

Équations aux Dérivées Partielles

Notes de Cours

Master M1 — 2025–2026

Yaë Ulrich Gaba

« La physique mathématique est le domaine où l'on connaît le plus de choses et où l'on comprend le moins. »

— Henri Poincaré

Table des matières

Préface	1
1 Introduction aux EDP	5
1.1 Qu'est-ce qu'une EDP ?	5
1.2 Linéarité et homogénéité	6
1.3 Classification des EDP du second ordre	6
1.3.1 Classification en dimension supérieure	7
1.4 Conditions aux limites et conditions initiales	7
1.5 Problèmes d'évolution	8
1.6 Exemples fondamentaux de modélisation	9
1.6.1 Dérivation de l'équation de la chaleur	9
1.6.2 Dérivation de l'équation des ondes	9
1.7 Exemples de solutions explicites	9
1.8 Notion de solution	10
1.9 Exercices	10
2 Équation de Transport	13
2.1 Introduction et motivation physique	13
2.2 Équation de transport à coefficients constants	13
2.2.1 Le problème de Cauchy	13
2.2.2 Équation non homogène	14
2.3 Méthode des caractéristiques — cas général	15
2.3.1 EDP du premier ordre quasi-linéaire	15
2.3.2 Cas non linéaire : équation de Burgers	16
2.3.3 Formation de chocs	16
2.4 Transport en dimension supérieure	17
2.5 Conservation et intégrales premières	17
2.6 Solutions faibles et entropie	18
2.7 Exercices	18
3 Séparation de Variables et Séries de Fourier	19
3.1 Principe de la séparation des variables	19
3.1.1 Méthode générale	19
3.2 Séries de Fourier	20
3.2.1 Définitions et coefficients	20
3.2.2 Orthogonalité	21
3.2.3 Convergence des séries de Fourier	21
3.3 Problèmes de Sturm-Liouville	22
3.4 Applications aux EDP	22

3.4.1	Équation de la chaleur avec conditions de Neumann	22
3.4.2	Équation des ondes	23
3.4.3	Équation de Laplace sur un rectangle	23
3.5	Séparation en coordonnées polaires	23
3.6	Exercices	24
4	Équation de la Chaleur	25
4.1	Motivation physique et formulation	25
4.2	Solution fondamentale	25
4.3	Problème de Cauchy sur $\mathbb{R}^n$	26
4.4	Principe du maximum pour l'équation de la chaleur	27
4.5	Régularité et effet lissant	27
4.6	Comportement asymptotique	28
4.7	Formule de Duhamel	28
4.8	Équation de la chaleur sur un intervalle borné	28
4.9	Conditions aux limites non homogènes	29
4.10	Exercices	29
5	Équation des Ondes	31
5.1	Motivation physique	31
5.2	Équation des ondes en dimension 1	31
5.2.1	Formule de d'Alembert	31
5.2.2	Domaine de dépendance et d'influence	32
5.3	Conservation de l'énergie	32
5.4	Corde vibrante à extrémités fixes	33
5.5	Équation des ondes en dimension supérieure	33
5.5.1	Dimension 3 : formule de Kirchhoff	33
5.5.2	Dimension 2 : formule de Poisson	34
5.6	Équation des ondes avec dissipation	34
5.7	Exercices	34
6	Équation de Laplace et Fonctions Harmoniques	37
6.1	Introduction et motivation	37
6.2	Solution fondamentale	37
6.3	Propriété de la valeur moyenne	38
6.4	Principe du maximum	38
6.5	Régularité des fonctions harmoniques	39
6.6	Inégalité de Harnack	39
6.7	Formule de représentation de Green	40
6.8	Théorème de Liouville	40
6.9	Exercices	40
7	Principe du Maximum	43
7.1	Introduction	43
7.2	Principe du maximum pour les opérateurs elliptiques	43
7.2.1	Opérateurs elliptiques généraux	43
7.2.2	Principe du maximum faible	44
7.2.3	Principe du maximum fort	44
7.3	Applications du principe du maximum	44

7.3.1	Unicité	44
7.3.2	Estimations a priori	45
7.3.3	Principe de comparaison	45
7.4	Principe du maximum pour les équations paraboliques	45
7.5	Méthode des sous- et sur-solutions	45
7.6	Principe du maximum pour les équations non linéaires	46
7.7	Exercices	46
8	Transformée de Fourier et ÉDP	47
8.1	Transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^n)$	47
8.2	Transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^n)$	48
8.3	Distributions tempérées	48
8.4	Résolution de l'équation de la chaleur	49
8.5	Résolution de l'équation des ondes	49
8.6	Solutions fondamentales	50
8.7	Exercices	50
9	Espaces de Sobolev	51
9.1	Dérivées faibles	51
9.2	Espaces de Sobolev $W^{k,p}$	52
9.3	Densité des fonctions lisses	52
9.4	Théorèmes d'injection de Sobolev	52
9.5	Théorème de trace	53
9.6	Inégalité de Poincaré	53
9.7	Exercices	54
10	Méthodes Variationnelles	55
10.1	Formulation faible des problèmes elliptiques	55
10.2	Théorème de Lax-Milgram	56
10.3	Application au problème de Dirichlet	56
10.4	Méthode de Ritz-Galerkin	57
10.5	Principe variationnel (cas symétrique)	57
10.6	Régularité des solutions faibles	57
10.7	Exercices	58

Préface

Les équations aux dérivées partielles (EDP) constituent l'un des piliers fondamentaux des mathématiques appliquées et de la physique mathématique. Depuis les travaux fondateurs d'Euler, d'Alembert, Fourier et Laplace au XVIII^e siècle, elles n'ont cessé de jouer un rôle central dans la modélisation des phénomènes naturels : diffusion de la chaleur, propagation des ondes, écoulement des fluides, élasticité des matériaux, électromagnétisme, et plus récemment en finance, biologie et traitement d'images.

Objectifs du cours

Ce cours s'adresse aux étudiants de troisième année de licence (L3) en mathématiques. Il suppose acquis les prérequis suivants :

- Analyse réelle : intégration de Lebesgue, espaces L^p , convergences.
- Analyse fonctionnelle élémentaire : espaces de Banach, espaces de Hilbert.
- Équations différentielles ordinaires (EDO) : théorème de Cauchy-Lipschitz.
- Algèbre linéaire : diagonalisation, formes bilinéaires.

L'objectif principal est de fournir une introduction rigoureuse mais accessible aux méthodes classiques et modernes de résolution des EDP. Plus précisément, à l'issue de ce cours, l'étudiant sera capable de :

1. Classifier les EDP du second ordre (elliptiques, paraboliques, hyperboliques) et comprendre les implications physiques de chaque type.
2. Résoudre explicitement des EDP classiques par la méthode des caractéristiques, la séparation des variables et les séries de Fourier.
3. Énoncer et démontrer les propriétés qualitatives fondamentales : principe du maximum, régularité, comportement asymptotique.
4. Utiliser la transformée de Fourier pour résoudre des EDP sur $\mathbb{R}^n$.
5. Comprendre le cadre fonctionnel moderne : espaces de Sobolev et formulations variationnelles.

Organisation du cours

Le cours est organisé en dix chapitres, suivant une progression pédagogique naturelle :

Chapitre 1 : Introduction et classification. On y présente le vocabulaire de base (ordre, linéarité, conditions aux limites) et la classification des EDP du second ordre.

Chapitre 2 : Équation de transport. Première EDP étudiée en détail, elle introduit la méthode des caractéristiques dans un cadre simple.

Chapitre 3 : Séparation des variables et séries de Fourier. On développe l'outil central de la séparation des variables, appuyé sur la théorie des séries de Fourier.

Chapitre 4 : Équation de la chaleur. Étude complète : solution fondamentale, principe du maximum, régularité, comportement asymptotique.

Chapitre 5 : Équation des ondes. Formule de d'Alembert, principe de Huygens, énergie et vitesse finie de propagation.

Chapitre 6 : Équation de Laplace et fonctions harmoniques. Propriétés de valeur moyenne, régularité, inégalité de Harnack.

Chapitre 7 : Principe du maximum. Versions faible et forte pour les opérateurs elliptiques et paraboliques.

Chapitre 8 : Transformée de Fourier et applications. La transformée de Fourier comme outil de résolution sur $\mathbb{R}^n$.

Chapitre 9 : Introduction aux espaces de Sobolev. Dérivation faible, espaces H^1 et H_0^1 , inégalités de Sobolev et de Poincaré.

Chapitre 10 : Formulation variationnelle. Théorème de Lax-Milgram, problèmes elliptiques, introduction aux éléments finis.

Conventions et notations

Tout au long de ce cours, nous utilisons les notations suivantes :

- Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière (au moins C^1 par morceaux, sauf mention contraire).
- $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.
- $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ est le laplacien de u .
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$ est le gradient.
- Du désigne la matrice jacobienne, D^2u la matrice hessienne.
- $C^k(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$, $C_c^\infty(\Omega)$: espaces de fonctions de classe C^k , lisses, lisses à support compact.

- $L^p(\Omega)$: espace de Lebesgue, $1 \leq p \leq \infty$.
- $H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega)$: espace de Sobolev.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire dans L^2 ou dans un espace de Hilbert.
- $\|\cdot\|$ désigne une norme (le contexte précise laquelle).
- Multi-indices : pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ et $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Comment utiliser ce cours

Chaque chapitre contient :

- Des **définitions** et **théorèmes** avec démonstrations détaillées.
- Des **exemples** traités complètement pour illustrer les méthodes.
- Des encadrés « **Intuition** » pour développer la compréhension géométrique et physique.
- Des encadrés « **Attention** » pour signaler les pièges courants.
- Des **exercices** de difficulté croissante, certains avec indications.

Les démonstrations marquées d'un astérisque (*) sont hors programme et proposées pour les étudiants souhaitant approfondir.

Motivation physique

Les EDP apparaissent naturellement dès que l'on modélise un phénomène dépendant de plusieurs variables indépendantes. Considérons quelques exemples fondamentaux :

Diffusion de la chaleur. Si $u(x, t)$ représente la température en un point x à l'instant t dans un corps conducteur, la loi de Fourier affirme que le flux de chaleur est proportionnel au gradient de température : $\vec{q} = -k\nabla u$. Combinée avec la conservation de l'énergie, on obtient l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u.$$

Propagation des ondes. La vibration d'une corde, d'une membrane ou les ondes acoustiques sont décrites par l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u,$$

où c est la vitesse de propagation.

Électrostatique. Le potentiel électrique u dans une région sans charge satisfait l'équation de Laplace :

$$\Delta u = 0.$$

En présence d'une densité de charge ρ , on obtient l'équation de Poisson $\Delta u = -\rho/\varepsilon_0$.

Mécanique des fluides. Les équations de Navier-Stokes, qui décrivent le mouvement d'un fluide visqueux incompressible, forment un système d'EDP non linéaires :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v}, \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

L'existence et la régularité des solutions en dimension 3 reste l'un des problèmes du millénaire.

Mécanique quantique. L'équation de Schrödinger décrit l'évolution d'une particule quantique :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V\psi.$$

Ces exemples illustrent la richesse et l'universalité des EDP. Ce cours fournira les outils mathématiques nécessaires pour les comprendre et les résoudre.

Références bibliographiques

Ce cours s'inspire de plusieurs ouvrages de référence :

- EVANS, L.C., *Partial Differential Equations*, AMS, 2010.
- BRÉZIS, H., *Analyse fonctionnelle*, Dunod, 2005.
- ZUILY, C. et QUEFFÉLEC, H., *Analyse pour l'agrégation*, Dunod.
- RAVIART, P.-A. et THOMAS, J.-M., *Introduction à l'analyse numérique des EDP*, Dunod, 1998.
- STRAUSS, W., *Partial Differential Equations : An Introduction*, Wiley, 2008.
- JOHN, F., *Partial Differential Equations*, Springer, 1982.

Bonne lecture et bon travail !

L'auteur

Chapitre 1

Introduction aux EDP

Les équations aux dérivées partielles sont le langage dans lequel la nature écrit ses lois. L'équation de la chaleur décrit comment la température se diffuse dans un métal. L'équation des ondes gouverne la vibration d'une corde de guitare, la propagation du son, et les ondes gravitationnelles prédites par Einstein. L'équation de Laplace règne sur l'électrostatique, la gravitation newtonienne et les écoulements de fluides incompressibles. L'équation de Schrödinger détermine l'évolution de tout système quantique.

Ces équations, découvertes au fil de trois siècles par Euler, d'Alembert, Fourier, Laplace, et tant d'autres, partagent une caractéristique commune : elles relient une fonction inconnue de plusieurs variables à ses dérivées partielles. Elles sont plus riches — et plus difficiles — que les équations différentielles ordinaires, car la multiplicité des variables d'espace et de temps engendre une variété de comportements : diffusion, propagation, équilibre. Ce premier chapitre dresse la carte de ce territoire.

1.1 Qu'est-ce qu'une EDP ?

Commençons par la définition la plus générale, avant de spécialiser.

Définition 1.1 (Équation aux dérivées partielles). Une **équation aux dérivées partielles** (EDP) est une équation faisant intervenir une fonction inconnue u de plusieurs variables indépendantes $(x_1, \dots, x_n)$ et ses dérivées partielles. La forme générale est :

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \dots) = 0.$$

Définition 1.2 (Ordre d'une EDP). L'**ordre** d'une EDP est l'ordre le plus élevé de dérivation partielle apparaissant dans l'équation.

Exemple 1.3. Quelques EDP classiques :

1. **Équation de transport** (ordre 1) : $u_t + c u_x = 0$.
2. **Équation de la chaleur** (ordre 2) : $u_t = k u_{xx}$.
3. **Équation des ondes** (ordre 2) : $u_{tt} = c^2 u_{xx}$.
4. **Équation de Laplace** (ordre 2) : $\Delta u = 0$.
5. **Équation de Burgers** (ordre 1, non linéaire) : $u_t + u u_x = 0$.
6. **Équation de Korteweg-de Vries** (ordre 3) : $u_t + 6u u_x + u_{xxx} = 0$.

1.2 Linéarité et homogénéité

Définition 1.4 (EDP linéaire). Une EDP est **linéaire** si l'opérateur L défini par le membre de gauche est linéaire, c'est-à-dire :

$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

L'EDP est **homogène** si $Lu = 0$, et **non homogène** si $Lu = f$ avec $f \neq 0$.

Remarque 1.5. Le **principe de superposition** s'applique aux EDP linéaires homogènes : si u_1 et u_2 sont solutions, alors $\alpha u_1 + \beta u_2$ est aussi solution pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ce principe est fondamental pour la méthode de séparation des variables.

Définition 1.6 (EDP semi-linéaire, quasi-linéaire, complètement non linéaire).

