si X est dénombrable.

Exemple 2.7 (Masse de Dirac). Soit $x_0 \in X$. La *masse de Dirac* en x_0 est la mesure de probabilité :

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 \in A, \\ 0 & \text{si } x_0 \notin A. \end{cases}$$

Exemple 2.8 (Combinaisons linéaires). Si μ_1, μ_2 sont des mesures sur $(X, \mathcal{A})$ et $\alpha, \beta \geq 0$, alors $\alpha\mu_1 + \beta\mu_2$ est une mesure. Plus généralement, si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, +\infty)$, alors $\mu = \sum_n a_n \delta_{x_n}$ est une mesure.

2.4 Pré-mesures et extension

Définition 2.9 (Pré-mesure). Soit $\mathcal{A}_0$ une algèbre sur X . Une application $\mu_0 : \mathcal{A}_0 \rightarrow [0, +\infty]$ est une *pré-mesure* si :

- (i) $\mu_0(\emptyset) = 0$;
- (ii) pour toute suite $(A_n) \subset \mathcal{A}_0$ disjointe telle que $\bigsqcup_n A_n \in \mathcal{A}_0$, on a $\mu_0(\bigsqcup_n A_n) = \sum_n \mu_0(A_n)$.

Remarque 2.10. La différence avec une mesure est que $\mathcal{A}_0$ est seulement une algèbre, et la σ -additivité n'est exigée que lorsque la réunion tombe dans $\mathcal{A}_0$.

Proposition 2.11 (Critère de σ -additivité). Soit μ_0 une application finiment additive sur une algèbre $\mathcal{A}_0$ avec $\mu_0(\emptyset) = 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. μ_0 est une pré-mesure (σ -additive).
2. μ_0 est continue par en bas : si $(A_n) \subset \mathcal{A}_0$, $A_n \uparrow A \in \mathcal{A}_0$, alors $\mu_0(A_n) \uparrow \mu_0(A)$.
3. μ_0 est continue en $\emptyset$: si $(A_n) \subset \mathcal{A}_0$, $A_n \downarrow \emptyset$, alors $\mu_0(A_n) \downarrow 0$.

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2) : même preuve que le théorème 2.4(1).

(2) $\Rightarrow$ (3) : si $A_n \downarrow \emptyset$ et $\mu_0(A_1) < \infty$, on applique la même technique que 2.4(2). Si $\mu_0(A_1) = +\infty$, le résultat est trivial.

(3) $\Rightarrow$ (1) : soit (A_n) disjointe avec $A = \bigsqcup_n A_n \in \mathcal{A}_0$. Posons $B_N = A \setminus \bigsqcup_{n=0}^N A_n$. Par additivité finie, $\mu_0(A) = \sum_{n=0}^N \mu_0(A_n) + \mu_0(B_N)$. Comme $B_N \downarrow \emptyset$, on a $\mu_0(B_N) \rightarrow 0$, d'où $\mu_0(A) = \sum_n \mu_0(A_n)$. $\square$

2.5 Théorème d'extension

Théorème 2.12 (Extension de Carathéodory — énoncé préliminaire). *Soit μ_0 une pré-mesure sur une algèbre $\mathcal{A}_0$. Alors μ_0 s'étend en une mesure μ sur $\sigma(\mathcal{A}_0)$. Si μ_0 est σ -finie, cette extension est unique.*

La preuve complète sera donnée au chapitre 3, mais nous esquissons ici la construction.

Construction de la mesure extérieure

On définit la *mesure extérieure* associée à μ_0 par :

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \mu_0(A_n) : (A_n) \subset \mathcal{A}_0, A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right\}$$

pour tout $A \subset X$. Puis on restreint μ^* aux ensembles *Carathéodory-mesurables*.

2.6 Complétion d'une mesure

Définition 2.13 (Complétion). Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. La *complétion* de μ est la mesure $\bar{\mu}$ définie sur la σ -algèbre :

$$\bar{\mathcal{A}} = \{A \cup N : A \in \mathcal{A}, N \subset M \text{ pour un } M \in \mathcal{A} \text{ avec } \mu(M) = 0\}$$

par $\bar{\mu}(A \cup N) = \mu(A)$.

Proposition 2.14. $\bar{\mathcal{A}}$ est une σ -algèbre et $\bar{\mu}$ est une mesure complète qui étend μ .

Démonstration. Vérifions que $\bar{\mathcal{A}}$ est une σ -algèbre.

Stabilité par complémentation : si $E = A \cup N$ avec $N \subset M$, $\mu(M) = 0$, alors $E^c = A^c \cap N^c = (A^c \cap M^c) \cup (A^c \cap M \setminus N)$. Or $A^c \cap M^c \in \mathcal{A}$ et $A^c \cap M \setminus N \subset M$, donc $E^c \in \bar{\mathcal{A}}$.

Stabilité par réunion dénombrable : si $E_n = A_n \cup N_n$ avec $N_n \subset M_n$, $\mu(M_n) = 0$, alors $\bigcup_n E_n = \bigcup_n A_n \cup \bigcup_n N_n$ avec $\bigcup_n N_n \subset \bigcup_n M_n$ et $\mu(\bigcup_n M_n) \leq \sum_n \mu(M_n) = 0$.

La bonne définition de $\bar{\mu}$ (indépendance de la décomposition) se vérifie directement, et la σ -additivité découle de celle de μ . $\square$

2.7 Mesure image

Définition 2.15 (Mesure image). Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \rightarrow Y$ une application mesurable vers $(Y, \mathcal{B})$. La *mesure image* (ou *push-forward*) de μ par f est la mesure $f_*\mu$ sur $(Y, \mathcal{B})$ définie par :

$$(f_*\mu)(B) = \mu(f^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Proposition 2.16. $f_*\mu$ est bien une mesure sur $(Y, \mathcal{B})$.

Démonstration. $(f_*\mu)(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$. Pour (B_n) disjointe dans $\mathcal{B}$, $(f^{-1}(B_n))$ est disjointe dans $\mathcal{A}$ et $f^{-1}(\bigsqcup_n B_n) = \bigsqcup_n f^{-1}(B_n)$, donc $(f_*\mu)(\bigsqcup_n B_n) = \mu(\bigsqcup_n f^{-1}(B_n)) = \sum_n \mu(f^{-1}(B_n)) = \sum_n (f_*\mu)(B_n)$. $\square$

2.8 Exercices

Exercice 2.1. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n) \subset \mathcal{A}$. Montrer que $\mu(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mu(A_n)$ (analogue du lemme de Fatou pour les ensembles).

Exercice 2.2. Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\mu(K) < \infty$ pour tout compact K . Montrer que μ est σ -finie.

Exercice 2.3. Montrer que la mesure de comptage sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ n'est pas σ -finie.

Exercice 2.4. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(X) < \infty$ et $(A_n) \subset \mathcal{A}$ une suite telle que $\mu(A_n) \geq \alpha > 0$ pour tout n . Montrer qu'il existe $x \in X$ appartenant à une infinité de A_n .

Exercice 2.5. Soit μ une mesure finie sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Montrer que μ est déterminée par les valeurs $\mu(\{n\})$, $n \in \mathbb{N}$, et que $\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(\{n\})\delta_n$.

Exercice 2.6 (Mesure de Lebesgue–Stieltjes). Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante et continue à droite. On définit $\mu_0((a, b]) = F(b) - F(a)$ sur l'algèbre $\mathcal{A}_0$ des réunions finies disjointes d'intervalles semi-ouverts $(a, b]$.

1. Montrer que μ_0 est une pré-mesure sur $\mathcal{A}_0$.
2. En déduire l'existence d'une unique mesure μ_F sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que $\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$.

Chapitre 3

Théorème de Carathéodory

3.1 Introduction

Comment construire une mesure ? La question peut sembler circulaire : on veut mesurer des ensembles, mais pour définir rigoureusement ce que signifie « mesurer », il faut d'abord disposer d'une théorie. C'est Constantin Carathéodory qui, en 1914, a tranché ce nœud gordien avec une construction d'une élégance remarquable. Son idée : partir d'une notion plus grossière, la *mesure extérieure*, qui a le défaut de ne pas être additive en général, puis sélectionner parmi tous les ensembles ceux sur lesquels cette mesure extérieure se comporte bien. Les ensembles « bien mesurables » au sens de Carathéodory forment automatiquement une σ -algèbre, et la mesure extérieure restreinte à cette σ -algèbre est une vraie mesure.

Cette construction, aussi élégante qu'abstraite, est la machine universelle qui produit la mesure de Lebesgue, la mesure de Hausdorff, et bien d'autres. C'est la pierre angulaire sur laquelle repose tout l'édifice de l'intégration moderne.

3.2 Mesures extérieures

Définition 3.1 (Mesure extérieure). Soit X un ensemble. Une *mesure extérieure* sur X est une application $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ vérifiant :

- (i) $\mu^*(\emptyset) = 0$;
- (ii) (monotonie) si $A \subset B$, alors $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;
- (iii) (σ -sous-additivité) pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$:

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Remarque 3.2. Une mesure extérieure est définie sur *tous* les sous-ensembles de X , mais elle n'est en général pas σ -additive. L'idée de Carathéodory est d'identifier les ensembles sur lesquels elle est additive.

3.3 Ensembles Carathéodory-mesurables

Définition 3.3 (Mesurabilité au sens de Carathéodory). Soit μ^* une mesure extérieure sur X . Un ensemble $A \subset X$ est dit μ^* -mesurable (ou *Carathéodory-mesurable*) si :

$$\forall E \subset X, \quad \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

On note $\mathcal{M}^*$ la collection de tous les ensembles μ^* -mesurables.

Interprétation du critère de Carathéodory

La condition dit que A « découpe » proprement tout ensemble E : la mesure extérieure de E est exactement la somme des mesures extérieures des deux morceaux $E \cap A$ et $E \cap A^c$. Par la sous-additivité, l'inégalité $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ est toujours vraie. Il suffit donc de vérifier l'inégalité inverse : $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$.

3.4 Le théorème principal

Théorème 3.4 (Carathéodory). Soit μ^* une mesure extérieure sur X . Alors :

1. $\mathcal{M}^*$ est une σ -algèbre ;
2. la restriction $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}^*}$ est une mesure complète sur $(X, \mathcal{M}^*)$.

Démonstration. La preuve se décompose en plusieurs étapes.

Étape 1 : $\mathcal{M}^$ est une algèbre.*

Clairement $X \in \mathcal{M}^*$ (prendre $A = X$: $\mu^*(E) = \mu^*(E) + \mu^*(\emptyset) = \mu^*(E)$). Si $A \in \mathcal{M}^*$, alors $A^c \in \mathcal{M}^*$ car la condition de Carathéodory est symétrique en A et A^c .

Montrons la stabilité par réunion finie. Soient $A, B \in \mathcal{M}^*$. Pour tout $E \subset X$:

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \\ &= \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c). \end{aligned}$$

Or $E \cap (A \cup B) = (E \cap A \cap B) \cup (E \cap A \cap B^c) \cup (E \cap A^c \cap B)$ et $E \cap (A \cup B)^c = E \cap A^c \cap B^c$. Par sous-additivité :

$$\mu^*(E \cap (A \cup B)) \leq \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B).$$

Donc $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c)$, et l'inégalité inverse vient de la sous-additivité. Ainsi $A \cup B \in \mathcal{M}^*$.

Étape 2 : additivité finie.

Si $A, B \in \mathcal{M}^*$ sont disjoints, en prenant $E = A \cup B$: $\mu^*(A \cup B) = \mu^*((A \cup B) \cap A) + \mu^*((A \cup B) \cap A^c) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$.

Par récurrence, pour $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}^*$ deux à deux disjoints : $\mu^*(\bigsqcup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n \mu^*(A_k)$.

Étape 3 : σ -additivité et stabilité par réunion dénombrable.

Soit $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{M}^*$ une suite disjointe. Posons $S_n = \bigsqcup_{k=1}^n A_k$ et $A = \bigsqcup_{k=1}^\infty A_k$. Par l'étape 1, $S_n \in \mathcal{M}^*$, donc pour tout E :

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap S_n) + \mu^*(E \cap S_n^c) \geq \sum_{k=1}^n \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*(E \cap A^c)$$

car $S_n^c \supset A^c$. En faisant $n \rightarrow \infty$:

$$\mu^*(E) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*(E \cap A^c) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

par sous-additivité de μ^* . L'inégalité inverse étant toujours vraie, $A \in \mathcal{M}^*$.

En prenant $E = A$: $\mu^*(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) + \mu^*(\emptyset) = \sum_k \mu^*(A_k)$, ce qui donne la σ -additivité.

Étape 4 : complétude.

Soit $N \in \mathcal{M}^*$ avec $\mu^*(N) = 0$ et $A \subset N$. Pour tout $E \subset X$: $\mu^*(E \cap A) \leq \mu^*(N) = 0$ et $\mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E)$, donc $\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E)$. L'inégalité inverse est la sous-additivité, donc $A \in \mathcal{M}^*$. $\square$

3.5 Application aux pré-mesures

Théorème 3.5 (Extension de Carathéodory). *Soit μ_0 une pré-mesure sur une algèbre $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{P}(X)$. Définissons :*

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \mu_0(A_n) : (A_n) \subset \mathcal{A}_0, A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right\}, \quad A \subset X.$$

Alors :

1. μ^* est une mesure extérieure sur X .
2. $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{M}^*$ (tout élément de l'algèbre est Carathéodory-mesurable).
3. $\mu^*|_{\mathcal{A}_0} = \mu_0$ (l'extension coïncide avec la pré-mesure sur l'algèbre).
4. En particulier, $\mu = \mu^*|_{\sigma(\mathcal{A}_0)}$ est une mesure sur $\sigma(\mathcal{A}_0)$ qui étend μ_0 .

Démonstration. Point 1. $\mu^*(\emptyset) = 0$ (prendre $A_n = \emptyset$). La monotonie est claire. Pour la σ -sous-additivité, soit (B_k) une suite et $\varepsilon > 0$. Pour chaque k , il existe $(A_n^{(k)}) \subset \mathcal{A}_0$ avec $B_k \subset \bigcup_n A_n^{(k)}$ et $\sum_n \mu_0(A_n^{(k)}) \leq \mu^*(B_k) + \varepsilon/2^{k+1}$. Alors $\bigcup_k B_k \subset \bigcup_{k,n} A_n^{(k)}$ et

$$\mu^*\left(\bigcup_k B_k\right) \leq \sum_{k,n} \mu_0(A_n^{(k)}) \leq \sum_k \mu^*(B_k) + \varepsilon.$$

En faisant $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient la σ -sous-additivité.

