

Géométrie Riemannienne

Notes de Cours

Master M1 — 2025–2026

Yaë Ulrich Gaba

« La géométrie n'est pas vraie, elle est avantageuse. »

— Henri Poincaré

Table des matières

Préface	1
1 Variétés Riemanniennes	5
1.1 Métriques riemanniennes	5
1.2 Premiers exemples fondamentaux	6
1.3 Longueur, distance et volume	7
1.4 Isométries et applications conformes	7
1.5 Produits et revêtements riemanniens	8
1.6 Complétude	8
1.7 Calculs en coordonnées	9
1.8 Fonctorielles de la métrique	9
1.9 Exercices	9
2 Connexions et Dérivées Covariantes	11
2.1 Motivation : la dérivée directionnelle ne suffit pas	11
2.2 Connexions sur les fibrés vectoriels	11
2.3 Expression en coordonnées : symboles de Christoffel	12
2.4 Changement de cartes	12
2.5 Transport parallèle	12
2.6 Torsion d'une connexion	13
2.7 Holonomie	14
2.8 Dérivée covariante des tenseurs	14
2.9 Compatibilité avec la métrique et conséquences	14
2.10 Espace affine des connexions	15
2.11 Exercices	15
3 Connexion de Levi-Civita	17
3.1 Le théorème fondamental de la géométrie riemannienne	17
3.2 Symboles de Christoffel de la connexion de Levi-Civita	18
3.3 Calculs sur les exemples fondamentaux	18
3.4 Gradient, divergence et laplacien	19
3.5 Dérivation covariante le long d'une courbe	20
3.6 Accélération covariante et géodésiques	20
3.7 Connexion de Levi-Civita des produits et produits tordus	20
3.8 Exercices	21

4	Géodésiques et Application Exponentielle	23
4.1	Équation des géodésiques	23
4.2	Application exponentielle	24
4.3	Coordonnées normales	24
4.4	Le lemme de Gauss	25
4.5	Géodésiques minimisantes	25
4.6	Rayon d'injectivité	26
4.7	Point conjugué et point de coupure	26
4.8	Géodésiques des espaces modèles	27
4.9	Fonctionnelle d'énergie et variation première	27
4.10	Complétude géodésique et théorème de Hopf–Rinow	27
4.11	Exercices	28
5	Courbure — Tenseur de Riemann	29
5.1	Le tenseur de courbure de Riemann	29
5.2	Expression en coordonnées	29
5.3	Symétries du tenseur de Riemann	30
5.4	Identités de Bianchi	31
5.5	Courbure et transport parallèle	31
5.6	Champs de Jacobi	31
5.7	Calcul de la courbure sur les exemples	32
5.8	Formule de la seconde variation	32
5.9	Exercices	32
6	Courbures Sectionnelle, de Ricci, Scalaire	35
6.1	Courbure sectionnelle	35
6.2	Espaces à courbure constante	36
6.3	Courbure de Ricci	36
6.4	Courbure scalaire	37
6.5	Variétés d'Einstein	37
6.6	Tenseur de Weyl	38
6.7	Calculs sur les produits tordus	38
6.8	Identité de Bianchi contractée	38
6.9	Exercices	39
7	Théorèmes de Comparaison	41
7.1	Introduction et motivation	41
7.2	Équation de Jacobi et solutions modèles	41
7.3	Lemme de comparaison de Sturm	42
7.4	Théorème de comparaison de Rauch	42
7.5	Théorème de Toponogov	42
7.6	Théorème de comparaison de Bishop–Gromov	43
7.7	Application : théorème de Cheng	44
7.8	Théorème de comparaison de Laplacien	44
7.9	Théorème de Gromov sur le nombre de générateurs	44
7.10	Espace de Gromov–Hausdorff	44
7.11	Exercices	44

8	Espaces Symétriques	47
8.1	Définition et premiers exemples	47
8.2	Structure de paire symétrique	48
8.3	Décomposition de Cartan	48
8.4	Courbure des espaces symétriques	48
8.5	Classification des espaces symétriques	49
8.6	Rang et sous-espaces plats	49
8.7	Géodésiques et structure de groupe	50
8.8	Espaces symétriques de rang 1	50
8.9	Exercices	50
9	Théorèmes de Bonnet-Myers et Synge	51
9.1	Introduction et motivations	51
9.2	Rappels sur les champs de Jacobi et la courbure de Ricci	51
9.3	Le théorème de Bonnet-Myers	52
9.4	Le théorème de Cheng sur le diamètre maximal	53
9.5	Le théorème de Synge	53
9.6	Applications et conséquences topologiques	54
9.7	Exercices	55
10	Sous-variétés et Seconde Forme Fondamentale	57
10.1	Sous-variétés riemanniennes	57
10.2	Connexion induite et seconde forme fondamentale	58
10.3	Courbure moyenne et sous-variétés minimales	58
10.4	Équations de Gauss et Codazzi	59
10.5	Hypersurfaces	59
10.6	Sous-variétés totalement géodésiques et ombilicales	60
10.7	Exercices	60
11	Flot de Ricci : Introduction	61
11.1	Motivation et définition	61
11.2	Existence et unicité à court terme	61
11.3	Évolution de la courbure	62
11.4	Principe du maximum de Hamilton	63
11.5	Exemples fondamentaux	63
11.6	Convergence en dimension 3	64
11.7	Exercices	65

Préface

La géométrie riemannienne constitue l'un des piliers fondamentaux des mathématiques modernes, se situant au carrefour de l'analyse, de l'algèbre et de la topologie. Née des travaux visionnaires de Bernhard Riemann dans sa célèbre *Habilitationsschrift* de 1854, intitulée *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, cette discipline a connu un développement spectaculaire, culminant dans des résultats aussi profonds que la preuve de la conjecture de Poincaré par Perelman via le flot de Ricci.

Objectifs du cours

Ce cours s'adresse aux étudiants de Master et de Doctorat en mathématiques pures. Il vise à fournir une présentation rigoureuse et complète des fondements de la géométrie riemannienne, depuis la définition des variétés riemanniennes jusqu'aux théorèmes de comparaison et une introduction au flot de Ricci.

Les objectifs principaux sont :

- Maîtriser le formalisme des connexions, de la dérivation covariante et du transport parallèle.
- Comprendre en profondeur la connexion de Levi-Civita et ses propriétés caractéristiques.
- Étudier les géodésiques, l'application exponentielle et les propriétés de minimalité.
- Développer le calcul tensoriel de la courbure : tenseur de Riemann, courbure sectionnelle, courbure de Ricci et courbure scalaire.
- Établir les grands théorèmes globaux : Bonnet–Myers, Hadamard–Cartan, théorèmes de comparaison de Rauch et Toponogov.
- Explorer la géométrie des espaces symétriques et des sous-variétés.
- Offrir une introduction au flot de Ricci, motivée par la conjecture de Poincaré.

Prérequis

Le lecteur est supposé familier avec :

- La théorie des variétés différentielles : atlas, cartes, difféomorphismes, fibré tangent, formes différentielles.

- L'algèbre multilinéaire et le calcul tensoriel de base : produits tensoriels, algèbre extérieure, contraction.
- Les éléments de topologie générale : compacité, connexité, revêtements.
- Les équations différentielles ordinaires : théorème de Cauchy–Lipschitz, dépendance régulière par rapport aux conditions initiales.
- Les bases de la théorie des groupes de Lie et de leurs algèbres de Lie.

Une connaissance préalable de la géométrie différentielle des courbes et surfaces dans $\mathbb{R}^3$ est utile mais non indispensable ; les concepts seront revisités dans le cadre intrinsèque.

Organisation du cours

Le cours est organisé en onze chapitres, structurés comme suit :

Chapitre 1 — Variétés riemanniennes. On introduit les métriques riemanniennes, la structure d'espace métrique associée, et les premiers exemples fondamentaux : sphères S^n , espaces hyperboliques $\mathbb{H}^n$, tores plats, groupes de Lie munis de métriques bi-invariantes. On étudie les isométries et les notions de complétude.

Chapitre 2 — Connexions et dérivées covariantes. On développe la théorie générale des connexions sur les fibrés vectoriels : définition axiomatique, transport parallèle, torsion, holonomie.

Chapitre 3 — Connexion de Levi-Civita. On démontre le théorème fondamental de la géométrie riemannienne : existence et unicité de la connexion sans torsion compatible avec la métrique. Les symboles de Christoffel sont calculés explicitement sur les exemples.

Chapitre 4 — Géodésiques et application exponentielle. On étudie les géodésiques comme courbes localement minimisantes, l'application exponentielle, le lemme de Gauss, les coordonnées normales, et le rayon d'injectivité.

Chapitre 5 — Courbure : tenseur de Riemann. On introduit le tenseur de courbure de Riemann via la non-commutativité de la dérivation covariante, ses symétries fondamentales, et les identités de Bianchi.

Chapitre 6 — Courbures sectionnelle, de Ricci et scalaire. On définit les différentes contractions du tenseur de Riemann et on les calcule sur les espaces modèles.

Chapitre 7 — Théorèmes de comparaison. On présente les théorèmes de Rauch, Toponogov et Bishop–Gromov, qui relient les bornes de courbure à la géométrie globale.

Chapitre 8 — Espaces symétriques. On étudie les espaces symétriques riemanniens au sens de Cartan, leur lien avec les groupes de Lie, et la classification en types compacts et non compacts.

Chapitre 9 — Bonnet–Myers et Hadamard–Cartan. On démontre ces deux théorèmes fondamentaux qui illustrent l'influence du signe de la courbure sur la topologie globale.

Chapitre 10 — Géométrie des sous-variétés. On développe la théorie des sous-variétés : seconde forme fondamentale, équations de Gauss–Codazzi–Ricci, hypersurfaces, courbure moyenne.

Chapitre 11 — Introduction au flot de Ricci. On présente le flot de Ricci de Hamilton, l’existence locale, les solutions autosimilaires (solitons), et un aperçu de la stratégie de Perelman.

Conventions et notations

Tout au long de ce cours, nous adoptons les conventions suivantes :

- Les variétés sont lisses (C^∞), de Hausdorff, à base dénombrable, et connexes sauf mention contraire.
- (M, g) désigne une variété riemannienne, ∇ la connexion de Levi-Civita associée, R le tenseur de courbure.
- Convention de signe pour le tenseur de Riemann :

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

- La convention de sommation d’Einstein est employée : un indice répété en positions contravariante et covariante est implicitement sommé.
- $\mathfrak{X}(M)$ désigne l’espace des champs de vecteurs lisses sur M .
- $\Gamma(E)$ désigne l’espace des sections lisses d’un fibré vectoriel E .
- $T_p M$ désigne l’espace tangent en p , $T_p^* M$ l’espace cotangent.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ou $g(\cdot, \cdot)$ désigne le produit scalaire riemannien.
- $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ désigne la norme riemannienne.
- $d(p, q)$ désigne la distance riemannienne entre p et q .
- $B(p, r) = \{q \in M : d(p, q) < r\}$ désigne la boule géodésique.
- Ric désigne le tenseur de Ricci, S ou Scal la courbure scalaire.
- $K(\sigma)$ désigne la courbure sectionnelle du 2-plan σ .

Espaces modèles de référence

Les trois familles d’espaces modèles à courbure constante :

1. **Sphère** $S^n(r)$: courbure sectionnelle $K = 1/r^2$, $\pi_1 = 0$ pour $n \geq 2$.
2. **Espace euclidien** $\mathbb{R}^n$: courbure $K = 0$, plat.
3. **Espace hyperbolique** $\mathbb{H}^n(r)$: courbure $K = -1/r^2$, simplement connexe, non compact.

Fil conducteur : courbure et topologie

Le thème central de ce cours est la relation entre la *courbure* (donnée locale, analytique) et la *topologie* (donnée globale, qualitative). Cette dialectique se manifeste dans les résultats suivants :

Condition sur la courbure	Conséquence topologique	Théorème
$\text{Ric} \geq (n-1)\kappa > 0$	M compacte, π_1 fini	Bonnet–Myers
$K \leq 0$ partout	$\widetilde{M} \cong \mathbb{R}^n$	Hadamard–Cartan
$K \geq \delta > 0$	$\text{diam}(M) \leq \pi/\sqrt{\delta}$	Bonnet–Myers
$K > 1/4$ pincement	M homéomorphe à S^n	Sphère diff.

Conseils de travail

La géométrie riemannienne est une discipline où l'intuition géométrique et la rigueur analytique doivent se compléter. Nous recommandons :

- De toujours vérifier les formules générales sur les exemples concrets (S^2 , $\mathbb{H}^2$, tore plat).
- De dessiner les situations géométriques, même schématiquement.
- De résoudre les exercices proposés, qui font partie intégrante du cours.
- De comparer systématiquement les approches intrinsèque et en coordonnées.

Références bibliographiques

1. M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, 1992.
2. J. M. Lee, *Riemannian Manifolds : An Introduction to Curvature*, Springer, 1997.
3. S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Universitext, Springer, 2004.
4. P. Petersen, *Riemannian Geometry*, GTM 171, Springer, 2016.
5. J. Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Springer, 2017.
6. J. Cheeger, D. Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, AMS Chelsea, 2008.
7. S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, vol. I et II, Wiley, 1963–1969.
8. B. Chow, P. Lu, L. Ni, *Hamilton's Ricci Flow*, AMS, 2006.
9. M. Berger, *A Panoramic View of Riemannian Geometry*, Springer, 2003.

L'auteur, mars 2026

Chapitre 1

Variétés Riemanniennes

En 1854, Bernhard Riemann, alors âgé de seulement 27 ans, prononce sa leçon d'habilitation à Göttingen devant un jury qui comprend Gauss lui-même. Le titre : *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* — « Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie ». En une heure, Riemann bouleverse les fondements de la géométrie : il propose de remplacer l'espace euclidien rigide par des *espaces courbes*, où la notion de distance varie d'un point à l'autre. Gauss, dit-on, en fut profondément ému.

L'idée centrale de Riemann est élégante : au lieu de définir une distance globale, on se donne en chaque point un *produit scalaire* sur l'espace tangent. À partir de cette donnée infinitésimale, on peut reconstruire des distances, des angles, des aires, et même la courbure de l'espace. C'est cette structure — une variété munie d'un tel champ de produits scalaires — que nous appelons une *variété riemannienne*.

1.1 Métriques riemanniennes

Formalisons l'intuition de Riemann. Sur une variété différentielle M , chaque point p possède un espace tangent $T_p M$, qui est un espace vectoriel de dimension n . Une métrique riemannienne consiste à choisir un produit scalaire sur chacun de ces espaces tangents, de manière lisse.

Définition 1.1 (Métrique riemannienne). Soit M une variété différentielle lisse de dimension n . Une *métrique riemannienne* sur M est la donnée, pour chaque point $p \in M$, d'un produit scalaire $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, variant de manière lisse : pour tous champs de vecteurs lisses $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, l'application $p \mapsto g_p(X_p, Y_p)$ est C^∞ .

Le couple (M, g) est appelé *variété riemannienne*.

En coordonnées locales $(x^1, \dots, x^n)$, la métrique s'écrit :

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j, \quad g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right).$$

La matrice $(g_{ij}(p))$ est symétrique définie positive en tout point p .

Théorème 1.2 (Existence de métriques riemanniennes). *Toute variété différentielle paracompacte admet une métrique riemannienne.*

Démonstration. Soit $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlas de M et $\{\rho_\alpha\}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\{U_\alpha\}$. Sur chaque ouvert de carte U_α , on définit la métrique

euclidienne pullback : $g_\alpha = \varphi_\alpha^*(\delta_{ij} dx^i \otimes dx^j)$. Alors $g = \sum_\alpha \rho_\alpha g_\alpha$ est une métrique riemannienne sur M , car une combinaison convexe de produits scalaires est un produit scalaire. $\square$

Remarque 1.3. L'unicité n'a pas lieu : l'espace des métriques riemanniennes sur M est un cône convexe ouvert de dimension infinie dans $\Gamma(S^2 T^* M)$.

1.2 Premiers exemples fondamentaux

Exemple 1.4 (Espace euclidien). L'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique standard $g = \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j$ est la variété riemannienne la plus simple. On a $g_{ij} = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker).

Exemple 1.5 (Sphère S^n). La sphère unité $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ est munie de la métrique induite par l'inclusion $\iota : S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} : g_{S^n} = \iota^* g_{\mathbb{R}^{n+1}}$.

En coordonnées sphériques sur S^2 , avec $(\theta, \phi) \in (0, \pi) \times (0, 2\pi)$:

$$g_{S^2} = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2.$$

La matrice de la métrique est : $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$, de déterminant $\det(g_{ij}) = \sin^2 \theta$.

Exemple 1.6 (Espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$). Le modèle du demi-espace supérieur : $\mathbb{H}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n > 0\}$ muni de :

$$g_{\mathbb{H}^n} = \frac{(dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2}{(x^n)^2}.$$

Pour $n = 2$: $g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$.

Le modèle du disque de Poincaré : $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ muni de :

$$g_{\mathbb{D}^n} = \frac{4((dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2)}{(1 - \|x\|^2)^2}.$$

Ces deux modèles sont isométriques.

Exemple 1.7 (Tore plat). Le tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ hérite de la métrique euclidienne standard par passage au quotient. C'est une variété compacte plate (courbure nulle). Plus généralement, pour un réseau $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$, le tore $\mathbb{R}^n / \Lambda$ est une variété riemannienne plate.

Exemple 1.8 (Groupes de Lie et métriques bi-invariantes). Soit G un groupe de Lie et $\mathfrak{g} = T_e G$ son algèbre de Lie. Un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathfrak{g}$ définit une métrique invariante à gauche par :

$$g_a(u, v) = \langle (dL_{a^{-1}})_a u, (dL_{a^{-1}})_a v \rangle, \quad u, v \in T_a G,$$

où $L_a : G \rightarrow G$ est la translation à gauche.

La métrique est *bi-invariante* si elle est aussi invariante à droite, ce qui équivaut à :

$$\langle \text{ad}_X Y, Z \rangle + \langle Y, \text{ad}_X Z \rangle = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

C'est le cas de tout groupe de Lie compact (la forme de Killing changée de signe convient pour les groupes semi-simples compacts).

