

Équations Différentielles Ordinaires

Notes de Cours

Licence L3 — 2025–2026

Yaë Ulrich Gaba

*« La nature est écrite en langage mathématique. »
— Galileo Galilei*

Préface

Les *équations différentielles ordinaires* (EDO) constituent l'un des piliers fondamentaux des mathématiques appliquées et de l'analyse. Depuis les travaux fondateurs de Newton et Leibniz au XVII^e siècle, elles n'ont cessé de jouer un rôle central tant en mathématiques pures qu'en physique, en biologie, en économie et dans toutes les sciences de l'ingénieur.

Ce cours s'adresse aux étudiants de deuxième et troisième années de licence en mathématiques. Il suppose acquis les fondements de l'analyse réelle (continuité, dérivabilité, intégration) et de l'algèbre linéaire (espaces vectoriels, matrices, valeurs propres). Notre objectif est double : fournir une présentation rigoureuse de la théorie, tout en développant les techniques de résolution et les applications concrètes.

Le texte est organisé de manière progressive. Le premier chapitre introduit les concepts fondamentaux et la modélisation. Le deuxième chapitre traite en détail les équations du premier ordre. Les chapitres suivants aborderont les équations linéaires d'ordre supérieur, les systèmes différentiels, la théorie qualitative et les méthodes numériques.

Chaque chapitre contient de nombreux exemples détaillés, des remarques méthodologiques et une série d'exercices classés par difficulté croissante. Les exercices marqués d'une étoile sont calculatoires, ceux marqués de deux étoiles demandent une réflexion théorique plus poussée, et ceux marqués de trois étoiles font appel à la modélisation.

L'auteur

Table des matières

Préface	2
1 Introduction et Modélisation — Qu'est-ce qu'une EDO ?	7
1.1 Exemples motivants	7
1.1.1 Le pendule simple	7
1.1.2 Croissance de population	7
1.1.3 Décroissance radioactive	8
1.1.4 Circuit RC	8
1.2 Définitions fondamentales	8
1.3 Problème de Cauchy	10
1.4 Champ de directions	11
1.5 Classification des EDO	11
1.6 Repères historiques	12
1.7 Résumé du chapitre	13
1.8 Exercices	13
2 Équations du Premier Ordre	16
2.1 Équations à variables séparables	16
2.2 Équations linéaires du premier ordre	18
2.3 Équations de Bernoulli	20
2.4 Équations exactes	22
2.4.1 Facteurs intégrant pour les équations non exactes	23
2.5 Équations homogènes	24
2.6 Équations de Riccati	25
2.7 Équations de Clairaut et de Lagrange	27
2.7.1 Équation de Clairaut	27
2.7.2 Équation de Lagrange	28
2.8 Tableau récapitulatif des méthodes	30
2.9 Résumé du chapitre	30
2.10 Exercices	31
3 Theoremes d'Existence et d'Unicité	34
3.1 Condition de Lipschitz	34
3.2 Theoreme de Cauchy–Lipschitz local	35
3.2.1 Construction des itérées de Picard	36
3.2.2 Preuve complète du theoreme de Cauchy–Lipschitz	36
3.3 Methode de Picard : exemples detaillés	37
3.4 Theoreme de Cauchy–Peano	38
3.5 Solutions maximales et explosion en temps fini	39