- **Semi-linéaire** : linéaire dans les dérivées d'ordre le plus élevé, avec coefficients ne dépendant que de x : $\Delta u = f(x, u, \nabla u)$.
- **Quasi-linéaire** : linéaire dans les dérivées d'ordre le plus élevé, avec coefficients dépendant de u et ∇u : $\sum a_{ij}(x, u, \nabla u) u_{x_i x_j} = f(x, u, \nabla u)$.
- **Complètement non linéaire** : non linéaire dans les dérivées d'ordre le plus élevé : $\det(D^2 u) = f$ (équation de Monge-Ampère).

1.3 Classification des EDP du second ordre

Considérons une EDP du second ordre à deux variables indépendantes :

$$a(x, y) u_{xx} + 2b(x, y) u_{xy} + c(x, y) u_{yy} + d(x, y) u_x + e(x, y) u_y + f(x, y) u = g(x, y). \quad (1.1)$$

Définition 1.7 (Classification par le discriminant). Le **discriminant** de l'EDP (1.1) est $\Delta_{\text{disc}} = b^2 - ac$. L'EDP est dite :

- **Elliptique** si $b^2 - ac < 0$ en tout point du domaine.
- **Parabolique** si $b^2 - ac = 0$ en tout point du domaine.
- **Hyperbolique** si $b^2 - ac > 0$ en tout point du domaine.

Intuition

Cette classification a un sens profondément physique :

- Les EDP **elliptiques** (type Laplace) modélisent des états d'équilibre : la solution en un point dépend de la solution partout autour.
- Les EDP **paraboliques** (type chaleur) modélisent des processus de diffusion : l'information se propage à vitesse infinie mais s'atténue.
- Les EDP **hyperboliques** (type ondes) modélisent des phénomènes de propagation : l'information se propage à vitesse finie le long de caractéristiques.

Exemple 1.8.

1. $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (Laplace) : $a = 1, b = 0, c = 1$, donc $b^2 - ac = -1 < 0$: **elliptique**.
2. $u_t - u_{xx} = 0$ (chaleur) : $a = -1, b = 0, c = 0$, donc $b^2 - ac = 0$: **parabolique**.
3. $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ (ondes) : $a = -c^2, b = 0, c_{\text{coeff}} = 1$, donc $b^2 - ac = c^2 > 0$: **hyperbolique**.

1.3.1 Classification en dimension supérieure

Pour une EDP du second ordre à n variables :

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \text{termes d'ordre inférieur} = 0,$$

la classification repose sur la **matrice des coefficients** $A = (a_{ij})$, supposée symétrique :

- **Elliptique** : toutes les valeurs propres de A sont de même signe.
- **Hyperbolique** : une valeur propre de signe opposé aux autres.
- **Parabolique** : une valeur propre nulle, les autres de même signe.

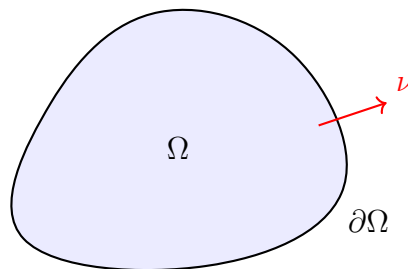
Théorème 1.9 (Forme canonique — cas $n = 2$). *Par un changement de variables $(\xi, \eta) = (\xi(x, y), \eta(x, y))$ bien choisi, toute EDP linéaire du second ordre à deux variables peut être ramenée à l'une des formes canoniques suivantes :*

- **Elliptique** : $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \dots = 0$.
- **Parabolique** : $u_{\xi\xi} + \dots = 0$.
- **Hyperbolique** : $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \dots = 0$ ou de manière équivalente $u_{\alpha\beta} + \dots = 0$ avec $\alpha = \xi + \eta, \beta = \xi - \eta$.

1.4 Conditions aux limites et conditions initiales

Définition 1.10 (Problème aux limites). Un **problème aux limites** consiste en une EDP posée sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ complétée par des conditions sur la frontière $\partial\Omega$. Les types principaux sont :

1. **Dirichlet** : $u = g$ sur $\partial\Omega$.
2. **Neumann** : $\frac{\partial u}{\partial \nu} = g$ sur $\partial\Omega$, où ν est la normale extérieure.
3. **Robin** (mixte) : $\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \nu} = g$ sur $\partial\Omega$.



Domaine Ω avec normale extérieure ν

Définition 1.11 (Problème bien posé au sens de Hadamard). Un problème est dit **bien posé** au sens de Hadamard s'il vérifie les trois conditions suivantes :

1. **Existence** : il existe au moins une solution.
2. **Unicité** : il existe au plus une solution.
3. **Stabilité** : la solution dépend continûment des données.

Importance du caractère bien posé

Un problème mal posé n'est pas nécessairement sans intérêt mathématique ou physique. L'exemple classique de Hadamard montre que le problème de Cauchy pour l'équation de Laplace est mal posé, mais des techniques de régularisation permettent de l'aborder.

Exemple 1.12 (Problème de Dirichlet pour le laplacien sur le disque). Trouver u harmonique dans le disque unité $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ avec $u = g$ sur $\partial D = \{x^2 + y^2 = 1\}$. En coordonnées polaires :

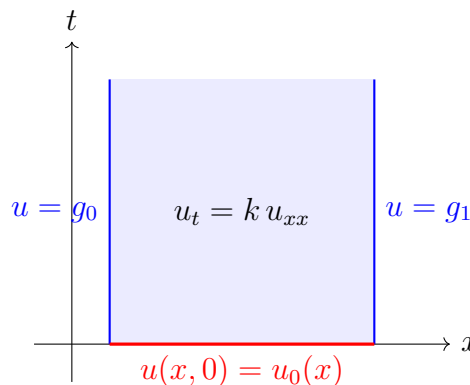
$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, & 0 < r < 1, \\ u(1, \theta) = g(\theta). \end{cases}$$

Ce problème est bien posé (existence, unicité, stabilité).

1.5 Problèmes d'évolution

Définition 1.13 (Problème de Cauchy). Pour une EDP d'évolution (parabolique ou hyperbolique), le **problème de Cauchy** consiste à trouver $u(x, t)$ vérifiant l'EDP pour $t > 0$ et des **conditions initiales** pour $t = 0$:

- Pour l'équation de la chaleur : $u(x, 0) = u_0(x)$.
- Pour l'équation des ondes : $u(x, 0) = u_0(x)$ et $u_t(x, 0) = v_0(x)$.



Problème mixte pour l'équation de la chaleur

1.6 Exemples fondamentaux de modélisation

1.6.1 Dérivation de l'équation de la chaleur

Considérons une barre mince de longueur L . Soit $u(x, t)$ la température au point $x \in [0, L]$ à l'instant t . La conservation de l'énergie sur un segment $[a, b]$ donne :

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho c_p u(x, t) dx = -q(a, t) + q(b, t) + \int_a^b f(x, t) dx,$$

où ρ est la densité, c_p la capacité thermique, q le flux de chaleur et f un terme source. La loi de Fourier donne $q(x, t) = -k u_x(x, t)$. En dérivant sous le signe intégral :

$$\int_a^b \rho c_p u_t dx = \int_a^b k u_{xx} dx + \int_a^b f dx.$$

Comme ceci vaut pour tout $[a, b]$, on obtient :

$$\rho c_p u_t = k u_{xx} + f,$$

soit, en posant $\kappa = k/(\rho c_p)$:

$$u_t = \kappa u_{xx} + \tilde{f}. \quad (1.2)$$

1.6.2 Dérivation de l'équation des ondes

Considérons une corde vibrante de densité linéaire ρ soumise à une tension T . Pour de petits déplacements transversaux $u(x, t)$, le principe fondamental de la dynamique appliqué à un élément $[x, x + dx]$ donne :

$$\rho dx u_{tt} = T \sin \theta(x + dx) - T \sin \theta(x) \approx T(u_x(x + dx) - u_x(x)) = T u_{xx} dx.$$

On obtient donc :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad c = \sqrt{T/\rho}. \quad (1.3)$$

1.7 Exemples de solutions explicites

Exemple 1.14 (Solutions de l'équation de Laplace en 2D). Les fonctions harmoniques suivantes sont solutions de $\Delta u = 0$ dans $\mathbb{R}^2$:

1. $u(x, y) = ax + by + c$ (fonctions affines).
2. $u(x, y) = x^2 - y^2$ (vérification : $u_{xx} + u_{yy} = 2 - 2 = 0$).
3. $u(x, y) = e^x \cos y$ (vérification : $u_{xx} + u_{yy} = e^x \cos y - e^x \cos y = 0$).
4. $u(r, \theta) = r^n \cos(n\theta)$ en polaires, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.15 (Ondes progressives). La fonction $u(x, t) = f(x - ct)$ est solution de l'équation des ondes $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ pour toute fonction f de classe C^2 . En effet :

$$u_t = -cf'(x - ct), \quad u_{tt} = c^2 f''(x - ct), \quad u_x = f'(x - ct), \quad u_{xx} = f''(x - ct).$$

Donc $u_{tt} = c^2 u_{xx}$. De même, $g(x + ct)$ est solution (onde se propageant vers la gauche).

1.8 Notion de solution

Définition 1.16 (Solution classique). Une **solution classique** d'une EDP d'ordre k est une fonction $u \in C^k(\Omega)$ qui satisfait l'EDP en tout point de Ω .

Définition 1.17 (Solution faible). Une **solution faible** est une fonction u appartenant à un espace fonctionnel adéquat (par exemple un espace de Sobolev) qui satisfait l'EDP au sens des distributions, c'est-à-dire :

$$\int_{\Omega} u L^* \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

où L^* est l'adjoint formel de l'opérateur L .

Remarque 1.18. La notion de solution faible est essentielle pour les raisons suivantes :

1. Certaines EDP n'admettent pas de solution classique (par exemple les lois de conservation hyperboliques développent des chocs).
2. Le cadre faible permet d'utiliser les outils de l'analyse fonctionnelle (théorème de Lax-Milgram, méthodes variationnelles).
3. Sous des hypothèses de régularité, on peut souvent montrer qu'une solution faible est en fait classique.

1.9 Exercices

Exercice 1.1. Classifier les EDP suivantes (elliptique, parabolique, hyperbolique) :

1. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$.
2. $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} = 0$.
3. $3u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} = 0$.
4. $u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0$ (le type dépend-il de x ?).

Exercice 1.2. Montrer que la superposition $u = \sum_{k=1}^N c_k u_k$ de solutions d'une EDP linéaire homogène est encore solution. Ce résultat s'étend-il au cas non homogène ?

Exercice 1.3. Vérifier que $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ est harmonique dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Calculer ∇u et interpréter physiquement cette solution.

Exercice 1.4. Dériver l'équation de la chaleur en dimension n :

$$u_t = \kappa \Delta u + f$$

en utilisant la conservation de l'énergie et la loi de Fourier $\vec{q} = -k \nabla u$ dans un domaine arbitraire $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Exercice 1.5 (Problème de Hadamard). Considérer le problème de Cauchy pour l'équation de Laplace :

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 0) = \frac{1}{n} \sin(nx).$$

Montrer que la solution est $u(x, y) = \frac{1}{n^2} \sin(nx) \sinh(ny)$. En déduire que lorsque $n \rightarrow \infty$, la donnée initiale tend vers 0 uniformément mais la solution ne tend pas vers 0 pour $y \neq 0$. Conclure sur le caractère mal posé.

Exercice 1.6. Soit l'équation de Tricomi : $u_{xx} + y u_{yy} = 0$. Déterminer les régions du plan où cette EDP est elliptique, parabolique ou hyperbolique. Tracer ces régions.

Chapitre 2

Équation de Transport

Imaginez un polluant déversé dans une rivière. Si le courant est uniforme et qu'il n'y a ni diffusion ni réaction chimique, le polluant se déplace simplement avec le fluide, comme un passager dans un train. C'est l'équation de transport — la plus simple de toutes les EDP, mais aussi la plus fondamentale, car elle contient en germe la méthode des caractéristiques, qui sera notre outil principal pour toutes les équations du premier ordre.

2.1 Introduction et motivation physique

L'équation de transport est la plus simple des EDP. Elle modélise le déplacement d'une quantité (concentration, densité, polluant) transportée par un champ de vitesse sans diffusion ni réaction.

Intuition

Imaginez un colorant injecté dans une rivière à courant uniforme. Le colorant est emporté sans se mélanger : sa concentration se déplace rigidement à la vitesse du courant. C'est exactement ce que décrit l'équation de transport.

2.2 Équation de transport à coefficients constants

2.2.1 Le problème de Cauchy

Définition 2.1 (Équation de transport homogène). L'équation de transport à vitesse constante $c \in \mathbb{R}$ est :

$$\begin{cases} u_t + c u_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Théorème 2.2 (Solution du problème de Cauchy). Si $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, alors le problème (2.1) admet une unique solution $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ donnée par :

$$\boxed{u(x, t) = u_0(x - ct).} \quad (2.2)$$

Démonstration. Méthode des caractéristiques. Cherchons les courbes $(x(t), t)$ dans le plan (x, t) le long desquelles la solution u est constante. Si u est solution, posons

$z(t) = u(x(t), t)$. Alors :

$$z'(t) = u_t(x(t), t) + x'(t) u_x(x(t), t).$$

Pour que $z'(t) = 0$ (solution constante le long de la courbe), il suffit de choisir $x'(t) = c$, ce qui donne les **caractéristiques** :

$$x(t) = x_0 + ct, \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

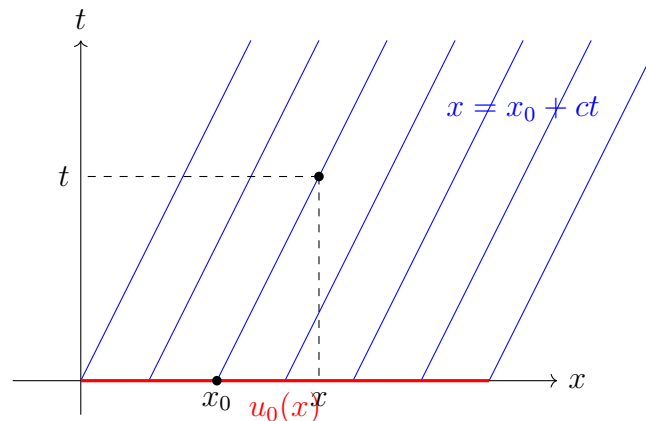
Le long de chaque caractéristique, $u(x(t), t) = u(x_0, 0) = u_0(x_0)$. En exprimant $x_0 = x - ct$, on obtient $u(x, t) = u_0(x - ct)$.

Vérification. Si $u_0 \in C^1$, alors $u(x, t) = u_0(x - ct)$ est bien C^1 et :

$$u_t = -c u'_0(x - ct), \quad u_x = u'_0(x - ct),$$

donc $u_t + c u_x = 0$ et $u(x, 0) = u_0(x)$.