Point 2. Soit $A \in \mathcal{A}_0$ et $E \subset X$. Il suffit de montrer $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$. Soit $\varepsilon > 0$ et $(A_n) \subset \mathcal{A}_0$ avec $E \subset \bigcup_n A_n$ et $\sum_n \mu_0(A_n) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$. Comme $\mathcal{A}_0$ est une algèbre, $A_n \cap A$ et $A_n \cap A^c$ sont dans $\mathcal{A}_0$ et $\mu_0(A_n) = \mu_0(A_n \cap A) + \mu_0(A_n \cap A^c)$ (additivité finie). Donc :

$$\begin{aligned} \mu^*(E) + \varepsilon &\geq \sum_n \mu_0(A_n \cap A) + \sum_n \mu_0(A_n \cap A^c) \\ &\geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c). \end{aligned}$$

Point 3. Pour $A \in \mathcal{A}_0$, $\mu^*(A) \leq \mu_0(A)$ (prendre $A_0 = A$, $A_n = \emptyset$). Pour l'inégalité inverse, soit $(A_n) \subset \mathcal{A}_0$ avec $A \subset \bigcup_n A_n$. Posons $B_N = A \cap (\bigcup_{n=0}^N A_n) \in \mathcal{A}_0$. Alors $B_N \uparrow A$ et $B_N \subset \bigcup_{n=0}^N A_n$. Par sous-additivité finie et la pré-mesure : $\mu_0(B_N) \leq \sum_{n=0}^N \mu_0(A_n)$. Par continuité croissante de la pré-mesure (proposition 2.11) : $\mu_0(A) = \lim_N \mu_0(B_N) \leq \sum_n \mu_0(A_n)$. En prenant l'infimum : $\mu_0(A) \leq \mu^*(A)$. $\square$

3.6 Unicité de l'extension

Théorème 3.6 (Unicité). *Si la pré-mesure μ_0 est σ -finie sur $\mathcal{A}_0$, alors l'extension μ à $\sigma(\mathcal{A}_0)$ est unique.*

Démonstration. Par le théorème d'unicité des mesures (théorème 1.22), appliqué au π -système $\mathcal{A}_0$ (une algèbre est un π -système). La σ -finitude de μ_0 fournit la suite exhaustive requise. $\square$

Résumé de la construction de Carathéodory

$$\text{Pré-mesure } \mu_0 \text{ sur } \mathcal{A}_0 \xrightarrow{\text{mesure ext.}} \mu^* \text{ sur } \mathcal{P}(X) \xrightarrow{\text{restriction}} \mu \text{ sur } \mathcal{M}^* \supset \sigma(\mathcal{A}_0).$$

3.7 Critère de Carathéodory pour les mesures métriques

Définition 3.7 (Mesure extérieure métrique). Soit (X, d) un espace métrique. Une mesure extérieure μ^* sur X est dite *métrique* si :

$$d(A, B) > 0 \implies \mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B),$$

où $d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

Théorème 3.8. *Si μ^* est une mesure extérieure métrique sur (X, d) , alors tout ensemble borélien est μ^* -mesurable : $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{M}^*$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que tout fermé F est μ^* -mesurable. Soit $E \subset X$ et posons $E_n = \{x \in E \cap F^c : d(x, F) \geq 1/n\}$. Alors $E_n \uparrow E \cap F^c$ et $d(E \cap F, E_n) \geq 1/n > 0$, donc $\mu^*(E \cap F \cup E_n) = \mu^*(E \cap F) + \mu^*(E_n)$ par la propriété métrique.

Par monotonie, $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap F \cup E_n) = \mu^*(E \cap F) + \mu^*(E_n)$. Il reste à montrer que $\mu^*(E_n) \rightarrow \mu^*(E \cap F^c)$.

Posons $D_n = E_{n+1} \setminus E_n$. Pour n et m avec $m \geq n+2$, $d(D_n, D_m) > 0$, donc les ensembles D_n de parité fixée sont à distance positive deux à deux. Par la propriété métrique et la σ -sous-additivité :

$$\mu^*(E \cap F^c) \leq \mu^*(E_n) + \sum_{k=n}^{\infty} \mu^*(D_k).$$

Si $\sum_k \mu^*(D_k) < \infty$, le reste tend vers zéro et $\mu^*(E_n) \rightarrow \mu^*(E \cap F^c)$. Si la série diverge, on montre que $\mu^*(E) = +\infty$ et l'inégalité est triviale. $\square$

3.8 Application : mesure de Hausdorff

Définition 3.9 (Mesure de Hausdorff). Soit (X, d) un espace métrique et $s \geq 0$. Pour $\delta > 0$, on définit :

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (\text{diam } U_n)^s : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n, \text{diam } U_n \leq \delta \right\}.$$

La mesure de Hausdorff s -dimensionnelle est :

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(A).$$

Proposition 3.10. $\mathcal{H}^s$ est une mesure extérieure métrique. En conséquence, c'est une mesure (borélienne) sur $(X, \mathcal{B}(X))$.

3.9 Exercices

Exercice 3.1. Vérifier en détail que l'ensemble $\mathcal{M}^*$ du théorème de Carathéodory est stable par intersection dénombrable.

Exercice 3.2. Soit μ^* une mesure extérieure sur X . Montrer que si $\mu^*(A) = 0$, alors $A \in \mathcal{M}^*$.

Exercice 3.3. Montrer que la mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^n$ sur $\mathbb{R}^n$ est (à une constante multiplicative près) la mesure de Lebesgue.

Exercice 3.4. Soit μ_0 une pré-mesure finie sur une algèbre $\mathcal{A}_0$. Montrer que pour tout $A \in \sigma(\mathcal{A}_0)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $B \in \mathcal{A}_0$ tel que $\mu(A \Delta B) < \varepsilon$, où $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Exercice 3.5. Soit X un ensemble non dénombrable et $\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est dénombrable,} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Montrer que μ^* est une mesure extérieure et déterminer $\mathcal{M}^*$.

Chapitre 4

Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$

Nous arrivons enfin à l'objet que toute cette machinerie prépare : la *mesure de Lebesgue*. C'est elle qui donne un sens rigoureux à la notion de longueur, d'aire et de volume, là où la construction de Riemann échouait. Henri Lebesgue, dans sa thèse de 1902, a montré que l'on peut mesurer des ensembles bien plus pathologiques que les simples réunions d'intervalles — et que l'intégrale qui en découle possède des propriétés de passage à la limite incomparablement supérieures à celle de Riemann. La construction que nous présentons ici applique le théorème de Carathéodory au contenu de volume des pavés, et produit la mesure la plus fondamentale de toute l'analyse.

4.1 Construction

La mesure de Lebesgue est l'unique mesure sur $\mathbb{R}^n$ qui étend la notion de volume des pavés. Nous la construisons via le théorème de Carathéodory.

Définition 4.1 (Pavé et volume). Un *pavé* (ou *rectangle*) de $\mathbb{R}^n$ est un ensemble de la forme $I = \prod_{k=1}^n [a_k, b_k]$ avec $a_k \leq b_k$. Son *volume* est :

$$\text{vol}(I) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k).$$

Définition 4.2 (Algèbre des réunions de pavés). Notons $\mathcal{A}_0$ la collection des réunions finies disjointes de pavés semi-ouverts de $\mathbb{R}^n$. C'est une algèbre.

Proposition 4.3. L'application $\mu_0 : \mathcal{A}_0 \rightarrow [0, +\infty]$ définie par $\mu_0(\bigsqcup_{k=1}^m I_k) = \sum_{k=1}^m \text{vol}(I_k)$ est une pré-mesure σ -finie sur $\mathcal{A}_0$.

Démonstration. L'additivité finie est immédiate par définition. La σ -additivité découle de la continuité en $\emptyset$ (proposition 2.11). Soit (A_m) une suite décroissante dans $\mathcal{A}_0$ avec $A_m \downarrow \emptyset$. On montre que $\mu_0(A_m) \rightarrow 0$ par un argument de compacité.

Supposons par l'absurde que $\mu_0(A_m) \geq \alpha > 0$ pour tout m . Chaque A_m est une réunion finie de pavés. En rétrécissant légèrement chaque pavé $[a_k, b_k]$ en $[a_k + \varepsilon, b_k - \varepsilon]$, on obtient un compact $K_m \subset A_m$ avec $\mu_0(A_m) - \mu_0(K_m)$ petit. On peut s'assurer que $\mu_0(K_m) \geq \alpha/2 > 0$, donc $K_m \neq \emptyset$. Comme $K_1 \supset K_2 \supset \dots$ sont des compacts non vides emboîtés, $\bigcap_m K_m \neq \emptyset$, ce qui contredit $\bigcap_m A_m = \emptyset$.

La σ -finitude vient de $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} [-k, k]^n$. □

Théorème 4.4 (Mesure de Lebesgue). *Il existe une unique mesure λ^n sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ telle que :*

$$\lambda^n \left(\prod_{k=1}^n [a_k, b_k] \right) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k).$$

Cette mesure est appelée la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Application directe du théorème d'extension de Carathéodory (théorème 3.5) à la pré-mesure μ_0 . L'unicité vient de la σ -finitude. $\square$

Remarque 4.5. On note souvent $\lambda = \lambda^1$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. La *mesure de Lebesgue complète* est la complétion de λ^n par rapport à la σ -algèbre de Lebesgue $\mathcal{L}^n \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

4.2 Propriétés fondamentales

Théorème 4.6 (Régularité). *Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$:*

1. (Régularité extérieure) $\lambda^n(A) = \inf\{\lambda^n(U) : U \supset A, U \text{ ouvert}\}.$
2. (Régularité intérieure) $\lambda^n(A) = \sup\{\lambda^n(K) : K \subset A, K \text{ compact}\}.$

Démonstration. (1) Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la mesure extérieure, il existe (I_k) suite de pavés avec $A \subset \bigcup_k I_k$ et $\sum_k \text{vol}(I_k) \leq \lambda^n(A) + \varepsilon$. En remplaçant chaque $[a_j, b_j]$ par $(a_j - \delta, b_j + \delta)$ avec δ assez petit, on obtient un ouvert $U \supset A$ avec $\lambda^n(U) \leq \lambda^n(A) + 2\varepsilon$.

(2) Pour $\lambda^n(A) < \infty$, on utilise l'approximation $A = \bigcup_m (A \cap [-m, m]^n)$ et la régularité extérieure appliquée au complémentaire. $\square$

Théorème 4.7 (Invariance par translation). *Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$:*

$$\lambda^n(A + x) = \lambda^n(A), \quad \text{où } A + x = \{a + x : a \in A\}.$$

Démonstration. La mesure $\nu(A) = \lambda^n(A + x)$ est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ coïncidant avec λ^n sur les pavés (car le volume est invariant par translation). Par unicité, $\nu = \lambda^n$. $\square$

Théorème 4.8 (Comportement par homothétie). *Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ et tout $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:*

$$\lambda^n(cA) = |c|^n \lambda^n(A).$$

Plus généralement, si $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application linéaire inversible :

$$\lambda^n(T(A)) = |\det T| \cdot \lambda^n(A).$$

Démonstration. Pour l'homothétie, la mesure $\nu(A) = \lambda^n(cA)/|c|^n$ coïncide avec λ^n sur les pavés et est σ -finie, donc $\nu = \lambda^n$ par unicité.

Pour le cas général, on se ramène à des transvections et des homothéties (décomposition de Gauss). $\square$

4.3 Ensembles de mesure nulle

Proposition 4.9. Les ensembles suivants sont de mesure de Lebesgue nulle :

1. tout ensemble dénombrable ;
2. tout sous-espace affine de dimension $< n$ dans $\mathbb{R}^n$;
3. l'ensemble de Cantor $\mathcal{C} \subset [0, 1]$.

Démonstration. (1) Un singleton $\{x\}$ est contenu dans $[x_1, x_1 + \varepsilon) \times \dots \times [x_n, x_n + \varepsilon)$ de volume ε^n , pour tout $\varepsilon > 0$. Donc $\lambda^n(\{x\}) = 0$. Par σ -sous-additivité, tout ensemble dénombrable est de mesure nulle.

(2) Par invariance par les isométries, il suffit de traiter le cas de l'hyperplan $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. On a $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n-1} \times [-\varepsilon, \varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$, et ce dernier ensemble a mesure finie qui tend vers zéro.

(3) L'ensemble de Cantor est l'intersection $\mathcal{C} = \bigcap_n C_n$ où C_n est une réunion de 2^n intervalles de longueur 3^{-n} . Donc $\lambda(\mathcal{C}) \leq \lambda(C_n) = (2/3)^n \rightarrow 0$. $\square$

4.4 Ensembles non mesurables

Théorème 4.10 (Vitali, 1905). *Il existe un sous-ensemble de $[0, 1]$ qui n'est pas Lebesgue-mesurable.*

Démonstration. On définit la relation d'équivalence $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$ sur $[0, 1)$. Par l'axiome du choix, soit $V \subset [0, 1)$ un ensemble contenant exactement un représentant de chaque classe d'équivalence.

Pour $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$, définissons $V_r = \{x + r \pmod{1} : x \in V\}$ (translation modulo 1). Les V_r sont deux à deux disjoints et $[0, 1) = \bigsqcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)} V_r$.

Si V était mesurable, par invariance par translation (modulo 1), tous les V_r auraient la même mesure $\alpha = \lambda(V)$. Par σ -additivité :

$$1 = \lambda([0, 1)) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)} \lambda(V_r) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)} \alpha.$$

Si $\alpha = 0$, la somme vaut $0 \neq 1$. Si $\alpha > 0$, la somme vaut $+\infty \neq 1$. Contradiction. $\square$

Rôle de l'axiome du choix

La construction de Vitali utilise l'axiome du choix. En effet, Solovay (1970) a montré qu'il est consistant avec ZF (sans l'axiome du choix) que tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ soit Lebesgue-mesurable.

4.5 L'ensemble de Cantor

Définition 4.11 (Ensemble de Cantor). L'ensemble de Cantor $\mathcal{C}$ est défini par :

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n, \quad \text{où } C_0 = [0, 1], \quad C_{n+1} = \frac{C_n}{3} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{C_n}{3} \right).$$

De manière équivalente, $\mathcal{C} = \{x \in [0, 1] : x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k}, a_k \in \{0, 2\}\}$.

Proposition 4.12 (Propriétés de l'ensemble de Cantor). 1. $\mathcal{C}$ est compact, non dénombrable, parfait (fermé sans point isolé), totalement discontinu.

2. $\lambda(\mathcal{C}) = 0$.