1.3 Longueur, distance et volume

Définition 1.9 (Longueur d'une courbe). Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ une courbe lisse par morceaux. Sa *longueur* est :

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt.$$

Définition 1.10 (Distance riemannienne). La *distance riemannienne* entre deux points $p, q \in M$ est :

$$d(p, q) = \inf\{L(\gamma) : \gamma \text{ courbe lisse par morceaux de } p \text{ à } q\}.$$

Théorème 1.11 (Structure d'espace métrique). La distance d définit sur M une structure d'espace métrique dont la topologie coïncide avec la topologie de variété.

Démonstration. La séparation $d(p, q) > 0$ pour $p \neq q$ découle de l'utilisation de coordonnées locales : dans une carte, la métrique riemannienne est équivalente à la métrique euclidienne, donc toute courbe joignant $p \neq q$ a une longueur strictement positive. L'inégalité triangulaire est immédiate par concaténation de courbes. La compatibilité topologique se démontre en comparant les boules métriques avec les boules de coordonnées. $\square$

Définition 1.12 (Élément de volume). La *forme volume riemannienne* est la n -forme définie en coordonnées locales orientées par :

$$dV_g = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Le volume d'un domaine $\Omega \subset M$ est $\text{Vol}(\Omega) = \int_{\Omega} dV_g$.

Formules de volume des espaces modèles

$$\begin{aligned} \text{Vol}(S^n(r)) &= \frac{2\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} r^n, \\ \text{Vol}(B_{\mathbb{R}^n}(0, r)) &= \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} r^n, \\ \text{Vol}(B_{\mathbb{H}^n}(p, r)) &= \omega_{n-1} \int_0^r \sinh^{n-1}(t) dt. \end{aligned}$$

1.4 Isométries et applications conformes

Définition 1.13 (Isométrie). Soient (M, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes. Un difféomorphisme $\varphi : M \rightarrow N$ est une *isométrie* si $\varphi^*h = g$, c'est-à-dire :

$$h_{\varphi(p)}(d\varphi_p(u), d\varphi_p(v)) = g_p(u, v), \quad \forall p \in M, u, v \in T_pM.$$

Théorème 1.14 (Groupe d'isométries – Myers–Steenrod). Le groupe des isométries $\text{Isom}(M, g)$ d'une variété riemannienne est un groupe de Lie, de dimension au plus $\frac{n(n+1)}{2}$.

Remarque 1.15. L'égalité $\dim \operatorname{Isom}(M, g) = \frac{n(n+1)}{2}$ est atteinte si et seulement si (M, g) est un espace à courbure constante.

Exemple 1.16 (Isométries de S^n). $\operatorname{Isom}(S^n) = O(n+1)$, de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

Exemple 1.17 (Isométries de $\mathbb{H}^n$). Dans le modèle du demi-espace, pour $n = 2$, les isométries préservant l'orientation sont les transformations de Möbius $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc = 1$, soit $\operatorname{Isom}^+(\mathbb{H}^2) \cong PSL(2, \mathbb{R})$.

Définition 1.18 (Application conforme). Un difféomorphisme $\varphi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ est *conforme* s'il existe $\lambda \in C^\infty(M)$, $\lambda > 0$, tel que $\varphi^*h = \lambda^2 g$.

1.5 Produits et revêtements riemanniens

Définition 1.19 (Métrique produit). Soient (M_1, g_1) et (M_2, g_2) deux variétés riemanniennes. Le *produit riemannien* est $(M_1 \times M_2, g_1 \oplus g_2)$, où :

$$(g_1 \oplus g_2)_{(p_1, p_2)}((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = (g_1)_{p_1}(u_1, v_1) + (g_2)_{p_2}(u_2, v_2).$$

Exemple 1.20. Le cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$ et le tore $S^1 \times S^1$ sont des produits riemanniens. Le tore plat $\mathbb{T}^2 = S^1(r_1) \times S^1(r_2)$ possède une courbure nulle.

Définition 1.21 (Produit tordu). Soit (B, g_B) une base et (F, g_F) une fibre. Pour $f \in C^\infty(B)$, $f > 0$, le *produit tordu* est $B \times_f F$ muni de :

$$g = g_B + f^2 g_F.$$

Exemple 1.22. L'espace $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ en coordonnées polaires s'écrit comme un produit tordu $\mathbb{R}_{>0} \times_r S^{n-1}$ avec $g = dr^2 + r^2 g_{S^{n-1}}$.

Proposition 1.23 (Revêtement riemannien). Si $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ est un revêtement et (M, g) une variété riemannienne, alors il existe une unique métrique $\tilde{g}$ sur $\widetilde{M}$ telle que π soit une isométrie locale : $\pi^*g = \tilde{g}$.

1.6 Complétude

Définition 1.24 (Complétude métrique). (M, g) est *complète* si l'espace métrique (M, d) est complet au sens de Cauchy, c'est-à-dire si toute suite de Cauchy converge.

Théorème 1.25 (Hopf–Rinow). Soit (M, g) une variété riemannienne connexe. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. (M, d) est complet comme espace métrique.
2. Les sous-ensembles fermés bornés sont compacts.
3. Il existe un point $p \in M$ tel que $\exp_p$ est défini sur tout $T_p M$.
4. Pour tout $p \in M$, $\exp_p$ est défini sur tout $T_p M$.

De plus, si l'une de ces conditions est vérifiée, alors deux points quelconques de M sont joints par une géodésique minimisante.

Complétude et compacité

Complétude n'implique *pas* compacité : $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{H}^n$ sont complets mais non compacts. En revanche, toute variété riemannienne compacte est complète.

1.7 Calculs en coordonnées

Exemple 1.26 (Métrique en coordonnées polaires sur $\mathbb{R}^2$). Le changement de coordonnées $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ donne :

$$g = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

D'où $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$ et $\sqrt{\det g} = r$.

Exemple 1.27 (Métrique de Fubini–Study sur $\mathbb{C}P^1$). On identifie $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$. En coordonnées inhomogènes $z = x + iy$:

$$g_{FS} = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{4|dz|^2}{(1 + |z|^2)^2}.$$

C'est la métrique à courbure constante $K = 1$ sur S^2 .

1.8 Fonctorielles de la métrique

Proposition 1.28 (Pullback de métrique). Si $f : M \rightarrow N$ est une immersion et (N, h) est riemannienne, alors $g = f^*h$ est une métrique riemannienne sur M (appelée *métrique induite*).

Proposition 1.29 (Opérateurs musicaux). La métrique induit des isomorphismes canoniques :

$$\begin{aligned} \flat : TM &\rightarrow T^*M, & v &\mapsto g(v, \cdot), \\ \sharp : T^*M &\rightarrow TM, & \omega &\mapsto \text{l'unique } v \text{ tel que } g(v, \cdot) = \omega. \end{aligned}$$

En coordonnées : $(v^\flat)_i = g_{ij}v^j$ et $(\omega^\sharp)^i = g^{ij}\omega_j$, où (g^{ij}) est la matrice inverse de (g_{ij}) .

1.9 Exercices

Exercice 1.1. Montrer que la métrique hyperbolique $g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ sur $\mathbb{H}^2$ donne la distance :

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \operatorname{arcosh} \left(1 + \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{2y_1 y_2} \right).$$

Exercice 1.2. Calculer le volume de la sphère $S^2(r)$ de rayon r en intégrant la forme volume en coordonnées sphériques. Vérifier que $\operatorname{Vol}(S^2(r)) = 4\pi r^2$.

Exercice 1.3. Soit $G = SO(3)$ muni de la métrique bi-invariante $g(X, Y) = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}(XY)$ pour $X, Y \in \mathfrak{so}(3)$. Montrer que cette métrique fait de $SO(3)$ un espace à courbure sectionnelle constante $K = 1/4$.

Exercice 1.4. Montrer que le produit tordu $M = \mathbb{R} \times_{\cosh t} \mathbb{R}$ muni de $g = dt^2 + \cosh^2(t) ds^2$ est isométrique à un ouvert de $\mathbb{H}^2$.

Exercice 1.5. Soit (M, g) une variété riemannienne et $\lambda \in C^\infty(M)$, $\lambda > 0$. On pose $\tilde{g} = \lambda^2 g$ (changement conforme). Calculer la relation entre les formes volume $dV_{\tilde{g}}$ et dV_g .

Chapitre 2

Connexions et Dérivées Covariantes

Comment dériver un champ de vecteurs sur une sphère ? Sur $\mathbb{R}^n$, on dérive composante par composante. Mais sur une variété courbe, les espaces tangents changent de point en point, et comparer deux vecteurs en des points différents n'a aucun sens a priori. Il faut un ingrédient supplémentaire : une *connexion*, qui prescrit comment « transporter » un vecteur le long d'une courbe. C'est Tullio Levi-Civita qui, en 1917, a formalisé cette idée dans le contexte riemannien, en montrant qu'il existe une unique connexion compatible avec la métrique et sans torsion.

2.1 Motivation : la dérivée directionnelle ne suffit pas

Sur $\mathbb{R}^n$, la dérivée d'un champ de vecteurs Y dans la direction X est simplement $(D_X Y)^i = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j}$. Sur une variété générale, cette opération n'est pas intrinsèque : elle dépend du choix de coordonnées. La notion de *connexion* fournit le cadre correct pour dériver des sections de fibrés vectoriels.

2.2 Connexions sur les fibrés vectoriels

Définition 2.1 (Connexion linéaire). Soit $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel lisse. Une *connexion* (ou *dérivée covariante*) sur E est une application $\mathbb{R}$ -bilinéaire :

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E), \quad (X, s) \mapsto \nabla_X s,$$

satisfaisant les axiomes suivants :

1. **$C^\infty(M)$ -linéarité en X** : $\nabla_{fX} s = f \nabla_X s$ pour tout $f \in C^\infty(M)$.
2. **Règle de Leibniz** : $\nabla_X (fs) = (Xf)s + f \nabla_X s$ pour tout $f \in C^\infty(M)$.

Remarque 2.2. L'axiome (1) montre que $\nabla_X s$ en un point p ne dépend que de X_p (et non du champ X tout entier). L'axiome (2) montre que ∇ n'est *pas* $C^\infty(M)$ -linéaire en s : c'est un opérateur différentiel d'ordre 1.

Proposition 2.3 (Localité). Si $s_1 = s_2$ sur un ouvert $U \subset M$, alors $\nabla_X s_1 = \nabla_X s_2$ sur U . La connexion est donc un opérateur local.

2.3 Expression en coordonnées : symboles de Christoffel

Soit $(U, x^1, \dots, x^n)$ une carte locale et $(e_1, \dots, e_r)$ un repère local de E sur U . On définit les *coefficients de connexion* ω_{ij}^k par :

$$\nabla_{\partial_i} e_j = \omega_{ij}^k e_k.$$

Pour le fibré tangent $E = TM$, ces coefficients sont notés Γ_{ij}^k et appelés *symboles de Christoffel* :

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

Proposition 2.4 (Formule en coordonnées). Si $Y = Y^j \partial_j$ et $X = X^i \partial_i$, alors :

$$\nabla_X Y = X^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k Y^j \right) \partial_k.$$

On note la composante : $(\nabla_X Y)^k = X^i (\partial_i Y^k + \Gamma_{ij}^k Y^j) = X^i \nabla_i Y^k$.

Démonstration. Par la règle de Leibniz :

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_{X^i \partial_i} (Y^j \partial_j) = X^i \nabla_{\partial_i} (Y^j \partial_j) \\ &= X^i [(\partial_i Y^j) \partial_j + Y^j \nabla_{\partial_i} \partial_j] = X^i [(\partial_i Y^j) \partial_j + Y^j \Gamma_{ij}^k \partial_k]. \end{aligned}$$

En renommant l'indice muet : $(\nabla_X Y)^k = X^i (\partial_i Y^k + \Gamma_{ij}^k Y^j)$. □

2.4 Changement de cartes

Proposition 2.5 (Transformation des symboles de Christoffel). Sous un changement de coordonnées $x^i \mapsto \bar{x}^i$, les symboles de Christoffel se transforment selon :

$$\bar{\Gamma}_{ij}^k = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j} \Gamma_{mn}^l + \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l} \frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j}.$$

Le terme inhomogène montre que les Γ_{ij}^k ne forment *pas* un tenseur.

Les symboles de Christoffel ne sont pas des tenseurs

La présence du terme $\frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j}$ reflète le fait que la connexion encode une information supplémentaire par rapport à la structure de variété seule. C'est précisément cette « correction » qui permet de dériver covariamment.

2.5 Transport parallèle

Définition 2.6 (Champ parallèle le long d'une courbe). Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ une courbe lisse et $V(t)$ un champ de vecteurs le long de γ (i.e. $V(t) \in T_{\gamma(t)} M$). On dit que V est *parallèle* le long de γ si :

$$\frac{DV}{dt} := \nabla_{\dot{\gamma}(t)} V = 0.$$

En coordonnées, la condition de parallélisme s'écrit :

$$\frac{dV^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) V^j(t) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

C'est un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre.

Théorème 2.7 (Existence et unicité du transport parallèle). *Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ une courbe lisse et $v_0 \in T_{\gamma(a)}M$. Il existe une unique champ parallèle $V(t)$ le long de γ avec $V(a) = v_0$. L'application :*

$$P_\gamma^{a \rightarrow b} : T_{\gamma(a)}M \rightarrow T_{\gamma(b)}M, \quad v_0 \mapsto V(b),$$

est un isomorphisme linéaire, appelé transport parallèle le long de γ .

Démonstration. L'existence et l'unicité découlent du théorème de Cauchy–Lipschitz appliqué au système linéaire ci-dessus. La linéarité de $P_\gamma^{a \rightarrow b}$ résulte de la linéarité du système. L'inversibilité s'obtient en considérant le transport parallèle le long de γ parcourue en sens inverse. $\square$

Exemple 2.8 (Transport parallèle sur S^2). Considérons le triangle sphérique formé par des arcs de grands cercles reliant le pôle Nord $N = (0, 0, 1)$ au point $A = (1, 0, 0)$, puis A à $B = (0, 1, 0)$, puis B à N . Le transport parallèle d'un vecteur le long de ce triangle le fait tourner d'un angle $\pi/2$. Cet angle est égal à l'aire du triangle sphérique, illustrant le théorème de Gauss–Bonnet.

2.6 Torsion d'une connexion

Définition 2.9 (Tenseur de torsion). La *torsion* d'une connexion ∇ sur TM est le tenseur de type $(1, 2)$:

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

Proposition 2.10. T est bien un tenseur : il est $C^\infty(M)$ -bilinéaire et antisymétrique. En coordonnées : $T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$.

Démonstration. Vérifions la $C^\infty(M)$ -linéarité :

$$\begin{aligned} T(fX, Y) &= \nabla_{fX} Y - \nabla_Y (fX) - [fX, Y] \\ &= f\nabla_X Y - f\nabla_Y X - (Yf)X - f[X, Y] + (Yf)X \\ &= fT(X, Y). \end{aligned}$$

L'antisymétrie est immédiate. En coordonnées : $T(\partial_i, \partial_j) = \Gamma_{ij}^k \partial_k - \Gamma_{ji}^k \partial_k$ car $[\partial_i, \partial_j] = 0$. $\square$

Définition 2.11 (Connexion sans torsion). Une connexion est dite *sans torsion* (ou *symétrique*) si $T \equiv 0$, c'est-à-dire : $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ pour tous X, Y . En coordonnées : $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

2.7 Holonomie

Définition 2.12 (Groupe d'holonomie). Soit (M, ∇) une variété munie d'une connexion et $p \in M$. Le *groupe d'holonomie* de ∇ en p est :

$$\text{Hol}_p(\nabla) = \{P_\gamma : T_p M \rightarrow T_p M : \gamma \text{ lacet lisse en } p\} \subset GL(T_p M).$$

Le *groupe d'holonomie restreint* $\text{Hol}_p^0(\nabla)$ est le sous-groupe correspondant aux lacets contractiles.

Théorème 2.13 (Ambrose–Singer). *Le groupe d'holonomie restreint $\text{Hol}_p^0(\nabla)$ est un sous-groupe de Lie connexe de $GL(T_p M)$ dont l'algèbre de Lie est engendrée par les éléments de la forme $P_\gamma^{-1} \circ R(X, Y) \circ P_\gamma$, où γ parcourt les chemins de p à un point q et $X, Y \in T_q M$.*

Exemple 2.14 (Holonomie de S^n). Pour la sphère S^n ($n \geq 2$), $\text{Hol}(S^n) = SO(n)$, car la sphère est un espace symétrique irréductible simplement connexe.

2.8 Dérivée covariante des tenseurs

Définition 2.15 (Extension aux tenseurs). Soit ∇ une connexion sur TM . On étend ∇ à tous les tenseurs par les règles :

1. $\nabla_X f = Xf$ pour $f \in C^\infty(M)$.
2. $\nabla_X(S \otimes T) = (\nabla_X S) \otimes T + S \otimes (\nabla_X T)$ (règle de Leibniz).
3. ∇ commute avec les contractions.
4. Sur les 1-formes : $(\nabla_X \omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y)$.

Proposition 2.16 (Dérivée covariante de la métrique). Pour un tenseur $(0, 2)$ symétrique g :

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z).$$

On dit que ∇ est *compatible avec g* si $\nabla g = 0$, i.e. $(\nabla_X g)(Y, Z) = 0$ pour tous X, Y, Z .

Dérivée covariante en coordonnées

Pour un tenseur de type (r, s) avec composantes $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$:

$$\nabla_k T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \partial_k T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} + \sum_{m=1}^r \Gamma_{k\ell}^{i_m} T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots \ell \dots i_r} - \sum_{m=1}^s \Gamma_{kj_m}^\ell T_{j_1 \dots \ell \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}.$$

2.9 Compatibilité avec la métrique et conséquences

Proposition 2.17 (Caractérisation de la compatibilité). Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\nabla g = 0$.
2. $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$ pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

3. Le transport parallèle préserve le produit scalaire : pour toute courbe γ et tous $u, v \in T_{\gamma(a)}M$: $\langle P_\gamma u, P_\gamma v \rangle_{\gamma(b)} = \langle u, v \rangle_{\gamma(a)}$.