Unicité. Si v est une autre solution C^1 , alors $w = u - v$ satisfait $w_t + c w_x = 0$ avec $w(x, 0) = 0$. Le long de toute caractéristique, w est constante égale à 0, donc $w \equiv 0$. $\square$



Caractéristiques de $u_t + cu_x = 0$

Équation de transport — formules clés

- Solution : $u(x, t) = u_0(x - ct)$ (onde progressive).
- Caractéristiques : droites $x - ct = \text{cste}$.
- La solution se propage à vitesse c sans déformation.

2.2.2 Équation non homogène

Théorème 2.3 (Transport avec terme source). *Le problème :*

$$\begin{cases} u_t + c u_x = f(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (2.3)$$

admet pour solution :

$$u(x, t) = u_0(x - ct) + \int_0^t f(x - c(t - s), s) ds. \quad (2.4)$$

Démonstration. Le long de la caractéristique $x(s) = x - c(t - s)$, on a :

$$\frac{d}{ds}u(x(s), s) = u_t + c u_x = f(x(s), s).$$

En intégrant de $s = 0$ à $s = t$:

$$u(x, t) - u(x - ct, 0) = \int_0^t f(x - c(t - s), s) ds.$$

□

2.3 Méthode des caractéristiques — cas général

2.3.1 EDP du premier ordre quasi-linéaire

Considérons l'EDP générale du premier ordre :

$$a(x, y, u) u_x + b(x, y, u) u_y = c(x, y, u). \quad (2.5)$$

Définition 2.4 (Équations caractéristiques). Les **équations caractéristiques** associées à (2.5) forment le système d'EDO :

$$\frac{dx}{a(x, y, u)} = \frac{dy}{b(x, y, u)} = \frac{du}{c(x, y, u)}. \quad (2.6)$$

Ou de manière équivalente, en paramétrant par s :

$$\frac{dx}{ds} = a, \quad \frac{dy}{ds} = b, \quad \frac{du}{ds} = c.$$

Théorème 2.5 (Existence locale). *Soit Γ une courbe initiale paramétrée par $(x_0(\tau), y_0(\tau), u_0(\tau))$ telle que :*

$$\left. \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, \tau)} \right|_{s=0} = a y'_0(\tau) - b x'_0(\tau) \neq 0 \quad (\text{condition de transversalité}).$$

Alors il existe localement une unique solution $u(x, y)$ au voisinage de Γ .

Condition de transversalité

Si la courbe initiale est tangente aux caractéristiques en un point, la méthode échoue : soit il n'y a pas de solution, soit il y en a une infinité. C'est analogue au problème de Cauchy pour les EDO quand la condition initiale est posée en un point singulier.

Exemple 2.6 (EDP linéaire à coefficients variables). Résoudre :

$$x u_x + y u_y = u, \quad u(x, 1) = g(x).$$

Les équations caractéristiques sont :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{u}.$$

De $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$, on obtient $\frac{x}{y} = C_1$ (constante). De $\frac{dy}{y} = \frac{du}{u}$, on obtient $\frac{u}{y} = C_2$. Donc la solution générale est :

$$u = y \Phi\left(\frac{x}{y}\right)$$

pour une fonction arbitraire Φ . La condition initiale $u(x, 1) = g(x)$ donne $\Phi(x) = g(x)$, d'où :

$$u(x, y) = y g\left(\frac{x}{y}\right).$$

2.3.2 Cas non linéaire : équation de Burgers

Définition 2.7 (Équation de Burgers inviscide). L'équation de Burgers est l'EDP non linéaire :

$$u_t + u u_x = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x). \quad (2.7)$$

Théorème 2.8 (Solution implicite de Burgers). Les caractéristiques de (2.7) sont les droites :

$$x = x_0 + u_0(x_0) t.$$

Le long de chaque caractéristique, u est constante : $u = u_0(x_0)$. La solution est définie implicitement par :

$$u(x, t) = u_0(x - u(x, t) t). \quad (2.8)$$

Démonstration. Les équations caractéristiques sont :

$$\frac{dx}{ds} = u, \quad \frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{du}{ds} = 0.$$

Donc u est constante le long des caractéristiques, et $x(t) = x_0 + u_0(x_0) t$. □

2.3.3 Formation de chocs

Théorème 2.9 (Temps de formation du choc). Si $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ et u'_0 admet un minimum négatif, alors les caractéristiques se croisent au temps :

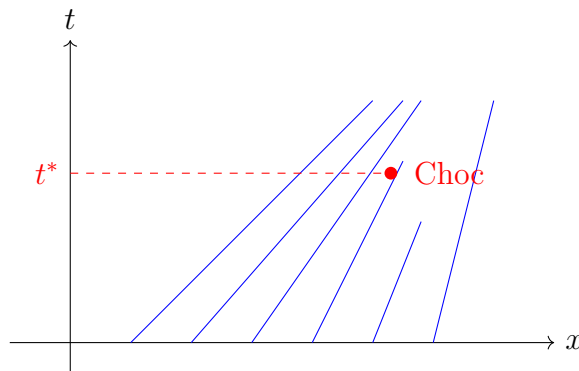
$$t^* = \frac{-1}{\min_{x \in \mathbb{R}} u'_0(x)} > 0. \quad (2.9)$$

Pour $t < t^*$, la solution est C^1 . Pour $t \geq t^*$, il se forme un **choc** (discontinuité).

Démonstration. Deux caractéristiques issues de x_0 et $x_1 > x_0$ se croisent si :

$$x_0 + u_0(x_0) t = x_1 + u_0(x_1) t,$$

soit $t = \frac{x_1 - x_0}{u_0(x_0) - u_0(x_1)} = \frac{-1}{(u_0(x_1) - u_0(x_0))/(x_1 - x_0)}$. En passant à la limite $x_1 \rightarrow x_0$, le premier croisement a lieu à $t^* = -1/\min u'_0$. □



Formation d'un choc : croisement des caractéristiques

Exemple 2.10 (Choc pour Burgers). Soit $u_0(x) = 1 - x$ pour $x \in [0, 1]$, $u_0(x) = 1$ pour $x < 0$, $u_0(x) = 0$ pour $x > 1$. Alors $\min u'_0 = -1$ (sur $]0, 1[$), donc $t^* = 1$. Les caractéristiques issues de $[0, 1]$ sont $x = x_0 + (1 - x_0)t$ et elles se croisent toutes au point $(1, 1)$.

2.4 Transport en dimension supérieure

Définition 2.11 (Équation de transport en $\mathbb{R}^n$). Soit $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ un vecteur vitesse constant. L'équation de transport s'écrit :

$$u_t + \vec{b} \cdot \nabla u = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.10)$$

La solution est $u(x, t) = u_0(x - \vec{b}t)$.

Pour un champ de vitesse variable $\vec{b}(x, t)$, l'équation $u_t + \vec{b}(x, t) \cdot \nabla u = 0$ se résout encore par les caractéristiques, qui sont les solutions de :

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{b}(\vec{X}(t), t), \quad \vec{X}(0) = x_0.$$

2.5 Conservation et intégrales premières

Proposition 2.12 (Conservation des normes L^p). Si u est solution de $u_t + c u_x = 0$ avec $u_0 \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, alors :

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R})} \quad \forall t \geq 0.$$

Démonstration. Pour $1 \leq p < \infty$, le changement de variable $y = x - ct$ donne :

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x, t)|^p dx = \int_{\mathbb{R}} |u_0(x - ct)|^p dx = \int_{\mathbb{R}} |u_0(y)|^p dy.$$

Le cas $p = \infty$ est immédiat. □

Théorème 2.13 (Forme conservative et condition de Rankine-Hugoniot). L'équation $u_t + (f(u))_x = 0$ (loi de conservation) admet des solutions faibles discontinues. À travers une discontinuité se propageant à la vitesse σ , la condition de **Rankine-Hugoniot** s'écrit :

$$\sigma [u] = [f(u)], \quad (2.11)$$

où $[u] = u^+ - u^-$ désigne le saut.

2.6 Solutions faibles et entropie

Définition 2.14 (Solution faible). Une fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ est une **solution faible** de $u_t + (f(u))_x = 0$ avec donnée initiale u_0 si :

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} [u \varphi_t + f(u) \varphi_x] dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(x, 0) dx = 0$$

pour toute $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$.

Non-unicité des solutions faibles

Les solutions faibles ne sont en général pas uniques ! Il faut imposer une **condition d'entropie** pour sélectionner la solution physiquement admissible. La condition de Lax exige :

$$f'(u^-) > \sigma > f'(u^+).$$

2.7 Exercices

Exercice 2.1. Résoudre $u_t + 3u_x = 0$, $u(x, 0) = e^{-x^2}$. Tracer $u(x, t)$ pour $t = 0, 1, 2$.

Exercice 2.2. Résoudre $u_t + 2u_x = t \sin x$, $u(x, 0) = 0$.

Exercice 2.3. Résoudre par les caractéristiques : $y u_x - x u_y = 0$, $u(x, 0) = x^2$ pour $x > 0$. Interpréter géométriquement les caractéristiques.

Exercice 2.4. Soit l'équation de Burgers $u_t + u u_x = 0$ avec :

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ 1 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

1. Tracer les caractéristiques.
2. Déterminer le temps t^* de formation du choc.
3. Écrire la solution pour $0 < t < t^*$.

Exercice 2.5. Résoudre l'équation de transport non linéaire : $u_t + u^2 u_x = 0$, $u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}$. Déterminer le temps de formation du premier choc.

Exercice 2.6. Montrer que si u est solution de $u_t + c u_x = 0$, alors $E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u^2(x, t) dx$ est conservée. Généraliser à $u_t + c(x) u_x = 0$ avec $c_x = 0$. Que se passe-t-il si $c_x \neq 0$?

Exercice 2.7 (Ondes de raréfaction). Considérer l'équation de Burgers avec :

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Montrer qu'il n'existe pas de solution classique pour $t > 0$.
2. Construire une **onde de raréfaction** $u(x, t) = v(x/t)$ solution faible continue.
3. Vérifier qu'une solution avec choc (de vitesse $\sigma = 1/2$) est aussi solution faible, mais ne satisfait pas la condition d'entropie de Lax.

Chapitre 3

Séparation de Variables et Séries de Fourier

En 1807, Joseph Fourier présente à l'Académie des Sciences de Paris un mémoire audacieux : toute fonction périodique, aussi irrégulière soit-elle, peut s'écrire comme une somme de sinus et de cosinus. L'affirmation est accueillie avec scepticisme — Lagrange la juge impossible — mais elle se révélera être l'une des idées les plus fécondes de toute l'histoire des mathématiques. La méthode de Fourier, née de l'étude de la propagation de la chaleur, offre une stratégie remarquable pour résoudre les EDP linéaires : décomposer le problème en modes propres, résoudre chaque mode séparément, puis recombinaison. Ce principe de *séparation des variables* transforme une EDP en une famille d'EDO ordinaires — un gain considérable.

3.1 Principe de la séparation des variables

La méthode de séparation des variables (ou méthode de Fourier) est l'une des techniques les plus puissantes pour résoudre les EDP linéaires sur des domaines simples avec des conditions aux limites homogènes.

Intuition

L'idée est de chercher la solution sous la forme d'un produit de fonctions, chacune ne dépendant que d'une seule variable. L'EDP se décompose alors en plusieurs EDO, beaucoup plus faciles à résoudre.

3.1.1 Méthode générale

Considérons une EDP de la forme $L[u] = 0$ posée sur un domaine $\Omega = (0, L) \times (0, T)$ avec conditions aux limites homogènes.

Étape 1 : Chercher des solutions de la forme $u(x, t) = X(x) T(t)$.

Étape 2 : Substituer dans l'EDP et séparer les variables pour obtenir deux EDO couplées par une constante de séparation λ .

Étape 3 : Résoudre le problème de Sturm-Liouville pour X (avec conditions aux limites), ce qui détermine les valeurs propres λ_n .

Étape 4 : Résoudre l'EDO pour T avec chaque λ_n .

Étape 5 : Former la solution générale par superposition : $u = \sum_n c_n X_n(x) T_n(t)$.

Étape 6 : Déterminer les coefficients c_n par la condition initiale en utilisant les séries de Fourier.

Exemple 3.1 (Équation de la chaleur sur un segment). Considérons :

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx}, & 0 < x < L, \ t > 0, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0 < x < L. \end{cases}$$

On pose $u(x, t) = X(x) T(t)$. L'EDP donne $X T' = k X'' T$, soit :

$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X} = -\lambda \quad (\text{constante}).$$

Ceci donne deux EDO :

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(L) = 0,$$

$$T' + k\lambda T = 0.$$

Le problème pour X est un problème de Sturm-Liouville dont les solutions non triviales sont :

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n \geq 1.$$

L'EDO pour T donne $T_n(t) = e^{-k\lambda_n t}$. La solution générale est :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k(n\pi/L)^2 t},$$

où les b_n sont les coefficients de Fourier en sinus de u_0 .

3.2 Séries de Fourier

3.2.1 Définitions et coefficients

Définition 3.2 (Série de Fourier). Soit $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. La **série de Fourier** de f est :

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)], \quad (3.1)$$

où les **coefficients de Fourier** sont :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx. \quad (3.2)$$

Définition 3.3 (Série de Fourier complexe). De manière équivalente, on peut écrire :

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Coefficients de Fourier sur $[0, L]$

Pour une fonction f sur $[0, L]$:

- Coefficients en sinus : $b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$.
- Coefficients en cosinus : $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$.

3.2.2 Orthogonalité

Proposition 3.4 (Orthogonalité des fonctions trigonométriques). Le système $\{1, \cos(nx), \sin(nx)\}_{n \geq 1}$ est orthogonal dans $L^2(-\pi, \pi)$:

$$\begin{aligned} \langle \cos(mx), \cos(nx) \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \pi \delta_{mn}, \\ \langle \sin(mx), \sin(nx) \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \pi \delta_{mn}, \\ \langle \cos(mx), \sin(nx) \rangle &= 0 \quad \forall m, n. \end{aligned}$$

3.2.3 Convergence des séries de Fourier

Théorème 3.5 (Convergence ponctuelle — Dirichlet). Si f est 2π -périodique, continue par morceaux et de classe C^1 par morceaux, alors la série de Fourier converge en tout point :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

En particulier, aux points de continuité, la série converge vers $f(x)$.

Théorème 3.6 (Convergence uniforme). Si f est 2π -périodique, continue et de classe C^1 par morceaux, alors la série de Fourier converge uniformément vers f .