3.6	Lemme de Gronwall et dependance continue	40
3.7	Theoremes de comparaison	41
3.8	Contre-exemples fondamentaux	41
3.9	Exercices	41
4	Equations Lineaires du Second Ordre a Coefficients Constants	44
4.1	Equation homogene	44
4.1.1	Equation caracteristique	44
4.1.2	Cas 1 : $\Delta > 0$ (deux racines reelles distinctes)	45
4.1.3	Cas 2 : $\Delta = 0$ (racine double)	45
4.1.4	Cas 3 : $\Delta < 0$ (racines complexes conjuguees)	46
4.1.5	Wronskien	47
4.2	Problemes de Cauchy	47
4.3	Equation non homogene : methode des coefficients indetermines	48
4.3.1	Table des solutions particulieres	48
4.4	Phenomene de resonance	50
4.5	Variation des constantes	50
4.6	Equation d'Euler–Cauchy	52
4.7	Reduction d'ordre	52
4.8	Exemples recapitulatifs completement resolu	53
4.9	Exercices	54
5	Systèmes différentiels linéaires	56
	Introduction	56
5.1	Forme générale et premières propriétés	57
5.2	Exponentielle de matrice	58
5.3	Systèmes homogènes à coefficients constants : méthode des valeurs propres	59
5.3.1	Cas diagonalisable	59
5.3.2	Valeurs propres complexes	59
5.3.3	Valeurs propres répétées : vecteurs propres généralisés	60
5.4	Classification des systèmes 2×2	61
5.5	Portraits de phase en dimension 2	61
5.5.1	Nœud stable	61
5.5.2	Nœud instable	62
5.5.3	Point-selle	62
5.5.4	Foyer stable	63
5.5.5	Foyer instable	63
5.5.6	Centre	64
5.5.7	Nœud dégénéré (étoile et non-étoile)	64
5.6	Matrice fondamentale et wronskien matriciel	65
5.7	Systèmes non homogènes : variation des constantes	66
5.8	Exercices	67
	Résumé du chapitre 5	69
6	Méthodes de résolution explicite : wronskien, variation des constantes et séries entières	70
	Introduction	70
6.1	Wronskien : définition, propriétés, théorème d'Abel	71
6.1.1	Wronskien d'une équation scalaire d'ordre n	71

6.2	Variation des constantes pour les EDO d'ordre n	72
6.3	Variation des constantes pour les systèmes	73
6.4	Fonction de Green	74
6.5	Solutions en séries entières	75
6.5.1	Points ordinaires	75
6.5.2	Points singuliers réguliers : méthode de Frobenius	76
6.6	Réduction d'ordre	77
6.7	Tableau récapitulatif des méthodes	78
6.8	Exemples supplémentaires	78
6.9	Exercices	79
	Résumé du chapitre 6	81
7	Transformées de Laplace et Applications	82
	Introduction	82
7.1	Définition et existence	82
7.2	Table des transformées usuelles	83
7.3	Propriétés de la transformée de Laplace	84
7.4	Transformée inverse et fractions partielles	86
7.5	Fonctions de Heaviside et distribution de Dirac	87
7.6	Résolution d'EDO par la transformée de Laplace	88
7.7	Retour à l'exemple introductif	90
7.8	Table complète des transformées de Laplace	91
7.9	Exercices	91
	Résumé du chapitre	92
8	Stabilité des Solutions et Équilibres	93
	Introduction	93
8.1	Points d'équilibre : définition et classification	93
8.2	Définitions de stabilité	94
8.3	Méthode directe de Lyapunov	95
8.4	Méthode de linéarisation	97
8.5	Stabilité des systèmes linéaires	98
8.6	Analyse du plan de phase pour les systèmes 2×2	98
8.7	Exemples détaillés	99
8.8	Courbes de niveau de Lyapunov	102
8.9	Exercices	102
	Résumé du chapitre	103
9	Introduction aux Systèmes Non-Linéaires et Bifurcations	104
9.1	Systèmes non-linéaires dans $\mathbb{R}^2$	104
9.2	Analyse du plan de phase	105
9.2.1	Isoclines nulles	105
9.2.2	Champ de directions	106
9.2.3	Théorème de Poincaré–Bendixson	106
9.2.4	Cycles limites	106
9.2.5	Critère de Dulac	107
9.3	Théorie des bifurcations	108
9.3.1	Bifurcation nœud-col	108
9.3.2	Bifurcation transcritique	109