4. En coordonnées : $\partial_k g_{ij} = \Gamma_{ki}^l g_{lj} + \Gamma_{kj}^l g_{il}$.

Démonstration. (1) $\Leftrightarrow$ (2) : C'est la définition de $\nabla g = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Si $V(t)$ et $W(t)$ sont parallèles le long de γ , alors $\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \langle \nabla_{\dot{\gamma}} V, W \rangle + \langle V, \nabla_{\dot{\gamma}} W \rangle = 0$, donc $\langle V, W \rangle$ est constant.

(3) $\Rightarrow$ (2) : Tout champ de vecteurs le long de γ s'écrit comme combinaison linéaire de champs parallèles, et la condition s'en déduit. $\square$

2.10 Espace affine des connexions

Proposition 2.18. L'espace des connexions sur TM est un espace affine modelé sur $\Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes TM)$: si ∇ et $\tilde{\nabla}$ sont deux connexions, alors $A(X, Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$ est un tenseur de type $(1, 2)$.

Démonstration. On vérifie la $C^\infty(M)$ -bilinéarité : $A(fX, Y) = \tilde{\nabla}_{fX} Y - \nabla_{fX} Y = f(\tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y) = fA(X, Y)$, et $A(X, fY) = \tilde{\nabla}_X (fY) - \nabla_X (fY) = (Xf)Y - (Xf)Y = 0$. $\square$

2.11 Exercices

Exercice 2.1. Montrer que le transport parallèle le long d'un méridien de S^2 (de θ_0 à θ_1 , ϕ fixé) envoie ∂_ϕ sur ∂_ϕ (normalisé correctement).

Exercice 2.2. Calculer les symboles de Christoffel de la métrique $g = dr^2 + r^2 d\theta^2$ en coordonnées polaires sur $\mathbb{R}^2$. Vérifier que la torsion est nulle.

Exercice 2.3. Soit ∇ une connexion compatible avec la métrique et $V(t)$ un champ parallèle le long de γ . Montrer que $\|V(t)\|$ est constant.

Exercice 2.4. Montrer que si deux connexions ∇ et $\tilde{\nabla}$ sont toutes deux sans torsion et compatibles avec la même métrique g , alors $\nabla = \tilde{\nabla}$. (C'est l'unicité de la connexion de Levi-Civita, démontrée au chapitre suivant.)

Exercice 2.5. Soit G un groupe de Lie avec métrique invariante à gauche. Montrer que la connexion définie par $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$ pour X, Y invariants à gauche est sans torsion. Quand est-elle compatible avec la métrique ?

Exercice 2.6. Calculer le groupe d'holonomie du tore plat $\mathbb{T}^2$. Comparer avec celui de S^2 .

Chapitre 3

Connexion de Levi-Civita

Sur une surface courbe, la notion de « droite » perd son sens euclidien. Mais celle de « ligne la plus droite possible » survit : c'est la géodésique. Pour la définir, il faut savoir dériver des champs de vecteurs le long de courbes sur la variété — et c'est là qu'intervient la connexion de Levi-Civita, du nom du mathématicien italien Tullio Levi-Civita qui, avec Gregorio Ricci-Curbastro, a développé le calcul tensoriel au tournant du XX^e siècle. Le résultat fondamental de ce chapitre est aussi surprenant qu'élégant : il existe une *unique* façon de dériver qui soit compatible avec la métrique et sans torsion. Cette unicité est le théorème fondamental de la géométrie riemannienne.

3.1 Le théorème fondamental de la géométrie riemannienne

Théorème 3.1 (Théorème fondamental). *Soit (M, g) une variété riemannienne. Il existe une unique connexion ∇ sur TM vérifiant :*

1. **Compatibilité avec la métrique** : $\nabla g = 0$, i.e. $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$.
2. **Absence de torsion** : $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.

Cette connexion est appelée la connexion de Levi-Civita de (M, g) .

Démonstration. Unicité. Supposons que ∇ vérifie (1) et (2). En écrivant la compatibilité pour trois permutations cycliques :

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \\ Y\langle Z, X \rangle &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle, \\ Z\langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle. \end{aligned}$$

En effectuant la combinaison (1) + (2) - (3) et en utilisant l'absence de torsion ($\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$), on obtient la *formule de Koszul* :

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle &= X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle \\ &\quad + \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Le membre de droite est entièrement déterminé par g et les crochets de Lie, donc $\nabla_X Y$ est uniquement déterminé par la non-dégénérescence de g .

Existence. On définit $\nabla_X Y$ par la formule de Koszul (3.1). On vérifie que cela définit bien une connexion (linéarité en X , règle de Leibniz en Y), qu'elle est compatible avec g , et sans torsion. Les vérifications sont directes mais calculatoires. $\square$

Formule de Koszul

$$2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = X\langle Y, Z \rangle + Y\langle X, Z \rangle - Z\langle X, Y \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle.$$

C'est la formule fondamentale de la géométrie riemannienne.

3.2 Symboles de Christoffel de la connexion de Levi-Civita

Proposition 3.2 (Formule des symboles de Christoffel). En coordonnées locales $(x^1, \dots, x^n)$, les symboles de Christoffel de la connexion de Levi-Civita sont :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right).$$

Démonstration. La formule de Koszul appliquée aux champs coordonnées $\partial_i, \partial_j, \partial_l$ (dont les crochets de Lie sont nuls) donne :

$$2\langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_l \rangle = \partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}.$$

Donc $2 g_{kl} \Gamma_{ij}^k = \partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}$, et en multipliant par $g^{lm}/2$, on obtient la formule. $\square$

Remarque 3.3. La symétrie $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ est immédiate, reflétant l'absence de torsion : $[\partial_i, \partial_j] = 0$ implique $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \nabla_{\partial_j} \partial_i$.

3.3 Calculs sur les exemples fondamentaux

Exemple 3.4 (Sphère S^2 en coordonnées sphériques). Avec $g = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$, on a :

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = \sin^2\theta, \quad g_{12} = 0.$$

Les symboles de Christoffel non nuls sont :

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^1 &= -\sin\theta \cos\theta, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \cot\theta. \end{aligned}$$

Tous les autres sont nuls. On vérifie par la formule : $\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (-\partial_1 g_{22}) = -\frac{1}{2} \cdot 2 \sin\theta \cos\theta = -\sin\theta \cos\theta$.

Exemple 3.5 (Espace hyperbolique $\mathbb{H}^2$ (demi-plan)). Avec $g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$, on a :

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2}, \quad g_{12} = 0, \quad g^{11} = g^{22} = y^2, \quad g^{12} = 0.$$

Les symboles non nuls sont :

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = -\frac{1}{y}, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{y}, \\ \Gamma_{22}^2 &= -\frac{1}{y}.\end{aligned}$$

Exemple 3.6 (Métrique de surface de révolution). Soit S la surface de révolution paramétrée par $(u, v) \mapsto (f(u) \cos v, f(u) \sin v, h(u))$ avec $f > 0$. La métrique induite est $g = (f'^2 + h'^2) du^2 + f^2 dv^2$.

Si la courbe génératrice est paramétrée par longueur d'arc ($f'^2 + h'^2 = 1$), alors $g = du^2 + f(u)^2 dv^2$ et les symboles non nuls sont :

$$\Gamma_{22}^1 = -f f', \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{f'}{f}.$$

Exemple 3.7 (Groupe de Lie avec métrique bi-invariante). Sur un groupe de Lie G avec métrique bi-invariante, pour deux champs invariants à gauche $X, Y \in \mathfrak{g}$, la formule de Koszul donne :

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y].$$

En effet, la bi-invariance implique $\langle [X, Y], Z \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle = 0$ (ad-antisymétrie), et les termes $X \langle Y, Z \rangle$, etc. sont nuls car les champs sont invariants à gauche et la métrique aussi. La formule de Koszul se réduit à $2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle$.

3.4 Gradient, divergence et laplacien

Définition 3.8 (Gradient). Le *gradient* d'une fonction $f \in C^\infty(M)$ est l'unique champ de vecteurs $\text{grad } f = (\nabla f)^\sharp$ tel que :

$$g(\text{grad } f, X) = Xf = df(X), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

En coordonnées : $(\text{grad } f)^i = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}$.

Définition 3.9 (Divergence). La *divergence* d'un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(M)$ est :

$$\text{div } X = \text{tr}(\nabla X) = \nabla_i X^i = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{\det g} X^i \right).$$

Définition 3.10 (Laplacien de Beltrami). Le *laplacien* (de Laplace–Beltrami) d'une fonction f est :

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad } f) = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{\det g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right).$$

Exemple 3.11 (Laplacien sur S^2). En coordonnées sphériques, $\sqrt{\det g} = \sin \theta$, d'où :

$$\Delta_{S^2} f = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}.$$

Exemple 3.12 (Laplacien sur $\mathbb{H}^2$). Avec la métrique $g = y^{-2}(dx^2 + dy^2)$:

$$\Delta_{\mathbb{H}^2} f = y^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right).$$

3.5 Dérivation covariante le long d'une courbe

Définition 3.13. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ une courbe lisse et V un champ de vecteurs le long de γ . La *dérivée covariante* de V le long de γ est :

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{\dot{\gamma}} V.$$

En coordonnées : $\left(\frac{DV}{dt}\right)^k = \frac{dV^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) V^j(t).$

Proposition 3.14 (Règle de Leibniz le long d'une courbe). Si V et W sont des champs de vecteurs le long de γ et ∇ est compatible avec g , alors :

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle.$$

3.6 Accélération covariante et géodésiques

Définition 3.15 (Accélération covariante). L'*accélération covariante* d'une courbe γ est :

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}.$$

En coordonnées : $\left(\frac{D\dot{\gamma}}{dt}\right)^k = \ddot{\gamma}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j.$

Définition 3.16 (Géodésique). Une courbe γ est une *géodésique* si son accélération covariante est nulle :

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0.$$

L'équation des géodésiques en coordonnées est le système d'EDO du second ordre :

$$\ddot{\gamma}^k + \Gamma_{ij}^k(\gamma) \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Équation des géodésiques

$$\ddot{\gamma}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = 0.$$

C'est un système de n EDO du second ordre, équivalent à $2n$ EDO du premier ordre sur TM .

3.7 Connexion de Levi-Civita des produits et produits tordus

Proposition 3.17 (Produit riemannien). Sur $(M_1 \times M_2, g_1 \oplus g_2)$, si $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ et $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$, alors :

$$\nabla_{(X_1, X_2)}(Y_1, Y_2) = (\nabla_{X_1}^1 Y_1, \nabla_{X_2}^2 Y_2),$$

où ∇^1 et ∇^2 sont les connexions de Levi-Civita de (M_1, g_1) et (M_2, g_2) respectivement.

Proposition 3.18 (Produit tordu). Sur le produit tordu $B \times_f F$ avec $g = g_B + f^2 g_F$, la connexion de Levi-Civita vérifie, pour $X, Y \in \mathfrak{X}(B)$ et $V, W \in \mathfrak{X}(F)$:

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \nabla_X^B Y, \\ \nabla_X V &= \nabla_V X = \frac{Xf}{f} V, \\ \nabla_V W &= \nabla_V^F W - \frac{\langle V, W \rangle_F}{f} \operatorname{grad}_B f.\end{aligned}$$

3.8 Exercices

Exercice 3.1. Calculer tous les symboles de Christoffel pour la métrique $g = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$ de $\mathbb{R}^3$ en coordonnées sphériques.

Exercice 3.2. Vérifier que les grands cercles de S^2 sont bien des géodésiques en utilisant les symboles de Christoffel calculés ci-dessus.

Exercice 3.3. Montrer que sur un groupe de Lie avec métrique bi-invariante, les géodésiques passant par l'élément neutre e sont exactement les sous-groupes à un paramètre $t \mapsto \exp(tX)$.

Exercice 3.4. Calculer le laplacien de la fonction $f(x, y) = \ln y$ sur $\mathbb{H}^2$ muni de la métrique $g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$.

Exercice 3.5. Soit (M, g) riemannienne et $\tilde{g} = e^{2\varphi} g$ un changement conforme. Montrer que les symboles de Christoffel sont reliés par :

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \delta_i^k \partial_j \varphi + \delta_j^k \partial_i \varphi - g_{ij} g^{kl} \partial_l \varphi.$$

Exercice 3.6. Sur le produit tordu $\mathbb{R} \times_{\cosh t} \mathbb{R}^{n-1}$ muni de $g = dt^2 + \cosh^2(t) g_{\mathbb{R}^{n-1}}$, calculer les symboles de Christoffel et vérifier que les courbes $t \mapsto (t, x_0)$ sont des géodésiques.

Chapitre 4

Géodésiques et Application Exponentielle

Quel est le plus court chemin entre deux points sur une sphère ? Un grand cercle, bien sûr. Mais comment formuler cette question sur une variété riemannienne quelconque ? La réponse passe par les *géodésiques* : les courbes qui ne tournent pas, celles dont l'accélération covariante est nulle. Sur un plan, ce sont les droites ; sur une sphère, les grands cercles ; sur une surface de révolution, des courbes que l'on peut calculer explicitement grâce aux équations d'Euler-Lagrange du calcul des variations. L'*application exponentielle*, qui envoie un vecteur tangent sur le point atteint en temps 1 le long de la géodésique correspondante, fournit un système de coordonnées local centré en chaque point — les coordonnées normales, où la métrique est euclidienne au premier ordre.

4.1 Équation des géodésiques

Définition 4.1 (Géodésique). Soit (M, g) une variété riemannienne munie de sa connexion de Levi-Civita ∇ . Une courbe lisse $\gamma : I \rightarrow M$ est une *géodésique* si :

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0.$$

En coordonnées locales $(x^1, \dots, x^n)$:

$$\ddot{\gamma}^k(t) + \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Proposition 4.2 (Paramétrisation à vitesse constante). Si γ est une géodésique, alors $\|\dot{\gamma}(t)\|$ est constant. En particulier, les géodésiques sont paramétrées proportionnellement à la longueur d'arc.

Démonstration. $\frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 2 \langle \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0.$ □

Théorème 4.3 (Existence et unicité locale). Pour tout $p \in M$ et $v \in T_p M$, il existe $\varepsilon > 0$ et une unique géodésique $\gamma_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ telle que $\gamma_v(0) = p$ et $\dot{\gamma}_v(0) = v$.

Démonstration. L'équation des géodésiques est un système d'EDO du second ordre à coefficients lisses. Le théorème de Cauchy–Lipschitz assure l'existence et l'unicité locales. □

Proposition 4.4 (Homogénéité). Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v \in T_p M$, on a : $\gamma_{\lambda v}(t) = \gamma_v(\lambda t)$ partout où les deux membres sont définis.

4.2 Application exponentielle

Définition 4.5 (Application exponentielle). L'application exponentielle en $p \in M$ est l'application :

$$\exp_p : \mathcal{D}_p \subset T_p M \rightarrow M, \quad v \mapsto \gamma_v(1),$$

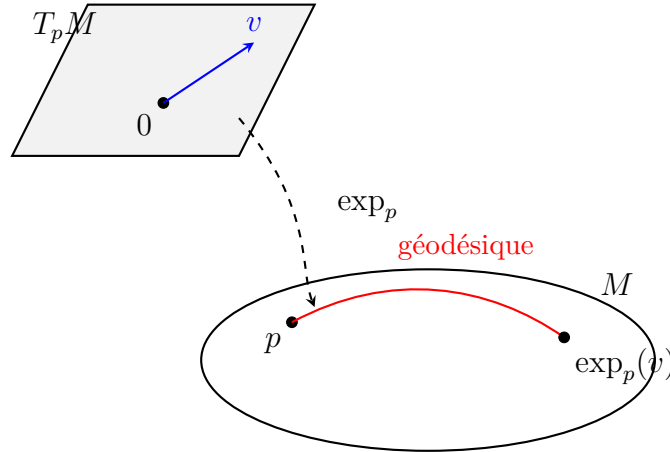
où $\mathcal{D}_p$ est le domaine maximal de définition (ouvert étoilé contenant 0) et γ_v est la géodésique avec $\gamma_v(0) = p$, $\dot{\gamma}_v(0) = v$.

Proposition 4.6. L'application $\exp_p$ est lisse et vérifie :

1. $\exp_p(0) = p$.
2. $(d\exp_p)_0 = \text{Id}_{T_p M}$ (via l'identification canonique $T_0(T_p M) \cong T_p M$).
3. $\exp_p(tv) = \gamma_v(t)$ pour tout t dans le domaine.

Démonstration. Le point (2) se vérifie par : $(d\exp_p)_0(v) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp_p(tv) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \gamma_v(t) = \dot{\gamma}_v(0) = v$. $\square$

Corollaire 4.7. Par le théorème d'inversion locale, $\exp_p$ est un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $T_p M$ sur un voisinage de p dans M .



4.3 Coordonnées normales

Définition 4.8 (Coordonnées normales). Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $T_p M$. Les *coordonnées normales* centrées en p sont les coordonnées x^i définies sur un voisinage U de p par :

$$q = \exp_p(x^1 e_1 + \dots + x^n e_n).$$

Proposition 4.9 (Propriétés des coordonnées normales). En coordonnées normales centrées en p :

1. $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$.
2. $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$.
3. $\partial_l g_{ij}(p) = 0$.

4. Les géodésiques radiales passant par p sont les droites $t \mapsto (tv^1, \dots, tv^n)$.

5. Le développement de Taylor de la métrique est :

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} - \frac{1}{3} R_{ikjl}(p) x^k x^l + O(\|x\|^3).$$

Démonstration. (1) découle du choix de base orthonormée. (2) : les géodésiques radiales vérifient $\gamma(t) = tv$, donc $\ddot{\gamma}^k = 0$ et l'équation des géodésiques donne $\Gamma_{ij}^k(p) v^i v^j = 0$ pour tout v , d'où $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ par polarisation. (3) découle de (2) et de la formule des Christoffel. $\square$

Coordonnées normales = linéarisation de la géométrie

En coordonnées normales, la métrique est euclidienne à l'ordre 1 : les effets de la courbure n'apparaissent qu'à l'ordre 2. C'est l'analogue riemannien du fait que la Terre paraît plate localement.