Théorème 3.7 (Convergence dans L^2 — Parseval). Si $f \in L^2(-\pi, \pi)$, la série de Fourier converge vers f dans L^2 et l'égalité de **Parseval** est vérifiée :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \quad (3.3)$$

Remarque 3.8. L'égalité de Parseval exprime que le système trigonométrique forme une **base hilbertienne** de $L^2(-\pi, \pi)$. C'est un cas particulier du théorème de complétude.

Exemple 3.9. Calculons la série de Fourier de $f(x) = x$ sur $[-\pi, \pi]$. Par imparité, $a_n = 0$ pour tout $n \geq 0$. Pour les b_n :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Donc :

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx), \quad x \in (-\pi, \pi).$$

L'égalité de Parseval donne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

3.3 Problèmes de Sturm-Liouville

Définition 3.10 (Problème de Sturm-Liouville). Un **problème de Sturm-Liouville régulier** est un problème aux valeurs propres de la forme :

$$-(p(x)y')' + q(x)y = \lambda w(x)y, \quad x \in (a, b), \quad (3.4)$$

avec des conditions aux limites séparées, où $p > 0$, $w > 0$ et q sont continues sur $[a, b]$.

Théorème 3.11 (Propriétés de Sturm-Liouville). *Sous les hypothèses ci-dessus :*

1. Il existe une suite infinie de valeurs propres réelles $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots \rightarrow +\infty$.
2. Les fonctions propres ϕ_n correspondantes sont orthogonales dans $L_w^2(a, b)$: $\int_a^b \phi_m(x) \phi_n(x) w(x) dx = 0$ pour $m \neq n$.
3. La fonction propre ϕ_n admet exactement $n - 1$ zéros dans (a, b) .
4. Le système $\{\phi_n\}$ forme une base hilbertienne de $L_w^2(a, b)$.

Exemple 3.12 (Problèmes types).

1. $X'' + \lambda X = 0$, $X(0) = X(L) = 0$ (Dirichlet) :
 $\lambda_n = (n\pi/L)^2$, $X_n = \sin(n\pi x/L)$.
2. $X'' + \lambda X = 0$, $X'(0) = X'(L) = 0$ (Neumann) :
 $\lambda_n = (n\pi/L)^2$ pour $n \geq 0$, $X_0 = 1$, $X_n = \cos(n\pi x/L)$.
3. $X'' + \lambda X = 0$, $X(0) = 0$, $X'(L) = 0$ (mixte) :
 $\lambda_n = ((2n-1)\pi/(2L))^2$, $X_n = \sin((2n-1)\pi x/(2L))$.

3.4 Applications aux EDP

3.4.1 Équation de la chaleur avec conditions de Neumann

Exemple 3.13. Résoudre :

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx}, & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

La séparation donne $X'' + \lambda X = 0$ avec $X'(0) = X'(L) = 0$ (Neumann). Les valeurs propres sont $\lambda_n = (n\pi/L)^2$, $n \geq 0$, et :

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k(n\pi/L)^2 t},$$

où $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \cos(n\pi x/L) dx$.

Quand $t \rightarrow \infty$, $u(x, t) \rightarrow a_0/2 = \frac{1}{L} \int_0^L u_0(x) dx$, la température moyenne initiale.

3.4.2 Équation des ondes

Exemple 3.14. Résoudre :

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & 0 < x < L, \ t > 0, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = v_0(x). \end{cases}$$

On cherche $u(x, t) = X(x) T(t)$, ce qui donne :

$$X'' + \lambda X = 0, \ X(0) = X(L) = 0 \quad \text{et} \quad T'' + c^2 \lambda T = 0.$$

Les solutions sont $X_n = \sin(n\pi x/L)$, $\omega_n = cn\pi/L$, et :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)],$$

avec :

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad B_n = \frac{2}{L\omega_n} \int_0^L v_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

3.4.3 Équation de Laplace sur un rectangle

Exemple 3.15. Résoudre :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < a, \ 0 < y < b, \\ u(0, y) = u(a, y) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = f(x). \end{cases}$$

En posant $u = X(x) Y(y)$:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda.$$

Avec $X(0) = X(a) = 0$: $\lambda_n = (n\pi/a)^2$, $X_n = \sin(n\pi x/a)$. L'équation pour Y donne $Y'' - \lambda_n Y = 0$ avec $Y(0) = 0$:

$$Y_n(y) = \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right).$$

La solution est :

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right),$$

avec $c_n = \frac{2}{a \sinh(n\pi b/a)} \int_0^a f(x) \sin(n\pi x/a) dx$.

3.5 Séparation en coordonnées polaires

Exemple 3.16 (Laplace dans le disque). Résoudre $\Delta u = 0$ dans le disque $r < R$ avec $u(R, \theta) = f(\theta)$. En polaires, $\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0$. On pose $u = \mathcal{R}(r) \Theta(\theta)$:

$$r^2 \frac{\mathcal{R}''}{\mathcal{R}} + r \frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{R}} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda.$$

La périodicité en θ impose $\lambda_n = n^2$, $n \geq 0$. Les solutions sont :

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)],$$

où a_n , b_n sont les coefficients de Fourier de f . Ceci donne la **formule intégrale de Poisson** :

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2} f(\phi) d\phi.$$

3.6 Exercices

Exercice 3.1. Calculer la série de Fourier de $f(x) = |x|$ sur $[-\pi, \pi]$. En déduire $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Exercice 3.2. Résoudre l'équation de la chaleur $u_t = u_{xx}$ sur $(0, \pi)$ avec $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ et $u(x, 0) = \sin(x) + 3 \sin(2x)$.

Exercice 3.3. Résoudre l'équation des ondes $u_{tt} = 4u_{xx}$ sur $(0, 1)$ avec $u(0, t) = u(1, t) = 0$, $u(x, 0) = x(1-x)$, $u_t(x, 0) = 0$.

Exercice 3.4. Résoudre le problème de Laplace sur le rectangle $(0, \pi) \times (0, 1)$ avec $u(0, y) = u(\pi, y) = 0$, $u(x, 0) = 0$, $u(x, 1) = \sin(3x)$.

Exercice 3.5. Montrer que les coefficients de Fourier de f satisfont $a_n, b_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ (lemme de Riemann-Lebesgue).

Exercice 3.6. Résoudre le problème de Dirichlet dans le disque $r < 1$ avec $u(1, \theta) = \cos^2 \theta$. Écrire la solution sous forme fermée.

Exercice 3.7 (Problème de Sturm-Liouville singulier). Trouver les valeurs propres et fonctions propres de :

$$-\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) = \frac{\lambda}{x} y, \quad 1 < x < e, \quad y(1) = y(e) = 0.$$

Indication : poser $x = e^s$.

Chapitre 4

Équation de la Chaleur

C'est pour comprendre la propagation de la chaleur que Joseph Fourier a développé les séries qui portent son nom. Son *Théorie analytique de la chaleur* (1822) est l'un des textes fondateurs de la physique mathématique. L'équation de la chaleur — la plus simple des EDP paraboliques — décrit un phénomène irréversible : un profil de température initial se lisse au fil du temps, les pics s'aplatissent, les gradients s'estompent. Contrairement à l'équation d'onde, l'information se propage à vitesse infinie, et contrairement à l'équation de transport, les solutions deviennent immédiatement régulières. Ces propriétés, surprenantes et contre-intuitives, font de l'équation de la chaleur le prototype de toutes les équations de diffusion.

4.1 Motivation physique et formulation

L'équation de la chaleur décrit la diffusion thermique dans un milieu conducteur. Si $u(x, t)$ représente la température, la loi de Fourier ($\vec{q} = -k\nabla u$) combinée à la conservation de l'énergie donne :

Définition 4.1 (Équation de la chaleur). L'**équation de la chaleur** en dimension n est :

$$u_t - \kappa \Delta u = f(x, t), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (4.1)$$

où $\kappa > 0$ est la diffusivité thermique. Le cas $f = 0$ est dit **homogène**.

Intuition

L'équation de la chaleur lisse les irrégularités : même si la température initiale est discontinue, la solution devient instantanément C^∞ pour $t > 0$. C'est l'**effet régularisant** de la diffusion. Cependant, l'information se propage à vitesse infinie (pas de front d'onde).

4.2 Solution fondamentale

Définition 4.2 (Noyau de la chaleur). Le **noyau de la chaleur** (ou solution fondamentale) en dimension n est :

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{(4\pi\kappa t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right), \quad t > 0. \quad (4.2)$$

Théorème 4.3 (Propriétés du noyau de la chaleur). *Le noyau Φ vérifie :*

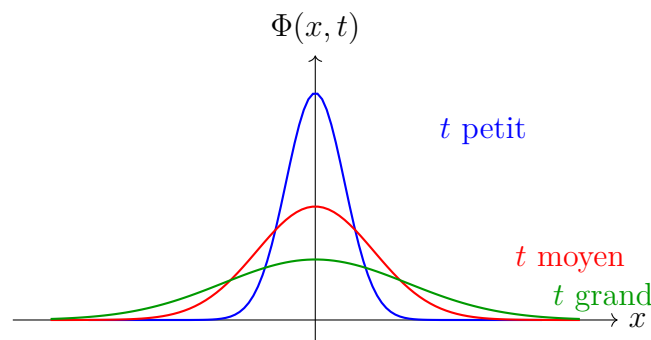
1. $\Phi_t = \kappa \Delta \Phi$ pour $t > 0$, $x \neq 0$.
2. $\Phi(x, t) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.
3. $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx = 1$ pour tout $t > 0$.
4. $\Phi(\cdot, t) \rightarrow \delta_0$ au sens des distributions quand $t \rightarrow 0^+$.

Démonstration. (1) Vérification directe en dimension $n = 1$. On a $\Phi(x, t) = (4\pi\kappa t)^{-1/2} e^{-x^2/(4\kappa t)}$. Calculons :

$$\Phi_t = \Phi \left(-\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{4\kappa t^2} \right), \quad \Phi_x = -\frac{x}{2\kappa t} \Phi, \quad \Phi_{xx} = \left(\frac{x^2}{4\kappa^2 t^2} - \frac{1}{2\kappa t} \right) \Phi.$$

Donc $\Phi_t = \kappa \Phi_{xx}$.

(3) Par le changement $y = x/\sqrt{4\kappa t}$: $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi dx = \pi^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2} dy = 1$. □



Évolution du noyau de la chaleur

4.3 Problème de Cauchy sur $\mathbb{R}^n$

Théorème 4.4 (Solution par convolution). *Si $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$, la solution du problème de Cauchy :*

$$u_t = \kappa \Delta u, \quad u(x, 0) = u_0(x),$$

est donnée par la convolution :

$$u(x, t) = (\Phi(\cdot, t) * u_0)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) u_0(y) dy. \quad (4.3)$$

De plus, $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$.

Idée de la preuve. On peut dériver sous le signe intégral car Φ est C^∞ pour $t > 0$ et décroît exponentiellement. La condition initiale découle de la propriété (4) du noyau : $\Phi(\cdot, t) * u_0 \rightarrow u_0$ quand $t \rightarrow 0^+$. □

Équation de la chaleur — formules clés

- Noyau ($n = 1$) : $\Phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} e^{-x^2/(4\kappa t)}$.
- Solution de Cauchy : $u = \Phi * u_0$.
- Avec source : $u = \Phi * u_0 + \int_0^t \Phi(\cdot, t-s) * f(\cdot, s) ds$ (formule de Duhamel).

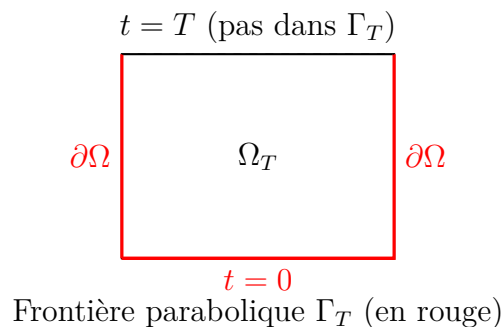
4.4 Principe du maximum pour l'équation de la chaleur

Théorème 4.5 (Principe du maximum faible). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $\Omega_T = \Omega \times (0, T]$. Si $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ satisfait $u_t - \kappa\Delta u \leq 0$ dans Ω_T , alors :*

$$\max_{\overline{\Omega_T}} u = \max_{\Gamma_T} u, \quad (4.4)$$

où $\Gamma_T = (\overline{\Omega} \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, T])$ est la **frontière parabolique**.

Démonstration. Supposons par l'absurde que le maximum est atteint en un point intérieur $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ avec $t_0 > 0$. Alors $\nabla u(x_0, t_0) = 0$, $D^2u(x_0, t_0) \leq 0$ (semi-définie négative), donc $\Delta u(x_0, t_0) \leq 0$. De plus, $u_t(x_0, t_0) \geq 0$ (car le maximum est atteint à t_0). Donc $u_t - \kappa\Delta u \geq 0$ en (x_0, t_0) , contradiction avec $u_t - \kappa\Delta u \leq 0$ (sauf si égalité). On conclut par perturbation en considérant $v = u - \varepsilon t$. $\square$



Corollaire 4.6 (Unicité). *Le problème de Cauchy-Dirichlet pour l'équation de la chaleur (sur un domaine borné) admet au plus une solution classique.*

Démonstration. Si u et v sont deux solutions, $w = u - v$ satisfait $w_t = \kappa\Delta w$ avec $w = 0$ sur Γ_T . Par le principe du maximum, $w \leq 0$ dans $\overline{\Omega_T}$. En appliquant le même argument à $-w$, on obtient $w \geq 0$, donc $w = 0$. $\square$

4.5 Régularité et effet lissant

Théorème 4.7 (Régularité infinie). *Si u est solution de $u_t = \kappa\Delta u$ dans Ω_T avec $u_0 \in L^2(\Omega)$, alors $u \in C^\infty(\Omega \times (0, T])$.*

Irréversibilité

L'équation de la chaleur est irréversible en temps : on ne peut pas, en général, remonter le temps. Le problème $u_t = -\kappa \Delta u$ avec donnée finale est mal posé au sens de Hadamard.

4.6 Comportement asymptotique

Théorème 4.8 (Décroissance en temps). *Soit u la solution de $u_t = \kappa \Delta u$ sur $\mathbb{R}^n$ avec $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Alors :*

1. $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{t^{n/2}} \|u_0\|_{L^1}$.
2. $\|u(\cdot, t)\|_{L^2}$ est décroissante en t .
3. $\int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) dx$ (conservation de la masse).