3. $\mathcal{C}$ est en bijection avec $[0, 1]$ (via la fonction de Cantor).

4. $\mathcal{C}$ contient des sous-ensembles non boréliens (car $|\mathcal{P}(\mathcal{C})| = 2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c} = |\mathcal{B}(\mathbb{R})|$).

4.6 Caractérisation des ensembles Lebesgue-mesurables

Théorème 4.13. *Un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ est Lebesgue-mesurable si et seulement s'il existe un borélien B et un ensemble de mesure nulle N tels que $A = B \cup N$. Autrement dit, $\mathcal{L}^n = \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}$ (la complétion de la tribu borélienne).*

Théorème 4.14 (Caractérisation par les G_δ et F_σ). *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mesurable avec $\lambda^n(A) < \infty$. Alors :*

1. *il existe un G_δ (intersection dénombrable d'ouverts) $G \supset A$ avec $\lambda^n(G \setminus A) = 0$;*
2. *il existe un F_σ (réunion dénombrable de fermés) $F \subset A$ avec $\lambda^n(A \setminus F) = 0$.*

4.7 Exercices

Exercice 4.1. Montrer que $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$ directement par la définition de la mesure de Lebesgue (en construisant un recouvrement explicite).

Exercice 4.2. Soit $A \subset \mathbb{R}$ mesurable avec $\lambda(A) > 0$. Montrer que l'ensemble des différences $A - A = \{a - b : a, b \in A\}$ contient un intervalle centré en zéro. (*Théorème de Steinhaus.*)

Exercice 4.3 (Ensemble de Cantor généralisé). Pour $\alpha \in (0, 1)$, construire un ensemble fermé $\mathcal{C}_\alpha \subset [0, 1]$, homéomorphe à l'ensemble de Cantor, avec $\lambda(\mathcal{C}_\alpha) = 1 - \alpha$.

Exercice 4.4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne de constante L . Montrer que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\lambda(f(A)) \leq L \cdot \lambda(A)$.

Exercice 4.5. Montrer que la mesure de Lebesgue λ est la seule mesure (complète) sur $\mathbb{R}$ qui est invariante par translation et telle que $\lambda([0, 1]) = 1$.

Exercice 4.6. Montrer qu'il existe un ensemble Lebesgue-mesurable qui n'est pas borélien. *Indication :* utiliser la surjection $\mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$ et le fait que $\mathcal{C}$ a mesure nulle.

Chapitre 5

Fonctions Mesurables

Avant de pouvoir intégrer, il faut savoir quelles fonctions ont le droit d'être intégrées. C'est la question de la *mesurabilité* : une fonction est mesurable si les images réciproques des ensembles « raisonnables » sont elles-mêmes mesurables. Cette condition, qui semble technique, est en réalité très naturelle : elle garantit que l'on peut définir sans ambiguïté la probabilité que $f(X)$ tombe dans un intervalle donné, ou l'intégrale de f par rapport à une mesure. Les fonctions continues sont toujours mesurables, mais la classe des fonctions mesurables est considérablement plus vaste — c'est précisément cette souplesse qui rend l'intégrale de Lebesgue si puissante.

5.1 Définitions et critères de mesurabilité

Définition 5.1 (Fonction mesurable). Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Une fonction $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ est dite $\mathcal{A}$ -mesurable (ou simplement *mesurable*) si :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad f^{-1}([-\infty, a)) = \{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{A}.$$

Proposition 5.2 (Critères équivalents). Pour $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\{f < a\} \in \mathcal{A}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$;
2. $\{f \leq a\} \in \mathcal{A}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$;
3. $\{f > a\} \in \mathcal{A}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$;
4. $\{f \geq a\} \in \mathcal{A}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

De plus, si l'une de ces conditions est vérifiée, alors $\{f = a\} \in \mathcal{A}$, $\{f = +\infty\} \in \mathcal{A}$ et $\{f = -\infty\} \in \mathcal{A}$.

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2) : $\{f \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f < a + 1/n\}$.

(2) $\Rightarrow$ (3) : $\{f > a\} = \{f \leq a\}^c$.

(3) $\Rightarrow$ (4) : $\{f \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f > a - 1/n\}$.

(4) $\Rightarrow$ (1) : $\{f < a\} = \{f \geq a\}^c$.

Enfin, $\{f = a\} = \{f \leq a\} \cap \{f \geq a\}$, $\{f = +\infty\} = \bigcap_n \{f > n\}$, $\{f = -\infty\} = \bigcap_n \{f < -n\}$. $\square$

Exemple 5.3. 1. Toute fonction constante est mesurable.

2. La fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ est mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{A}$.
3. Si X est un espace topologique et $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$, toute fonction continue $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable.
4. Toute fonction monotone $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est borélienne.

5.2 Opérations sur les fonctions mesurables

Théorème 5.4 (Stabilité algébrique). *Soient $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :*

1. αf est mesurable ;
2. $f + g$ est mesurable (si bien définie) ;
3. fg est mesurable ;
4. $|f|$ est mesurable ;
5. f/g est mesurable (là où $g \neq 0$) ;
6. $f^+, f^-, \max(f, g), \min(f, g)$ sont mesurables.

Démonstration. (2) L'idée clé est l'observation :

$$\{f + g < a\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{f < r\} \cap \{g < a - r\}).$$

C'est une réunion dénombrable d'ensembles mesurables, donc mesurable.

(3) On utilise l'identité $fg = \frac{1}{4}[(f + g)^2 - (f - g)^2]$ et le fait que h^2 est mesurable si h l'est (car $\{h^2 < a\} = \{-\sqrt{a} < h < \sqrt{a}\}$ pour $a > 0$).

(4) $\{|f| < a\} = \{-a < f < a\} = \{f > -a\} \cap \{f < a\}$.

(6) $\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ et $\min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$. □

5.3 Limites de fonctions mesurables

Théorème 5.5 (Stabilité par passage à la limite). *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables $X \rightarrow \mathbb{R}$. Alors les fonctions suivantes sont mesurables :*

1. $\sup_n f_n$ et $\inf_n f_n$;
2. $\limsup_n f_n$ et $\liminf_n f_n$;
3. si $f = \lim_n f_n$ existe (ponctuellement), alors f est mesurable.

Démonstration. (1) $\{\sup_n f_n > a\} = \bigcup_n \{f_n > a\} \in \mathcal{A}$. De même, $\{\inf_n f_n < a\} = \bigcup_n \{f_n < a\} \in \mathcal{A}$.

(2) $\limsup_n f_n = \inf_n \sup_{k \geq n} f_k$ et $\liminf_n f_n = \sup_n \inf_{k \geq n} f_k$, donc mesurables par (1).

(3) Si $f = \lim_n f_n$, alors $f = \limsup_n f_n = \liminf_n f_n$. □

Contraste avec la continuité

Une limite ponctuelle de fonctions continues n'est pas nécessairement continue (par exemple, $f_n(x) = x^n$ sur $[0, 1]$). Mais une limite ponctuelle de fonctions mesurables est *toujours* mesurable. C'est un avantage majeur de la mesurabilité sur la continuité.

5.4 Fonctions simples (étagées)

Définition 5.6 (Fonction simple). Une fonction $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *simple* (ou *étagée*) si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Elle s'écrit :

$$\varphi = \sum_{k=1}^m c_k \mathbf{1}_{A_k},$$

où $c_1, \dots, c_m$ sont les valeurs distinctes prises par φ et $A_k = \varphi^{-1}(\{c_k\})$ sont les préimages correspondantes. φ est mesurable si et seulement si chaque $A_k \in \mathcal{A}$.

Théorème 5.7 (Approximation par fonctions simples). Soit $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable. Il existe une suite $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ de fonctions simples mesurables telle que :

1. $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots$;
2. $\varphi_n(x) \uparrow f(x)$ pour tout $x \in X$;
3. si f est bornée, la convergence est uniforme.

Plus généralement, toute fonction mesurable $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est limite ponctuelle d'une suite de fonctions simples mesurables.

Démonstration. Pour $n \geq 1$ et $x \in X$, posons :

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} k \cdot 2^{-n} & \text{si } k \cdot 2^{-n} \leq f(x) < (k+1) \cdot 2^{-n}, \quad k = 0, 1, \dots, n \cdot 2^n - 1, \\ n & \text{si } f(x) \geq n. \end{cases}$$

Cette fonction est simple (prenant au plus $n \cdot 2^n + 1$ valeurs) et mesurable (chaque préimage est un ensemble mesurable de la forme $\{k \cdot 2^{-n} \leq f < (k+1) \cdot 2^{-n}\}$).

Monotonie : pour tout x , $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ car le découpage au rang $n+1$ est un raffinement de celui au rang n .

Convergence : si $f(x) < \infty$, pour $n > f(x)$, on a $0 \leq f(x) - \varphi_n(x) < 2^{-n} \rightarrow 0$. Si $f(x) = +\infty$, $\varphi_n(x) = n \rightarrow +\infty$.

Convergence uniforme si f bornée : si $f \leq M$, pour $n > M$, $\sup_x |f(x) - \varphi_n(x)| \leq 2^{-n}$. Pour f générale, on écrit $f = f^+ - f^-$ et on approche f^+ et f^- séparément. $\square$

Construction de l'approximation

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbf{1}_{\{k/2^n \leq f < (k+1)/2^n\}} + n \mathbf{1}_{\{f \geq n\}}.$$

5.5 Fonctions mesurables et fonctions boréliennes

Proposition 5.8. Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est borélienne, alors $g \circ f$ est mesurable.

Démonstration. Pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$. Comme g est borélienne, $g^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Comme f est $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable, $f^{-1}(g^{-1}(B)) \in \mathcal{A}$. $\square$

Corollaire 5.9. Si f est mesurable, alors e^f , $\sin(f)$, f^p ($p > 0$), $\log(|f|)$ (là où $f \neq 0$) sont mesurables.

5.6 Convergence presque partout et en mesure

Définition 5.10 (Convergence presque partout). On dit que $f_n \rightarrow f$ μ -presque partout (μ -p.p.) si

$$\mu(\{x \in X : f_n(x) \not\rightarrow f(x)\}) = 0.$$

Définition 5.11 (Convergence en mesure). On dit que $f_n \rightarrow f$ en mesure si pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Théorème 5.12. Si $\mu(X) < \infty$ et $f_n \rightarrow f$ p.p., alors $f_n \rightarrow f$ en mesure.

Démonstration. Posons $A_n(\varepsilon) = \{x : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}$ et $B_N(\varepsilon) = \bigcup_{n \geq N} A_n(\varepsilon)$. Alors $B_N(\varepsilon) \downarrow \{x : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon \text{ pour une infinité de } n\} \subset \{f_n \not\rightarrow f\}$.

Par hypothèse, $\mu(\{f_n \not\rightarrow f\}) = 0$, donc $\mu(B_N(\varepsilon)) \rightarrow 0$. Comme $A_N(\varepsilon) \subset B_N(\varepsilon)$, $\mu(A_N(\varepsilon)) \rightarrow 0$. $\square$

Théorème 5.13 (Réciproque partielle). Si $f_n \rightarrow f$ en mesure, il existe une sous-suite (f_{n_k}) telle que $f_{n_k} \rightarrow f$ p.p.

Démonstration. Pour chaque k , choisir n_k tel que $\mu(\{|f_{n_k} - f| > 2^{-k}\}) < 2^{-k}$. Par le lemme de Borel–Cantelli (lemme 2.5), $\mu(\limsup_k \{|f_{n_k} - f| > 2^{-k}\}) = 0$. Hors de cet ensemble, $|f_{n_k} - f| \leq 2^{-k}$ pour k assez grand, donc $f_{n_k} \rightarrow f$. $\square$

Théorème 5.14 (Egorov). Soit $\mu(X) < \infty$ et $f_n \rightarrow f$ μ -p.p. Pour tout $\delta > 0$, il existe $A \in \mathcal{A}$ avec $\mu(A^c) < \delta$ et $f_n \rightarrow f$ uniformément sur A .

Démonstration. Pour $m, n \in \mathbb{N}^*$, posons $E_{m,n} = \bigcup_{k \geq n} \{|f_k - f| \geq 1/m\}$. Pour m fixé, $E_{m,n} \downarrow E_m$ où $E_m \subset \{f_n \not\rightarrow f\}$, donc $\mu(E_m) = 0$. Ainsi $\mu(E_{m,n}) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

Choisissons n_m tel que $\mu(E_{m,n_m}) < \delta/2^m$. Posons $A = X \setminus \bigcup_m E_{m,n_m}$. Alors $\mu(A^c) \leq \sum_m \delta/2^m = \delta$. Sur A , pour tout m , et tout $k \geq n_m$, $|f_k - f| < 1/m$, ce qui est la convergence uniforme. $\square$

5.7 Théorème de Lusin

Théorème 5.15 (Lusin). Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Lebesgue-mesurable et $\varepsilon > 0$. Il existe un fermé $F \subset \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda^n(F^c) < \varepsilon$ et $f|_F$ est continue.

Interprétation de Lusin

« Toute fonction mesurable est presque continue. » Plus précisément, on peut rendre une fonction mesurable continue en retirant un ensemble de mesure arbitrairement petite.

5.8 Exercices

Exercice 5.1. Montrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est monotone, alors f est borélienne.

Exercice 5.2. Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable et $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f = g$ μ -p.p. Montrer que g n'est pas nécessairement mesurable (donner un contre-exemple). En revanche, montrer que si μ est complète, alors g est mesurable.

Exercice 5.3. Montrer que la convergence en mesure est métrisable lorsque $\mu(X) < \infty$ par la distance $d(f, g) = \int_X \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu$.

Exercice 5.4. Construire une suite (f_n) sur $([0, 1], \lambda)$ qui converge en mesure vers 0 mais ne converge en aucun point. (*Fonctions typographes.*)

Exercice 5.5. Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives. Montrer que $\{x : \sum_n f_n(x) < \infty\}$ est un ensemble mesurable.

Chapitre 6

Intégrale de Lebesgue

Nous voici au cœur de l'édifice : l'*intégrale de Lebesgue*. Tandis que Riemann découpait l'axe des x en petits intervalles et sommait les aires des rectangles, Lebesgue a eu l'idée géniale de découper l'axe des y : regrouper les points où la fonction prend des valeurs proches, mesurer ces ensembles de niveaux, et sommer. Cette approche, présentée dans sa thèse de 1902, produit une intégrale qui coïncide avec celle de Riemann lorsque cette dernière existe, mais qui s'applique à une classe de fonctions incomparablement plus vaste — et surtout, qui possède des théorèmes de convergence (Fatou, convergence dominée, convergence monotone) d'une puissance sans équivalent.