4.4 Le lemme de Gauss

Lemme 4.10 (Lemme de Gauss). *Soit $p \in M$ et $v \in T_p M$ avec $\exp_p(v)$ défini. Alors :*

$$\langle (d \exp_p)_v(v), (d \exp_p)_v(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

pour tout $w \in T_p M$, où on identifie $T_v(T_p M) \cong T_p M$.

Démonstration. Posons $q = \exp_p(v)$. Le vecteur $(d \exp_p)_v(v) = \dot{\gamma}_v(1)$ où $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$. On considère la variation $F(t, s) = \exp_p(t(v + sw))$.

Pour t fixé, $F(t, \cdot)$ est une courbe de géodésiques radiales. Le champ de Jacobi associé est $J(t) = \frac{\partial F}{\partial s} \Big|_{s=0} = t (d \exp_p)_{tv}(w)$.

On calcule :

$$\frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma}_v(t), J(t) \rangle = \underbrace{\langle \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}, J \rangle}_{=0} + \langle \dot{\gamma}, \frac{DJ}{dt} \rangle.$$

Par symétrie des connexions : $\langle \dot{\gamma}, \frac{DJ}{dt} \rangle = \frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma}, J \rangle - \langle \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}, J \rangle = \frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma}, J \rangle$.

On montre que $\frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma}, J \rangle = \langle \dot{\gamma}(0), w \rangle = \langle v, w \rangle$ en utilisant que $J(0) = 0$ et $\frac{DJ}{dt}(0) = w$. Donc $\langle \dot{\gamma}_v(1), J(1) \rangle = \langle v, w \rangle$. Comme $J(1) = (d \exp_p)_v(w)$ et $\dot{\gamma}_v(1) = (d \exp_p)_v(v)$, le résultat suit. $\square$

Corollaire 4.11 (Orthogonalité des sphères géodésiques). *Les géodésiques radiales issues de p sont orthogonales aux sphères géodésiques $S(p, r) = \{q : d(p, q) = r\}$ (pour r assez petit).*

4.5 Géodésiques minimisantes

Théorème 4.12 (Les géodésiques courtes sont minimisantes). *Pour tout $p \in M$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $q \in B(p, \varepsilon)$, il existe une unique géodésique minimisante de p à q , et cette géodésique est contenue dans $B(p, \varepsilon)$.*

Démonstration. On utilise le lemme de Gauss et une comparaison avec les coordonnées normales. Soit γ la géodésique radiale de p à $q = \exp_p(v)$ et $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$ une courbe quelconque de p à q . En coordonnées normales, on décompose $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}^r + \dot{\sigma}^\perp$ en composantes radiale et tangentielle aux sphères géodésiques. Par le lemme de Gauss :

$$L(\sigma) = \int_0^1 \sqrt{|\dot{\sigma}^r|^2 + |\dot{\sigma}^\perp|^2} dt \geq \int_0^1 |\dot{\sigma}^r| dt \geq |r(1) - r(0)| = \|v\| = L(\gamma).$$

□

Définition 4.13 (Voisinage normal). Un ouvert $U \ni p$ est un *voisinage normal* de p s'il existe un ouvert étoilé $V \subset T_p M$ contenant 0 tel que $\exp_p : V \rightarrow U$ est un difféomorphisme et tout point de U est joint à p par une unique géodésique minimisante contenue dans U .

4.6 Rayon d'injectivité

Définition 4.14 (Rayon d'injectivité). Le *rayon d'injectivité* en p est :

$$\text{inj}(p) = \sup\{r > 0 : \exp_p|_{B(0,r)} \text{ est un difféomorphisme}\}.$$

Le rayon d'injectivité de M est $\text{inj}(M) = \inf_{p \in M} \text{inj}(p)$.

Exemple 4.15 (Rayon d'injectivité de S^n). $\text{inj}(S^n) = \pi$: l'application exponentielle en tout point cesse d'être injective au point antipodal.

Exemple 4.16 (Rayon d'injectivité du tore plat). Pour $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, $\text{inj}(\mathbb{T}^2) = 1/2$.

Exemple 4.17 (Rayon d'injectivité de $\mathbb{H}^n$). $\text{inj}(\mathbb{H}^n) = +\infty$: l'application exponentielle est un difféomorphisme global.

4.7 Point conjugué et point de coupure

Définition 4.18 (Point conjugué). Un point $\gamma(t_0)$ est *conjugué* à $\gamma(0) = p$ le long de la géodésique γ si $(d\exp_p)_{t_0\dot{\gamma}(0)}$ est singulière, i.e. s'il existe un champ de Jacobi non nul J le long de γ avec $J(0) = J(t_0) = 0$.

Définition 4.19 (Point de coupure). Le *point de coupure* de p le long de γ est le premier point $\gamma(t_c)$ au-delà duquel γ cesse d'être minimisante :

$$t_c = \sup\{t > 0 : \gamma|_{[0,t]} \text{ est minimisante}\}.$$

Le *lieu de coupure* $\text{Cut}(p)$ est l'ensemble des points de coupure pour toutes les géodésiques issues de p .

Théorème 4.20 (Caractérisation du point de coupure). *Le point de coupure $\gamma(t_c)$ vérifie l'une des deux conditions :*

1. $\gamma(t_c)$ est le premier point conjugué le long de γ .
2. Il existe une autre géodésique minimisante de p à $\gamma(t_c)$.

Exemple 4.21 (Lieu de coupure de S^n). Pour p le pôle Nord de S^n , $\text{Cut}(p) = \{-p\}$ (le point antipodal).

4.8 Géodésiques des espaces modèles

Exemple 4.22 (Géodésiques de $\mathbb{R}^n$). Les géodésiques sont les droites $\gamma(t) = p + tv$.

Exemple 4.23 (Géodésiques de S^n). Les géodésiques sont les grands cercles, paramétrés par : $\gamma(t) = \cos(t)p + \sin(t)v$, où $p \in S^n$ et $v \in T_p S^n$ avec $\|v\| = 1$.

Exemple 4.24 (Géodésiques de $\mathbb{H}^2$ (demi-plan)). Les géodésiques sont :

- Les demi-droites verticales $\{x = x_0, y > 0\}$.
- Les demi-cercles centrés sur l'axe $\{y = 0\}$.

Pour une demi-droite verticale paramétrée par $\gamma(t) = (x_0, e^t) : \dot{\gamma} = (0, e^t)$, $\|\dot{\gamma}\|_g = \frac{e^t}{e^t} = 1$, et on vérifie que l'équation des géodésiques est satisfaite.

4.9 Fonctionnelle d'énergie et variation première

Définition 4.25 (Fonctionnelle d'énergie). L'énergie d'une courbe $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ est :

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt.$$

Proposition 4.26 (Inégalité de Cauchy–Schwarz). $L(\gamma)^2 \leq 2(b-a) E(\gamma)$, avec égalité si et seulement si $\|\dot{\gamma}\|$ est constant.

Théorème 4.27 (Formule de la première variation). Soit $\gamma_s : [a, b] \rightarrow M$ une variation lisse de $\gamma_0 = \gamma$ avec champ de variation $V = \frac{\partial \gamma_s}{\partial s} \Big|_{s=0}$. Alors :

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} E(\gamma_s) = - \int_a^b \langle \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}, V \rangle dt + \langle \dot{\gamma}(b), V(b) \rangle - \langle \dot{\gamma}(a), V(a) \rangle.$$

Corollaire 4.28. Les points critiques de E parmi les courbes à extrémités fixes sont exactement les géodésiques. Les géodésiques sont donc les courbes critiques de la fonctionnelle d'énergie (et de longueur).

4.10 Complétude géodésique et théorème de Hopf–Rinow

Définition 4.29. (M, g) est géodésiquement complète si toute géodésique peut être prolongée pour tout temps $t \in \mathbb{R}$.

Nous rappelons que le théorème de Hopf–Rinow (Théorème 1.25) montre l'équivalence entre complétude métrique et complétude géodésique.

4.11 Exercices

Exercice 4.1. Calculer les géodésiques du cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$ muni de la métrique produit. Montrer que ce sont des hélices (y compris les cercles et les droites comme cas limites).

Exercice 4.2. Montrer que les géodésiques de $\mathbb{H}^2$ dans le modèle du disque de Poincaré sont les diamètres et les arcs de cercle orthogonaux au bord $\partial\mathbb{D}$.

Exercice 4.3. Soit $G = SU(2)$ muni de la métrique bi-invariante. Identifier $SU(2) \cong S^3$ et montrer que les géodésiques sont les grands cercles.

Exercice 4.4. Calculer le rayon d'injectivité du plan projectif réel $\mathbb{R}P^n$ muni de la métrique quotient de S^n .

Exercice 4.5. Montrer que sur une surface de révolution $g = du^2 + f(u)^2 dv^2$, les géodésiques vérifient la loi de Clairaut : $f(u(\gamma))^2 \dot{v}(\gamma) = c$ (constante le long de la géodésique).

Exercice 4.6. Démontrer la formule de la première variation de la longueur : si γ est paramétrée par longueur d'arc :

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} L(\gamma_s) = - \int_a^b \langle \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}, V \rangle dt + \langle \dot{\gamma}, V \rangle \Big|_a^b.$$

Chapitre 5

Courbure — Tenseur de Riemann

La courbure est la quantité qui distingue une géométrie d'une autre. Sur un plan, les droites parallèles restent parallèles ; sur une sphère, elles finissent par se rencontrer ; sur une surface en selle de cheval, elles divergent. Riemann a compris, dès 1854, que cette déviation des géodésiques est mesurée par un objet tensoriel — le *tenseur de courbure* — qui encode, en chaque point et dans chaque plan tangent, comment l'espace se courbe. Ce tenseur, formalisé par Christoffel et Ricci-Curbastro, est l'ingrédient central de la relativité générale d'Einstein : la courbure de l'espace-temps *est* la gravitation.

5.1 Le tenseur de courbure de Riemann

Définition 5.1 (Tenseur de courbure). Le *tenseur de courbure de Riemann* de la connexion de Levi-Civita ∇ est l'application $R : \mathfrak{X}(M)^3 \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ définie par :

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

La courbure mesure la non-commutativité

Le tenseur de Riemann mesure le défaut de commutativité de la dérivation covariante : si l'espace était plat, on aurait $\nabla_X \nabla_Y = \nabla_Y \nabla_X$ (modulo le crochet de Lie). La courbure est l'obstruction à ce que le transport parallèle soit indépendant du chemin.

Proposition 5.2. R est un tenseur de type $(1, 3)$: il est $C^\infty(M)$ -multilinéaire en X, Y et Z .

Démonstration. Vérifions la $C^\infty(M)$ -linéarité en Z (les autres sont similaires) :

$$\begin{aligned} R(X, Y)(fZ) &= \nabla_X \nabla_Y (fZ) - \nabla_Y \nabla_X (fZ) - \nabla_{[X, Y]}(fZ) \\ &= \nabla_X ((Yf)Z + f\nabla_Y Z) - \nabla_Y ((Xf)Z + f\nabla_X Z) - ([X, Y]f)Z - f\nabla_{[X, Y]} Z. \end{aligned}$$

En développant et simplifiant : les termes en Xf, Yf, XYf, YXf se compensent (en utilisant $[X, Y]f = XYf - YXf$), et il reste $fR(X, Y)Z$. $\square$

5.2 Expression en coordonnées

En coordonnées locales, $R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R_{kij}^l \partial_l$, avec :

$$R_{kij}^l = \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m.$$

On définit également le *tenseur de courbure abaissé* :

$$R_{ijkl} = g_{im} R_{jkl}^m,$$

de sorte que $R_{ijkl} = \langle R(\partial_k, \partial_l) \partial_j, \partial_i \rangle$.

Composantes du tenseur de Riemann

$$R_{kij}^l = \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m.$$

En coordonnées normales en p : $R_{kij}^l(p) = \partial_i \Gamma_{jk}^l(p) - \partial_j \Gamma_{ik}^l(p)$.

5.3 Symétries du tenseur de Riemann

Théorème 5.3 (Symétries fondamentales). *Le tenseur de courbure abaissé R_{ijkl} possède les symétries suivantes :*

1. **Antisymétrie en (k, l)** : $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$.
2. **Antisymétrie en (i, j)** : $R_{ijkl} = -R_{jikl}$.
3. **Symétrie par paires** : $R_{ijkl} = R_{klij}$.
4. **Première identité de Bianchi (algébrique)** : $R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0$.

En notation intrinsèque :

1. $R(X, Y) = -R(Y, X)$.
2. $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(X, Y)W, Z \rangle$.
3. $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle$.
4. $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$.

Démonstration. (1) est immédiat par définition ($R(X, Y) = -R(Y, X)$).

(2) Découle de la compatibilité avec la métrique. En effet :

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, Z \rangle &= \langle \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z, Z \rangle \\ &= X \langle \nabla_Y Z, Z \rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z \rangle - Y \langle \nabla_X Z, Z \rangle + \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z \rangle \\ &= \frac{1}{2} XY \langle Z, Z \rangle - \frac{1}{2} YX \langle Z, Z \rangle = \frac{1}{2} [X, Y] \langle Z, Z \rangle = \langle \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle. \end{aligned}$$

Donc $\langle R(X, Y)Z, Z \rangle = 0$, ce qui par polarisation donne (2).

(3) découle de (1), (2) et (4).

(4) Première identité de Bianchi : en utilisant l'absence de torsion et la définition, on développe les trois termes cycliques et on constate que la somme s'annule. $\square$

Proposition 5.4 (Nombre de composantes indépendantes). En dimension n , le nombre de composantes indépendantes du tenseur de Riemann est :

$$\frac{n^2(n^2 - 1)}{12}.$$

Pour $n = 2$: 1, pour $n = 3$: 6, pour $n = 4$: 20.

5.4 Identités de Bianchi

Théorème 5.5 (Seconde identité de Bianchi (différentielle)).

$$(\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Y R)(Z, X) + (\nabla_Z R)(X, Y) = 0.$$

En coordonnées : $\nabla_m R_{kij}^l + \nabla_i R_{kmj}^l + \nabla_j R_{kim}^l = 0$.

Démonstration. On travaille en coordonnées normales au point p où $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$. La dérivée covariante de R se réduit à la dérivée partielle, et le résultat découle d'un calcul direct utilisant la commutation des dérivées partielles. $\square$

Remarque 5.6. La seconde identité de Bianchi joue un rôle fondamental : contractée, elle donne la conservation du tenseur d'Einstein $G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}Sg_{ij}$ en relativité générale.

5.5 Courbure et transport parallèle

Théorème 5.7 (Interprétation via le transport parallèle). Soient X, Y deux champs de vecteurs qui commutent ($[X, Y] = 0$). Considérons le parallélogramme infinitésimal formé par les flots de sX et tY . Le transport parallèle d'un vecteur Z le long de ce parallélogramme donne, au second ordre :

$$Z_{\text{final}} - Z_{\text{initial}} = st R(X, Y)Z + O(s^2 + t^2).$$

Corollaire 5.8 (Platitude). (M, g) est plate ($R \equiv 0$) si et seulement si le transport parallèle est indépendant du chemin, si et seulement si (M, g) est localement isométrique à $\mathbb{R}^n$.

5.6 Champs de Jacobi

Définition 5.9 (Champ de Jacobi). Soit γ une géodésique. Un champ de vecteurs J le long de γ est un *champ de Jacobi* s'il satisfait l'équation de Jacobi :

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(\dot{\gamma}, J)\dot{\gamma} = 0.$$

Proposition 5.10. Les champs de Jacobi le long d'une géodésique forment un espace vectoriel de dimension $2n$, déterminé par les conditions initiales $J(0)$ et $\frac{DJ}{dt}(0)$.

Théorème 5.11 (Origine des champs de Jacobi). Les champs de Jacobi sont les champs de variation de familles de géodésiques : si γ_s est une famille lisse de géodésiques, alors $J(t) = \frac{\partial \gamma_s}{\partial s} \Big|_{s=0}$ est un champ de Jacobi le long de γ_0 .

Démonstration. Posons $T = \dot{\gamma}_s$ et $J = \frac{\partial \gamma_s}{\partial s}$. Comme $[T, J] = 0$ (symétrie de la variation) et $\nabla_T T = 0$ (équation des géodésiques) :

$$\frac{D^2 J}{dt^2} = \nabla_T \nabla_T J = \nabla_T \nabla_J T = \nabla_J \nabla_T T + R(T, J)T = R(T, J)T = -R(T, J)T.$$

D'où $\frac{D^2 J}{dt^2} + R(T, J)T = 0$. $\square$

Exemple 5.12 (Champs de Jacobi sur S^n). Sur S^n (courbure $K = 1$), le long d'un grand cercle γ paramétré par longueur d'arc, l'équation de Jacobi pour un champ orthogonal $J \perp \dot{\gamma}$ devient :

$$J''(t) + J(t) = 0,$$

de solution $J(t) = A \cos t + B \sin t$. Les points conjugués correspondent à $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}^*$.

Exemple 5.13 (Champs de Jacobi sur $\mathbb{H}^n$). Sur $\mathbb{H}^n$ (courbure $K = -1$), pour $J \perp \dot{\gamma}$:

$$J''(t) - J(t) = 0,$$

de solution $J(t) = A \cosh t + B \sinh t$. Il n'y a *pas* de points conjugués.

5.7 Calcul de la courbure sur les exemples

Exemple 5.14 (Courbure de S^2). En coordonnées sphériques, on calcule :

$$R_{212}^1 = \partial_1 \Gamma_{22}^1 - \partial_2 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{1m}^1 \Gamma_{22}^m - \Gamma_{2m}^1 \Gamma_{12}^m.$$

On obtient $R_{212}^1 = \sin^2 \theta$, d'où $R_{1212} = g_{11} R_{212}^1 = \sin^2 \theta$. La courbure de Gauss est $K = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} = 1$.

Exemple 5.15 (Courbure de $\mathbb{H}^2$). Avec la métrique $g = y^{-2}(dx^2 + dy^2)$, on calcule $R_{1212} = -1/y^4$, $\det(g) = 1/y^4$, d'où $K = -1$.