Démonstration. (2) Calculons :

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} u u_t dx = \kappa \int_{\mathbb{R}^n} u \Delta u dx = -\kappa \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \leq 0.$$

(3) En intégrant l'équation et utilisant le théorème de la divergence : $\frac{d}{dt} \int u dx = \kappa \int \Delta u dx = 0$ (si u décroît suffisamment à l'infini). $\square$

4.7 Formule de Duhamel

Théorème 4.9 (Principe de Duhamel). *La solution du problème non homogène :*

$$u_t - \kappa \Delta u = f(x, t), \quad u(x, 0) = u_0(x),$$

sur $\mathbb{R}^n$ est :

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) u_0(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) dy ds. \quad (4.5)$$

Intuition

Le principe de Duhamel est l'analogue pour les EDP de la méthode de variation des constantes pour les EDO. Le terme source f est traité comme une superposition continue de conditions initiales appliquées à chaque instant s .

4.8 Équation de la chaleur sur un intervalle borné

Exemple 4.10. Résoudre complètement :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = x(\pi - x). \end{cases}$$

Par séparation des variables (cf. Chapitre 3), les modes propres sont $X_n = \sin(nx)$, $\lambda_n = n^2$, et :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) e^{-n^2 t}.$$

Les coefficients de Fourier en sinus de $f(x) = x(\pi - x)$ sont :

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin(nx) dx = \begin{cases} \frac{8}{n^3 \pi} & \text{si } n \text{ impair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases}$$

Donc :

$$u(x, t) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)^3} e^{-(2k+1)^2 t}.$$

Pour t grand, $u(x, t) \approx \frac{8}{\pi} \sin(x) e^{-t}$: seul le premier mode survit.

4.9 Conditions aux limites non homogènes

Pour traiter $u(0, t) = g_0(t)$, $u(L, t) = g_1(t)$, on pose $v(x, t) = u(x, t) - w(x, t)$ où w est un **relèvement** des conditions aux limites :

$$w(x, t) = g_0(t) + \frac{x}{L} (g_1(t) - g_0(t)).$$

Alors v satisfait l'équation de la chaleur avec conditions homogènes et un terme source modifié.

4.10 Exercices

Exercice 4.1. Vérifier que $\Phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} e^{-x^2/(4\kappa t)}$ satisfait $\Phi_t = \kappa \Phi_{xx}$ pour $t > 0$.

Exercice 4.2. Résoudre $u_t = u_{xx}$ sur $\mathbb{R}$ avec $u(x, 0) = e^{-|x|}$.

Exercice 4.3. Montrer que l'énergie $E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L u^2(x, t) dx$ est décroissante pour l'équation de la chaleur avec conditions de Dirichlet homogènes. Quelle est la vitesse de décroissance ?

Exercice 4.4. Résoudre $u_t = u_{xx} + \sin(x)$ sur $(0, \pi)$ avec $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ et $u(x, 0) = 0$. *Indication* : chercher une solution stationnaire puis utiliser Duhamel.

Exercice 4.5. Soit u solution de $u_t = u_{xx}$ sur $(0, 1)$ avec $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 1$, $u(x, 0) = x$. Trouver la solution stationnaire et montrer que u converge vers celle-ci.

Exercice 4.6 (Autosimilarité). Chercher une solution de $u_t = u_{xx}$ sous la forme $u(x, t) = t^{-\alpha} f(\xi)$ avec $\xi = x/\sqrt{t}$. Déterminer α et l'EDO vérifiée par f .

Exercice 4.7. Montrer que la température maximale décroît au cours du temps pour l'équation de la chaleur sur un domaine borné avec conditions de Dirichlet homogènes. *Indication* : utiliser le principe du maximum.

Chapitre 5

Équation des Ondes

Pincez une corde de guitare. La perturbation se propage dans les deux sens, rebondit aux extrémités, et produit un son dont la fréquence dépend de la longueur, de la tension et de la masse linéique de la corde. L'équation des ondes, formulée par d'Alembert en 1747 pour la corde vibrante, est la première EDP jamais écrite. Contrairement à l'équation de la chaleur, elle est réversible dans le temps : les ondes ne se dissipent pas, elles se propagent à vitesse finie et conservent leur forme. La solution de d'Alembert en dimension 1 montre que toute solution est une superposition de deux ondes voyageant en sens opposés — une observation d'une simplicité et d'une puissance remarquables.

5.1 Motivation physique

L'équation des ondes décrit la propagation de perturbations dans un milieu : vibrations d'une corde ou d'une membrane, ondes sonores, ondes électromagnétiques. Contrairement à l'équation de la chaleur, la propagation se fait à **vitesse finie** et sans dissipation.

Définition 5.1 (Équation des ondes). L'équation des ondes en dimension n est :

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (5.1)$$

où $c > 0$ est la vitesse de propagation.

5.2 Équation des ondes en dimension 1

5.2.1 Formule de d'Alembert

Théorème 5.2 (Formule de d'Alembert). La solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = g(x), \quad u_t(x, 0) = h(x), \end{cases} \quad (5.2)$$

est donnée par la **formule de d'Alembert** :

$$u(x, t) = \frac{g(x + ct) + g(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(s) ds. \quad (5.3)$$

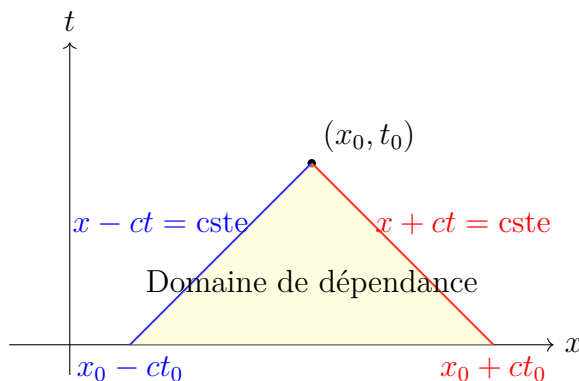
Démonstration. On introduit les **coordonnées caractéristiques** $\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$. L'équation $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ se réécrit $u_{\xi\eta} = 0$, dont la solution générale est :

$$u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta) = F(x + ct) + G(x - ct),$$

où F et G sont des fonctions arbitraires. Les conditions initiales donnent :

$$F(x) + G(x) = g(x), \quad c F'(x) - c G'(x) = h(x).$$

En intégrant la seconde équation et en résolvant le système, on obtient la formule de d'Alembert. $\square$



Équation des ondes 1D — formules clés

- D'Alembert : $u = \frac{1}{2}[g(x + ct) + g(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(s) ds$.
- Caractéristiques : $x \pm ct = \text{cste}$.
- Solution générale : $u = F(x + ct) + G(x - ct)$.

5.2.2 Domaine de dépendance et d'influence

Définition 5.3 (Domaine de dépendance). Le **domaine de dépendance** du point (x_0, t_0) est le segment $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ de l'axe $t = 0$. La solution en (x_0, t_0) ne dépend que des données initiales sur ce segment.

Définition 5.4 (Domaine d'influence). Le **domaine d'influence** du point x_0 sur l'axe $t = 0$ est le cône $\{(x, t) : |x - x_0| \leq ct, t > 0\}$.

Théorème 5.5 (Vitesse finie de propagation). Si les données initiales g et h sont à support dans $[a, b]$, alors $u(x, t) = 0$ pour $x \notin [a - ct, b + ct]$. L'information se propage au plus à la vitesse c .

5.3 Conservation de l'énergie

Théorème 5.6 (Conservation de l'énergie). Si u est solution de $u_{tt} = c^2 \Delta u$ dans $\mathbb{R}^n$, l'énergie :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2) dx \quad (5.4)$$

est conservée : $E(t) = E(0)$ pour tout $t \geq 0$.

Démonstration. Calculons :

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} (u_t u_{tt} + c^2 \nabla u \cdot \nabla u_t) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u_t (u_{tt} - c^2 \Delta u) dx = 0. \end{aligned}$$

La dernière égalité utilise l'intégration par parties ($\int \nabla u \cdot \nabla u_t = - \int u_t \Delta u$). □

Corollaire 5.7 (Unicité). *Le problème de Cauchy pour l'équation des ondes admet au plus une solution (dans une classe de régularité adéquate).*

5.4 Corde vibrante à extrémités fixes

Exemple 5.8. Résoudre :

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & 0 < x < L, \ t > 0, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \\ u(x, 0) = g(x), \quad u_t(x, 0) = h(x). \end{cases}$$

Par séparation des variables :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)],$$

avec $\omega_n = \frac{cn\pi}{L}$ (fréquences propres). Les coefficients sont :

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad B_n = \frac{2}{L\omega_n} \int_0^L h(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

La solution est une superposition de **modes propres** vibrant à des fréquences $\omega_n = cn\pi/L$. La fréquence fondamentale est $\omega_1 = c\pi/L$, les suivantes sont des **harmoniques** $\omega_n = n\omega_1$.

Intuition

Chaque mode propre $\sin(n\pi x/L) \cos(\omega_n t)$ représente une **onde stationnaire** : la forme spatiale reste fixe, seule l'amplitude oscille. La superposition de modes donne les formes complexes d'une corde vibrante.

5.5 Équation des ondes en dimension supérieure

5.5.1 Dimension 3 : formule de Kirchhoff

Théorème 5.9 (Formule de Kirchhoff). *La solution du problème de Cauchy en dimension 3 :*

$$u_{tt} = c^2 \Delta u, \quad u(x, 0) = g(x), \quad u_t(x, 0) = h(x),$$

est :

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{S(x, ct)} h(y) dS(y) + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{S(x, ct)} g(y) dS(y) \right], \quad (5.5)$$

où $S(x, ct)$ est la sphère de centre x et de rayon ct .

Théorème 5.10 (Principe de Huygens fort). *En dimension $n = 3$ (et plus généralement pour n impair ≥ 3), le **principe de Huygens** est valide : la solution en (x, t) ne dépend que des données sur la sphère $|y - x| = ct$, pas dans la boule. Physiquement, un signal ponctuel produit un front d'onde net qui passe et s'éteint.*

5.5.2 Dimension 2 : formule de Poisson

Théorème 5.11 (Formule de Poisson — dimension 2). *En dimension 2, la solution est :*

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi c} \iint_{B(x, ct)} \frac{h(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y - x|^2}} dy + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2\pi c} \iint_{B(x, ct)} \frac{g(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y - x|^2}} dy \right]. \quad (5.6)$$

Pas de principe de Huygens en dimension paire

En dimension 2, la solution dépend des données dans toute la boule $B(x, ct)$, pas seulement sur le cercle. C'est pourquoi les ondes sur l'eau laissent une traînée derrière elles (contrairement aux ondes sonores en 3D).

5.6 Équation des ondes avec dissipation

L'équation des ondes amorties s'écrit :

$$u_{tt} + 2\gamma u_t = c^2 \Delta u, \quad \gamma > 0.$$

Le terme $2\gamma u_t$ modélise un frottement proportionnel à la vitesse.

Proposition 5.12 (Décroissance de l'énergie). Pour l'équation amortie, l'énergie décroît :

$$E'(t) = -2\gamma \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 dx \leq 0.$$

5.7 Exercices

Exercice 5.1. Utiliser la formule de d'Alembert pour résoudre $u_{tt} = u_{xx}$ avec $u(x, 0) = e^{-x^2}$ et $u_t(x, 0) = 0$. Tracer la solution pour $t = 0, 1, 2$.

Exercice 5.2. Résoudre $u_{tt} = 4u_{xx}$ avec $u(x, 0) = 0$ et $u_t(x, 0) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$. Déterminer le domaine de dépendance et tracer la solution.

Exercice 5.3. Corde vibrante : résoudre $u_{tt} = u_{xx}$ sur $(0, \pi)$ avec $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, 0) = \sin(x) \sin(2x)$, $u_t(x, 0) = 0$.

Exercice 5.4. Montrer que la conservation de l'énergie implique l'unicité pour le problème de Cauchy.

Exercice 5.5 (Réflexion sur un bord fixe). Soit $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ pour $x > 0$, $t > 0$ avec $u(0, t) = 0$ et données initiales à support compact dans $(0, \infty)$. Utiliser la méthode des images (prolongement impair) pour construire la solution.

Exercice 5.6. Pour l'équation des ondes amorties $u_{tt} + 2\gamma u_t = c^2 u_{xx}$, montrer que l'énergie $E(t) \leq E(0) e^{-2\gamma t}$.

Exercice 5.7. Vérifier la formule de Kirchhoff en 3D pour le cas $g = 0$, $h(x) = 1$ (donnée constante). Trouver explicitement $u(0, t)$.

Exercice 5.8 (Principe de Duhamel pour les ondes). Montrer que la solution de $u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x, t)$ avec $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$ est :

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s) dy ds.$$

Chapitre 6

Équation de Laplace et Fonctions Harmoniques

L'équation de Laplace $\Delta u = 0$ est la reine des EDP elliptiques. Ses solutions, les *fonctions harmoniques*, modélisent les états d'équilibre : température stationnaire, potentiel électrostatique, écoulement irrotationnel. Pierre-Simon Laplace l'a étudiée dès 1782 dans le contexte de la gravitation newtonienne, et ses propriétés — principe du maximum, régularité infinie, formule de représentation de Poisson — en font l'une des équations les mieux comprises de toute la physique mathématique. Ce chapitre développe ces propriétés remarquables.

6.1 Introduction et motivation

L'équation de Laplace $\Delta u = 0$ modélise les états d'équilibre : température stationnaire, potentiel électrostatique en l'absence de charges, écoulement potentiel. Son étude révèle des propriétés remarquables de régularité, de valeur moyenne et de maximum.

Définition 6.1 (Fonction harmonique). Une fonction $u \in C^2(\Omega)$ est **harmonique** dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si :

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (6.1)$$

Définition 6.2 (Équation de Poisson). L'**équation de Poisson** est l'équation non homogène :

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega. \quad (6.2)$$

6.2 Solution fondamentale

Théorème 6.3 (Solution fondamentale du laplacien). La **solution fondamentale** de l'équation de Laplace en dimension n est :

$$\Gamma(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln |x| & \text{si } n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}} & \text{si } n \geq 3, \end{cases} \quad (6.3)$$

où $\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$ est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$. Elle vérifie $-\Delta \Gamma = \delta_0$ au sens des distributions.

6.3 Propriété de la valeur moyenne

Théorème 6.4 (Propriété de la valeur moyenne). *Si u est harmonique dans Ω et $B(x, r) \subset \Omega$, alors :*

$$u(x) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y) \quad (\text{moyenne sur la sphère}), \quad (6.4)$$

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(x,r)} u(y) dy \quad (\text{moyenne sur la boule}). \quad (6.5)$$

Démonstration. Posons $\phi(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u dS$. Par le changement $y = x + r\sigma$, $\sigma \in \partial B(0, 1)$:

$$\phi(r) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} u(x + r\sigma) dS(\sigma).$$

Dérivons :

$$\phi'(r) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} \nabla u(x + r\sigma) \cdot \sigma dS(\sigma) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS.$$

Par le théorème de la divergence et $\Delta u = 0$:

$$\phi'(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta u dy = 0.$$

Donc $\phi(r) = \phi(0^+) = u(x)$ par continuité. La formule sur la boule s'obtient en intégrant en r . $\square$

Intuition

La valeur d'une fonction harmonique en un point est la moyenne de ses valeurs sur toute sphère centrée en ce point. C'est l'analogue continu du fait qu'en équilibre thermique, la température en un point est la moyenne des températures environnantes.