6.1 Intégrale des fonctions simples

Définition 6.1 (Intégrale d'une fonction simple positive). Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\varphi = \sum_{k=1}^m c_k \mathbf{1}_{A_k}$ une fonction simple mesurable positive ($c_k \geq 0$). On définit :

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{k=1}^m c_k \mu(A_k),$$

avec la convention $0 \cdot (+\infty) = 0$.

Proposition 6.2 (Propriétés de l'intégrale des fonctions simples). Soient φ, ψ deux fonctions simples mesurables positives et $\alpha, \beta \geq 0$. Alors :

1. (Linéarité) $\int (\alpha\varphi + \beta\psi) d\mu = \alpha \int \varphi d\mu + \beta \int \psi d\mu$.
2. (Monotonie) Si $\varphi \leq \psi$, alors $\int \varphi d\mu \leq \int \psi d\mu$.
3. Si $\varphi = 0$ μ -p.p., alors $\int \varphi d\mu = 0$.
4. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\int_A \varphi d\mu := \int_X \varphi \cdot \mathbf{1}_A d\mu$.

Démonstration. (1) Considérons la partition commune engendrée par les niveaux de φ et ψ . Si $\varphi = \sum_i a_i \mathbf{1}_{B_i}$ et $\psi = \sum_j b_j \mathbf{1}_{C_j}$ avec $\{B_i\}$ et $\{C_j\}$ des partitions, alors les $B_i \cap C_j$ forment une partition plus fine et

$$\alpha\varphi + \beta\psi = \sum_{i,j} (\alpha a_i + \beta b_j) \mathbf{1}_{B_i \cap C_j}.$$

L'égalité suit par calcul direct.

(2) On écrit $\psi - \varphi \geq 0$ et on utilise la linéarité. □

6.2 Intégrale des fonctions mesurables positives

Définition 6.3 (Intégrale d'une fonction positive). Soit $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ mesurable. On définit :

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi d\mu : \varphi \text{ simple mesurable, } 0 \leq \varphi \leq f \right\}.$$

Proposition 6.4 (Propriétés fondamentales). Soient $f, g : X \rightarrow [0, +\infty]$ mesurables.

1. (Monotonie) Si $f \leq g$, alors $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.
2. (Homogénéité) Pour $c \geq 0$, $\int cf d\mu = c \int f d\mu$.
3. $\int f d\mu = 0$ si et seulement si $f = 0$ μ -p.p.
4. Si $\mu(A) = 0$, alors $\int_A f d\mu = 0$.

Démonstration. (3) Si $f = 0$ p.p., toute fonction simple $0 \leq \varphi \leq f$ vérifie $\varphi = 0$ p.p., donc $\int \varphi d\mu = 0$.

Réciproquement, si $\int f d\mu = 0$, posons $A_n = \{f > 1/n\}$. Alors $\frac{1}{n}\mathbf{1}_{A_n} \leq f$, donc $\frac{1}{n}\mu(A_n) \leq \int f d\mu = 0$, d'où $\mu(A_n) = 0$ pour tout n . Comme $\{f > 0\} = \bigcup_n A_n$, on a $\mu(\{f > 0\}) = 0$. $\square$

Théorème 6.5 (Tchebyshev / Inégalité de Markov). Soit $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ mesurable. Pour tout $a > 0$:

$$\mu(\{f \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \int_X f d\mu.$$

Démonstration. $a \cdot \mathbf{1}_{\{f \geq a\}} \leq f$, donc $a \cdot \mu(\{f \geq a\}) = \int a \cdot \mathbf{1}_{\{f \geq a\}} d\mu \leq \int f d\mu$. $\square$

6.3 Additivité de l'intégrale (fonctions positives)

Théorème 6.6. Soient $f, g : X \rightarrow [0, +\infty]$ mesurables. Alors :

$$\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

Ce résultat est une conséquence du théorème de convergence monotone (chapitre 7). On peut aussi le démontrer directement par approximation avec des fonctions simples.

6.4 Intégrale des fonctions intégrables

Définition 6.7 (Fonction intégrable). Une fonction mesurable $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est dite *intégrable* (ou μ -intégrable, ou *sommable*) si :

$$\int_X |f| d\mu < \infty.$$

Dans ce cas, on définit :

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu,$$

où $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = \max(-f, 0)$. On note $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ (ou $L^1(\mu)$) l'espace des fonctions intégrables.

La forme $\infty - \infty$ est interdite

La condition d'intégrabilité $\int |f| d\mu < \infty$ garantit que les deux intégrales $\int f^+ d\mu$ et $\int f^- d\mu$ sont finies, évitant ainsi la forme indéterminée $\infty - \infty$.

Théorème 6.8 (Propriétés de l'intégrale). Soient $f, g \in L^1(\mu)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. (Linéarité) $\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu$.
2. (Inégalité triangulaire) $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$.
3. (Monotonie) Si $f \leq g$ p.p., alors $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.
4. Si $f = g$ p.p., alors $\int f d\mu = \int g d\mu$.
5. Si $f \geq 0$ p.p. et $\int f d\mu = 0$, alors $f = 0$ p.p.

Démonstration. (2) On a $-|f| \leq f \leq |f|$, donc par monotonie $-\int |f| d\mu \leq \int f d\mu \leq \int |f| d\mu$. $\square$

6.5 Comparaison avec l'intégrale de Riemann

Théorème 6.9. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée.

1. Si f est Riemann-intégrable, alors f est Lebesgue-mesurable et les deux intégrales coïncident :

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f d\lambda.$$

2. f est Riemann-intégrable si et seulement si l'ensemble de ses points de discontinuité est de mesure de Lebesgue nulle (théorème de Lebesgue sur l'intégrabilité au sens de Riemann).

Idée de la preuve. (1) Les sommes de Darboux inférieures et supérieures sont des intégrales de fonctions simples par rapport à λ . En passant à la limite sur les partitions, on obtient l'égalité.

(2) Soit D l'ensemble des discontinuités de f . On montre que les sommes de Darboux supérieures et inférieures convergent vers la même valeur si et seulement si $\lambda(D) = 0$. $\square$

Intégrale de Lebesgue — Résumé

Pour $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ mesurable :

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \sum_{k=1}^m c_k \mu(A_k) : 0 \leq \sum_k c_k \mathbf{1}_{A_k} \leq f \right\}.$$

Pour f générale intégrable :

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

6.6 La mesure ν_f associée à une fonction intégrable

Proposition 6.10. Si $f \in L^1(\mu)$, $f \geq 0$, la fonction d'ensemble $\nu_f(A) = \int_A f d\mu$ est une mesure finie sur $(X, \mathcal{A})$, absolument continue par rapport à μ .

Proposition 6.11 (Continuité absolue de l'intégrale). Soit $f \in L^1(\mu)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\mu(A) < \delta \implies \int_A |f| d\mu < \varepsilon.$$

Démonstration. Posons $f_n = \min(|f|, n)$. Alors $f_n \uparrow |f|$ et par convergence monotone, $\int f_n d\mu \uparrow \int |f| d\mu < \infty$. Fixons n tel que $\int (|f| - f_n) d\mu < \varepsilon/2$. Alors pour $\mu(A) < \delta$ avec $\delta = \varepsilon/(2n)$:

$$\int_A |f| d\mu \leq \int_A f_n d\mu + \int_A (|f| - f_n) d\mu \leq n \cdot \mu(A) + \varepsilon/2 < \varepsilon. \quad \square$$

6.7 Exercices

Exercice 6.1. Calculer $\int_{[0,1]} \mathbf{1}_{\mathbb{Q}} d\lambda$ et $\int_{[0,1]} \mathbf{1}_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} d\lambda$.

Exercice 6.2. Montrer que si $f \in L^1(\mu)$, alors $\{f \neq 0\}$ est σ -fini (pour μ).

Exercice 6.3. Soit $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mesurable. Montrer que

$$\int_0^\infty f(x) dx = \int_0^\infty \lambda(\{f > t\}) dt.$$

(Formule de Cavalieri / formule de la couche.)

Exercice 6.4. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}, \lambda)$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \sin(nx) dx = 0$ (lemme de Riemann-Lebesgue).

Exercice 6.5. Soit $f \geq 0$ mesurable sur $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Montrer que $\nu(A) = \int_A f d\mu$ définit une mesure sur $(X, \mathcal{A})$ et que pour toute $g \geq 0$ mesurable : $\int_X g d\nu = \int_X gf d\mu$.

Exercice 6.6. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-intégrable sur tout $[a, b]$. Montrer que f est Lebesgue-mesurable. Est-elle nécessairement dans $L^1(\mathbb{R}, \lambda)$?

Chapitre 7

Théorèmes de Convergence

7.1 Introduction

Voici la question que tout analyste finit par se poser : quand peut-on échanger une limite et une intégrale ? L'intégrale de Riemann offre une réponse spartiate : sous convergence uniforme, et c'est tout. Mais dans la pratique — séries de Fourier, théorie des probabilités, physique statistique — la convergence uniforme est un luxe rare. C'est précisément ici que l'intégrale de Lebesgue révèle toute sa puissance. Entre 1902 et 1910, Lebesgue, puis Beppo Levi et Pierre Fatou, établissent trois théorèmes de convergence qui forment le cœur battant de l'intégration moderne. Le théorème de convergence monotone de Beppo Levi (1906) traite les suites croissantes ; le lemme de Fatou (1906) fournit une inégalité universelle ; et le théorème de convergence dominée de Lebesgue couronne l'édifice en autorisant l'échange limite-intégrale dès qu'une fonction intégrable « domine » la suite. Ces trois résultats sont, sans exagération, les outils les plus utilisés de toute l'analyse moderne.

7.2 Théorème de convergence monotone (Beppo Levi)

Théorème 7.1 (Convergence monotone). *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives : $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$. Soit $f = \lim_n f_n = \sup_n f_n$. Alors :*

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n \, d\mu.$$

Démonstration. Posons $I = \lim_n \int f_n \, d\mu$ (la limite existe dans $[0, +\infty]$ car la suite $(\int f_n \, d\mu)$ est croissante par monotonie de l'intégrale).

Inégalité $\int f \, d\mu \geq I$: comme $f_n \leq f$ pour tout n , $\int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu$, donc $I \leq \int f \, d\mu$.

Inégalité $\int f \, d\mu \leq I$: soit φ une fonction simple mesurable avec $0 \leq \varphi \leq f$ et $\alpha \in (0, 1)$. Posons $E_n = \{x : f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)\}$. Alors $E_n \uparrow X$ (car pour tout x , $f_n(x) \uparrow f(x) \geq \alpha\varphi(x) > 0$ éventuellement). On a :

$$\int f_n \, d\mu \geq \int_{E_n} f_n \, d\mu \geq \alpha \int_{E_n} \varphi \, d\mu.$$

En faisant $n \rightarrow \infty$, par continuité monotone de la mesure $A \mapsto \int_A \varphi \, d\mu$:

$$I \geq \alpha \int_X \varphi \, d\mu.$$

En faisant $\alpha \rightarrow 1^- : I \geq \int_X \varphi d\mu$. Prenant le supremum sur toutes les fonctions simples $\varphi \leq f : I \geq \int f d\mu$. $\square$

Convergence monotone

Si $0 \leq f_n \uparrow f$, alors $\int f_n d\mu \uparrow \int f d\mu$.

Corollaire 7.2 (Séries de fonctions positives). *Soit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives. Alors :*

$$\int_X \sum_{n=0}^{\infty} g_n d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_X g_n d\mu.$$

Démonstration. Appliquer le théorème de convergence monotone à $f_N = \sum_{n=0}^N g_n$. $\square$

Corollaire 7.3 (Additivité de l'intégrale). *Pour $f, g : X \rightarrow [0, +\infty]$ mesurables : $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$.*

Démonstration. Soit (φ_n) et (ψ_n) des suites croissantes de fonctions simples positives avec $\varphi_n \uparrow f$ et $\psi_n \uparrow g$. Alors $\varphi_n + \psi_n \uparrow f + g$ et $\int (\varphi_n + \psi_n) d\mu = \int \varphi_n d\mu + \int \psi_n d\mu$. Par le théorème de convergence monotone appliqué aux deux membres. $\square$

7.3 Lemme de Fatou

Théorème 7.4 (Lemme de Fatou). *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives. Alors :*

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

Démonstration. Posons $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$. Alors g_n est mesurable positive, $g_n \leq f_n$ et $g_n \uparrow \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$. Par le théorème de convergence monotone :

$$\int \liminf_n f_n d\mu = \lim_n \int g_n d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu,$$

la dernière inégalité venant de $\int g_n d\mu \leq \int f_n d\mu$. $\square$

L'inégalité peut être stricte

Prendre $f_n = n \cdot \mathbf{1}_{(0, 1/n)}$ sur $(\mathbb{R}, \lambda)$. Alors $f_n \rightarrow 0$ p.p. mais $\int f_n d\lambda = 1$ pour tout n . Donc $0 = \int \liminf f_n d\lambda < \liminf \int f_n d\lambda = 1$.

Corollaire 7.5 (Lemme de Fatou inverse). *Si (f_n) est une suite de fonctions mesurables positives et s'il existe $g \in L^1(\mu)$ telle que $f_n \leq g$ p.p. pour tout n , alors :*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu.$$

Démonstration. Appliquer le lemme de Fatou à la suite $g - f_n \geq 0$. $\square$

7.4 Théorème de convergence dominée (Lebesgue)

Théorème 7.6 (Convergence dominée). *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables $X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ telle que :*

- (i) $f_n \rightarrow f$ μ -p.p. (convergence ponctuelle presque partout) ;
- (ii) il existe $g \in L^1(\mu)$, $g \geq 0$, telle que $|f_n| \leq g$ μ -p.p. pour tout n (domination).

Alors $f \in L^1(\mu)$, chaque $f_n \in L^1(\mu)$, et :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

De plus, $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$.

Démonstration. Comme $|f_n| \leq g$ p.p. et $f_n \rightarrow f$ p.p., on a $|f| \leq g$ p.p., donc $f \in L^1(\mu)$.