Exemple 5.16 (Courbure d'un groupe de Lie bi-invariant). Pour $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ invariants à gauche, avec $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$:

$$R(X, Y)Z = \frac{1}{4}[[X, Y], Z].$$

5.8 Formule de la seconde variation

Théorème 5.17 (Seconde variation de l'énergie). Soit $\gamma : [0, L] \rightarrow M$ une géodésique paramétrée par longueur d'arc et γ_s une variation à extrémités fixes avec champ de variation V . Alors :

$$\left. \frac{d^2}{ds^2} \right|_{s=0} E(\gamma_s) = \int_0^L \left(\left\| \frac{DV}{dt} \right\|^2 - \langle R(\dot{\gamma}, V)\dot{\gamma}, V \rangle \right) dt.$$

Définition 5.18 (Forme d'indice). La *forme d'indice* de la géodésique γ est la forme bilinéaire :

$$I(V, W) = \int_0^L \left(\left\langle \frac{DV}{dt}, \frac{DW}{dt} \right\rangle - \langle R(\dot{\gamma}, V)\dot{\gamma}, W \rangle \right) dt.$$

5.9 Exercices

Exercice 5.1. Vérifier la première identité de Bianchi $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ pour la sphère S^2 en coordonnées sphériques.

Exercice 5.2. Montrer qu'en dimension 2, le tenseur de Riemann est entièrement déterminé par la courbure de Gauss K : $R_{1212} = K(g_{11}g_{22} - g_{12}^2) = K \det(g)$.

Exercice 5.3. Calculer les champs de Jacobi le long d'une géodésique radiale du plan hyperbolique, et vérifier qu'il n'y a pas de points conjugués.

Exercice 5.4. Pour le groupe de Lie $SO(3)$ avec métrique bi-invariante, calculer $R(X, Y)Z$ pour une base orthonormée (X, Y, Z) de $\mathfrak{so}(3)$.

Exercice 5.5. Montrer que si (M, g) est plate, alors tout champ de Jacobi s'écrit $J(t) = A + tB$ pour des vecteurs parallèles A et B .

Exercice 5.6. Calculer le tenseur de Riemann du produit tordu $g = dt^2 + f(t)^2 g_{S^{n-1}}$ en fonction de f et de ses dérivées.

Chapitre 6

Courbures Sectionnelle, de Ricci, Scalaire

Le tenseur de Riemann est un objet riche mais complexe — en dimension n , il possède $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ composantes indépendantes. Pour extraire une information géométrique plus lisible, on contracte ce tenseur de différentes manières. La *courbure sectionnelle* mesure la courbure dans chaque plan tangent — c'est la généralisation directe de la courbure de Gauss des surfaces. La *courbure de Ricci*, obtenue par moyenne sur les plans contenant une direction donnée, contrôle la convergence ou la divergence des géodésiques et apparaît dans les équations d'Einstein. La *courbure scalaire*, dernière contraction, donne un unique nombre en chaque point. Ces trois niveaux de lecture forment la hiérarchie fondamentale de la géométrie riemannienne.

6.1 Courbure sectionnelle

Définition 6.1 (Courbure sectionnelle). Soit (M, g) une variété riemannienne et $\sigma \subset T_p M$ un 2-plan engendré par deux vecteurs linéairement indépendants u, v . La *courbure sectionnelle* de σ est :

$$K(\sigma) = K(u, v) = \frac{\langle R(u, v)v, u \rangle}{\|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2}.$$

Proposition 6.2. La courbure sectionnelle $K(u, v)$ ne dépend que du 2-plan $\sigma = \text{Vect}(u, v)$ et non du choix de base.

Démonstration. Si $(u', v') = (au + bv, cu + dv)$ est une autre base de σ avec $ad - bc \neq 0$, alors par les symétries de R : $\langle R(u', v')v', u' \rangle = (ad - bc)^2 \langle R(u, v)v, u \rangle$ et $\|u'\|^2 \|v'\|^2 - \langle u', v' \rangle^2 = (ad - bc)^2 (\|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2)$. Le quotient est donc invariant. $\square$

Théorème 6.3 (Détermination du tenseur de Riemann). *La courbure sectionnelle détermine complètement le tenseur de Riemann. Plus précisément, si $K(u, v)$ est connu pour tous les 2-plans, alors R est uniquement déterminé.*

Démonstration. La fonction $(u, v) \mapsto \langle R(u, v)v, u \rangle$ est une forme quadratique en chacune des variables u et v . Par les symétries de R , la connaissance de cette forme pour tous u, v détermine R_{ijkl} par polarisation. $\square$

6.2 Espaces à courbure constante

Définition 6.4. (M, g) est un *espace à courbure (sectionnelle) constante* κ si $K(\sigma) = \kappa$ pour tout 2-plan σ en tout point.

Théorème 6.5 (Forme du tenseur de Riemann). *Si $K \equiv \kappa$, alors :*

$$R(X, Y)Z = \kappa(\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y).$$

En coordonnées : $R_{ijkl} = \kappa(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$.

Espaces à courbure constante

Espace	κ	Modèle	Topologie
Sphère S^n	+1	$\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \ x\ = 1\}$	compacte, $\pi_1 = 0$
Euclidien $\mathbb{R}^n$	0	$\mathbb{R}^n$	non compacte, $\pi_1 = 0$
Hyperbolique $\mathbb{H}^n$	-1	demi-espace	non compacte, $\pi_1 = 0$

Théorème 6.6 (Classification – Killing–Hopf). *Soit (M, g) une variété riemannienne complète simplement connexe de courbure sectionnelle constante κ . Alors (M, g) est isométrique à :*

- $S^n(1/\sqrt{\kappa})$ si $\kappa > 0$,
- $\mathbb{R}^n$ si $\kappa = 0$,
- $\mathbb{H}^n(1/\sqrt{-\kappa})$ si $\kappa < 0$.

Toute variété complète de courbure constante est un quotient de ces espaces par un sous-groupe discret d'isométries agissant librement et proprement.

6.3 Courbure de Ricci

Définition 6.7 (Tenseur de Ricci). Le *tenseur de Ricci* est la contraction du tenseur de Riemann :

$$\text{Ric}(X, Y) = \text{tr}(Z \mapsto R(Z, X)Y).$$

En coordonnées : $R_{ij} = R_{ikj}^k = g^{kl}R_{kilj}$.

Proposition 6.8. Le tenseur de Ricci est symétrique : $\text{Ric}(X, Y) = \text{Ric}(Y, X)$, i.e. $R_{ij} = R_{ji}$.

Démonstration. $R_{ij} = g^{kl}R_{kilj}$. Par la symétrie par paires $R_{kilj} = R_{ljki}$, et par l'antisymétrie $R_{ljki} = R_{jlki} \cdot (-1) \cdot (-1) = R_{ljki}$. On obtient $R_{ij} = R_{ji}$ par la symétrie $R_{kilj} = R_{kjli}$... plus directement, en base orthonormée : $R_{ij} = \sum_k R_{kikj}$ et $R_{ji} = \sum_k R_{kjk i} = \sum_k R_{kikj} = R_{ij}$. $\square$

Proposition 6.9 (Interprétation géométrique). Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de $T_p M$ avec $e_1 = v/\|v\|$, alors :

$$\text{Ric}(v, v) = \|v\|^2 \sum_{i=2}^n K(v, e_i).$$

La courbure de Ricci dans la direction v est la *somme des courbures sectionnelles* des 2-plans contenant v .

Exemple 6.10 (Ricci de S^n). Toutes les courbures sectionnelles valent 1, donc : $\text{Ric}(v, v) = (n - 1) \|v\|^2$, i.e. $\text{Ric} = (n - 1)g$.

Exemple 6.11 (Ricci de $\mathbb{H}^n$). $\text{Ric} = -(n - 1)g$.

Exemple 6.12 (Ricci d'un groupe de Lie bi-invariant). Avec $R(X, Y)Z = \frac{1}{4}[[X, Y], Z]$, on obtient :

$$\text{Ric}(X, Y) = -\frac{1}{4}\text{tr}(\text{ad}_X \circ \text{ad}_Y) = -\frac{1}{4}B(X, Y),$$

où B est la forme de Killing de $\mathfrak{g}$.

6.4 Courbure scalaire

Définition 6.13 (Courbure scalaire). La *courbure scalaire* est la trace du tenseur de Ricci :

$$S = \text{Scal} = \text{tr}_g \text{Ric} = g^{ij} R_{ij}.$$

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée : $S = \sum_{i=1}^n \text{Ric}(e_i, e_i) = \sum_{i \neq j} K(e_i, e_j) = 2 \sum_{i < j} K(e_i, e_j)$.

Exemple 6.14. Pour S^n : $S = n(n - 1)$. Pour $\mathbb{H}^n$: $S = -n(n - 1)$. Pour $\mathbb{R}^n$: $S = 0$.

6.5 Variétés d'Einstein

Définition 6.15 (Variété d'Einstein). (M, g) est une *variété d'Einstein* si le tenseur de Ricci est proportionnel à la métrique :

$$\text{Ric} = \lambda g$$

pour une constante $\lambda \in \mathbb{R}$. En prenant la trace : $S = n\lambda$, d'où $\lambda = S/n$.

Exemple 6.16. Les espaces à courbure constante sont des variétés d'Einstein avec $\lambda = (n - 1)\kappa$.

Théorème 6.17 (Schur). Si $n \geq 3$ et la courbure sectionnelle est constante en chaque point (i.e. $K_p(\sigma) = f(p)$ pour tout 2-plan σ en p), alors f est constante sur M (i.e. (M, g) est à courbure constante).

Plus généralement, si $n \geq 3$ et $\text{Ric} = f g$ avec $f \in C^\infty(M)$, alors f est constante.

Démonstration. De $\text{Ric} = f g$, on tire $S = nf$ et la seconde identité de Bianchi contractée donne :

$$\nabla^j R_{ij} = \frac{1}{2} \nabla_i S.$$

Or $\nabla^j R_{ij} = \nabla^j (f g_{ij}) = (\nabla_j f) g^{ij} \cdot g_{ij} = \nabla_i f$. D'où $\nabla_i f = \frac{1}{2} \nabla_i (nf) = \frac{n}{2} \nabla_i f$, soit $(1 - n/2) \nabla_i f = 0$. Pour $n \geq 3$, cela implique $\nabla f = 0$. $\square$

6.6 Tenseur de Weyl

Définition 6.18 (Tenseur de Weyl). Pour $n \geq 3$, le *tenseur de Weyl* W est la partie du tenseur de Riemann qui n'est pas déterminée par Ricci :

$$R_{ijkl} = W_{ijkl} + \frac{1}{n-2} (R_{ik}g_{jl} - R_{il}g_{jk} + R_{jl}g_{ik} - R_{jk}g_{il}) - \frac{S}{(n-1)(n-2)} (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}).$$

Proposition 6.19. Le tenseur de Weyl est invariant conforme : si $\tilde{g} = e^{2\varphi}g$, alors $\tilde{W}_{jkl}^i = W_{jkl}^i$.

Proposition 6.20. $W \equiv 0$ si et seulement si $n \leq 3$, ou si $n \geq 4$ et (M, g) est *conformément plate* (localement conforme à $\mathbb{R}^n$).

6.7 Calculs sur les produits tordus

Proposition 6.21 (Courbure du produit tordu). Sur $B \times_f F$ avec $g = g_B + f^2 g_F$, si $\dim B = 1$ (i.e. $B = I \subset \mathbb{R}$, $g_B = dt^2$) :

1. Pour V, W tangents à F : $K(V, W) = \frac{K_F(V, W) - (f')^2}{f^2}$.
2. Pour V tangent à F et ∂_t tangent à B : $K(\partial_t, V) = -\frac{f''}{f}$.

Exemple 6.22 (Courbure de $\mathbb{R}^n$ en coordonnées polaires). $g = dr^2 + r^2 g_{S^{n-1}}$, donc $f(r) = r$, $f' = 1$, $f'' = 0$. $K(\partial_r, V) = 0$ et $K(V, W) = \frac{1-r^2}{r^2} = 0$. Tout est plat.

Exemple 6.23 (Courbure de S^n en coordonnées géodésiques). $g = dr^2 + \sin^2 r g_{S^{n-1}}$, $f(r) = \sin r$, $f'' = -\sin r$. $K(\partial_r, V) = -\frac{\sin r}{\sin r} = -1$ et $K(V, W) = \frac{1-\cos^2 r}{\sin^2 r} = 1$.

Exemple 6.24 (Courbure de $\mathbb{H}^n$ en coordonnées géodésiques). $g = dr^2 + \sinh^2 r g_{S^{n-1}}$, $f(r) = \sinh r$, $f'' = \sinh r$. $K(\partial_r, V) = -\frac{\sinh r}{\sinh r} = -1$ et $K(V, W) = \frac{1-\cosh^2 r}{\sinh^2 r} = -1$.

6.8 Identité de Bianchi contractée

Théorème 6.25 (Identité de Bianchi contractée).

$$\nabla^j R_{ij} = \frac{1}{2} \nabla_i S,$$

ou de manière équivalente, le tenseur d'Einstein $G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} S g_{ij}$ est à divergence nulle : $\nabla^j G_{ij} = 0$.

Remarque 6.26. Cette identité est fondamentale en relativité générale, où les équations d'Einstein s'écrivent $G_{ij} = 8\pi T_{ij}$, et la conservation de l'énergie-impulsion $\nabla^j T_{ij} = 0$ est automatique.

6.9 Exercices

Exercice 6.1. Calculer la courbure sectionnelle, le tenseur de Ricci et la courbure scalaire du tore $S^1(r_1) \times S^1(r_2)$ avec la métrique produit.

Exercice 6.2. Montrer que si (M, g) est de dimension 2, alors $\text{Ric} = K g$ et $S = 2K$.

Exercice 6.3. Montrer que $\mathbb{C}P^n$ muni de la métrique de Fubini–Study est une variété d'Einstein avec $\lambda = 2(n + 1)$.

Exercice 6.4. Calculer le tenseur de Weyl de $S^2 \times S^2$ et montrer qu'il n'est pas conformément plat pour $n = 4$.

Exercice 6.5. Pour le produit tordu $g = dt^2 + e^{2t}g_{\mathbb{R}^{n-1}}$, calculer toutes les courbures sectionnelles, le tenseur de Ricci et la courbure scalaire.

Exercice 6.6. Montrer le théorème de Schur en dimension 3 en utilisant la seconde identité de Bianchi. Donner un contre-exemple montrant que le théorème est faux en dimension 2.

Chapitre 7

Théorèmes de Comparaison

7.1 Introduction et motivation

L'une des idées les plus fécondes de la géométrie riemannienne repose sur un principe remarquablement simple : si l'on sait que la courbure d'une variété est bornée, alors sa géométrie ne peut pas s'écarter trop de celle d'un espace « modèle » de courbure constante. Ce programme de comparaison, initié par Harry Rauch dans les années 1950 puis développé par Marcel Berger, Wilhelm Klingenberg, Jeff Cheeger et Detlef Gromoll dans les décennies suivantes, a produit certains des résultats les plus profonds de la géométrie globale. Le théorème de Rauch compare le comportement des champs de Jacobi ; celui de Bishop–Gromov compare les volumes ; celui de Toponogov compare les triangles. Chacun extrait des conclusions géométriques globales à partir d'une hypothèse locale sur la courbure, illustrant la puissance de la courbure comme invariant de contrôle.

7.2 Équation de Jacobi et solutions modèles

Rappelons que le long d'une géodésique γ paramétrée par longueur d'arc, un champ de Jacobi orthogonal $J \perp \dot{\gamma}$ satisfait :

$$J'' + K(t) J = 0,$$

où $K(t)$ représente la courbure sectionnelle du plan $(\dot{\gamma}, J)$.

Définition 7.1 (Solutions modèles). Pour $\kappa \in \mathbb{R}$, la solution de $f'' + \kappa f = 0$ avec $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ est :

$$\text{sn}_{\kappa}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sin(\sqrt{\kappa} t) & \text{si } \kappa > 0, \\ t & \text{si } \kappa = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-\kappa}} \sinh(\sqrt{-\kappa} t) & \text{si } \kappa < 0. \end{cases}$$

Fonctions de comparaison

$$\begin{aligned} \text{sn}_{\kappa}(t) &= \text{solution de } f'' + \kappa f = 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \\ \text{cn}_{\kappa}(t) &= \text{sn}'_{\kappa}(t) = \text{solution de } f'' + \kappa f = 0, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0. \end{aligned}$$

7.3 Lemme de comparaison de Sturm

Lemme 7.2 (Sturm). *Soient f et g deux solutions des équations :*

$$f'' + K_1(t)f = 0, \quad g'' + K_2(t)g = 0,$$

avec $f(0) = g(0) = 0$, $f'(0) = g'(0) = 1$, et $K_1(t) \geq K_2(t)$.

Alors $f(t) \leq g(t)$ sur l'intervalle $[0, t_1]$ où t_1 est le premier zéro de f .