Théorème 6.5 (Réciproque de la valeur moyenne). *Si $u \in C(\Omega)$ vérifie la propriété de la valeur moyenne (6.4) pour toute boule $B(x, r) \subset \Omega$, alors u est harmonique dans Ω (et en particulier C^∞).*

6.4 Principe du maximum

Théorème 6.6 (Principe du maximum fort pour les fonctions harmoniques). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe borné et $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ harmonique dans Ω . Alors :*

1. $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$ (principe du maximum).
2. Si le maximum est atteint en un point intérieur, alors u est constante dans Ω (principe du maximum fort).

De même pour le minimum.

Démonstration. Supposons que u atteint son maximum M en $x_0 \in \Omega$. Soit $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset \Omega$. Par la valeur moyenne :

$$M = u(x_0) = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(x_0, r)} u(y) dy.$$

Comme $u(y) \leq M$ partout et $u(x_0) = M$, la moyenne ne peut valoir M que si $u \equiv M$ dans $B(x_0, r)$. L'ensemble $\{x : u(x) = M\}$ est donc ouvert (et fermé dans Ω par continuité). Par connexité, $u \equiv M$ dans Ω . $\square$

Corollaire 6.7 (Unicité du problème de Dirichlet). *Le problème de Dirichlet $\Delta u = 0$ dans Ω , $u = g$ sur $\partial\Omega$, admet au plus une solution.*

Corollaire 6.8 (Stabilité). *Si u et v sont harmoniques avec $u = g_1$, $v = g_2$ sur $\partial\Omega$, alors :*

$$\max_{\bar{\Omega}} |u - v| \leq \max_{\partial\Omega} |g_1 - g_2|.$$

6.5 Régularité des fonctions harmoniques

Théorème 6.9 (Régularité C^∞). *Toute fonction harmonique est C^∞ . Plus précisément, si u est harmonique dans Ω , alors $u \in C^\infty(\Omega)$ et toutes ses dérivées partielles sont harmoniques.*

Théorème 6.10 (Analyticité). *Toute fonction harmonique est analytique réelle : elle est égale à sa série de Taylor en tout point de son domaine.*

Théorème 6.11 (Estimations de gradient). *Si u est harmonique dans $B(x_0, R)$, alors :*

$$|\nabla u(x_0)| \leq \frac{n}{R} \max_{\partial B(x_0, R)} |u|. \quad (6.6)$$

Plus généralement, pour tout multi-indice α :

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_{n,|\alpha|}}{R^{|\alpha|}} \max_{\partial B(x_0, R)} |u|.$$

6.6 Inégalité de Harnack

Théorème 6.12 (Inégalité de Harnack). *Soit u harmonique et **positive** dans $B(x_0, R) \subset \mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in B(x_0, R)$ avec $|x - x_0| = r < R$:*

$$\frac{R^{n-2}(R-r)}{(R+r)^{n-1}} u(x_0) \leq u(x) \leq \frac{R^{n-2}(R+r)}{(R-r)^{n-1}} u(x_0). \quad (6.7)$$

En particulier, sur tout compact $K \Subset \Omega$, il existe $C = C(K, \Omega)$ tel que :

$$\max_K u \leq C \min_K u.$$

Remarque 6.13. L'inégalité de Harnack affirme que les fonctions harmoniques positives ne peuvent pas varier trop rapidement. Elle est fondamentale en théorie de la régularité.

6.7 Formule de représentation de Green

Définition 6.14 (Fonction de Green). La **fonction de Green** du domaine Ω est $G(x, y) = \Gamma(x - y) - h^y(x)$, où h^y est harmonique dans Ω avec $h^y = \Gamma(\cdot - y)$ sur $\partial\Omega$.

Théorème 6.15 (Formule de représentation). Si $u \in C^2(\overline{\Omega})$ est harmonique dans Ω , alors pour tout $x \in \Omega$:

$$u(x) = - \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y) dS(y). \quad (6.8)$$

Pour l'équation de Poisson $-\Delta u = f$:

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy - \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y) dS(y). \quad (6.9)$$

Exemple 6.16 (Fonction de Green du disque). Pour le disque $B(0, R) \subset \mathbb{R}^2$, la fonction de Green est :

$$G(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln |x - y| + \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{|x||y|}{R} \left| \frac{x}{|x|^2} \cdot R^2 - y \right| \right).$$

La formule de représentation redonne le **noyau de Poisson**.

6.8 Théorème de Liouville

Théorème 6.17 (Théorème de Liouville). Toute fonction harmonique bornée sur $\mathbb{R}^n$ est constante.

Démonstration. Soit u harmonique bornée sur $\mathbb{R}^n$, $|u| \leq M$. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $R > 0$, l'estimation du gradient donne :

$$|\nabla u(x_0)| \leq \frac{n}{R} M.$$

En faisant $R \rightarrow \infty$, on obtient $\nabla u(x_0) = 0$ pour tout x_0 , donc u est constante. $\square$

6.9 Exercices

Exercice 6.1. Montrer que si u est harmonique dans $B(0, R) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ et bornée, alors la singularité en 0 est éliminable (théorème de singularité éliminable).

Exercice 6.2. Utiliser la formule de Poisson pour résoudre le problème de Dirichlet dans le disque $B(0, 1)$ avec $u(1, \theta) = \cos(2\theta) + 3\sin(\theta)$.

Exercice 6.3. Montrer que si u est harmonique et positive dans $\mathbb{R}^n$, alors u est constante (conséquence de Harnack).

Exercice 6.4. Calculer la fonction de Green du demi-espace $\{x_n > 0\}$ par la méthode des images.

Exercice 6.5. Montrer que la valeur moyenne d'une fonction harmonique sur une sphère est égale à sa valeur au centre. Que se passe-t-il pour les fonctions sous-harmoniques ($\Delta u \geq 0$) ?

Exercice 6.6. Soit u harmonique dans $\Omega = B(0, 1) \setminus \overline{B(0, 1/2)} \subset \mathbb{R}^3$, avec $u = 0$ sur $|x| = 1/2$ et $u = 1$ sur $|x| = 1$. Trouver u sous la forme $u(r) = a + b/r$.

Exercice 6.7 (Principe de Schwarz). Soit u harmonique dans le demi-disque $\{r < 1, 0 < \theta < \pi\}$ avec $u = 0$ sur le diamètre $[-1, 1]$. Montrer que u se prolonge en une fonction harmonique dans tout le disque par réflexion impaire.

Chapitre 7

Principe du Maximum

7.1 Introduction

Imaginez une plaque métallique dont on chauffe les bords. Où se trouve le point le plus chaud à l'intérieur? L'intuition physique est formelle : en l'absence de source de chaleur interne, le maximum de température est nécessairement atteint sur le bord. Cette observation, élevée au rang de principe mathématique par Eberhard Hopf dans les années 1920–1930, est devenue l'un des outils les plus puissants de la théorie des EDP. Le principe du maximum ne nécessite aucune connaissance explicite de la solution : il fournit des bornes a priori, des résultats d'unicité et des théorèmes de comparaison par la seule force de l'équation elle-même. Le lemme de Hopf, qui raffine le principe en montrant que la dérivée normale est strictement négative au point de maximum, est une perle de l'analyse dont les applications irriguent toute la théorie elliptique et parabolique.

Intuition

Physiquement, le principe du maximum traduit le fait qu'en l'absence de source de chaleur interne, la température maximale dans un corps est atteinte sur la frontière. Plus généralement, un état d'équilibre ne peut créer de nouvel extremum à l'intérieur.

7.2 Principe du maximum pour les opérateurs elliptiques

7.2.1 Opérateurs elliptiques généraux

Définition 7.1 (Opérateur elliptique). Un opérateur différentiel du second ordre :

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} + c(x) u \quad (7.1)$$

est dit **elliptique** dans Ω si la matrice $(a_{ij}(x))$ est définie positive pour tout $x \in \Omega$, c'est-à-dire s'il existe $\theta > 0$ tel que :

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2 \quad \forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

7.2.2 Principe du maximum faible

Théorème 7.2 (Principe du maximum faible — cas $c = 0$). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et L un opérateur elliptique avec $c = 0$. Si $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfait $Lu \leq 0$ dans Ω , alors :*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u. \quad (7.2)$$

Démonstration. **Cas $Lu < 0$.** Supposons que u atteint son maximum en $x_0 \in \Omega$. Alors $\nabla u(x_0) = 0$ et $D^2u(x_0) \leq 0$ (matrice hessienne semi-définie négative). Donc :

$$Lu(x_0) = - \sum_{i,j} a_{ij}(x_0) u_{x_i x_j}(x_0) \geq 0,$$

car $\sum a_{ij} \xi_i \xi_j \geq 0$ pour tout ξ implique $\text{tr}(A \cdot D^2u) \leq 0$, d'où $-\text{tr}(A \cdot D^2u) \geq 0$. Ceci contredit $Lu < 0$.

Cas $Lu \leq 0$. On considère $v_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon e^{\alpha x_1}$ pour α assez grand (tel que $L(e^{\alpha x_1}) < 0$). Alors $Lv_\varepsilon < 0$ et le cas précédent s'applique. On conclut en faisant $\varepsilon \rightarrow 0$. $\square$

Théorème 7.3 (Principe du maximum faible — cas $c \geq 0$). *Si $c \geq 0$ et $Lu \leq 0$ dans Ω , alors :*

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+, \quad (7.3)$$

où $u^+ = \max(u, 0)$.

7.2.3 Principe du maximum fort

Théorème 7.4 (Principe du maximum fort — Hopf). *Soit Ω un ouvert connexe borné et L elliptique avec $c = 0$. Si $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfait $Lu \leq 0$ dans Ω et atteint son maximum en un point intérieur $x_0 \in \Omega$, alors u est constante dans Ω .*

Théorème 7.5 (Lemme de Hopf). *Sous les hypothèses du théorème précédent, si le maximum M est atteint en un point $x_0 \in \partial\Omega$ (et pas à l'intérieur), et si Ω satisfait la **condition de sphère intérieure** en x_0 , alors :*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0, \quad (7.4)$$

où ν est la normale extérieure.

Idée de la preuve du lemme de Hopf. On construit une **barrière** $w(x) = e^{-\alpha|x-y|^2} - e^{-\alpha R^2}$ dans l'anneau $B(y, R) \setminus B(y, \rho)$, où $B(y, R)$ est la sphère intérieure tangente en x_0 . Pour α assez grand, $Lw < 0$. Le principe de comparaison donne $u - M \leq -\varepsilon w$, d'où $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq \varepsilon \frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) > 0$. $\square$

7.3 Applications du principe du maximum

7.3.1 Unicité

Corollaire 7.6 (Unicité pour le problème de Dirichlet). *Le problème $Lu = f$ dans Ω , $u = g$ sur $\partial\Omega$ (avec $c \geq 0$ et L elliptique) admet au plus une solution classique.*

7.3.2 Estimations a priori

Théorème 7.7 (Estimation a priori). *Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ solution de $Lu = f$ dans Ω , $u = g$ sur $\partial\Omega$, avec L elliptique et $c = 0$. Alors :*

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |g| + C \max_{\overline{\Omega}} |f|, \quad (7.5)$$

où C dépend de Ω , des coefficients de L et de θ .

7.3.3 Principe de comparaison

Théorème 7.8 (Principe de comparaison). *Si $Lu \leq Lv$ dans Ω et $u \leq v$ sur $\partial\Omega$ (avec $c \geq 0$), alors $u \leq v$ dans $\overline{\Omega}$.*

Démonstration. Poser $w = u - v$. Alors $Lw \leq 0$ et $w \leq 0$ sur $\partial\Omega$. Le principe du maximum donne $w \leq 0$ dans $\overline{\Omega}$. $\square$

7.4 Principe du maximum pour les équations paraboliques

Définition 7.9 (Opérateur parabolique). L'opérateur $\mathcal{L}u = u_t - Lu$ où L est elliptique est dit **parabolique**.

Théorème 7.10 (Principe du maximum parabolique faible). *Soit $\Omega_T = \Omega \times (0, T]$ et Γ_T la frontière parabolique. Si $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ satisfait $\mathcal{L}u \leq 0$ dans Ω_T (avec $c = 0$), alors :*

$$\max_{\overline{\Omega_T}} u = \max_{\Gamma_T} u. \quad (7.6)$$

Théorème 7.11 (Principe du maximum parabolique fort). *Sous les hypothèses ci-dessus, si u atteint son maximum en un point $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ avec $t_0 > 0$, alors u est constante dans $\Omega \times [0, t_0]$.*

Remarque 7.12. La différence fondamentale avec le cas elliptique est que le maximum parabolique ne peut être atteint qu'au bord parabolique Γ_T (qui n'inclut pas $t = T$). Le temps joue un rôle asymétrique : l'information ne se propage que vers le futur.

7.5 Méthode des sous- et sur-solutions

Définition 7.13 (Sous-solution, sur-solution). Une fonction $\underline{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ est une **sous-solution** de $Lu = f$ si $L\underline{u} \leq f$ dans Ω et $\underline{u} \leq g$ sur $\partial\Omega$. Une **sur-solution** $\overline{u}$ vérifie les inégalités opposées.

Théorème 7.14 (Encadrement par sous/sur-solutions). *Si $\underline{u}$ est une sous-solution et $\overline{u}$ une sur-solution, alors $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ dans $\overline{\Omega}$. Si de plus l'existence est établie, la solution u est coïncée entre $\underline{u}$ et $\overline{u}$.*

7.6 Principe du maximum pour les équations non linéaires

Théorème 7.15 (Principe de comparaison pour $-\Delta u = f(u)$). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ localement lipschitzienne. Si $-\Delta u \leq f(u)$ et $-\Delta v \geq f(v)$ dans Ω , et $u \leq v$ sur $\partial\Omega$, alors $u \leq v$ dans Ω , pourvu que f soit décroissante (ou que l'on ait une estimation L^∞ a priori).

7.7 Exercices

Exercice 7.1. Soit u harmonique dans $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ avec $u = x^2$ sur $\partial B(0, 1)$. Montrer que $|u(x)| \leq 1$ dans $B(0, 1)$. Déterminer u .

Exercice 7.2. Soit $Lu = -\Delta u + u$ ($c = 1 > 0$). Montrer que si $Lu \leq 0$ et $u \leq 0$ sur $\partial\Omega$, alors $u \leq 0$ dans Ω .