Considérons les fonctions $g + f_n \geq 0$ et $g - f_n \geq 0$. Par le lemme de Fatou :

$$\begin{aligned} \int (g + f) d\mu &\leq \liminf_n \int (g + f_n) d\mu = \int g d\mu + \liminf_n \int f_n d\mu, \\ \int (g - f) d\mu &\leq \liminf_n \int (g - f_n) d\mu = \int g d\mu - \limsup_n \int f_n d\mu. \end{aligned}$$

Comme $\int g d\mu < \infty$, on en déduit :

$$\int f d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu \leq \limsup_n \int f_n d\mu \leq \int f d\mu.$$

Pour la dernière assertion, appliquer la convergence dominée à $|f_n - f| \leq 2g$ et $|f_n - f| \rightarrow 0$ p.p. □

Théorème de convergence dominée

$$f_n \rightarrow f \text{ p.p., } |f_n| \leq g \in L^1 \implies \int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu.$$

7.5 Applications

Corollaire 7.7 (Continuité sous le signe intégral). *Soit $f : X \times I \rightarrow \mathbb{R}$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle. Supposons :*

1. pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est mesurable ;
2. pour μ -p.p. x , $t \mapsto f(x, t)$ est continue en t_0 ;
3. il existe $g \in L^1(\mu)$ telle que $|f(x, t)| \leq g(x)$ pour tout $t \in I$ et μ -p.p. x .

Alors $F(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x)$ est continue en t_0 .

Démonstration. Si $t_n \rightarrow t_0$, alors $f(x, t_n) \rightarrow f(x, t_0)$ p.p. avec $|f(x, t_n)| \leq g(x)$. Par convergence dominée, $F(t_n) \rightarrow F(t_0)$. □

Corollaire 7.8 (Dérivation sous le signe intégral). Soit $f : X \times I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle ouvert. Supposons :

1. pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est intégrable ;
2. pour μ -p.p. x , $t \mapsto f(x, t)$ est dérivable sur I ;
3. il existe $g \in L^1(\mu)$ telle que $|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)| \leq g(x)$ pour tout $t \in I$ et μ -p.p. x .

Alors $F(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x)$ est dérivable sur I et :

$$F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x).$$

Démonstration. Pour $h \neq 0$, $\frac{F(t+h)-F(t)}{h} = \int \frac{f(x, t+h)-f(x, t)}{h} d\mu(x)$. Par le théorème des accroissements finis, $\left| \frac{f(x, t+h)-f(x, t)}{h} \right| \leq g(x)$. En faisant $h \rightarrow 0$, la convergence dominée donne le résultat. $\square$

7.6 Convergence dans L^1

Théorème 7.9 (Caractérisation de la convergence L^1). Soit $f_n, f \in L^1(\mu)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\int |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$ (convergence L^1).
2. $f_n \rightarrow f$ en mesure et la famille (f_n) est uniformément intégrable.

Définition 7.10 (Intégrabilité uniforme). Une famille $(f_i)_{i \in I}$ de fonctions intégrables est uniformément intégrable si :

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{i \in I} \int_{\{|f_i| > M\}} |f_i| d\mu = 0.$$

Théorème 7.11 (Vitali). Soit $\mu(X) < \infty$. Si (f_n) est uniformément intégrable et $f_n \rightarrow f$ en mesure, alors $f \in L^1(\mu)$ et $\int |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$.

7.7 Exercices

Exercice 7.1. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{n \sin(x/n)}{x(1+x^2)} dx$ en justifiant l'échange limite-intégrale.

Exercice 7.2. Montrer que $F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2} dx$ est de classe C^∞ sur $(0, \infty)$ et calculer $F'(\alpha)$.

Exercice 7.3. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $F(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x) dx$ est continue sur $\mathbb{R}$ (c'est la transformée de Fourier de f).

Exercice 7.4. Donner un exemple de suite (f_n) dans $L^1([0, 1], \lambda)$ telle que $f_n \rightarrow 0$ p.p. mais $\int f_n d\lambda \not\rightarrow 0$. Pourquoi le théorème de convergence dominée ne s'applique-t-il pas ?

Exercice 7.5. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (1 + x/n)^n e^{-2x} dx$.

Exercice 7.6. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)| dx = 0$ (continuité de la translation dans L^1).

Chapitre 8

Espaces L^p

Les espaces L^p sont les espaces de Banach les plus importants de l'analyse. Nés de l'intégrale de Lebesgue, ils fournissent le cadre naturel pour l'analyse de Fourier, les équations aux dérivées partielles, les probabilités et l'apprentissage automatique. Frigyes Riesz, dans les années 1910, a été le premier à étudier systématiquement ces espaces, établissant avec Ernst Fischer le célèbre théorème de complétude de L^2 . Les inégalités de Hölder et de Minkowski structurent la théorie ; la dualité $(L^p)^* = L^q$ (pour $1/p + 1/q = 1$) la couronne. Quant à l'espace L^2 , doté de son produit scalaire, il est le seul à être un espace de Hilbert, et c'est sur lui que repose toute la théorie spectrale.

8.1 Définitions

Définition 8.1 (Espace L^p). Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $1 \leq p < \infty$. L'espace $\mathcal{L}^p(\mu)$ est l'ensemble des fonctions mesurables $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) telles que :

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty.$$

La norme L^p (ou *semi-norme* sur $\mathcal{L}^p$) est :

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

L'espace $L^p(\mu) = \mathcal{L}^p(\mu) / \sim$ est le quotient par la relation d'équivalence $f \sim g \iff f = g$ μ -p.p.

Définition 8.2 (Espace L^∞). L'espace $L^\infty(\mu)$ est l'ensemble des classes de fonctions mesurables essentiellement bornées, muni de la norme :

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geq 0 : |f| \leq M \text{ } \mu\text{-p.p.}\} = \text{ess sup } |f|.$$

Remarque 8.3. On travaille avec les classes d'équivalence (modulo égalité p.p.) pour que $\|\cdot\|_p$ soit une vraie norme (et non une semi-norme).

8.2 Inégalité de Hölder

Définition 8.4 (Exposants conjugués). Deux réels $p, q \in [1, +\infty]$ sont *conjugués* (ou *duaux*) si :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Par convention, $q = \infty$ si $p = 1$ et $q = 1$ si $p = \infty$.

Lemme 8.5 (Inégalité de Young). *Pour $a, b \geq 0$ et $p, q > 1$ conjugués :*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Démonstration. La fonction $t \mapsto \log t$ est concave, donc pour $\alpha = 1/p$ et $\beta = 1/q$:

$$\log(\alpha a^p + \beta b^q) \geq \alpha \log(a^p) + \beta \log(b^q) = \log(a) + \log(b) = \log(ab).$$

En prenant l'exponentielle : $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. □

Théorème 8.6 (Inégalité de Hölder). *Soient $p, q \in [1, +\infty]$ conjugués. Si $f \in L^p(\mu)$ et $g \in L^q(\mu)$, alors $fg \in L^1(\mu)$ et :*

$$\|fg\|_1 = \int_X |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Démonstration. Le cas $p = 1, q = \infty$ est immédiat : $|fg| \leq |f| \cdot \|g\|_\infty$ p.p.

Pour $1 < p < \infty$, on peut supposer $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ (sinon normaliser). Par l'inégalité de Young appliquée à $a = |f(x)|$ et $b = |g(x)|$:

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q}.$$

En intégrant :

$$\int |fg| \, d\mu \leq \frac{\|f\|_p^p}{p} + \frac{\|g\|_q^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p \cdot \|g\|_q. \quad \square$$

Corollaire 8.7 (Inégalité de Cauchy–Schwarz). *Pour $p = q = 2$: $\int |fg| \, d\mu \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$.*

8.3 Inégalité de Minkowski

Théorème 8.8 (Inégalité de Minkowski). *Soit $1 \leq p \leq \infty$. Pour $f, g \in L^p(\mu)$:*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Autrement dit, $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $L^p(\mu)$.

Démonstration. Le cas $p = 1$ est l'inégalité triangulaire. Le cas $p = \infty$ est évident.

Pour $1 < p < \infty$:

$$\begin{aligned} \int |f + g|^p \, d\mu &\leq \int |f + g|^{p-1} (|f| + |g|) \, d\mu \\ &= \int |f + g|^{p-1} |f| \, d\mu + \int |f + g|^{p-1} |g| \, d\mu. \end{aligned}$$

Appliquons Hölder à chaque terme avec $q = p/(p-1)$:

$$\int |f + g|^{p-1} |f| \, d\mu \leq \left(\int |f + g|^p \, d\mu \right)^{1/q} \|f\|_p.$$

Donc $\|f + g\|_p^p \leq \|f + g\|_p^{p/q} (\|f\|_p + \|g\|_p)$. En divisant par $\|f + g\|_p^{p/q}$ (si non nul) et en notant que $p - p/q = 1$: $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. □

Inégalités fondamentales

$$\text{Hölder : } \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q, \quad \text{Minkowski : } \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

8.4 Complétude : L^p est un espace de Banach

Théorème 8.9 (Riesz–Fischer). *Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, l'espace $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach (espace vectoriel normé complet).*

Démonstration. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^p . Il suffit de montrer qu'elle possède une sous-suite convergente (toute suite de Cauchy ayant une sous-suite convergente converge).

Choisissons n_k tel que $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 2^{-k}$. Posons :

$$g_N = \sum_{k=1}^N |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|, \quad g = \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|.$$

Par Minkowski, $\|g_N\|_p \leq \sum_{k=1}^N 2^{-k} \leq 1$. Par convergence monotone, $\|g\|_p \leq 1$, donc $g < \infty$ p.p. Cela signifie que la série télescopique $f_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$ converge absolument p.p. Soit f sa somme (p.p.). On a $f_{n_k} \rightarrow f$ p.p. et $|f_{n_k} - f| \leq 2g \in L^p$, donc par convergence dominée, $\|f_{n_k} - f\|_p \rightarrow 0$. $\square$

8.5 Relations d'inclusion entre espaces L^p

Proposition 8.10. Si $\mu(X) < \infty$ et $1 \leq p \leq q \leq \infty$, alors $L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$ et :

$$\|f\|_p \leq \mu(X)^{1/p-1/q} \|f\|_q.$$

Démonstration. Appliquer Hölder avec $r = q/p \geq 1$ à $|f|^p$ et 1 : $\int |f|^p d\mu \leq (\int |f|^q d\mu)^{p/q} \mu(X)^{1-p/q}$. $\square$

Pas d'inclusion en général

Si μ n'est pas finie, il n'y a en général pas d'inclusion entre les L^p . Par exemple, sur $(\mathbb{R}, \lambda)$: $f(x) = x^{-1/2} \mathbf{1}_{(0,1)} \in L^1 \setminus L^2$ et $g(x) = (1+x)^{-1} \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$.

8.6 Densité et séparabilité

Théorème 8.11. *Pour $1 \leq p < \infty$:*

1. *Les fonctions simples intégrables sont denses dans $L^p(\mu)$.*
2. *Si $X = \mathbb{R}^n$ et $\mu = \lambda^n$, les fonctions continues à support compact $C_c(\mathbb{R}^n)$ sont denses dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.*
3. *$L^p(\mathbb{R}^n)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$.*

Remarque 8.12. L^∞ n'est en général pas séparable.

8.7 Dualité des espaces L^p

Théorème 8.13 (Dualité L^p – L^q). Soit $1 \leq p < \infty$ et q l'exposant conjugué. Pour toute forme linéaire continue $\ell : L^p(\mu) \rightarrow \mathbb{R}$, il existe un unique $g \in L^q(\mu)$ tel que :

$$\ell(f) = \int_X fg \, d\mu, \quad \forall f \in L^p(\mu).$$

De plus, $\|\ell\| = \|g\|_q$. Autrement dit, $(L^p(\mu))^* \cong L^q(\mu)$ (isométriquement).

Remarque 8.14. Ce théorème suppose que μ est σ -finie. Pour $p = 1$, $(L^1)^* \cong L^\infty$. Pour $p = \infty$, $(L^\infty)^* \supsetneq L^1$ en général.

8.8 L'espace L^2 comme espace de Hilbert

Définition 8.15 (Produit scalaire L^2). L'espace $L^2(\mu)$ est muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_X f \bar{g} \, d\mu.$$

Il est complet pour la norme associée $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$, donc c'est un espace de Hilbert.

Théorème 8.16 (Projection orthogonale). Si V est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\mu)$ et $f \in L^2(\mu)$, il existe un unique $\hat{f} \in V$ tel que :

$$\|f - \hat{f}\|_2 = \inf_{g \in V} \|f - g\|_2.$$

De plus, $f - \hat{f} \perp V$ (i.e. $\langle f - \hat{f}, g \rangle = 0$ pour tout $g \in V$).

8.9 Inégalités complémentaires

Proposition 8.17 (Inégalité de Jensen). Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de probabilité ($\mu(X) = 1$), $f \in L^1(\mu)$ et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Si $\varphi \circ f$ est intégrable, alors :

$$\varphi\left(\int_X f \, d\mu\right) \leq \int_X \varphi \circ f \, d\mu.$$

Proposition 8.18 (Inégalité d'interpolation). Si $f \in L^{p_1} \cap L^{p_2}$ avec $1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty$, alors $f \in L^p$ pour tout $p \in [p_1, p_2]$ et :

$$\|f\|_p \leq \|f\|_{p_1}^\theta \|f\|_{p_2}^{1-\theta}, \quad \text{où } \frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}.$$

8.10 Exercices

Exercice 8.1. Montrer que pour $1 \leq p < q < \infty$, $\ell^p \subset \ell^q$ (où $\ell^p = L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#)$ avec $\#$ la mesure de comptage). C'est l'inverse de l'inclusion pour les espaces à mesure finie.

Exercice 8.2. Montrer que $L^2([0, 1])$ est un espace de Hilbert séparable et que $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ défini par $e_n(x) = e^{2\pi i n x}$ est une base hilbertienne.

Exercice 8.3. Montrer l'inégalité de Minkowski intégrale : si $f \geq 0$ est mesurable sur $X \times Y$ et $1 \leq p < \infty$, alors

$$\left(\int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right)^p d\mu(x) \right)^{1/p} \leq \int_Y \left(\int_X f(x, y)^p d\mu(x) \right)^{1/p} d\nu(y).$$

Exercice 8.4. Soit $(f_n) \subset L^p(\mu)$ avec $\sum_n \|f_n\|_p < \infty$. Montrer que $\sum_n f_n$ converge p.p. et dans L^p .

Exercice 8.5. Montrer que si $f_n \rightarrow f$ dans L^p et $f_n \rightarrow g$ p.p., alors $f = g$ p.p.