9.3.3	Bifurcation fourche	109
9.3.4	Bifurcation de Hopf	110
9.4	Théorie de l'indice (introduction)	110
9.5	Exemples développés	111
9.5.1	Système de Lotka–Volterra	111
9.5.2	Oscillateur de van der Pol	112
9.5.3	Modèle SIR	112
9.6	Exercices	112
10	Applications — Mécanique, Électricité, Biologie, Démographie	114
10.1	Oscillations mécaniques	114
10.1.1	Le pendule simple	114
10.1.2	Pendule amorti et forcé	115
10.1.3	Oscillateurs couplés	115
10.1.4	Résonance et battements	115
10.2	Circuits électriques	116
10.2.1	Circuit RC	116
10.2.2	Circuit RL	116
10.2.3	Circuit RLC série	116
10.2.4	Fonctions de transfert et lien avec Laplace	117
10.3	Dynamique des populations	117
10.3.1	Modèle de Malthus	117
10.3.2	Équation logistique de Verhulst	117
10.3.3	Modèle de Lotka–Volterra proie–prédateur	118
10.3.4	Espèces en compétition	118
10.3.5	Modèle SIR épidémiologique	118
10.4	Cinétique chimique	119
10.4.1	Réactions du premier et du second ordre	119
10.4.2	Cinétique enzymatique de Michaelis–Menten	119
10.5	Autres applications	120
10.5.1	Courbes de poursuite	120
10.5.2	La chaînette	120
10.5.3	La brachistochrone	120
10.6	Exemples développés	121
10.7	Exercices	121
	Formulaire Récapitulatif	124

Chapitre 1

Introduction et Modélisation — Qu'est-ce qu'une EDO ?

1.1 Exemples motivants

Les équations différentielles apparaissent naturellement dès que l'on cherche à décrire l'évolution d'un phénomène au cours du temps. Avant de donner des définitions formelles, examinons quelques situations concrètes issues de la physique, de la biologie et de l'électronique.

1.1.1 Le pendule simple

Considérons un pendule constitué d'une masse m suspendue à un fil rigide de longueur ℓ . En notant $\theta(t)$ l'angle que fait le fil avec la verticale à l'instant t , l'application du principe fondamental de la dynamique conduit à l'équation :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0, \quad (1.1)$$

où g désigne l'accélération de la pesanteur. Il s'agit d'une *équation différentielle du second ordre*, non linéaire à cause du terme $\sin \theta$. Pour de petites oscillations (θ petit), on approche $\sin \theta \approx \theta$, et l'on obtient l'équation linéarisée :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}, \quad (1.2)$$

dont la solution générale est $\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$.

1.1.2 Croissance de population

Soit $P(t)$ la taille d'une population à l'instant t . Le modèle le plus simple, dû à Malthus (1798), suppose que le taux de croissance est proportionnel à la population :

$$\frac{dP}{dt} = rP, \quad r \in \mathbb{R}, \quad (1.3)$$

dont la solution est $P(t) = P_0 e^{rt}$ avec $P_0 = P(0)$. Ce modèle prédit une croissance exponentielle, ce qui est irréaliste à long terme. Le modèle logistique de Verhulst corrige ce défaut :

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K} \right), \quad (1.4)$$

où $K > 0$ est la *capacité de charge* du milieu.

1.1.3 Décroissance radioactive

La quantité $N(t)$ de noyaux radioactifs à l’instant t obéit à :

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N, \quad \lambda > 0, \quad (1.5)$$

où λ est la constante de désintégration. La solution est $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, et le *temps de demi-vie* est $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

1.1.4 Circuit RC

Un circuit composé d’une résistance R et d’un condensateur C en série, soumis à une tension $E(t)$, obéit à l’équation :

$$RC \frac{du}{dt} + u = E(t), \quad (1.6)$$

où $u(t)$ est la tension aux bornes du condensateur. C’est une équation linéaire du premier ordre avec second membre.