Exercice 7.3. Utiliser le principe du maximum pour montrer que la solution de $-\Delta u = 1$ dans $B(0, R)$ avec $u = 0$ sur ∂B vérifie $0 \leq u \leq R^2/(2n)$.

Exercice 7.4 (Lemme de Hopf). Soit u harmonique dans $B(0, 1)$ avec $u < 1$ dans $B(0, 1)$ et $u(e_1) = 1$ où $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$. Montrer que $\frac{\partial u}{\partial r}(e_1) > 0$.

Exercice 7.5. Soit u solution de $u_t = u_{xx} + u$ sur $(0, \pi) \times (0, T)$ avec $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$. Le principe du maximum s'applique-t-il directement? Comment l'adapter? *Indication* : poser $v = e^{-t}u$.

Exercice 7.6. Montrer par le principe de comparaison que la solution de $u_t = u_{xx}$, $u(0, t) = u(1, t) = 0$, $u(x, 0) = \sin(\pi x)$ vérifie $0 \leq u(x, t) \leq e^{-\pi^2 t}$ pour tout $t > 0$.

Exercice 7.7. Démontrer le théorème de Liouville pour les fonctions harmoniques en utilisant le principe du maximum (sans l'estimation de gradient). *Indication* : considérer $v_R(x) = u(x) - u(0) - \varepsilon(R^2 - |x|^2)$.

Exercice 7.8. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ vérifiant $-\Delta u + c(x)u = f$ avec $c \geq 0$, $f \leq 0$ et $u = 0$ sur $\partial\Omega$. Montrer que $u \leq 0$ dans Ω .

Chapitre 8

Transformée de Fourier et ÉDP

En 1807, Joseph Fourier affirme que toute fonction peut s'écrire comme somme de sinusoides. Lagrange est sceptique, Poisson dubitatif, mais l'idée est trop puissante pour être ignorée. La *transformée de Fourier*, généralisation continue des séries de Fourier, convertit une fonction de la variable spatiale en une fonction de la fréquence. Pour les EDP à coefficients constants, cette transformation est miraculeuse : les dérivées deviennent des multiplications, les équations aux dérivées partielles se transforment en équations algébriques. L'équation de la chaleur, l'équation des ondes, l'équation de Schrödinger — toutes se résolvent élégamment par Fourier sur $\mathbb{R}^n$. Ce chapitre développe la transformée de Fourier sur L^1 et L^2 , établit la formule d'inversion et le théorème de Plancherel, puis les applique systématiquement aux EDP classiques.

8.1 Transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^n)$

Définition 8.1 (Transformée de Fourier). Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. La *transformée de Fourier* de f est la fonction $\hat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}[f](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx.$$

Remarque 8.2. Il existe différentes conventions pour la transformée de Fourier. On utilise ici la convention symétrique avec 2π dans l'exponentielle, qui élimine les facteurs $(2\pi)^{n/2}$ de la formule d'inversion.

Proposition 8.3 (Propriétés de base). Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$:

1. **Linéarité** : $\widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$.
2. **Translation** : $\widehat{f(\cdot - a)}(\xi) = e^{-2\pi i \langle a, \xi \rangle} \hat{f}(\xi)$.
3. **Modulation** : $\widehat{e^{2\pi i \langle a, \cdot \rangle} f}(\xi) = \hat{f}(\xi - a)$.
4. **Dilatation** : $\widehat{f(\lambda \cdot)}(\xi) = \frac{1}{|\lambda|^n} \hat{f}(\xi/\lambda)$ pour $\lambda \neq 0$.
5. **Convolution** : $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$.

Théorème 8.4 (Lemme de Riemann-Lebesgue). Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$ (continue et tendant vers 0 à l'infini) : $\hat{f}(\xi) \rightarrow 0$ quand $|\xi| \rightarrow \infty$.

Démonstration. Pour f indicatrice d'un rectangle, le résultat est un calcul direct. Par densité des fonctions en escalier dans L^1 et par continuité de $\mathcal{F}$ (car $|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1}$), on étend à tout $f \in L^1$. $\square$

Théorème 8.5 (Transformée de la dérivée). *Si f et $\partial^\alpha f$ sont dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, alors :*

$$\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi),$$

où α est un multi-indice et $(2\pi i \xi)^\alpha = \prod_{j=1}^n (2\pi i \xi_j)^{\alpha_j}$.

Intuition

La transformée de Fourier convertit les dérivées en multiplications par des polynômes. C'est la raison fondamentale de son efficacité pour résoudre les EDP linéaires à coefficients constants : une EDP devient une équation algébrique dans l'espace de Fourier.

8.2 Transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^n)$

Théorème 8.6 (Plancherel). *La transformée de Fourier s'étend en un isomorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R}^n)$:*

$$\|\hat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2} \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Plus généralement, $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{L^2} = \langle f, g \rangle_{L^2}$ (identité de Parseval).

Idée de preuve. On montre d'abord le résultat pour $f \in L^1 \cap L^2$ (espace dense dans L^2), en calculant $\int |\hat{f}|^2$ via la convolution $f * \bar{f}(-\cdot)$. On étend ensuite par densité et continuité. $\square$

Théorème 8.7 (Formule d'inversion). *Si $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors :*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} d\xi \quad p.p.$$

8.3 Distributions tempérées

Définition 8.8 (Espace de Schwartz). *L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ dont toutes les dérivées décroissent plus vite que tout polynôme :*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < \infty \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

Définition 8.9 (Distribution tempérée). *L'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ des distributions tempérées est le dual topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. La transformée de Fourier s'étend à $\mathcal{S}'$ par dualité :*

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle \quad \forall T \in \mathcal{S}', \varphi \in \mathcal{S}.$$

Exemple 8.10 (Transformée de la masse de Dirac). $\hat{\delta} = 1$, car $\langle \hat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) = \int \varphi(\xi) d\xi = \langle 1, \varphi \rangle$.

Exemple 8.11 (Transformée de la gaussienne). Pour $f(x) = e^{-\pi|x|^2}$, on a $\hat{f}(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$. La gaussienne est un point fixe de la transformée de Fourier.

8.4 Résolution de l'équation de la chaleur

Considérons le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur :

$$u_t = \kappa \Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = u_0(x). \quad (8.1)$$

Théorème 8.12 (Solution par transformée de Fourier). *La solution de (8.1) est donnée par :*

$$u(x, t) = (G_t * u_0)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G_t(x - y) u_0(y) dy,$$

où G_t est le noyau de la chaleur :

$$G_t(x) = \frac{1}{(4\pi\kappa t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right).$$

Démonstration. En appliquant la transformée de Fourier en x :

$$\hat{u}_t(\xi, t) = -4\pi^2\kappa |\xi|^2 \hat{u}(\xi, t).$$

C'est une EDO en t , de solution $\hat{u}(\xi, t) = \hat{u}_0(\xi) e^{-4\pi^2\kappa |\xi|^2 t}$. On reconnaît $e^{-4\pi^2\kappa |\xi|^2 t} = \hat{G}_t(\xi)$, donc $u = G_t * u_0$ par la propriété de convolution. $\square$

Propagation instantanée

Le noyau de la chaleur $G_t(x) > 0$ pour tout x et tout $t > 0$. Ainsi, même si u_0 est à support compact, $u(x, t) > 0$ pour tout x dès que $t > 0$: la chaleur se propage à vitesse infinie.

8.5 Résolution de l'équation des ondes

Théorème 8.13 (Solution de l'équation des ondes en dimension n). *Le problème de Cauchy :*

$$u_{tt} = c^2 \Delta u, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = v_0(x),$$

a pour solution (dans l'espace de Fourier) :

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{u}_0(\xi) \cos(2\pi c |\xi| t) + \hat{v}_0(\xi) \frac{\sin(2\pi c |\xi| t)}{2\pi c |\xi|}.$$

Démonstration. La transformée de Fourier en x donne : $\hat{u}_{tt} = -(2\pi c)^2 |\xi|^2 \hat{u}$. Pour chaque ξ fixé, c'est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega = 2\pi c |\xi|$. La solution générale est $\hat{u}(\xi, t) = A(\xi) \cos(\omega t) + B(\xi) \sin(\omega t)$. Les conditions initiales donnent $A = \hat{u}_0$ et $B = \hat{v}_0/\omega$. $\square$

Exemple 8.14 (Formule de d'Alembert ($n = 1$)). En dimension 1, l'inversion donne :

$$u(x, t) = \frac{u_0(x + ct) + u_0(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s) ds.$$

8.6 Solutions fondamentales

Définition 8.15 (Solution fondamentale). La *solution fondamentale* (ou fonction de Green) d'un opérateur linéaire L est la distribution E telle que $LE = \delta$.

Exemple 8.16 (Laplacien en dimension $n \geq 3$). La solution fondamentale de $-\Delta$ dans $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) est :

$$E(x) = \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}},$$

où $\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ est l'aire de S^{n-1} .

Solutions fondamentales des EDP classiques

$$\text{Chaleur : } G_t(x) = \frac{1}{(4\pi\kappa t)^{n/2}} e^{-|x|^2/(4\kappa t)}, \quad t > 0$$

$$\text{Laplacien } (n = 3) : E(x) = \frac{1}{4\pi |x|}$$

$$\text{Laplacien } (n = 2) : E(x) = -\frac{1}{2\pi} \ln |x|$$

$$\text{Helmholtz } (n = 3) : E(x) = \frac{e^{ik|x|}}{4\pi |x|}$$

8.7 Exercices

Exercice 8.1. Calculer la transformée de Fourier de $f(x) = e^{-a|x|}$ pour $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8.2. Montrer la propriété de convolution : si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$.

Exercice 8.3. Vérifier que le noyau de la chaleur G_t satisfait : (a) $\int_{\mathbb{R}^n} G_t(x) dx = 1$ pour tout $t > 0$; (b) $(\partial_t - \kappa\Delta)G_t = 0$ pour $t > 0$; (c) $G_t \rightarrow \delta$ au sens des distributions quand $t \rightarrow 0^+$.

Exercice 8.4. Utiliser la transformée de Fourier pour résoudre l'équation de Schrödinger libre : $i\hbar\psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi$, $\psi(x, 0) = \psi_0(x)$.

Exercice 8.5. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que si $\hat{f}$ est à support compact, alors f se prolonge en une fonction entière sur $\mathbb{C}^n$ (théorème de Paley-Wiener).

Exercice 8.6. Résoudre l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$ avec donnée initiale $u_0(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ (fonction indicatrice). Exprimer la solution à l'aide de la fonction erreur erf.

Exercice 8.7. Montrer que la solution fondamentale du laplacien dans $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) vérifie $-\Delta E = \delta$ au sens des distributions, en calculant ΔE pour $x \neq 0$ et en utilisant le théorème de la divergence.

Chapitre 9

Espaces de Sobolev

Les équations aux dérivées partielles classiques exigent que les solutions soient suffisamment régulières pour que les dérivées aient un sens ponctuel. Mais de nombreux problèmes physiques — membranes vibrantes avec des coins, écoulements turbulents, matériaux composites — produisent des solutions qui ne sont pas différentiables au sens classique. Sergei Sobolev, dans les années 1930, a résolu ce dilemme en introduisant les *dérivées faibles* : une notion de dérivation qui ne demande pas la régularité ponctuelle mais seulement que la « formule d'intégration par parties » soit satisfaite au sens des distributions. Les *espaces de Sobolev* $W^{k,p}(\Omega)$, munis de normes naturelles, sont les espaces fonctionnels dans lesquels vivent les solutions faibles des EDP. Aujourd'hui, toute la théorie moderne des EDP — méthodes variationnelles, éléments finis, régularité — repose sur ce cadre.

9.1 Dérivées faibles

Définition 9.1 (Dérivée faible). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. On dit que $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ est la *dérivée faible* $\partial^\alpha u$ (pour un multi-indice α) si :

$$\int_{\Omega} v \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u \partial^\alpha \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Intuition

La dérivée faible généralise la dérivée classique aux fonctions qui ne sont pas nécessairement différentiables au sens usuel. La formule repose sur une intégration par parties : si u est C^k , la dérivée faible coïncide avec la dérivée classique. L'intérêt est que la dérivée faible peut exister même si u a des singularités.

Exemple 9.2 (Valeur absolue). La fonction $u(x) = |x|$ sur $\mathbb{R}$ a pour dérivée faible $u'(x) = \text{sgn}(x)$ (fonction signe). En effet, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$:

$$\int_{\mathbb{R}} |x| \varphi'(x) \, dx = - \int_{\mathbb{R}} \text{sgn}(x) \varphi(x) \, dx.$$

Exemple 9.3 (Fonction de Heaviside). La fonction de Heaviside $H(x) = \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$ n'a pas de dérivée faible dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$: sa dérivée au sens des distributions est la masse de Dirac δ_0 , qui n'est pas une fonction.

9.2 Espaces de Sobolev $W^{k,p}$

Définition 9.4 (Espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq \infty$. L'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ est :

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \partial^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\},$$

muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty).$$

Pour $p = 2$, on note $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$.

Théorème 9.5 (Complétude). L'espace $W^{k,p}(\Omega)$ est un espace de Banach. Pour $p = 2$, $H^k(\Omega)$ est un espace de Hilbert avec le produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{H^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} \partial^\alpha u \cdot \overline{\partial^\alpha v} \, dx.$$

Définition 9.6 (Espace $W_0^{k,p}(\Omega)$). L'espace $W_0^{k,p}(\Omega)$ est la fermeture de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{k,p}(\Omega)$. Les fonctions de $W_0^{k,p}$ sont celles qui « s'annulent au bord » au sens de la trace. On note $H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$.

9.3 Densité des fonctions lisses

Théorème 9.7 (Meyers-Serrin). L'espace $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ est dense dans $W^{k,p}(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$.

Idée de preuve. On utilise une partition de l'unité $\{\rho_j\}$ et des régularisations par convolution $(\rho_j u) * \eta_{\varepsilon_j}$ avec des noyaux mollificateurs η_ε . En choisissant ε_j assez petit pour chaque j , on approche u dans $W^{k,p}$. $\square$

Théorème 9.8 (Densité de $C^\infty(\overline{\Omega})$). Si Ω est un ouvert borné à bord C^1 , alors $C^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^{k,p}(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$.

9.4 Théorèmes d'injection de Sobolev

Théorème 9.9 (Injection de Sobolev). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné à bord lipschitzien, $k \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq p < \infty$.

1. Si $kp < n$: $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ avec $p^* = \frac{np}{n-kp}$ (exposant de Sobolev).
2. Si $kp = n$: $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [p, \infty)$.
3. Si $kp > n$: $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ avec $\gamma = k - n/p$ si $k - n/p < 1$.

L'exposant critique

L'injection $W^{1,p} \hookrightarrow L^{p^*}$ est *continue* mais *non compacte*. C'est le théorème de Rellich-Kondrachov qui donne la compacité pour les exposants strictement inférieurs à p^* .