Chapitre 9

Mesures Signées et Décomposition de Hahn-Jordan

9.1 Introduction

Jusqu'à présent, les mesures étaient des quantités positives : surface, volume, probabilité. Mais la physique et l'économie regorgent de grandeurs qui changent de signe : une charge électrique peut être positive ou négative, un bilan financier peut être bénéficiaire ou déficitaire, la différence de deux mesures de probabilité n'est plus une mesure positive. Johann Radon et Otton Nikodym, dans les années 1910–1930, ont montré que toute mesure signée se décompose canoniquement en une partie positive et une partie négative (décomposition de Jordan), concentrées sur des ensembles disjoints (décomposition de Hahn). Le théorème de Radon–Nikodym, qui exprime une mesure absolument continue par rapport à une autre comme une intégrale pondérée, couronne cette théorie et fournit la définition rigoureuse de la densité de probabilité.

Pourquoi des mesures signées ?

Imaginez une distribution de charge électrique sur une surface : certaines régions portent une charge positive, d'autres une charge négative. La « mesure de charge » totale d'un ensemble peut être positive, négative ou nulle. C'est exactement ce que modélise une mesure signée. De plus, la différence de deux mesures (positives) finies est toujours une mesure signée.

9.2 Définitions et premiers exemples

Définition 9.1 (Mesure signée). Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Une *mesure signée* sur $(X, \mathcal{A})$ est une application $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [-\infty, +\infty]$ vérifiant :

- (i) $\nu(\emptyset) = 0$;
- (ii) ν ne prend *au plus* qu'une des valeurs $+\infty$ et $-\infty$;
- (iii) (σ -additivité) pour toute suite $(A_n)_{n \geq 1}$ d'éléments mutuellement disjoints de $\mathcal{A}$:

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n),$$

où la série converge absolument si le membre de gauche est fini.

Remarque 9.2. La condition (ii) est essentielle pour éviter les expressions indéterminées de la forme $+\infty - \infty$. Si ν ne prend pas la valeur $-\infty$ (resp. $+\infty$), on dit que ν ne prend pas la valeur $-\infty$ par le bas (resp. par le haut).

Exemple 9.3. 1. Si μ et λ sont deux mesures positives sur $(X, \mathcal{A})$ avec λ finie, alors $\nu = \mu - \lambda$ est une mesure signée.

2. Soit $f \in L^1(\mu)$. L'application $\nu(A) = \int_A f d\mu$ est une mesure signée finie.

3. Toute mesure positive est une mesure signée (cas particulier).

Définition 9.4 (Ensemble positif, négatif, nul). Soit ν une mesure signée sur $(X, \mathcal{A})$.

- Un ensemble $A \in \mathcal{A}$ est dit *positif* pour ν si $\nu(B) \geq 0$ pour tout $B \in \mathcal{A}$ avec $B \subset A$.
- Un ensemble A est dit *négatif* pour ν si $\nu(B) \leq 0$ pour tout $B \in \mathcal{A}$ avec $B \subset A$.
- Un ensemble A est dit *nul* pour ν si $\nu(B) = 0$ pour tout $B \in \mathcal{A}$ avec $B \subset A$.

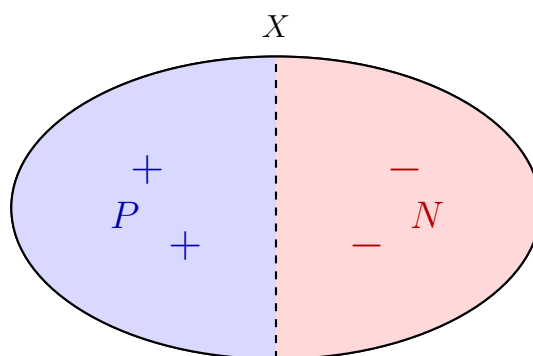
Positif pour $\nu \neq \nu(A) \geq 0$

Un ensemble A est positif pour ν si *tous* ses sous-ensembles mesurables ont une mesure signée positive. Le fait que $\nu(A) \geq 0$ ne suffit pas : il pourrait exister $B \subset A$ avec $\nu(B) < 0$.

9.3 Décomposition de Hahn

Lemme 9.5. Soit ν une mesure signée sur $(X, \mathcal{A})$ et soit $A \in \mathcal{A}$ avec $-\infty < \nu(A) < 0$. Alors il existe un ensemble négatif $B \subset A$ tel que $\nu(B) \leq \nu(A)$.

Démonstration. Si A est déjà négatif, on pose $B = A$. Sinon, il existe $A_1 \subset A$ avec $\nu(A_1) > 0$. Soit n_1 le plus petit entier tel qu'il existe $A_1 \subset A$ mesurable avec $\nu(A_1) \geq 1/n_1$. On itère : dans $A \setminus A_1$, si celui-ci n'est pas négatif, on trouve A_2 avec $\nu(A_2) \geq 1/n_2$, etc. Posons $B = A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Alors $\nu(B) = \nu(A) - \sum_k \nu(A_k) \leq \nu(A) < 0$, et $\sum_k 1/n_k \leq \nu(A \setminus B) - \nu(A) < \infty$, donc $1/n_k \rightarrow 0$. Si $C \subset B$ vérifiait $\nu(C) > 0$, il existerait n avec $\nu(C) \geq 1/n$, contredisant le choix de n_k à l'étape k lorsque $1/n_k < 1/n$. Donc B est négatif. $\square$



Décomposition de Hahn : $X = P \cup N$, $\nu|_P \geq 0$, $\nu|_N \leq 0$

Théorème 9.6 (Décomposition de Hahn). *Soit ν une mesure signée sur $(X, \mathcal{A})$. Il existe une partition $X = P \cup N$ avec $P, N \in \mathcal{A}$, $P \cap N = \emptyset$, telle que P est un ensemble positif et N est un ensemble négatif pour ν .*

De plus, cette décomposition est essentiellement unique : si $X = P' \cup N'$ est une autre décomposition de Hahn, alors $P \Delta P'$ (et $N \Delta N'$) est un ensemble nul pour ν .

Démonstration. Supposons que ν ne prend pas la valeur $+\infty$ (le cas symétrique est analogue). Posons $\lambda = \inf\{\nu(A) : A \in \mathcal{A}\} \in [-\infty, 0]$. Pour chaque $n \geq 1$, il existe $A_n \in \mathcal{A}$ avec $\nu(A_n) < \lambda + 1/n$. Par le lemme 9.5, il existe un ensemble négatif $B_n \subset A_n$ avec $\nu(B_n) \leq \nu(A_n) < \lambda + 1/n$.

Posons $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Comme réunion dénombrable d'ensembles négatifs, N est négatif. De plus, $\nu(N) \leq \nu(B_n) < \lambda + 1/n$ pour tout n , donc $\nu(N) = \lambda > -\infty$ (car ν ne prend pas la valeur $-\infty$ par hypothèse, puisqu'elle ne prend pas $+\infty$, c'est $-\infty$ qui est éventuellement exclue — en fait $\lambda > -\infty$ car $\nu(N)$ est fini ou égal à λ).

Posons $P = X \setminus N$. Si P n'était pas positif, il existerait $A \subset P$ avec $\nu(A) < 0$, d'où un ensemble négatif $B \subset A$ avec $\nu(B) \leq \nu(A) < 0$. Mais alors $N \cup B$ serait négatif avec $\nu(N \cup B) = \nu(N) + \nu(B) < \nu(N)$, contredisant la définition de λ .

Pour l'unicité essentielle : si $X = P' \cup N'$ est une autre décomposition, alors $P \cap N' \subset P$ (positif) et $P \cap N' \subset N'$ (négatif), donc $P \cap N'$ est nul. De même $P' \cap N$ est nul, et $P \Delta P' \subset (P \cap N') \cup (P' \cap N)$. $\square$

9.4 Décomposition de Jordan et variation totale

Définition 9.7 (Décomposition de Jordan). Soit ν une mesure signée sur $(X, \mathcal{A})$ et $X = P \cup N$ une décomposition de Hahn. On définit les *parties positive et négative* de ν par :

$$\nu^+(A) = \nu(A \cap P), \quad \nu^-(A) = -\nu(A \cap N),$$

pour tout $A \in \mathcal{A}$. On a alors $\nu = \nu^+ - \nu^-$.

Théorème 9.8 (Décomposition de Jordan). *Les mesures ν^+ et ν^- sont des mesures positives sur $(X, \mathcal{A})$, au moins l'une des deux est finie, et elles ne dépendent pas du choix de la décomposition de Hahn (elles sont uniquement déterminées par ν).*

De plus, $\nu = \nu^+ - \nu^-$ et $\nu^+ \perp \nu^-$ (les mesures ν^+ et ν^- sont mutuellement singulières).

Démonstration. La positivité de ν^+ et ν^- découle du fait que P est positif et N est négatif. La σ -additivité est immédiate. Comme ν ne prend au plus qu'une valeur infinie, au moins l'une de ν^+ , ν^- est finie. L'indépendance vis-à-vis du choix de la décomposition résulte de l'unicité essentielle. La singularité mutuelle vient de $\nu^+(N) = 0$ et $\nu^-(P) = 0$. $\square$

Définition 9.9 (Variation totale). La *variation totale* de ν est la mesure positive :

$$|\nu| = \nu^+ + \nu^-.$$

La *variation totale* de ν sur X est le nombre $\|\nu\| = |\nu|(X) = \nu^+(X) + \nu^-(X)$.

Proposition 9.10 (Propriétés de la variation totale). Pour toute mesure signée ν et tout $A \in \mathcal{A}$:

1. $|\nu(A)| \leq |\nu|(A)$;
2. $|\nu|(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\nu(A_i)| : A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i, A_i \in \mathcal{A} \right\}$;

3. ν est une mesure signée finie si et seulement si $|\nu|(X) < \infty$.

Démonstration. (1) $|\nu(A)| = |\nu^+(A) - \nu^-(A)| \leq \nu^+(A) + \nu^-(A) = |\nu|(A)$.

(2) Soit $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$. Alors $\sum_i |\nu(A_i)| \leq \sum_i |\nu|(A_i) = |\nu|(A)$, d'où $\sup \leq |\nu|(A)$. Pour l'inégalité inverse, prendre la partition $A = (A \cap P) \sqcup (A \cap N)$ donne $\nu^+(A) + \nu^-(A) = |\nu(A \cap P)| + |\nu(A \cap N)|$.

(3) Immédiat car $\|\nu\| = \nu^+(X) + \nu^-(X)$. $\square$

Résumé : décomposition de Jordan

Pour toute mesure signée ν :

$$\begin{aligned} \nu &= \nu^+ - \nu^-, & |\nu| &= \nu^+ + \nu^-, \\ \nu^+ &= \frac{|\nu| + \nu}{2}, & \nu^- &= \frac{|\nu| - \nu}{2}. \end{aligned}$$

9.5 Singularité mutuelle

Définition 9.11 (Mesures mutuellement singulières). Deux mesures signées μ et ν sur $(X, \mathcal{A})$ sont dites *mutuellement singulières*, noté $\mu \perp \nu$, s'il existe une partition $X = A \cup B$ avec $A, B \in \mathcal{A}$ telle que $|\mu|(B) = 0$ et $|\nu|(A) = 0$.

Exemple 9.12. 1. La mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$ et la mesure de Dirac δ_0 sont mutuellement singulières : $\lambda(\{0\}) = 0$ et $\delta_0(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = 0$.

2. La mesure de Lebesgue et la mesure de Cantor–Vitali sur $[0, 1]$ sont mutuellement singulières.

Proposition 9.13. La relation $\perp$ est symétrique. Si $\mu \perp \nu$ et $\mu \perp \lambda$, alors $\mu \perp (\nu + \lambda)$ (lorsque la somme est définie).

9.6 Espace des mesures signées finies

Proposition 9.14. L'ensemble $\mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ des mesures signées finies sur $(X, \mathcal{A})$ est un espace vectoriel réel, et $\|\nu\| = |\nu|(X)$ est une norme sur cet espace. De plus, $(\mathcal{M}(X, \mathcal{A}), \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

9.7 Exercices

Exercice 9.1. Soit ν une mesure signée finie sur $(X, \mathcal{A})$. Montrer que ν est bornée, c'est-à-dire $\sup_{A \in \mathcal{A}} |\nu(A)| < \infty$.

Exercice 9.2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}, \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue. Montrer que $\nu(A) = \int_A f d\lambda$ définit une mesure signée et calculer ν^+ , ν^- et $|\nu|$ en fonction de f . *Indication* : montrer que $\nu^+(A) = \int_A f^+ d\lambda$ et $\nu^-(A) = \int_A f^- d\lambda$.

Exercice 9.3. Montrer que deux mesures positives μ et ν sont mutuellement singulières si et seulement si $\inf_{A \in \mathcal{A}} [\mu(A) + \nu(A^c)] = 0$.

Exercice 9.4. Soit ν une mesure signée et (A_n) une suite croissante dans $\mathcal{A}$. Montrer que $\nu(\bigcup_n A_n) = \lim_n \nu(A_n)$ (continuité monotone pour les mesures signées).

Exercice 9.5 (Décomposition de Hahn explicite). Soit ν la mesure signée sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie par $\nu(A) = \int_A (x^2 - 1)e^{-x^2} d\lambda(x)$. Déterminer une décomposition de Hahn de $\mathbb{R}$ pour ν et en déduire ν^+, ν^- .

Exercice 9.6. Soit ν une mesure signée finie. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{A \in \mathcal{A} : |\nu(A)| > \varepsilon\}$ est fini. *Indication* : utiliser $|\nu|(X) < \infty$.

Chapitre 10

Théorème de Radon-Nikodym

10.1 Introduction

Quand une mesure ν est-elle une “version pondérée” d’une mesure μ ? C’est-à-dire, quand existe-t-il une fonction f telle que $\nu(A) = \int_A f d\mu$ pour tout ensemble mesurable A ? Johann Radon (1913) et Otton Nikodym (1930) répondent : si et seulement si ν est absolument continue par rapport à μ , ce qui signifie que $\mu(A) = 0$ entraîne $\nu(A) = 0$. La fonction f , appelée *dérivée de Radon-Nikodym*, généralise la notion de densité de probabilité. Ce théorème est l’un des piliers de l’analyse moderne : il fonde la définition rigoureuse de l’espérance conditionnelle en probabilités, la dualité des espaces L^p , et le changement de mesure dans le calcul stochastique (théorème de Girsanov).

Radon-Nikodym : changer de référentiel

Si ν est absolument continue par rapport à μ , cela signifie que ν ne « voit » que ce que μ voit : les ensembles négligeables pour μ le sont aussi pour ν . Le théorème de Radon-Nikodym affirme alors que ν s’obtient en « pesant » la mesure μ par une densité : $d\nu = f d\mu$. C’est la généralisation du fait que toute probabilité sur $\mathbb{R}$ à densité s’écrit $\mathbb{P}(A) = \int_A f(x) dx$.