Démonstration. On considère la fonction $h = f'g - fg'$. On a $h(0) = 0$ et :

$$h' = f''g - fg'' = -K_1fg + K_2fg = (K_2 - K_1)fg \leq 0,$$

tant que $f \geq 0$ et $g \geq 0$. Donc $h \leq 0$, i.e. $f'/f \leq g'/g$ (quand $f, g > 0$). Intégrant : $\ln f - \ln g$ est décroissante, et comme $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)/g(t) = 1$, on obtient $f \leq g$. $\square$

7.4 Théorème de comparaison de Rauch

Théorème 7.3 (Rauch). *Soient (M, g) et $(\bar{M}, \bar{g})$ deux variétés riemanniennes, et $\gamma : [0, L] \rightarrow M$, $\bar{\gamma} : [0, L] \rightarrow \bar{M}$ deux géodésiques paramétrées par longueur d'arc, sans points conjugués. Supposons que :*

$$K_M(\dot{\gamma}, \cdot) \leq K_{\bar{M}}(\dot{\bar{\gamma}}, \cdot).$$

Si J et $\bar{J}$ sont des champs de Jacobi orthogonaux le long de γ et $\bar{\gamma}$ avec $J(0) = \bar{J}(0) = 0$ et $\|J'(0)\| = \|\bar{J}'(0)\|$, alors :

$$\|J(t)\| \geq \|\bar{J}(t)\|, \quad \forall t \in [0, L].$$

Idée de la preuve. On considère le quotient $u(t) = \|J(t)\| / \text{sn}_\kappa(t)$ où κ est la borne inférieure de la courbure. Par le lemme de Sturm, on compare $\|J\|$ avec la solution modèle. La clé est l'inégalité :

$$\frac{d}{dt} \frac{\|J\|'}{\|J\|} \leq -K(t),$$

qui se déduit de l'équation de Jacobi et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On conclut par le théorème de comparaison de Sturm. $\square$

Corollaire 7.4 (Comparaison avec l'espace modèle). *Si $K_M \leq \kappa$ (borne supérieure), alors :*

$$\|J(t)\| \geq \text{sn}_\kappa(t) \|J'(0)\|.$$

Si $K_M \geq \kappa$ (borne inférieure), alors :

$$\|J(t)\| \leq \text{sn}_\kappa(t) \|J'(0)\|.$$

7.5 Théorème de Toponogov

Théorème 7.5 (Toponogov – version globale). *Soit (M, g) une variété riemannienne complète avec $K \geq \kappa$. Soit $\triangle(p, q, r)$ un triangle géodésique dans M (formé de trois géodésiques minimisantes). Soit $\bar{\triangle}(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$ un triangle de comparaison dans M_κ (mêmes longueurs de côtés). Alors :*

Version angles : Les angles du triangle dans M sont supérieurs ou égaux aux angles correspondants du triangle de comparaison :

$$\angle_p(q, r) \geq \bar{\angle}_{\bar{p}}(\bar{q}, \bar{r}).$$

Version distances : Pour tout point x sur le côté $[q, r]$ et le point correspondant $\bar{x}$ sur $[\bar{q}, \bar{r}]$ (mêmes proportions) :

$$d(p, x) \leq d(\bar{p}, \bar{x}).$$

Conditions d'application de Toponogov

Le théorème de Toponogov requiert :

1. La complétude de (M, g) .
2. Une borne *inférieure* sur la courbure sectionnelle.
3. Les côtés du triangle sont des géodésiques *minimisantes*.
4. Si $\kappa > 0$, le périmètre du triangle ne dépasse pas $2\pi/\sqrt{\kappa}$.

Corollaire 7.6. Si $K \geq 0$ (courbure non négative), les triangles géodésiques sont « plus gros » que les triangles euclidiens correspondants : les angles sont plus grands et les « médianes » plus courtes.

7.6 Théorème de comparaison de Bishop–Gromov

Théorème 7.7 (Bishop–Gromov). Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète avec $\text{Ric} \geq (n-1)\kappa$. Soit $V_\kappa(r)$ le volume de la boule de rayon r dans l'espace modèle M_κ^n . Alors la fonction :

$$r \mapsto \frac{\text{Vol}(B(p, r))}{V_\kappa(r)}$$

est décroissante pour $r > 0$, et tend vers 1 quand $r \rightarrow 0$.

En particulier :

$$\text{Vol}(B(p, r)) \leq V_\kappa(r), \quad \forall r > 0.$$

Idée de la preuve. En coordonnées polaires géodésiques : $\text{Vol}(B(p, r)) = \int_{S^{n-1}} \int_0^{\min(r, c(v))} \mathcal{A}(t, v) dt d\sigma(v)$, où $\mathcal{A}(t, v)$ est le jacobien de $\exp_p$ et $c(v)$ la distance au point de coupure. Par l'équation de Jacobi et la borne $\text{Ric} \geq (n-1)\kappa$, on montre que $\mathcal{A}(t, v)/\mathcal{A}_\kappa(t)$ est décroissante en t , où $\mathcal{A}_\kappa(t) = \text{sn}_\kappa(t)^{n-1}$ est le jacobien de l'espace modèle. $\square$

Corollaire 7.8 (Comparaison de volumes). Sous les hypothèses du théorème, pour $0 < r \leq R$:

$$\frac{\text{Vol}(B(p, R))}{\text{Vol}(B(p, r))} \leq \frac{V_\kappa(R)}{V_\kappa(r)}.$$

Corollaire 7.9 (Croissance du volume). Si $\text{Ric} \geq 0$, alors $\text{Vol}(B(p, r)) \leq \omega_n r^n$ (volume euclidien).

7.7 Application : théorème de Cheng

Théorème 7.10 (Cheng). *Soit (M^n, g) complète avec $\text{Ric} \geq (n-1)\kappa > 0$. Si $\text{diam}(M) = \pi/\sqrt{\kappa}$ (égalité dans Bonnet–Myers), alors M est isométrique à $S^n(1/\sqrt{\kappa})$.*

7.8 Théorème de comparaison de Laplacien

Théorème 7.11 (Comparaison du laplacien). *Soit (M^n, g) avec $\text{Ric} \geq (n-1)\kappa$. La fonction distance $r(x) = d(p, x)$ vérifie, au sens des distributions :*

$$\Delta r \leq (n-1) \frac{\text{cn}_\kappa(r)}{\text{sn}_\kappa(r)}.$$

Pour $\kappa = 0$: $\Delta r \leq \frac{n-1}{r}$. Pour $\kappa = 1$: $\Delta r \leq (n-1) \cot r$. Pour $\kappa = -1$: $\Delta r \leq (n-1) \coth r$.

7.9 Théorème de Gromov sur le nombre de générateurs

Théorème 7.12 (Gromov). *Si (M^n, g) est complète avec $\text{Ric} \geq 0$, alors le groupe fondamental $\pi_1(M)$ est engendré par au plus $C(n)$ éléments, où $C(n)$ ne dépend que de la dimension.*

7.10 Espace de Gromov–Hausdorff

Définition 7.13 (Distance de Gromov–Hausdorff). *La distance de Gromov–Hausdorff entre deux espaces métriques compacts (X, d_X) et (Y, d_Y) est :*

$$d_{GH}(X, Y) = \inf\{d_H(\varphi(X), \psi(Y))\},$$

où l'infimum porte sur toutes les isométries $\varphi : X \rightarrow Z$, $\psi : Y \rightarrow Z$ dans un espace métrique (Z, d_Z) , et d_H est la distance de Hausdorff.

Théorème 7.14 (Pré-compacité de Gromov). *L'ensemble des variétés riemanniennes (M^n, g) vérifiant $\text{Ric} \geq (n-1)\kappa$ et $\text{diam}(M) \leq D$ est pré-compact pour la distance de Gromov–Hausdorff.*

7.11 Exercices

Exercice 7.1. Vérifier le théorème de Bishop–Gromov pour les boules de S^n de courbure 1, en calculant explicitement $\text{Vol}(B(p, r))$ et en comparant avec $V_1(r)$.

Exercice 7.2. Montrer que si (M, g) est complète avec $K \geq 1$, alors $\text{diam}(M) \leq \pi$.

Exercice 7.3. Appliquer le théorème de Toponogov pour montrer que si $K \geq 0$ et M est non compacte, alors M contient une droite géodésique (théorème de la droite).

Exercice 7.4. Utiliser la comparaison de volumes pour montrer que si $\text{Ric} \geq 0$ et $\text{Vol}(B(p, r)) \geq cr^n$ pour un $c > 0$ et tout r , alors M a au plus un nombre fini de bouts.

Exercice 7.5. Calculer la comparaison de Laplacien pour la fonction distance sur $\mathbb{H}^3$ et vérifier qu'on obtient $\Delta r = 2 \coth r$.

Exercice 7.6. Montrer que si $K \leq 0$ et M est simplement connexe, alors il n'y a pas de points conjugués (en utilisant le théorème de comparaison de Rauch).

Chapitre 8

Espaces Symétriques

Élie Cartan, dans les années 1920–1930, entreprend l’une des classifications les plus ambitieuses de la géométrie : celle des espaces riemanniens dont la courbure est “la même en tout point et dans toute direction” au sens où la symétrie géodésique en chaque point est une isométrie globale. Ces *espaces symétriques* englobent les espaces de courbure constante (sphères, espaces hyperboliques), les espaces projectifs, les grassmanniennes, et bien d’autres. Cartan montre que leur classification se ramène à celle des algèbres de Lie semi-simples, établissant un pont profond entre géométrie et algèbre. Aujourd’hui, les espaces symétriques apparaissent en physique théorique, en théorie des nombres et en apprentissage automatique (optimisation sur les variétés de Stiefel et de Grassmann).

8.1 Définition et premiers exemples

Définition 8.1 (Espace symétrique riemannien). Une variété riemannienne complète (M, g) est un *espace symétrique riemannien* si pour tout point $p \in M$, il existe une isométrie involutive $s_p : M \rightarrow M$ telle que :

1. $s_p(p) = p$ (point fixe).
2. $(ds_p)_p = -\text{Id}_{T_p M}$ (la différentielle est $-\text{Id}$).

L’isométrie s_p est appelée la *symétrie géodésique* en p .

Remarque 8.2. La condition $(ds_p)_p = -\text{Id}$ implique que s_p renverse toutes les géodésiques passant par p : $s_p(\gamma(t)) = \gamma(-t)$.

Exemple 8.3 (Espaces modèles). • $\mathbb{R}^n$: $s_p(x) = 2p - x$ (symétrie centrale).

- S^n : s_p est la réflexion par rapport au sous-espace passant par p et le centre.
- $\mathbb{H}^n$: dans le modèle du disque, s_0 est l’inversion $x \mapsto -x$.

Exemple 8.4 (Espaces projectifs). $\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{C}P^n$, $\mathbb{H}P^n$ (espace projectif quaternionique) et le plan de Cayley $\mathbb{O}P^2$ sont des espaces symétriques compacts de rang 1.

Exemple 8.5 (Groupes de Lie compacts). Tout groupe de Lie compact G muni d’une métrique bi-invariante est un espace symétrique. La symétrie en l’élément neutre est $s_e(g) = g^{-1}$.

8.2 Structure de paire symétrique

Définition 8.6 (Paire symétrique). Une *paire symétrique riemannienne* est un couple (G, K) où :

- G est un groupe de Lie connexe.
- K est un sous-groupe compact de G .
- Il existe un automorphisme involutif $\sigma : G \rightarrow G$ tel que $(G^\sigma)_0 \subset K \subset G^\sigma$, où G^σ est le sous-groupe des points fixes de σ .

Théorème 8.7 (Correspondance fondamentale). *Il y a une correspondance bijective entre :*

1. Les espaces symétriques simplement connexes (M, g) .
2. Les paires symétriques effectives (G, K, σ) avec G simplement connexe.

L'espace symétrique est $M = G/K$ et la métrique est induite par un produit scalaire $\text{Ad}(K)$ -invariant sur $\mathfrak{p}$.

8.3 Décomposition de Cartan

Définition 8.8 (Décomposition de Cartan). Soit $\sigma : G \rightarrow G$ l'involution et $\sigma_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ sa différentielle. L'algèbre de Lie se décompose en espaces propres :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p},$$

où $\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} : \sigma_*(X) = X\}$ (espace propre $+1$) et $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} : \sigma_*(X) = -X\}$ (espace propre -1).

Proposition 8.9 (Relations de crochets). Les crochets de Lie satisfont :

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}.$$

Démonstration. Si $X, Y \in \mathfrak{k}$, alors $\sigma_*[X, Y] = [\sigma_*X, \sigma_*Y] = [X, Y]$, donc $[X, Y] \in \mathfrak{k}$. Si $X \in \mathfrak{k}, Y \in \mathfrak{p}$, alors $\sigma_*[X, Y] = [X, -Y] = -[X, Y]$, donc $[X, Y] \in \mathfrak{p}$. Si $X, Y \in \mathfrak{p}$, alors $\sigma_*[X, Y] = [-X, -Y] = [X, Y]$, donc $[X, Y] \in \mathfrak{k}$. $\square$

L'espace tangent à $M = G/K$ au point base $o = eK$ s'identifie à $\mathfrak{p}$, et la métrique riemannienne est un produit scalaire $\text{Ad}(K)$ -invariant sur $\mathfrak{p}$.

8.4 Courbure des espaces symétriques

Théorème 8.10 (Formule de courbure). *Sur l'espace symétrique $M = G/K$, la connexion de Levi-Civita vérifie, pour $X, Y \in \mathfrak{p} \cong T_oM$:*

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]_{\mathfrak{p}} = 0,$$

car $[X, Y] \in \mathfrak{k}$ et la projection sur $\mathfrak{p}$ est nulle. Le tenseur de courbure est :

$$R(X, Y)Z = -[[X, Y], Z], \quad X, Y, Z \in \mathfrak{p}.$$

Corollaire 8.11. *La courbure d'un espace symétrique est entièrement déterminée par les crochets de Lie. En particulier, $\nabla R = 0$ (la courbure est parallèle).*

Théorème 8.12 (Caractérisation par $\nabla R = 0$). *Une variété riemannienne complète simplement connexe (M, g) est un espace symétrique si et seulement si $\nabla R = 0$.*

Proposition 8.13 (Courbure sectionnelle). Pour $X, Y \in \mathfrak{p}$ orthonormés :

$$K(X, Y) = \langle [[X, Y], X], Y \rangle = \|[X, Y]\|^2 \geq 0$$

si la métrique provient de la forme de Killing changée de signe (type compact). Pour le type non compact, $K(X, Y) = -\|[X, Y]\|^2 \leq 0$.

8.5 Classification des espaces symétriques

Théorème 8.14 (Décomposition de de Rham). *Tout espace symétrique simplement connexe se décompose de manière unique en produit :*

$$M = M_0 \times M_1 \times \cdots \times M_k,$$

où $M_0 = \mathbb{R}^p$ est le facteur euclidien et les M_i ($i \geq 1$) sont des espaces symétriques irréductibles.

Définition 8.15 (Types d'espaces symétriques). Les espaces symétriques irréductibles se classent en :

- **Type compact** : $K \geq 0$, G compact. Exemple : S^n , $\mathbb{C}P^n$.
- **Type non compact** : $K \leq 0$, G non compact. Exemple : $\mathbb{H}^n$, $SL(n, \mathbb{R})/SO(n)$.
- **Dualité** : à tout espace compact correspond un espace non compact « dual ».

Exemples d'espaces symétriques irréductibles

Espace	G/K	Type	dim
Sphère S^n	$SO(n+1)/SO(n)$	compact	n
$\mathbb{C}P^n$	$SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$	compact	$2n$
Grassmannienne	$SO(p+q)/S(O(p) \times O(q))$	compact	pq
$\mathbb{H}^n$	$SO_0(n, 1)/SO(n)$	non compact	n
$SL(n, \mathbb{R})/SO(n)$		non compact	$\frac{n(n+1)}{2} - 1$

8.6 Rang et sous-espaces plats

Définition 8.16 (Rang). Le *rang* d'un espace symétrique est la dimension maximale d'un sous-espace abélien $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ (i.e. $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = 0$). Géométriquement, c'est la dimension du plus grand sous-espace totalement géodésique plat.

Exemple 8.17. S^n et $\mathbb{H}^n$ sont de rang 1. $SL(n, \mathbb{R})/SO(n)$ est de rang $n - 1$. La Grassmannienne $G_{p,q}$ est de rang $\min(p, q)$.

8.7 Géodésiques et structure de groupe

Proposition 8.18 (Géodésiques). Les géodésiques de $M = G/K$ passant par $o = eK$ sont les courbes $t \mapsto \exp(tX) \cdot o$ pour $X \in \mathfrak{p}$.

Proposition 8.19 (Transport parallèle). Le transport parallèle le long d'une géodésique $\gamma(t) = \exp(tX) \cdot o$ est donné par l'action de $\exp(tX)$ sur $T_o M \cong \mathfrak{p}$.

Théorème 8.20 (Holonomie). *Le groupe d'holonomie restreint d'un espace symétrique irréductible est $\text{Hol}^0(M) = K$ (la composante connexe). La classification de Berger des groupes d'holonomie des variétés irréductibles non symétriques complète celle des espaces symétriques.*

8.8 Espaces symétriques de rang 1

Les espaces symétriques compacts simplement connexes de rang 1 sont :

1. $S^n = SO(n+1)/SO(n)$, courbure $K = 1$.
2. $\mathbb{C}P^n = SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$, courbure $\frac{1}{4} \leq K \leq 1$.
3. $\mathbb{H}P^n = Sp(n+1)/(Sp(1) \times Sp(n))$, courbure $\frac{1}{4} \leq K \leq 1$.
4. $\mathbb{O}P^2 = F_4/\text{Spin}(9)$, courbure $\frac{1}{4} \leq K \leq 1$.

Remarque 8.21. Pour $\mathbb{C}P^n$, la courbure sectionnelle varie entre $1/4$ et 1 . Le minimum $1/4$ est atteint sur les plans totalement réels, le maximum 1 sur les plans holomorphes.

8.9 Exercices

Exercice 8.1. Montrer que la sphère S^n est un espace symétrique en exhibant explicitement la symétrie s_p en tout point p .

Exercice 8.2. Calculer la décomposition de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ pour $S^2 = SO(3)/SO(2)$ et vérifier les relations de crochets.

Exercice 8.3. Montrer que pour le groupe de Lie G muni d'une métrique bi-invariante vu comme espace symétrique $(G \times G)/\text{diag}(G)$, la courbure sectionnelle vérifie $K(X, Y) = \frac{1}{4} \|[X, Y]\|^2$.

Exercice 8.4. Montrer que $\mathbb{C}P^n$ est un espace symétrique et calculer sa courbure sectionnelle. Vérifier que $1/4 \leq K \leq 1$.

Exercice 8.5. Montrer que $SL(2, \mathbb{R})/SO(2) \cong \mathbb{H}^2$ en exhibant une isométrie explicite.

Exercice 8.6. Déterminer le rang de la Grassmannienne $G_{2,3}(\mathbb{R}) = SO(5)/(SO(2) \times SO(3))$.