Théorème 9.10 (Rellich-Kondrachov). *Soit Ω un ouvert borné à bord lipschitzien.*

1. *Si $kp < n : W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $q < p^*$ (injection compacte).*
2. *Si $kp > n : W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ (injection compacte).*

Exemple 9.11 (Cas $n = 1$). En dimension 1, pour $p = 2$ et $k = 1 : kp = 2 > n = 1$, donc $H^1(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$. Toute fonction H^1 en dimension 1 est continue (après modification sur un ensemble de mesure nulle).

Exemple 9.12 (Cas $n = 3, k = 1, p = 2$). $kp = 2 < n = 3$, donc $p^* = \frac{3 \cdot 2}{3-2} = 6$. On a $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ (continu) et $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour $q < 6$ (compact).

9.5 Théorème de trace

Théorème 9.13 (Trace). *Soit Ω un ouvert borné à bord C^1 . L'opérateur de restriction $\gamma_0 : C^\infty(\overline{\Omega}) \rightarrow C^\infty(\partial\Omega)$, $\gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega}$, se prolonge en un opérateur linéaire continu surjectif :*

$$\gamma_0 : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1-1/p,p}(\partial\Omega), \quad 1 < p < \infty.$$

De plus, $\ker \gamma_0 = W_0^{1,p}(\Omega)$.

Remarque 9.14. Ce théorème justifie la condition de Dirichlet $u = g$ sur $\partial\Omega$ dans le cadre des espaces de Sobolev : on demande $\gamma_0(u) = g$ au sens de la trace, même si u n'est pas continue.

9.6 Inégalité de Poincaré

Théorème 9.15 (Inégalité de Poincaré). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $1 \leq p < \infty$. Il existe une constante $C = C(\Omega, p, n) > 0$ telle que :*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Démonstration. Par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite (u_k) dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ avec $\|u_k\|_{L^p} = 1$ et $\|\nabla u_k\|_{L^p} \rightarrow 0$. Par Rellich-Kondrachov, (u_k) admet une sous-suite convergente dans L^p . La limite u satisfait $\nabla u = 0$ p.p., donc u est constante. Comme $u \in W_0^{1,p}$, on a $u = 0$, ce qui contredit $\|u\|_{L^p} = 1$. $\square$

Corollaire 9.16. *Sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ avec Ω borné, la semi-norme $\|\nabla u\|_{L^p}$ est équivalente à la norme $\|u\|_{W^{1,p}}$.*

Théorème 9.17 (Inégalité de Poincaré-Wirtinger). *Soit Ω un ouvert borné connexe à bord lipschitzien. Pour $1 \leq p < \infty$:*

$$\|u - \bar{u}\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega),$$

où $\bar{u} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u \, dx$ est la moyenne de u .

Résumé des injections de Sobolev ($k = 1$)

Condition	Injection	Type
$p < n$	$W^{1,p} \hookrightarrow L^{np/(n-p)}$	continue
$p < n$	$W^{1,p} \hookrightarrow L^q, q < \frac{np}{n-p}$	compacte
$p = n$	$W^{1,p} \hookrightarrow L^q, \forall q < \infty$	continue
$p > n$	$W^{1,p} \hookrightarrow C^{0,1-n/p}$	continue
$p > n$	$W^{1,p} \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$	compacte

9.7 Exercices

Exercice 9.1. Montrer que $u(x) = |x|^{-\alpha}$ appartient à $W^{1,p}(B(0,1))$ (boule unité de $\mathbb{R}^n$) si et seulement si $(\alpha + 1)p < n$.

Exercice 9.2. Soit $\Omega = (0,1)$ et $u(x) = x^\beta$ pour $\beta > 0$. Déterminer pour quelles valeurs de β et k on a $u \in H^k(\Omega)$.

Exercice 9.3. Démontrer l'inégalité de Sobolev en dimension 1 : pour $u \in W^{1,1}(\mathbb{R})$, on a $\|u\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{2} \|u'\|_{L^1}$.

Exercice 9.4. Montrer que $H^1(\mathbb{R}^n)$ ne s'injecte pas dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour $n \geq 2$. *Indication :* construire un contre-exemple logarithmique.

Exercice 9.5. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à bord lisse. Montrer que la constante de Poincaré C_P vérifie $C_P \leq \frac{\text{diam}(\Omega)}{2}$ quand $p = 2$.

Exercice 9.6. Montrer que si $u \in H_0^1(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$ vérifient $-\Delta u = f$ au sens faible, alors $\|u\|_{H_0^1} \leq C \|f\|_{L^2}$ avec une constante ne dépendant que de Ω .

Chapitre 10

Méthodes Variationnelles

Plutôt que de chercher une solution classique d'une EDP — c'est-à-dire une fonction suffisamment régulière satisfaisant l'équation point par point — pourquoi ne pas reformuler le problème comme la minimisation d'une énergie ? Cette idée, remontant à Dirichlet et Riemann au XIX^e siècle, est le fondement des *méthodes variationnelles*. La formulation faible, où l'on multiplie l'équation par une fonction test et on intègre par parties, transforme l'EDP en un problème dans un espace de Sobolev. Le théorème de Lax–Milgram (1954) garantit alors l'existence et l'unicité de la solution faible. Cette approche est aussi la base théorique de la méthode des éléments finis, l'outil numérique dominant pour les EDP en ingénierie.

10.1 Formulation faible des problèmes elliptiques

Définition 10.1 (Forme bilinéaire associée). Considérons le problème de Dirichlet pour une EDP elliptique du second ordre :

$$-\sum_{i,j=1}^n \partial_j(a_{ij}(x)\partial_i u) + c(x)u = f(x) \quad \text{dans } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (10.1)$$

La *formulation faible* consiste à chercher $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que :

$$a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

où la forme bilinéaire a et la forme linéaire ℓ sont définies par :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j} a_{ij} \partial_i u \partial_j v + c u v \right) dx,$$
$$\ell(v) = \int_{\Omega} f v dx.$$

Intuition

La formulation faible s'obtient en multipliant l'EDP par une fonction test $v \in H_0^1(\Omega)$ et en intégrant par parties. L'avantage est double : on réduit l'ordre de dérivation requis sur u (de 2 à 1), et on obtient un cadre fonctionnel où les théorèmes d'analyse fonctionnelle s'appliquent directement.

Définition 10.2 (Coercivité et continuité). Soit V un espace de Hilbert. Une forme bilinéaire $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est :

- **continue** s'il existe $M > 0$ tel que $|a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V$;
- **coercive** s'il existe $\alpha > 0$ tel que $a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2$.

10.2 Théorème de Lax-Milgram

Théorème 10.3 (Lax-Milgram). Soit V un espace de Hilbert, $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive, et $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors il existe un unique $u \in V$ tel que :

$$a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V.$$

De plus, $\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|\ell\|_{V'}$.

Démonstration. **Étape 1 : Représentation de Riesz.** Par le théorème de Riesz, pour chaque $u \in V$ fixé, il existe un unique $Au \in V$ tel que $a(u, v) = \langle Au, v \rangle_V$ pour tout v . L'application $A : V \rightarrow V$ est linéaire continue avec $\|A\| \leq M$.

De même, il existe $F \in V$ tel que $\ell(v) = \langle F, v \rangle_V$.

Le problème se ramène à : trouver u tel que $Au = F$.

Étape 2 : A est inversible. La coercivité donne $\langle Au, u \rangle = a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2$, donc A est injectif et $\|Au\| \geq \alpha \|u\|$. L'image $\text{Im}(A)$ est fermée (car A est borné inférieurement). Si $w \perp \text{Im}(A)$, alors $\langle Aw, w \rangle = 0$, donc $w = 0$ par coercivité. Ainsi $\text{Im}(A) = V$ et A est bijectif. L'unique solution est $u = A^{-1}F$ avec $\|u\| \leq \frac{1}{\alpha} \|F\| = \frac{1}{\alpha} \|\ell\|_{V'}$. $\square$

Symétrie non requise

Le théorème de Lax-Milgram ne suppose pas que a soit symétrique. C'est un avantage sur le théorème de Riesz, qui nécessiterait la symétrie.

10.3 Application au problème de Dirichlet

Théorème 10.4 (Existence et unicité pour le problème de Dirichlet). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, $f \in L^2(\Omega)$, et supposons que les coefficients $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ satisfont la condition d'ellipticité uniforme :

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \text{ p.p. } x \in \Omega,$$

et que $c(x) \geq 0$ p.p. Alors le problème (10.1) admet une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$.

Démonstration. On vérifie les hypothèses de Lax-Milgram avec $V = H_0^1(\Omega)$.

Continuité de a : $|a(u, v)| \leq \|a_{ij}\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + \|c\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq M \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$.

Coercivité : $a(u, u) \geq \lambda \|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq \frac{\lambda}{1+C_P^2} \|u\|_{H^1}^2$ par l'inégalité de Poincaré (où C_P est la constante de Poincaré).

Continuité de ℓ : $|\ell(v)| = |\int f v| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1}$.

Par Lax-Milgram, il existe une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$. $\square$

Exemple 10.5 (Laplacien avec source). Pour $-\Delta u = f$ dans Ω , $u = 0$ sur $\partial\Omega$: $a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$ et $\ell(v) = \int_\Omega f v \, dx$. Les hypothèses sont satisfaites avec $\lambda = 1$ et $c = 0$.

10.4 Méthode de Ritz-Galerkin

Définition 10.6 (Approximation de Galerkin). Soit $V_h \subset V$ un sous-espace de dimension finie. L'approximation de Galerkin de u est l'unique $u_h \in V_h$ tel que :

$$a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Théorème 10.7 (Lemme de Céa). Si a est continue (constante M) et coercive (constante α), alors :

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V.$$

Démonstration. Par coercivité et l'équation de Galerkin (orthogonalité de l'erreur) :

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v_h) \quad (\text{car } a(u - u_h, w_h) = 0 \text{ pour } w_h \in V_h) \\ &\leq M \|u - u_h\| \|u - v_h\|. \end{aligned}$$

On divise par $\|u - u_h\|$ et on prend l'infimum sur v_h . □

Remarque 10.8. Le lemme de Céa montre que l'approximation de Galerkin est quasi-optimale : l'erreur est au plus M/α fois la meilleure approximation possible dans V_h .

10.5 Principe variationnel (cas symétrique)

Théorème 10.9 (Équivalence variationnelle). Si a est symétrique, continue et coercive, alors u est solution de $a(u, v) = \ell(v)$ pour tout $v \in V$ si et seulement si u minimise la fonctionnelle d'énergie :

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \ell(v).$$

Démonstration. Pour tout $v \in V$: $J(v) = J(u) + \frac{1}{2}a(v - u, v - u) + a(u, v - u) - \ell(v - u)$. Si u est solution, les deux derniers termes s'annulent, donc $J(v) = J(u) + \frac{1}{2}a(v - u, v - u) \geq J(u)$ par coercivité. Réciproquement, si u minimise J , alors $\frac{d}{dt}J(u + tv)|_{t=0} = 0$ donne $a(u, v) = \ell(v)$. □

Exemple 10.10 (Principe de Dirichlet). Pour le problème $-\Delta u = f$ avec $u \in H_0^1(\Omega)$, la fonctionnelle d'énergie est :

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \int_{\Omega} f v dx.$$

Minimiser J équivaut à résoudre $-\Delta u = f$.

10.6 Régularité des solutions faibles

Théorème 10.11 (Régularité H^2). Soit Ω un ouvert borné à bord C^2 et $u \in H_0^1(\Omega)$ la solution faible de $-\Delta u = f$ avec $f \in L^2(\Omega)$. Alors $u \in H^2(\Omega)$ et :

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Théorème 10.12 (Régularité C^∞). Si $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ et $\partial\Omega$ est C^∞ , alors la solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ de $-\Delta u = f$ satisfait $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Remarque 10.13. La régularité dépend de la régularité du bord et du second membre. Si $\partial\Omega$ n'est pas assez régulier (par exemple, domaine avec coins), la régularité H^2 peut faire défaut.

Résumé de la méthode variationnelle

1. Écrire la formulation faible : $a(u, v) = \ell(v)$, $\forall v \in V$.
2. Vérifier la continuité de a et ℓ .
3. Vérifier la coercivité de a (souvent via Poincaré).
4. Appliquer Lax-Milgram $\Rightarrow$ existence et unicité.
5. Étudier la régularité : $u \in H^2$? $u \in C^\infty$?

10.7 Exercices

Exercice 10.1. Écrire la formulation faible du problème : $-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + u = f$ dans Ω , $u = 0$ sur $\partial\Omega$, où $A(x)$ est une matrice symétrique définie positive uniformément. Vérifier les hypothèses de Lax-Milgram.

Exercice 10.2. Montrer que pour le problème de Neumann : $-\Delta u = f$ dans Ω , $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ sur $\partial\Omega$, la condition de compatibilité $\int_\Omega f \, dx = 0$ est nécessaire. Formuler le problème faible dans $H^1(\Omega)$ et appliquer Lax-Milgram dans le quotient $H^1/\mathbb{R}$.

Exercice 10.3. Considérer le problème de Robin : $-\Delta u + u = f$ dans Ω , $\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u = 0$ sur $\partial\Omega$ avec $\alpha > 0$. Écrire la formulation faible dans $H^1(\Omega)$ et montrer l'existence et l'unicité.

Exercice 10.4 (Lemme de Céa en pratique). Soit $\Omega = (0, 1)$, $-u'' = f$ avec $u(0) = u(1) = 0$. Prendre V_h comme l'espace des fonctions affines par morceaux sur une subdivision régulière de pas h . Montrer que $\|u - u_h\|_{H^1} \leq Ch \|u\|_{H^2}$.

Exercice 10.5. Montrer que si a est symétrique, l'approximation de Galerkin u_h minimise $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \ell(v)$ sur V_h . En déduire que l'erreur en énergie satisfait $a(u - u_h, u - u_h) \leq a(u - v_h, u - v_h)$ pour tout $v_h \in V_h$.

Exercice 10.6. Soit Ω un carré de $\mathbb{R}^2$ avec un coin rentrant. Donner un exemple de donnée $f \in L^2(\Omega)$ pour laquelle la solution de $-\Delta u = f$ n'est pas dans $H^2(\Omega)$. Expliquer le rôle de la singularité de coin.

Bibliographie

- [1] Evans, L.C., *Partial Differential Equations*, 2nd ed., AMS, 2010.
- [2] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and PDE*, Springer, 2011.
- [3] John, F., *Partial Differential Equations*, 4th ed., Springer, 1982.
- [4] Rauch, J., *Partial Differential Equations*, Springer, 1991.
- [5] Zuily, C., *Distributions et équations aux dérivées partielles*, Hermann, 2002.