10.2 Continuité absolue

Définition 10.1 (Continuité absolue). Soient μ une mesure positive et ν une mesure signée sur $(X, \mathcal{A})$. On dit que ν est *absolument continue* par rapport à μ , noté $\nu \ll \mu$, si :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0.$$

Proposition 10.2 (Caractérisation ε - δ). Si μ est une mesure positive et ν est une mesure signée *finie*, alors $\nu \ll \mu$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall A \in \mathcal{A}, \quad \mu(A) < \delta \implies |\nu(A)| < \varepsilon.$$

Démonstration. ($\Leftarrow$) Évident : si $\mu(A) = 0$, alors $\mu(A) < \delta$ pour tout δ , d’où $|\nu(A)| < \varepsilon$ pour tout ε , soit $\nu(A) = 0$.

($\Rightarrow$) Par l’absurde. Supposons que $\nu \ll \mu$ mais que la condition ε - δ échoue. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une suite (A_n) avec $\mu(A_n) < 2^{-n}$ et $|\nu(A_n)| \geq \varepsilon_0$. Posons $B_n = \bigcup_{k \geq n} A_k$. Alors $\mu(B_n) \leq \sum_{k \geq n} 2^{-k} = 2^{1-n}$ et $B = \bigcap_n B_n$ vérifie $\mu(B) = 0$. Par continuité décroissante,

$|\nu|(B) = \lim_n |\nu|(B_n)$. Or $|\nu|(B_n) \geq |\nu(A_n)| \geq \varepsilon_0$ pour tout n , donc $|\nu|(B) \geq \varepsilon_0 > 0$, contredisant $\nu \ll \mu$. $\square$

Exemple 10.3. 1. Si $f \geq 0$ est mesurable et $\nu(A) = \int_A f d\mu$, alors $\nu \ll \mu$.

2. La mesure de Dirac δ_0 n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$: $\lambda(\{0\}) = 0$ mais $\delta_0(\{0\}) = 1$.

3. Si $\nu \ll \mu$ et $\mu \ll \nu$, on dit que μ et ν sont *équivalentes*, noté $\mu \sim \nu$.

10.3 Théorème de Radon-Nikodym

Théorème 10.4 (Radon-Nikodym). *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ -fini et soit ν une mesure signée σ -finie sur $(X, \mathcal{A})$ avec $\nu \ll \mu$. Alors il existe une fonction mesurable $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$, intégrable par rapport à μ (si ν est finie), telle que :*

$$\nu(A) = \int_A f d\mu, \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

De plus, f est unique μ -presque partout. Si ν est une mesure positive, alors $f \geq 0$ μ -p.p.

Preuve (cas μ, ν mesures positives finies). On présente la preuve de Von Neumann.

Posons $\lambda = \mu + \nu$. C'est une mesure positive finie. Pour tout $g \in L^2(\lambda)$, la forme linéaire $\varphi(g) = \int g d\nu$ est continue sur $L^2(\lambda)$ car, par Cauchy-Schwarz :

$$|\varphi(g)| = \left| \int g d\nu \right| \leq \int |g| d\nu \leq \int |g| d\lambda \leq \left(\int g^2 d\lambda \right)^{1/2} \lambda(X)^{1/2}.$$

Par le théorème de représentation de Riesz pour les espaces de Hilbert, il existe $h \in L^2(\lambda)$ tel que :

$$\int g d\nu = \int gh d\lambda, \quad \forall g \in L^2(\lambda).$$

En prenant $g = \mathbb{1}_A$, on obtient $\nu(A) = \int_A h d\lambda$ pour tout $A \in \mathcal{A}$. Comme $\nu(A) \geq 0$ et $\nu(A) \leq \lambda(A)$ pour tout A , on déduit que $0 \leq h \leq 1$ λ -p.p.

On peut écrire : $\nu(A) = \int_A h d\mu + \int_A h d\nu$, soit $\int_A (1-h) d\nu = \int_A h d\mu$. En posant $E_0 = \{h = 1\}$ et en vérifiant que $\mu(E_0) = 0$ (car $0 = \int_{E_0} (1-h) d\nu = \int_{E_0} h d\mu = \mu(E_0)$), on définit $f = h/(1-h)$ sur E_0^c et $f = 0$ sur E_0 . Le théorème de convergence monotone appliqué à la suite $g_n = (1 + h + \dots + h^n)\mathbb{1}_A$ donne :

$$\nu(A) = \int_A f d\mu.$$

L'unicité de f μ -p.p. résulte du fait que si $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$ pour tout A , alors $f = g$ μ -p.p. $\square$

Définition 10.5 (Dérivée de Radon-Nikodym). La fonction f du théorème 10.4 est appelée la *dérivée de Radon-Nikodym* de ν par rapport à μ et est notée :

$$f = \frac{d\nu}{d\mu}.$$

Proposition 10.6 (Propriétés de la dérivée de Radon-Nikodym). Soient μ, ν, λ des mesures σ -finies.

1. **Règle de la chaîne** : si $\nu \ll \mu \ll \lambda$, alors $\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\lambda}$ λ -p.p.
2. **Inverse** : si $\nu \ll \mu$ et $\mu \ll \nu$, alors $\frac{d\mu}{d\nu} = \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)^{-1}$ μ -p.p.
3. **Linéarité** : si $\nu_1, \nu_2 \ll \mu$, alors $\frac{d(\alpha\nu_1 + \beta\nu_2)}{d\mu} = \alpha \frac{d\nu_1}{d\mu} + \beta \frac{d\nu_2}{d\mu}$.

Formules clés de Radon-Nikodym

Si $\nu \ll \mu$ avec $f = \frac{d\nu}{d\mu}$, alors pour toute fonction g mesurable positive ou ν -intégrable :

$$\int g d\nu = \int g \cdot f d\mu = \int g \cdot \frac{d\nu}{d\mu} d\mu.$$

Règle de la chaîne : $\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\lambda}$.

10.4 Théorème de décomposition de Lebesgue

Théorème 10.7 (Décomposition de Lebesgue). Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ -fini et soit ν une mesure signée σ -finie. Alors il existe un unique couple de mesures signées (ν_a, ν_s) tel que :

$$\nu = \nu_a + \nu_s, \quad \nu_a \ll \mu, \quad \nu_s \perp \mu.$$

De plus, $\nu_a(A) = \int_A f d\mu$ pour une certaine f mesurable (la dérivée de Radon-Nikodym de ν_a par rapport à μ).

Esquisse de preuve. Il suffit de traiter le cas où ν est une mesure positive finie et μ est finie. Pour chaque $\lambda > 0$, la mesure signée $\nu - \lambda\mu$ admet une décomposition de Hahn : $X = P_\lambda \cup N_\lambda$ avec P_λ positif et N_λ négatif pour $\nu - \lambda\mu$. On peut choisir P_λ croissant en λ (quitte à remplacer P_λ par $\bigcup_{\lambda' \leq \lambda} P_{\lambda'}$). Posons $\lambda_0 = \sup\{\lambda > 0 : \nu(N_\lambda) > 0\}$ et considérons une suite $\lambda_n \nearrow \lambda_0$. L'ensemble $N = \bigcap_n N_{\lambda_n}$ satisfait $\mu(N) = 0$: en effet, pour tout n , $\nu(A) \leq \lambda_n \mu(A)$ pour tout $A \subseteq P_{\lambda_n}^c$, et en passant à la limite on obtient $\mu(N) = 0$. On pose $\nu_s(\cdot) = \nu(\cdot \cap N)$ et $\nu_a(\cdot) = \nu(\cdot \cap N^c)$. Comme $\mu(N) = 0$, on a $\nu_s \perp \mu$. Pour montrer que $\nu_a \ll \mu$: si $\mu(A) = 0$ avec $A \subseteq N^c$, alors $A \subseteq P_{\lambda_n}$ pour n assez grand, et $\nu(A) \leq \lambda_n \mu(A) = 0$. Le théorème de Radon-Nikodym appliqué à ν_a fournit la densité f . Voir RUDIN, *Real and Complex Analysis*, Theorem 6.10. $\square$

10.5 Applications en probabilités

Exemple 10.8 (Densité d'une variable aléatoire). Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dont la loi $\mathbb{P}_X$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ . Alors il existe $f_X \geq 0$ avec $\int f_X d\lambda = 1$ telle que :

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(x) dx, \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

La fonction $f_X = \frac{d\mathbb{P}_X}{d\lambda}$ est la *densité* de X .

Exemple 10.9 (Espérance conditionnelle). Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ une sous-tribu, et $Y \in L^1(\mathbb{P})$. La mesure signée $\nu(A) = \int_A Y d\mathbb{P}$, $A \in \mathcal{G}$, est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}|_{\mathcal{G}}$. Par Radon-Nikodym, il existe une unique (p.s.) fonction $\mathcal{G}$ -mesurable $Z \in L^1(\mathbb{P})$ telle que :

$$\int_A Z d\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P}, \quad \forall A \in \mathcal{G}.$$

Cette fonction Z est l'*espérance conditionnelle* $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$.

Exemple 10.10 (Rapport de vraisemblance). Soient $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$ avec $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. Le *rapport de vraisemblance* est $L = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$, et pour toute variable Y $\mathbb{Q}$ -intégrable :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y \cdot L].$$

C'est la base du changement de mesure en finance (théorème de Girsanov) et en statistique (test de Neyman–Pearson).

10.6 Exercices

Exercice 10.1. Soit μ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ et $\nu(A) = \int_A 2x dx$. Vérifier que $\nu \ll \mu$, identifier $\frac{d\nu}{d\mu}$, et calculer $\int_{[0,1]} x^2 d\nu$.

Exercice 10.2. Montrer que si $\nu \ll \mu$ et $\nu \perp \mu$, alors $\nu = 0$.

Exercice 10.3. Soient μ et ν deux mesures positives σ -finies avec $\nu \ll \mu$. Montrer que $|\nu|(A) = \int_A \left| \frac{d\nu}{d\mu} \right| d\mu$.

Exercice 10.4 (Règle de la chaîne). Soient λ la mesure de Lebesgue, $\mu(A) = \int_A e^{-x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) d\lambda(x)$, et $\nu(A) = \int_A x e^{-x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) d\lambda(x)$. Calculer $\frac{d\nu}{d\mu}$ et $\frac{d\mu}{d\lambda}$. Vérifier la règle de la chaîne.

Exercice 10.5. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire avec $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. Soit $\mathcal{G} = \sigma(Y)$ où Y est une variable aléatoire discrète prenant les valeurs $y_1, y_2, \dots$. Montrer que :

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega) = \sum_k \frac{\mathbb{E}[X \mathbb{1}_{\{Y=y_k\}}]}{\mathbb{P}(Y=y_k)} \mathbb{1}_{\{Y=y_k\}}(\omega).$$

Exercice 10.6. Montrer l'unicité de la décomposition de Lebesgue : si $\nu = \nu_a + \nu_s$ et $\nu = \nu'_a + \nu'_s$ avec $\nu_a, \nu'_a \ll \mu$ et $\nu_s, \nu'_s \perp \mu$, alors $\nu_a = \nu'_a$ et $\nu_s = \nu'_s$.

Chapitre 11

Mesures Produits et Théorème de Fubini-Tonelli

11.1 Introduction

Le calcul d'intégrales multiples est l'une des opérations les plus fréquentes en analyse et en probabilités. Les théorèmes de Fubini et de Tonelli fournissent les conditions sous lesquelles une intégrale double peut être calculée comme une intégrale itérée, et dans n'importe quel ordre.

Pourquoi Fubini-Tonelli ?

Calculer $\iint f(x, y) d(x, y)$ directement sur un produit est souvent difficile. Fubini et Tonelli permettent de ramener ce calcul à des intégrales successives : d'abord intégrer en y pour chaque x fixé (ou vice versa). Tonelli traite le cas des fonctions positives (sans hypothèse d'intégrabilité), tandis que Fubini s'applique aux fonctions intégrables.

11.2 σ -algèbre produit

Définition 11.1 (σ -algèbre produit). Soient $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. La σ -algèbre produit $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ est la σ -algèbre sur $X \times Y$ engendrée par les *rectangles mesurables* :

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}).$$

Définition 11.2 (Sections). Pour $E \subset X \times Y$ et $x \in X, y \in Y$, on définit les *sections* :

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}, \quad E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}.$$

Pour une fonction $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, on définit les sections : $f_x(y) = f(x, y)$ et $f^y(x) = f(x, y)$.

Proposition 11.3 (Mesurabilité des sections). Soit $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Alors pour tout $x \in X$, la section $E_x \in \mathcal{B}$, et pour tout $y \in Y$, la section $E^y \in \mathcal{A}$.

Si $f : (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ est mesurable, alors f_x est $\mathcal{B}$ -mesurable et f^y est $\mathcal{A}$ -mesurable.

Démonstration. La collection $\mathcal{C} = \{E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : E_x \in \mathcal{B} \text{ pour tout } x\}$ est une σ -algèbre contenant les rectangles mesurables (car $(A \times B)_x = B$ si $x \in A$ et $\emptyset$ sinon), donc $\mathcal{C} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. $\square$

11.3 Mesure produit

Théorème 11.4 (Existence et unicité de la mesure produit). *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés σ -finis. Il existe une unique mesure $\mu \otimes \nu$ sur $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ telle que :*

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B), \quad \forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{B}.$$

De plus, pour tout $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$:

$$(\mu \otimes \nu)(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y).$$

Idée de la preuve. On définit $\rho(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x)$. La mesurabilité de $x \mapsto \nu(E_x)$ se vérifie par un argument de classe monotone. La σ -additivité de ρ résulte du théorème de convergence monotone. Sur les rectangles, $\rho(A \times B) = \int_X \nu(B) \mathbb{1}_A(x) d\mu(x) = \mu(A)\nu(B)$. L'unicité découle de l'unicité des mesures sur un π -système (les rectangles forment un π -système) et de la σ -finitude. $\square$

Hypothèse de σ -finitude

La σ -finitude est essentielle. Sans elle, la mesure produit peut ne pas être unique, et les théorèmes de Fubini et Tonelli peuvent être en défaut.