Chapitre 9

Théorèmes de Bonnet-Myers et Synge

9.1 Introduction et motivations

Peut-on déduire la forme globale d'un univers à partir de mesures locales de sa courbure ? C'est précisément ce que font les théorèmes de Bonnet–Myers et de Synge, deux joyaux de la géométrie riemannienne globale. Le théorème de Bonnet (1855), redécouvert et généralisé par Myers en 1941, affirme qu'une variété complète dont la courbure de Ricci est strictement positive est nécessairement compacte et de diamètre fini. Autrement dit, la courbure positive “referme” l'espace sur lui-même. Le théorème de Synge (1936) va plus loin : une variété riemannienne compacte de dimension paire et de courbure sectionnelle strictement positive est simplement connexe. Ces résultats illustrent de manière spectaculaire comment la courbure contrôle la topologie.

Intuition

L'idée directrice est que la courbure positive « rapproche » les géodésiques, empêchant la variété de s'étendre à l'infini. Plus précisément :

- La courbure de Ricci positive uniformément bornée inférieurement force un **diamètre fini**, donc la compacité.
- La courbure sectionnelle strictement positive en dimension paire contraint l'**orientabilité** et la **simple connexité**.

9.2 Rappels sur les champs de Jacobi et la courbure de Ricci

Définition 9.1 (Courbure de Ricci). Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n . La *courbure de Ricci* est la trace du tenseur de courbure :

$$\text{Ric}(u, v) = \sum_{i=1}^n g(R(e_i, u)v, e_i),$$

où $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de $T_p M$.

Remarque 9.2. La courbure de Ricci $\text{Ric}(v, v)$ pour $\|v\| = 1$ est la somme des courbures sectionnelles $K(\sigma_i)$ des plans engendrés par v et e_i , pour $i \neq j$ où $e_j = v$. C'est donc une « moyenne » de la courbure sectionnelle.

Définition 9.3 (Champ de Jacobi). Soit $\gamma : [0, L] \rightarrow M$ une géodésique. Un *champ de Jacobi* le long de γ est un champ de vecteurs J le long de γ vérifiant l'équation de Jacobi :

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0.$$

Proposition 9.4 (Indice d'un champ de Jacobi). L'indice d'une géodésique $\gamma : [0, L] \rightarrow M$ est la forme bilinéaire :

$$I(V, W) = \int_0^L \left[g\left(\frac{DV}{dt}, \frac{DW}{dt}\right) - g(R(V, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, W) \right] dt,$$

définie sur les champs de vecteurs le long de γ s'annulant aux extrémités.

9.3 Le théorème de Bonnet-Myers

Théorème 9.5 (Bonnet-Myers). Soit (M, g) une variété riemannienne complète de dimension $n \geq 2$. Si la courbure de Ricci vérifie :

$$\text{Ric}(v, v) \geq (n-1)\kappa > 0 \quad \forall v \in TM, \|v\| = 1,$$

alors :

1. Le diamètre de M vérifie $\text{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$.
2. M est compacte.
3. Le groupe fondamental $\pi_1(M)$ est fini.

Démonstration. Étape 1 : Borne sur le diamètre. Soient $p, q \in M$ et $\gamma : [0, L] \rightarrow M$ une géodésique minimisante de p à q , paramétrée par longueur d'arc. Supposons par l'absurde que $L > \pi/\sqrt{\kappa}$.

Choisissons une base orthonormée $(e_1, \dots, e_{n-1}, \dot{\gamma}(0))$ de $T_p M$ et considérons les champs de vecteurs obtenus par transport parallèle : $E_i(t) = P_{0,t}(e_i)$ pour $i = 1, \dots, n-1$. Définissons les variations :

$$V_i(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{L}\right) E_i(t).$$

Chaque V_i s'annule en $t = 0$ et $t = L$. Calculons la forme d'indice :

$$I(V_i, V_i) = \int_0^L \left[\frac{\pi^2}{L^2} \cos^2\left(\frac{\pi t}{L}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi t}{L}\right) K(E_i, \dot{\gamma}) \right] dt,$$

où $K(E_i, \dot{\gamma})$ désigne la courbure sectionnelle du plan $(E_i, \dot{\gamma})$. En sommant sur $i = 1, \dots, n-1$:

$$\sum_{i=1}^{n-1} I(V_i, V_i) = \int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi t}{L}\right) \left[\frac{(n-1)\pi^2}{L^2} - \text{Ric}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \right] dt.$$

Si $\text{Ric}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \geq (n-1)\kappa$ et $L > \pi/\sqrt{\kappa}$, alors $(n-1)\pi^2/L^2 < (n-1)\kappa$, donc la somme est strictement négative. Ainsi au moins un $I(V_i, V_i) < 0$, ce qui signifie que γ n'est pas minimisante — contradiction.

Étape 2 : Compacité. Comme M est complète et de diamètre fini, elle est bornée. Par le théorème de Hopf-Rinow, les fermés bornés d'une variété complète sont compacts, donc M est compacte.

Étape 3 : Finitude de $\pi_1(M)$. Le revêtement universel $\widetilde{M}$ hérite de la métrique pullback, qui satisfait la même borne de courbure de Ricci. Par les étapes précédentes, $\widetilde{M}$ est compacte. Le revêtement $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ est donc fini, ce qui implique $|\pi_1(M)| < \infty$. $\square$

Hypothèse de complétude

La complétude est essentielle : le disque ouvert $\mathbb{D}^2$ muni d'une métrique à courbure positive n'est pas compact. De même, l'hypothèse $\kappa > 0$ (borne inférieure *strictement positive*) est cruciale : un paraboloïde a $\text{Ric} \geq 0$ mais est non compact.

Corollaire 9.6 (Comparaison avec la sphère). *Si (M^n, g) est complète avec $\text{Ric} \geq (n-1)$, alors $\text{diam}(M) \leq \pi = \text{diam}(S^n)$.*

Exemple 9.7 (Sphère et espaces projectifs). La sphère S^n de rayon r a $\text{Ric} = \frac{n-1}{r^2}g$, donc $\kappa = 1/r^2$ et la borne de Bonnet-Myers donne $\text{diam}(S^n(r)) \leq \pi r$. L'égalité est atteinte : le diamètre de $S^n(r)$ est exactement πr .

Exemple 9.8 (Groupes de Lie compacts). Tout groupe de Lie compact semi-simple muni de la métrique de Killing (changée de signe) a $\text{Ric} > 0$. Ainsi $SU(n)$, $SO(n)$, $Sp(n)$ sont compacts et ont un groupe fondamental fini.

9.4 Le théorème de Cheng sur le diamètre maximal

Théorème 9.9 (Cheng). *Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète avec $\text{Ric} \geq (n-1)\kappa > 0$. Si $\text{diam}(M) = \pi/\sqrt{\kappa}$, alors M est isométrique à la sphère $S^n(1/\sqrt{\kappa})$.*

Remarque 9.10. Ce théorème de rigidité montre que la borne de Bonnet-Myers est optimale et que seule la sphère atteint cette borne.

9.5 Le théorème de Synge

Théorème 9.11 (Synge). *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte à courbure sectionnelle strictement positive ($K > 0$). Alors :*

1. *Si $\dim M$ est paire et M est orientable, alors M est simplement connexe.*
2. *Si $\dim M$ est impaire, alors M est orientable.*

Démonstration (cas pair). Supposons $\dim M = 2m$ et M orientable. Par l'absurde, supposons $\pi_1(M) \neq \{e\}$. Il existe alors une géodésique fermée $\gamma : [0, L] \rightarrow M$ de longueur minimale dans sa classe d'homotopie libre non triviale.

Le transport parallèle le long de γ définit une isométrie $P : T_{\gamma(0)}M \rightarrow T_{\gamma(0)}M$ préservant $\dot{\gamma}(0)$. La restriction $P|_{\dot{\gamma}(0)^\perp}$ est une isométrie du sous-espace de dimension $2m-1$

(impaire). Comme M est orientable, P préserve l'orientation, donc $\det(P) = 1$. La restriction à $\dot{\gamma}(0)^\perp$ a $\det = 1$ aussi. Une isométrie d'un espace de dimension impaire avec déterminant 1 admet un vecteur fixe v avec $\|v\| = 1$.

Le champ de vecteurs parallèle $V(t)$ le long de γ tel que $V(0) = v$ satisfait $V(L) = P(v) = v = V(0)$, donc V est un champ de vecteurs parallèle périodique perpendiculaire à $\dot{\gamma}$. Calculons :

$$I(V, V) = - \int_0^L K(V, \dot{\gamma}) dt < 0,$$

car $K > 0$. Cela signifie que γ peut être raccourcie par une variation dans la direction V , contredisant la minimalité de γ dans sa classe d'homotopie. $\square$

Corollaire 9.12. *Les seules variétés de dimension paire à courbure sectionnelle strictement positive et groupe fondamental non trivial sont les espaces projectifs réels $\mathbb{R}P^{2m}$ (non orientables).*

Exemple 9.13 (S^{2m} et $\mathbb{C}P^m$). La sphère S^{2m} ($K = 1$) est simplement connexe, en accord avec Synge. L'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^m$ ($K \in [1, 4]$) est orientable de dimension paire $2m$, et effectivement $\pi_1(\mathbb{C}P^m) = 0$.

Exemple 9.14 (S^3 et $\mathbb{R}P^3$). En dimension impaire, Synge ne force pas la simple connexité : $\mathbb{R}P^3$ a $K > 0$ et $\pi_1(\mathbb{R}P^3) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \neq 0$, mais il est orientable, en accord avec le théorème.

9.6 Applications et conséquences topologiques

Proposition 9.15 (Contraintes sur le groupe fondamental). Soit (M^n, g) complète avec $\text{Ric} \geq (n-1)\kappa > 0$. Alors :

1. $\pi_1(M)$ est fini (Bonnet-Myers).
2. Si n est pair et M est orientable, $\pi_1(M) = 0$ (Synge).
3. Si n est impair et $K > 0$, M est orientable (Synge).

Théorème 9.16 (Borne de volume – Bishop-Gromov). Si (M^n, g) est complète avec $\text{Ric} \geq (n-1)\kappa$, alors pour tout $p \in M$ et $0 < r \leq R$:

$$\frac{\text{Vol}(B(p, R))}{\text{Vol}(B(p, r))} \leq \frac{V_\kappa(R)}{V_\kappa(r)},$$

où $V_\kappa(r)$ est le volume de la boule de rayon r dans l'espace à courbure constante κ .

Résumé des bornes de courbure et topologie

Hypothèse	Conclusion	Théorème
$\text{Ric} \geq (n-1)\kappa > 0$, complète	$\text{diam} \leq \pi/\sqrt{\kappa}$, compacte	Bonnet-Myers
$\text{Ric} \geq (n-1)\kappa > 0$, complète	$\pi_1(M)$ fini	Bonnet-Myers
$K > 0$, compacte, dim paire, orientable	$\pi_1(M) = 0$	Synge
$K > 0$, compacte, dim impaire	M orientable	Synge
$\text{Ric} \geq (n-1)\kappa$, complète	Comparaison de volume	Bishop-Gromov

9.7 Exercices

Exercice 9.1. Montrer que $\mathbb{R}P^n$ muni de la métrique quotient de S^n a $K = 1$. Pour n pair, vérifier que $\mathbb{R}P^n$ n'est pas orientable et a $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, en accord avec Synge.

Exercice 9.2. Soit (M^n, g) complète avec $\text{Ric} \geq (n-1)$. Montrer que le volume de M vérifie $\text{Vol}(M) \leq \text{Vol}(S^n)$.

Exercice 9.3. Soit $M = S^2 \times S^2$ munie de la métrique produit. Calculer la courbure de Ricci et vérifier que $\text{Ric} > 0$. En déduire que $S^2 \times S^2$ est compacte et simplement connexe (par Synge, dim = 4 paire).

Exercice 9.4 (Optimalité de Bonnet-Myers). Construire une famille de métriques sur S^n avec $\text{Ric} \geq (n-1)\kappa$ pour un κ donné, et dont le diamètre tend vers $\pi/\sqrt{\kappa}$.

Exercice 9.5. Montrer que le tore $\mathbb{T}^n$ n'admet aucune métrique à courbure de Ricci strictement positive. *Indication* : utiliser $\pi_1(\mathbb{T}^n) = \mathbb{Z}^n$.

Exercice 9.6. Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension 3 avec $K > 0$. Montrer que M est orientable. Peut-on conclure que M est simplement connexe ? Justifier avec l'exemple de $\mathbb{R}P^3$.

Chapitre 10

Sous-variétés et Seconde Forme Fondamentale

Comment une surface courbe se place-t-elle dans l'espace ambiant ? Cette question, au cœur de la géométrie différentielle classique depuis Gauss, trouve sa réponse moderne dans la théorie des *sous-variétés riemanniennes*. La *seconde forme fondamentale*, introduite par Gauss pour les surfaces dans $\mathbb{R}^3$ et généralisée par Weingarten, mesure la façon dont la sous-variété “s'incurve” par rapport à l'espace ambiant. Les équations de Gauss, Codazzi et Ricci relient la courbure intrinsèque de la sous-variété à sa courbure extrinsèque. Le *theoremata egregium* de Gauss — la courbure de Gauss est intrinsèque — en est le cas le plus célèbre.

10.1 Sous-variétés riemanniennes

Définition 10.1 (Sous-variété riemannienne). Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n et $\Sigma \subset M$ une sous-variété de dimension $k < n$. La *métrique induite* sur Σ est la restriction $\bar{g} = \iota^*g$, où $\iota : \Sigma \hookrightarrow M$ est l'inclusion. Le couple $(\Sigma, \bar{g})$ est appelé *sous-variété riemannienne*.

Définition 10.2 (Décomposition du fibré tangent). En chaque point $p \in \Sigma$, le fibré tangent de M se décompose orthogonalement :

$$T_p M = T_p \Sigma \oplus N_p \Sigma,$$

où $N_p \Sigma = (T_p \Sigma)^\perp$ est le *fibré normal* de Σ dans M . On note $(\cdot)^\top$ et $(\cdot)^\perp$ les projections correspondantes.

Intuition

Pensez à une surface Σ^2 dans $\mathbb{R}^3$. En chaque point, l'espace tangent à $\mathbb{R}^3$ se décompose en le plan tangent à Σ et la direction normale ν . La seconde forme fondamentale mesure comment Σ « se courbe » dans $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire comment la normale ν varie le long de Σ .

10.2 Connexion induite et seconde forme fondamentale

Définition 10.3 (Formule de Gauss). Soit ∇ la connexion de Levi-Civita de (M, g) et $\bar{\nabla}$ celle de $(\Sigma, \bar{g})$. Pour tous champs de vecteurs X, Y tangents à Σ :

$$\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y + \mathbb{I}(X, Y),$$

où $\bar{\nabla}_X Y = (\nabla_X Y)^\top$ et $\mathbb{I}(X, Y) = (\nabla_X Y)^\perp$.

Définition 10.4 (Seconde forme fondamentale). La *seconde forme fondamentale* est l'application bilinéaire symétrique :

$$\mathbb{I} : \mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow \Gamma(N\Sigma), \quad \mathbb{I}(X, Y) = (\nabla_X Y)^\perp.$$

Proposition 10.5 (Symétrie de $\mathbb{I}$). La seconde forme fondamentale est symétrique : $\mathbb{I}(X, Y) = \mathbb{I}(Y, X)$.

Démonstration. On a $\mathbb{I}(X, Y) - \mathbb{I}(Y, X) = (\nabla_X Y - \nabla_Y X)^\perp = [X, Y]^\perp$. Comme X et Y sont tangents à Σ , le crochet de Lie $[X, Y]$ est aussi tangent à Σ , donc $[X, Y]^\perp = 0$. $\square$

Définition 10.6 (Opérateur de forme (Weingarten)). Pour un champ normal $\xi \in \Gamma(N\Sigma)$, l'*opérateur de forme* est l'endomorphisme $A_\xi : T\Sigma \rightarrow T\Sigma$ défini par :

$$A_\xi(X) = -(\nabla_X \xi)^\top.$$

Il est relié à $\mathbb{I}$ par : $g(\mathbb{I}(X, Y), \xi) = g(A_\xi(X), Y)$.

Proposition 10.7 (Auto-adjonction de A_ξ). L'opérateur A_ξ est auto-adjoint : $\bar{g}(A_\xi(X), Y) = \bar{g}(X, A_\xi(Y))$.

Démonstration. $\bar{g}(A_\xi(X), Y) = g(\mathbb{I}(X, Y), \xi) = g(\mathbb{I}(Y, X), \xi) = \bar{g}(A_\xi(Y), X)$, par symétrie de $\mathbb{I}$. $\square$

10.3 Courbure moyenne et sous-variétés minimales

Définition 10.8 (Courbure moyenne). Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une base orthonormée de $T_p \Sigma$. Le *vecteur de courbure moyenne* est :

$$\vec{H} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mathbb{I}(e_i, e_i) = \frac{1}{k} \text{tr}(\mathbb{I}).$$

Définition 10.9 (Sous-variété minimale). Une sous-variété Σ est dite *minimale* si $\vec{H} = 0$, c'est-à-dire si $\text{tr}(\mathbb{I}) = 0$.

Remarque 10.10. Le terme « minimal » est historique. Les sous-variétés minimales sont les points critiques de la fonctionnelle de volume : $\delta \text{Vol}(\Sigma) = 0$. Elles ne minimisent pas nécessairement le volume.

Exemple 10.11 (Caténoïde). La surface de révolution dans $\mathbb{R}^3$ paramétrée par :

$$\Phi(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u), \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi),$$

est une surface minimale. On vérifie que $H = 0$.

Exemple 10.12 (Sphère $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$). La sphère $S^{n-1}(r)$ de rayon r a pour seconde forme fondamentale $\mathbb{I}(X, Y) = -\frac{1}{r}g(X, Y)\nu$, où ν est la normale unitaire sortante. La courbure moyenne est $\vec{H} = -\frac{1}{r}\nu$: la sphère n'est pas minimale.