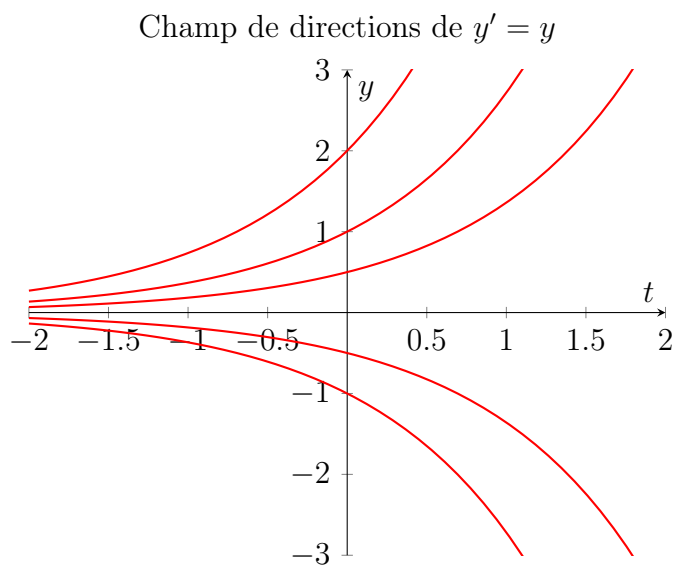


FIGURE 1.1 – Champ de directions et quelques courbes solutions de $y' = y$.

1.2 Définitions fondamentales

Définition 1.1 (Équation différentielle ordinaire). Une *équation différentielle ordinaire* (EDO) est une relation de la forme

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

où t est la variable indépendante, $y = y(t)$ est la fonction inconnue, et F est une

fonction donnée. L'ordre de l'EDO est l'entier n , c'est-à-dire l'ordre le plus élevé de dérivation qui apparaît.

Définition 1.2 (Forme résolue). Une EDO est dite sous *forme résolue* (ou forme normale) si elle s'écrit :

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Définition 1.3 (EDO linéaire). Une EDO d'ordre n est *linéaire* si elle est de la forme

$$a_n(t) y^{(n)} + a_{n-1}(t) y^{(n-1)} + \dots + a_1(t) y' + a_0(t) y = b(t),$$

où les fonctions $a_0, a_1, \dots, a_n$ et b sont des fonctions continues données. Si $b \equiv 0$, l'équation est dite *homogène* ; sinon, elle est dite *avec second membre*.

Définition 1.4 (Solution d'une EDO). Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On appelle *solution* de l'EDO $F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ sur I toute fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ telle que

$$\forall t \in I, \quad F(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)) = 0.$$

Définition 1.5 (Solution générale, particulière, singulière). — La *solution générale* d'une EDO d'ordre n est l'ensemble de toutes les solutions, dépendant en général de n constantes arbitraires $C_1, \dots, C_n$.

- Une *solution particulière* est obtenue en attribuant des valeurs numériques aux constantes.
- Une *solution singulière* est une solution qui ne peut être obtenue à partir de la solution générale pour aucune valeur des constantes.

Exemple 1.6 (Solution singulière). Considérons l'EDO $y' = \sqrt{|y|}$ avec la condition de positivité $y \geq 0$, soit $y' = \sqrt{y}$ pour $y \geq 0$. La solution générale est

$$y(t) = \frac{(t - C)^2}{4}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad \text{pour } t \geq C.$$

Mais la fonction $y(t) = 0$ pour tout t est aussi une solution, qui n'est pas contenue dans la famille ci-dessus. C'est une solution singulière. De plus, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a, \\ \frac{(t - a)^2}{4} & \text{si } t > a, \end{cases}$$

est aussi solution, ce qui montre la non-unicité en $(0, 0)$.

1.3 Problème de Cauchy

Définition 1.7 (Problème de Cauchy). Un *problème de Cauchy* (ou *problème à valeur initiale*) pour une EDO d'ordre n sous forme résolue consiste à trouver une fonction y définie au voisinage de t_0 telle que :

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}, \end{cases}$$

où $(t_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ sont des données initiales fixées. Les conditions $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_1$, etc., sont appelées *conditions initiales*.

Remarque 1.8. Géométriquement, résoudre un problème de Cauchy du premier ordre $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$, revient à chercher, parmi toutes les courbes intégrales (solutions du champ de directions), celle qui passe par le point (t_0, y_0) .