11.4 Théorème de Tonelli

Théorème 11.5 (Tonelli). *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés σ -finis et soit $f : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ -mesurable. Alors :*

- (i) *pour μ -presque tout x , la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est $\mathcal{B}$ -mesurable et $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ est $\mathcal{A}$ -mesurable ;*
- (ii) *de même en intervertissant les rôles de x et y ;*
- (iii) *on a l'égalité :*

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Démonstration. Pour $f = \mathbb{1}_E$ avec $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, le résultat est le théorème 11.4. Par linéarité, il s'étend aux fonctions étagées positives. Le cas général s'obtient par le théorème de convergence monotone appliqué à une suite croissante de fonctions étagées convergeant vers f . $\square$

11.5 Théorème de Fubini

Théorème 11.6 (Fubini). *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés σ -finis et soit $f \in L^1(X \times Y, \mu \otimes \nu)$. Alors :*

- (i) *pour μ -presque tout x , $f_x \in L^1(Y, \nu)$;*
- (ii) *la fonction $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ (définie p.p.) est dans $L^1(X, \mu)$;*

(iii) on a :

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Démonstration. On écrit $f = f^+ - f^-$. Par Tonelli, $\int f^+ d(\mu \otimes \nu)$ et $\int f^- d(\mu \otimes \nu)$ sont finis (car $f \in L^1$). Le théorème de Tonelli appliqué à f^+ et f^- séparément donne les intégrales itérées pour chacun. En particulier, $\int_Y f^+(x, y) d\nu(y) < \infty$ et $\int_Y f^-(x, y) d\nu(y) < \infty$ pour μ -presque tout x , donc $f_x \in L^1(\nu)$ p.p. On conclut par différence. $\square$

Fubini-Tonelli : mode d'emploi

1. **Tonelli** : $f \geq 0$ mesurable $\implies$ on peut intervertir $\int \int$ librement (même si $= +\infty$).
2. **Fubini** : $f \in L^1(\mu \otimes \nu) \implies$ on peut intervertir.
3. **Stratégie** : pour vérifier $f \in L^1$, appliquer d'abord Tonelli à $|f|$.

11.6 Applications

11.6.1 Convolution

Définition 11.7 (Convolution). Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n, \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue. La *convolution* de f et g est :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) dy.$$

Proposition 11.8. Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $f * g$ est définie p.p., $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, et $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$.

Démonstration. Par Tonelli, $\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)| |g(y)| dy dx = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} < \infty$ (par translation). Par Fubini, l'intégrale intérieure est finie pour presque tout x , et le résultat suit. $\square$

11.6.2 Formule de changement de variable

Théorème 11.9 (Changement de variable). Soit $\varphi : U \rightarrow V$ un C^1 -difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Pour toute fonction mesurable $f : V \rightarrow [0, +\infty]$ (ou $f \in L^1(V)$) :

$$\int_V f(y) dy = \int_U f(\varphi(x)) |\det D\varphi(x)| dx.$$

Exemple 11.10 (Coordonnées polaires). Pour $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, on a $|\det D\varphi| = r$, d'où :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr.$$

Exemple 11.11 (Intégrale de Gauss). En utilisant Tonelli et les coordonnées polaires :

$$\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^\infty 2\pi r e^{-r^2} dr = \pi.$$

Donc $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

11.7 Compléments : produits infinis

Théorème 11.12 (Produit dénombrable de mesures de probabilité). *Soit $(X_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)_{n \geq 1}$ une suite d'espaces de probabilité. Il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\prod_{n \geq 1} X_n, \bigotimes_{n \geq 1} \mathcal{A}_n)$ telle que :*

$$\mathbb{P} \left(\prod_{n=1}^N A_n \times \prod_{n>N} X_n \right) = \prod_{n=1}^N \mu_n(A_n)$$

pour tout N et tout choix de $A_n \in \mathcal{A}_n$. C'est le théorème d'Ionescu-Tulcea ou le théorème d'extension de Kolmogorov dans le cas produit.

11.8 Exercices

Exercice 11.1. Calculer $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$ et $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy dx$. Commenter. *Indication : $f \notin L^1$.*

Exercice 11.2. Soit $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}$. Vérifier que $f \notin L^1([0, 1]^2)$ et que les intégrales itérées donnent des résultats différents.

Exercice 11.3. En utilisant Fubini, montrer que pour $f \in L^1([0, \infty), \lambda)$:

$$\int_0^\infty \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt dx = \int_0^\infty f(t) \int_t^\infty \frac{1}{x} dx dt$$

et expliquer pourquoi cette égalité est formelle (les deux côtés peuvent diverger).

Exercice 11.4. Montrer que $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln(b/a)$ pour $0 < a < b$, en utilisant Fubini. *Indication : écrire $\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-tx} dt$.*

Exercice 11.5 (Convolution et loi de probabilité). Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de densités respectives f_X et f_Y . Montrer que $Z = X + Y$ admet la densité $f_Z = f_X * f_Y$. Appliquer au cas $X, Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 11.6. En utilisant les coordonnées polaires en dimension n , calculer le volume de la boule unité $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ et montrer que :

$$\lambda_n(B_n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)}.$$

Chapitre 12

Mesures de Radon et Théorème de Riesz

12.1 Introduction

Ce chapitre se situe à l'interface de la théorie de la mesure et de la topologie. Nous étudions les *mesures de Radon* sur les espaces localement compacts et établissons le célèbre théorème de représentation de Riesz, qui identifie les formes linéaires positives sur l'espace des fonctions continues à support compact avec les mesures de Radon.

Lien entre topologie et mesure

Les mesures de Radon sont des mesures qui « respectent » la topologie : elles sont déterminées par leurs valeurs sur les compacts et les ouverts. Le théorème de Riesz dit que toute manière « raisonnable » d'intégrer des fonctions continues à support compact provient d'une telle mesure. C'est le pont fondamental entre analyse fonctionnelle et théorie de la mesure.

12.2 Rappels sur les espaces localement compacts

Définition 12.1 (Espace localement compact). Un espace topologique séparé X est dit *localement compact* si tout point admet un voisinage compact, c'est-à-dire : pour tout $x \in X$, il existe un ouvert U et un compact K avec $x \in U \subset K$.

Exemple 12.2. 1. $\mathbb{R}^n$ est localement compact.

2. Tout espace compact est localement compact.

3. Tout ouvert d'un espace localement compact est localement compact.

4. Un espace de Banach de dimension infinie n'est pas localement compact.

Définition 12.3 (Support et fonctions à support compact). Pour une fonction continue $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, le *support* de f est $\text{supp}(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$. On note $C_c(X)$ l'espace des fonctions continues à support compact.

Lemme 12.4 (Urysohn pour les espaces localement compacts). Soit X localement compact séparé, K compact et U ouvert avec $K \subset U$. Alors il existe $f \in C_c(X)$ avec $0 \leq f \leq 1$, $f|_K = 1$ et $\text{supp}(f) \subset U$.

Proposition 12.5 (Partition de l'unité). Soit X localement compact séparé et soit K compact couvert par des ouverts $U_1, \dots, U_n$. Il existe des fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C_c(X)$ avec $0 \leq \varphi_i \leq 1$, $\text{supp}(\varphi_i) \subset U_i$, et $\sum_{i=1}^n \varphi_i = 1$ sur K .

12.3 Mesures de Radon

Définition 12.6 (Mesure borélienne régulière). Soit X un espace localement compact séparé. Une mesure positive μ sur $\mathcal{B}(X)$ est dite :

- *extérieurement régulière* si pour tout $B \in \mathcal{B}(X)$: $\mu(B) = \inf\{\mu(U) : U \text{ ouvert}, B \subset U\}$;
- *intérieurement régulière* si pour tout ouvert U : $\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compact}, K \subset U\}$;
- *régulière* si elle est à la fois extérieurement et intérieurement régulière.

Définition 12.7 (Mesure de Radon). Une *mesure de Radon* sur un espace localement compact séparé X est une mesure borélienne μ sur X qui est :

- (i) *localement finie* : pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x avec $\mu(U) < \infty$;
- (ii) *intérieurement régulière sur les ouverts* : pour tout ouvert U , $\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compact}, K \subset U\}$;
- (iii) *extérieurement régulière* : pour tout borélien B , $\mu(B) = \inf\{\mu(U) : U \text{ ouvert}, B \subset U\}$.

Exemple 12.8. 1. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ est une mesure de Radon.

2. Toute mesure de Dirac δ_a est une mesure de Radon.

3. La mesure de comptage sur un espace discret est une mesure de Radon.

4. La mesure de comptage sur $\mathbb{R}$ n'est *pas* une mesure de Radon (elle n'est pas localement finie).

Proposition 12.9. Toute mesure de Radon finie sur un espace localement compact séparé est régulière (au sens intérieur sur *tous* les boréliens, pas seulement les ouverts).

12.4 Fonctionnelles linéaires positives

Définition 12.10 (Fonctionnelle linéaire positive). Une forme linéaire $\Lambda : C_c(X) \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *positive* si :

$$f \geq 0 \implies \Lambda(f) \geq 0.$$

Remarque 12.11. Toute fonctionnelle linéaire positive sur $C_c(X)$ est automatiquement continue pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts (par la positivité, $|\Lambda(f)| \leq \Lambda(\|f\|_\infty \cdot \mathbb{1}_K)$ où K contient le support de f).

12.5 Théorème de représentation de Riesz

Théorème 12.12 (Riesz-Markov-Kakutani). *Soit X un espace localement compact séparé et soit $\Lambda : C_c(X) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle linéaire positive. Alors il existe une unique mesure de Radon μ sur X telle que :*

$$\Lambda(f) = \int_X f d\mu, \quad \forall f \in C_c(X).$$

Idée de la preuve. La preuve se fait en plusieurs étapes :

Étape 1. Définition de μ sur les ouverts. Pour U ouvert, on pose :

$$\mu(U) = \sup\{\Lambda(f) : f \in C_c(X), 0 \leq f \leq 1, \text{supp}(f) \subset U\}.$$

Étape 2. Extension aux boréliens par régularité extérieure :

$$\mu(B) = \inf\{\mu(U) : U \text{ ouvert}, B \subset U\}.$$

Étape 3. Vérification que μ est une mesure. On utilise le lemme d'Urysohn et les partitions de l'unité pour vérifier la σ -additivité.

Étape 4. Vérification que $\Lambda(f) = \int f d\mu$. On approche f par des fonctions étagées et on utilise la régularité de μ .

Étape 5. Unicité. Si μ' est une autre mesure de Radon avec $\Lambda(f) = \int f d\mu'$, alors μ et μ' coïncident sur les ouverts (par le lemme d'Urysohn), donc sur les boréliens (par régularité). $\square$

Conditions du théorème

L'espace X doit être localement compact et séparé. La fonctionnelle doit être définie sur $C_c(X)$ (fonctions à support compact), pas sur $C_b(X)$ (fonctions bornées). Pour des espaces plus généraux, on utilise d'autres versions du théorème.

12.6 Support d'une mesure

Définition 12.13 (Support d'une mesure). Soit μ une mesure de Radon sur X localement compact séparé. Le *support* de μ est le plus petit fermé F tel que $\mu(X \setminus F) = 0$:

$$\text{supp}(\mu) = X \setminus \bigcup\{U \text{ ouvert} : \mu(U) = 0\}.$$

Proposition 12.14. Soit μ une mesure de Radon sur X . Alors :

1. $x \in \text{supp}(\mu)$ si et seulement si $\mu(U) > 0$ pour tout voisinage ouvert U de x .
2. $\text{supp}(\mu) = \emptyset$ si et seulement si $\mu = 0$.
3. Si $f \in C_c(X)$ et $\text{supp}(f) \cap \text{supp}(\mu) = \emptyset$, alors $\int f d\mu = 0$.

Démonstration. (1) $x \notin \text{supp}(\mu)$ signifie que x appartient à un ouvert U de mesure nulle, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage ouvert de x de mesure nulle.

(2) $\text{supp}(\mu) = \emptyset$ signifie $\mu(X) = 0$ par régularité intérieure (tout compact K est contenu dans $X \setminus \text{supp}(\mu)$, qui est une réunion d'ouverts de mesure nulle).

(3) $\text{supp}(f)$ est compact et contenu dans l'ouvert $X \setminus \text{supp}(\mu)$ qui est de mesure nulle. $\square$

Exemple 12.15. 1. $\text{supp}(\delta_a) = \{a\}$.

2. $\text{supp}(\lambda|_{[0,1]}) = [0, 1]$ où λ est la mesure de Lebesgue.

3. La mesure de Cantor a pour support l'ensemble de Cantor.

12.7 Théorème de Riesz pour les mesures signées

Théorème 12.16. Soit X localement compact séparé. Toute forme linéaire continue $\Lambda : C_0(X) \rightarrow \mathbb{R}$ (où $C_0(X)$ est l'espace des fonctions continues s'annulant à l'infini, muni de la norme uniforme) s'écrit de façon unique :

$$\Lambda(f) = \int_X f d\mu$$

où μ est une mesure de Radon signée régulière avec $\|\Lambda\| = |\mu|(X)$.

Correspondance de Riesz

$$(C_c(X))_+^* \longleftrightarrow \{\text{mesures de Radon positives sur } X\}$$

$$(C_0(X))^* \longleftrightarrow \{\text{mesures de Radon signées régulières sur } X\}$$

12.8 Exercices

Exercice 12.1. Montrer que la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est une mesure de Radon.
Indication : vérifier les trois conditions de la définition 12.7.

Exercice 12.2. Soit $X = \mathbb{R}$ et $\Lambda(f) = f(0)$ pour $f \in C_c(\mathbb{R})$. Identifier la mesure de Radon μ telle que $\Lambda(f) = \int f d\mu$.

Exercice 12.3. Soit μ une mesure de Radon sur $\mathbb{R}^n$ et K un compact avec $\mu(K) = 0$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $U \supset K$ avec $\mu(U) < \varepsilon$.

Exercice 12.4. Soit X localement compact séparé et μ une mesure de Radon finie. Montrer que pour tout $B \in \mathcal{B}(X)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset B$ et un ouvert $U \supset B$ avec $\mu(U \setminus K) < \varepsilon$.

Exercice 12.5 (Support et densité). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ continue et $\mu(A) = \int_A f d\lambda$. Montrer que $\text{supp}(\mu) = \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}}$.

Exercice 12.6. Soit X un espace localement compact séparé et soient μ, ν deux mesures de Radon telles que $\int f d\mu = \int f d\nu$ pour toute $f \in C_c(X)$. Montrer que $\mu = \nu$. Cet énoncé est-il vrai si l'on remplace $C_c(X)$ par un sous-espace strict ?

Bibliographie

- [1] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1987.
- [2] Folland, G.B., *Real Analysis*, 2nd ed., Wiley, 1999.
- [3] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and PDE*, Springer, 2011.
- [4] Halmos, P.R., *Measure Theory*, Springer, 1974.
- [5] Bogachev, V.I., *Measure Theory*, Springer, 2007.