10.4 Équations de Gauss et Codazzi

Théorème 10.13 (Équation de Gauss). *Soient X, Y, Z, W des champs tangents à Σ . La courbure de Σ est reliée à celle de M par :*

$$\bar{g}(\bar{R}(X, Y)Z, W) = g(R(X, Y)Z, W) + g(\mathbb{I}(X, Z), \mathbb{I}(Y, W)) - g(\mathbb{I}(Y, Z), \mathbb{I}(X, W)).$$

Démonstration. Par définition, $\bar{R}(X, Y)Z = \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z$. En utilisant la formule de Gauss $\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y + \mathbb{I}(X, Y)$ et en développant :

$$\begin{aligned} \nabla_X (\bar{\nabla}_Y Z + \mathbb{I}(Y, Z)) &= \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z + \mathbb{I}(X, \bar{\nabla}_Y Z) \\ &\quad - A_{\mathbb{I}(Y, Z)} X + \nabla_X^\perp \mathbb{I}(Y, Z). \end{aligned}$$

En antisymétrisant en X, Y et en projetant sur la composante tangentielle, on obtient après simplification :

$$(\bar{R}(X, Y)Z)^\top = (R(X, Y)Z)^\top + A_{\mathbb{I}(X, Z)} Y - A_{\mathbb{I}(Y, Z)} X.$$

En prenant le produit scalaire avec $W \in T\Sigma$ et en utilisant $g(A_\xi Y, W) = g(\mathbb{I}(Y, W), \xi)$, on obtient le résultat. $\square$

Corollaire 10.14 (Theorema Egregium de Gauss). *Pour une surface $\Sigma^2 \subset \mathbb{R}^3$, la courbure de Gauss K est intrinsèque :*

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = \det(A_\nu),$$

où κ_1, κ_2 sont les courbures principales.

Théorème 10.15 (Équation de Codazzi). *Pour tous champs X, Y, Z tangents à Σ et ξ normal :*

$$g(R(X, Y)Z, \xi) = g((\bar{\nabla}_X \mathbb{I})(Y, Z) - (\bar{\nabla}_Y \mathbb{I})(X, Z), \xi),$$

où $(\bar{\nabla}_X \mathbb{I})(Y, Z) = \nabla_X^\perp (\mathbb{I}(Y, Z)) - \mathbb{I}(\bar{\nabla}_X Y, Z) - \mathbb{I}(Y, \bar{\nabla}_X Z)$.

Remarque 10.16. Lorsque $M = \mathbb{R}^n$ (courbure nulle), l'équation de Codazzi se simplifie : $(\bar{\nabla}_X \mathbb{I})(Y, Z) = (\bar{\nabla}_Y \mathbb{I})(X, Z)$.

10.5 Hypersurfaces

Définition 10.17 (Hypersurface). Une *hypersurface* est une sous-variété de codimension 1. Le fibré normal est de rang 1, engendré par un champ unitaire ν .

Pour une hypersurface, la seconde forme fondamentale scalaire s'écrit :

$$h(X, Y) = g(\mathbb{I}(X, Y), \nu) = g(A_\nu(X), Y).$$

Définition 10.18 (Courbures principales). Les *courbures principales* $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ sont les valeurs propres de A_ν . Les vecteurs propres sont les *directions principales*.

Proposition 10.19. Pour une hypersurface :

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{n-1}(\kappa_1 + \dots + \kappa_{n-1}) = \frac{1}{n-1} \text{tr}(A_\nu), \\ K_{\text{Gauss}} &= \kappa_1 \dots \kappa_{n-1} = \det(A_\nu). \end{aligned}$$

10.6 Sous-variétés totalement géodésiques et ombilicales

Définition 10.20 (Totalement géodésique). Σ est *totalement géodésique* si $\mathbb{I} \equiv 0$.

Exemple 10.21. Les grands cercles de S^2 et les équateurs $S^k \subset S^n$ sont totalement géodésiques.

Définition 10.22 (Totalement ombilicale). Σ est *totalement ombilicale* si $\mathbb{I}(X, Y) = g(X, Y) \vec{H}$.

Exemple 10.23. Les sphères $S^{n-1}(r) \subset \mathbb{R}^n$ sont totalement ombilicales, avec $\kappa_1 = \dots = \kappa_{n-1} = 1/r$.

Formules fondamentales des sous-variétés

$$\text{Gauss : } \nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y + \mathbb{I}(X, Y)$$

$$\text{Weingarten : } \nabla_X \xi = -A_\xi(X) + \nabla_X^\perp \xi$$

$$\begin{aligned} \text{Éq. de Gauss : } \bar{g}(\bar{R}(X, Y)Z, W) &= g(R(X, Y)Z, W) + g(\mathbb{I}(X, Z), \mathbb{I}(Y, W)) \\ &\quad - g(\mathbb{I}(Y, Z), \mathbb{I}(X, W)) \end{aligned}$$

$$\text{Courbure moy. : } \vec{H} = \frac{1}{k} \text{tr}(\mathbb{I})$$

10.7 Exercices

Exercice 10.1. Calculer la seconde forme fondamentale du tore de révolution $\Phi(\theta, \phi) = ((R+r \cos \theta) \cos \phi, (R+r \cos \theta) \sin \phi, r \sin \theta)$ dans $\mathbb{R}^3$. Déterminer les courbures principales et la courbure moyenne.

Exercice 10.2. Montrer que pour une hypersurface $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, l'équation de Gauss donne $\bar{K}(\sigma) = \kappa_i \kappa_j$ pour le plan σ engendré par les directions principales e_i et e_j .

Exercice 10.3. Soit Σ une surface minimale dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\kappa_1 = -\kappa_2$ en tout point, et que $K = -\kappa_1^2 \leq 0$.

Exercice 10.4. Montrer que l'hélicoïde $\Phi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au)$ est une surface minimale dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 10.5. Soit Σ une hypersurface compacte sans bord de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un point $p \in \Sigma$ où toutes les courbures principales sont strictement positives. *Indication :* considérer le point le plus éloigné de l'origine.

Exercice 10.6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse et $\Sigma = \{(x, y, f(x, y))\}$ le graphe de f dans $\mathbb{R}^3$. Calculer la seconde forme fondamentale, les courbures principales, et la courbure moyenne de Σ en fonction de f et ses dérivées.

Chapitre 11

Flot de Ricci : Introduction

11.1 Motivation et définition

Le flot de Ricci, introduit par R. Hamilton en 1982, est un outil fondamental en géométrie différentielle. L'idée est de déformer une métrique riemannienne dans la direction de sa courbure de Ricci, lissant ainsi la géométrie au cours du temps.

Intuition

Le flot de Ricci est l'analogue géométrique de l'équation de la chaleur : tout comme la chaleur diffuse pour égaliser la température, le flot de Ricci « diffuse » la courbure pour la rendre plus uniforme. Les régions de forte courbure positive se contractent, tandis que les régions de courbure négative s'étendent.

Définition 11.1 (Flot de Ricci). Soit (M, g_0) une variété riemannienne compacte. Le *flot de Ricci* est l'équation d'évolution :

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2 \operatorname{Ric}(g), \quad g(0) = g_0.$$

Remarque 11.2. Le facteur -2 est une convention. Le signe négatif assure que les régions de courbure de Ricci positive se contractent (ce qui est physiquement attendu). L'équation est un système quasi-linéaire parabolique pour la métrique g_{ij} .

Définition 11.3 (Flot de Ricci normalisé). Le *flot de Ricci normalisé* préserve le volume :

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2 \operatorname{Ric}(g) + \frac{2}{n} \bar{R} g,$$

où $\bar{R} = \frac{\int_M R dV_g}{\int_M dV_g}$ est la courbure scalaire moyenne et $n = \dim M$.

11.2 Existence et unicité à court terme

Théorème 11.4 (Hamilton, 1982). Soit (M, g_0) une variété riemannienne compacte. Il existe $T > 0$ et une unique famille lisse de métriques $(g(t))_{t \in [0, T]}$ satisfaisant le flot de Ricci avec condition initiale $g(0) = g_0$.

Remarque 11.5. La preuve originale de Hamilton utilise le théorème de Nash-Moser. DeTurck (1983) a ensuite donné une preuve simplifiée en introduisant une modification du flot qui le rend strictement parabolique.

Définition 11.6 (Astuce de DeTurck). Soit $\tilde{g}$ une métrique de référence fixe sur M . Le *flot de Ricci-DeTurck* est :

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2 \operatorname{Ric}(g) + \mathcal{L}_{W(g, \tilde{g})} g,$$

où W est un champ de vecteurs dépendant de g et $\tilde{g}$ (défini via la différence des symboles de Christoffel). Ce flot est strictement parabolique.

Proposition 11.7. Le flot de Ricci-DeTurck est équivalent au flot de Ricci modulo difféomorphismes : si $g(t)$ est une solution du flot de Ricci-DeTurck, il existe une famille de difféomorphismes $\varphi_t : M \rightarrow M$ telle que $\varphi_t^* g(t)$ soit une solution du flot de Ricci.

11.3 Évolution de la courbure

Théorème 11.8 (Évolution de la courbure scalaire). *Sous le flot de Ricci, la courbure scalaire évolue selon :*

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \Delta R + 2 |\operatorname{Ric}|^2.$$

Démonstration. En coordonnées locales, $R = g^{ij} R_{ij}$. En dérivant :

$$\frac{\partial R}{\partial t} = g^{ij} \frac{\partial R_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial g^{ij}}{\partial t} R_{ij}.$$

Comme $\frac{\partial g^{ij}}{\partial t} = 2R^{ij}$ et en utilisant la formule d'évolution du tenseur de Ricci (obtenue par un calcul tensoriel direct) :

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial t} = \Delta R_{ij} + 2R_{ikjl} R^{kl} - 2R_{ik} R_j^k,$$

on obtient après contraction le résultat annoncé. □

Corollaire 11.9 (Principe du maximum pour R). *Si la courbure scalaire initiale vérifie $R(g_0) \geq R_{\min}$, alors pour tout $t \in [0, T)$:*

$$R(g(t)) \geq \frac{R_{\min}}{1 - \frac{2R_{\min}}{n} t}.$$

En particulier, si $R_{\min} > 0$, le flot développe une singularité en temps fini $T \leq \frac{n}{2R_{\min}}$.

Théorème 11.10 (Évolution du tenseur de Ricci). *Sous le flot de Ricci :*

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial t} = \Delta R_{ij} + 2R_{ikjl} R^{kl} - 2R_{ik} R_j^k.$$

Théorème 11.11 (Évolution du tenseur de Riemann). *Sous le flot de Ricci :*

$$\frac{\partial R_{ijkl}}{\partial t} = \Delta R_{ijkl} + 2(B_{ijkl} - B_{ijlk} + B_{ikjl} - B_{iljk}),$$

où $B_{ijkl} = R_{ipjq} R_{kplq} g^{pp'} g^{qq'}$ (on somme sur les indices répétés avec la convention d'Einstein).

11.4 Principe du maximum de Hamilton

Théorème 11.12 (Principe du maximum scalaire). *Soit $u : M \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} \geq \Delta_{g(t)} u + F(u),$$

où $g(t)$ est une solution du flot de Ricci et F est localement lipschitzienne. Si $u(x, 0) \geq c$ pour tout $x \in M$, alors $u(x, t) \geq \phi(t)$ où ϕ est la solution de l'EDO $\phi' = F(\phi)$, $\phi(0) = c$.

Esquisse de preuve. On utilise le principe de comparaison parabolique. Soit $x_0(t)$ un point où $u(\cdot, t)$ atteint son minimum spatial. En ce point, $\Delta_{g(t)} u \geq 0$ (car c'est un minimum), donc :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x_0(t)} \geq F(u(x_0(t), t)).$$

On en déduit (par un argument de régularisation, car $x_0(t)$ peut sauter) que $u_{\min}(t) = \min_M u(\cdot, t)$ satisfait $\frac{d}{dt} u_{\min} \geq F(u_{\min})$ au sens des barrières. Par comparaison avec l'EDO $\phi' = F(\phi)$, $\phi(0) = c$, on obtient $u_{\min}(t) \geq \phi(t)$, d'où le résultat. L'application typique est $u = R$ (courbure scalaire), $F(u) = \frac{2}{n} u^2$, donnant la borne $R \geq \frac{R_{\min}}{1 - \frac{2R_{\min}}{n} t}$. $\square$

La métrique dépend du temps

Le laplacien $\Delta_{g(t)}$ dépend de la métrique qui évolue. Le principe du maximum nécessite donc un traitement soigneux, car les boules métriques et les normes changent au cours du temps.

Théorème 11.13 (Principe du maximum tensoriel de Hamilton). *Soit T_{ij} un tenseur symétrique évoluant par :*

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial t} = \Delta T_{ij} + N_{ij}(T, g),$$

où N_{ij} satisfait : si $T_{ij} \geq 0$ et $T_{ij} v^j = 0$ en un point, alors $N_{ij} v^i v^j \geq 0$. Si $T_{ij}(0) \geq 0$, alors $T_{ij}(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$.

Esquisse de preuve. On considère la plus petite valeur propre $\lambda_{\min}(t)$ de T_{ij} sur M . Si $\lambda_{\min}(t_0) = 0$ en un point x_0 avec vecteur propre v , alors $T_{ij} v^j = 0$ en ce point, donc $N_{ij} v^i v^j \geq 0$ par hypothèse. Un argument de principe du maximum (appliqué à la quantité $T_{ij} v^i v^j$ le long de courbes de vecteurs parallèles) montre que $\lambda_{\min}$ ne peut franchir zéro par valeurs décroissantes. La difficulté technique réside dans le fait que le vecteur propre dépend du point ; on la contourne en travaillant avec le fibré des repères orthonormés. Voir HAMILTON, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Differential Geom. 17 (1982), Theorem 9.1. $\square$

Corollaire 11.14 (Préservation de la positivité de Ricci). *Si $\text{Ric}(g_0) \geq 0$, alors $\text{Ric}(g(t)) \geq 0$ pour tout t dans l'intervalle d'existence du flot.*

11.5 Exemples fondamentaux

Exemple 11.15 (Sphère S^n). Sur la sphère (S^n, g_0) avec g_0 la métrique ronde de courbure sectionnelle 1, on a $\text{Ric}(g_0) = (n-1)g_0$. Le flot de Ricci a pour solution :

$$g(t) = (1 - 2(n-1)t) g_0.$$

La métrique se contracte uniformément et s'annule en $T = \frac{1}{2(n-1)}$. La sphère se contracte en un point en temps fini.

Exemple 11.16 (Espace hyperbolique). Sur $(\mathbb{H}^n, g_0)$ avec $\text{Ric}(g_0) = -(n-1)g_0$:

$$g(t) = (1 + 2(n-1)t) g_0.$$

La métrique s'expand uniformément. Le flot existe pour tout $t > 0$.

Exemple 11.17 (Solitons de Ricci). Un *soliton de Ricci* est une solution du flot qui n'évolue que par difféomorphismes et changement d'échelle :

$$\text{Ric}(g) + \mathcal{L}_X g + \lambda g = 0,$$

où X est un champ de vecteurs et $\lambda \in \mathbb{R}$. Le soliton est dit rétrécissant ($\lambda > 0$), stationnaire ($\lambda = 0$), ou expansif ($\lambda < 0$).

Exemple 11.18 (Flot sur les surfaces). En dimension 2, $\text{Ric} = \frac{R}{2}g$ et le flot de Ricci s'écrit :

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -Rg.$$

Le flot de Ricci normalisé est $\frac{\partial g}{\partial t} = (\bar{R} - R)g$. Hamilton (1988) et Chow (1991) ont montré que sur toute surface compacte, le flot normalisé converge vers une métrique à courbure constante.

11.6 Convergence en dimension 3

Théorème 11.19 (Hamilton, 1982). *Soit (M^3, g_0) une variété riemannienne compacte de dimension 3 à courbure de Ricci strictement positive. Le flot de Ricci normalisé converge vers une métrique à courbure sectionnelle constante positive. En particulier, M est difféomorphe à un quotient S^3/Γ .*

Remarque 11.20. Ce résultat fondateur a motivé le programme de Hamilton-Perelman, aboutissant à la preuve de la conjecture de Poincaré par Perelman (2002–2003) en dimension 3.

Équations d'évolution sous le flot de Ricci

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2R_{ij}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ij}^k = -g^{kl}(\nabla_i R_{jl} + \nabla_j R_{il} - \nabla_l R_{ij})$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \Delta R + 2|\text{Ric}|^2$$

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial t} = \Delta R_{ij} + 2R_{ikjl}R^{kl} - 2R_{ik}R_j^k$$

$$\frac{\partial}{\partial t} dV_g = -R dV_g$$

11.7 Exercices

Exercice 11.1. Vérifier que $g(t) = (1 - 2(n-1)t)g_0$ est bien une solution du flot de Ricci sur (S^n, g_0) . Calculer le temps d'extinction et le diamètre $\text{diam}(S^n, g(t))$ en fonction de t .

Exercice 11.2. Montrer que sous le flot de Ricci, le volume évolue selon : $\frac{d}{dt} \text{Vol}(M, g(t)) = - \int_M R dV_g$. En déduire que le volume décroît si $R > 0$.

Exercice 11.3. Soit (M^2, g_0) une surface compacte. Montrer que le flot de Ricci normalisé préserve l'aire totale et que la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(M)$ détermine le signe de $\bar{R}$ via Gauss-Bonnet.

Exercice 11.4 (Soliton cigare de Hamilton). Montrer que la métrique sur $\mathbb{R}^2$:

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{1 + x^2 + y^2}$$

est un soliton de Ricci stationnaire (dit « soliton cigare »). Calculer sa courbure de Gauss.

Exercice 11.5. Soit $g(t) = \varphi(t)g_0$ une solution du flot de Ricci avec $\varphi(0) = 1$. Montrer que cela n'est possible que si (M, g_0) est un soliton d'Einstein : $\text{Ric}(g_0) = \lambda g_0$. Déterminer $\varphi(t)$ en fonction de λ .

Exercice 11.6. En utilisant le principe du maximum, montrer que si $R(g_0) \geq R_{\min} > 0$ sur une variété compacte, alors $R(g(t)) \rightarrow +\infty$ lorsque t tend vers le temps maximal d'existence.

Bibliographie

- [1] do Carmo, M.P., *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, 1992.
- [2] Lee, J.M., *Riemannian Manifolds : An Introduction to Curvature*, Springer, 1997.
- [3] Gallot, S., Hulin, D. and Lafontaine, J., *Riemannian Geometry*, 3rd ed., Springer, 2004.
- [4] Petersen, P., *Riemannian Geometry*, 3rd ed., Springer, 2016.
- [5] Jost, J., *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, 7th ed., Springer, 2017.