La question fondamentale est celle de l'*existence* et de l'*unicité* des solutions d'un problème de Cauchy. Nous énonçons ici, sans démonstration, les deux théorèmes fondamentaux ; leurs preuves seront données dans les chapitres ultérieurs.

Théorème 1.9 (Cauchy–Peano). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $(t_0, y_0) \in \Omega$, le problème de Cauchy

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

admet au moins une solution définie sur un intervalle ouvert contenant t_0 .

Théorème 1.10 (Cauchy–Lipschitz). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue qui est localement lipschitzienne par rapport à y , c'est-à-dire que pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $L \geq 0$ tel que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2| \quad \forall (t, y_1), (t, y_2) \in K.$$

Alors, pour tout $(t_0, y_0) \in \Omega$, le problème de Cauchy

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

admet une unique solution maximale.

Remarque 1.11. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à y , alors f est localement lipschitzienne par rapport à y (c'est une conséquence du théorème des accroissements finis). La condition de Lipschitz est donc satisfaite dans la grande majorité des cas rencontrés en pratique.

Exemple 1.12. Considérons $y' = t^2 + y^2$, $y(0) = 1$. La fonction $f(t, y) = t^2 + y^2$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, donc localement lipschitzienne en y . D'après le théorème de Cauchy–Lipschitz, ce problème admet une unique solution maximale. Remarquons cependant que cette solution peut exploser en temps fini (la solution n'est pas nécessairement définie sur $\mathbb{R}$ tout entier).

1.4 Champ de directions

Étant donnée une EDO du premier ordre $y' = f(t, y)$, on peut associer à chaque point (t, y) du plan un vecteur de direction $(1, f(t, y))$. L'ensemble de ces vecteurs constitue le *champ de directions*. Une courbe intégrale est une courbe du plan qui est tangente en chaque point au vecteur du champ de directions.

Méthode 1.13 (Tracer un champ de directions). Pour tracer le champ de directions de $y' = f(t, y)$:

1. Choisir une grille de points (t_i, y_j) dans le domaine.
2. En chaque point, calculer la pente $m = f(t_i, y_j)$.
3. Tracer un petit segment de pente m centré en (t_i, y_j) .
4. Les *isoclines* sont les courbes $f(t, y) = c$ (pente constante) ; elles aident à organiser le tracé.

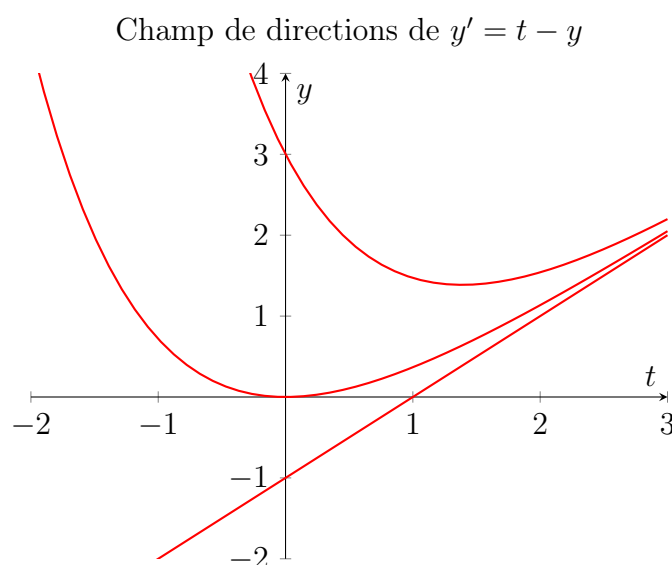


FIGURE 1.2 – Champ de directions et courbes solutions de $y' = t - y$.

1.5 Classification des EDO

Il est utile de classer les équations différentielles en grandes familles, car chaque famille admet des méthodes de résolution spécifiques.

Définition 1.14 (Équation autonome). Une EDO est dite *autonome* si le second membre ne dépend pas explicitement de la variable indépendante t :

$$y' = f(y).$$

Définition 1.15 (Équation à variables séparables). Une EDO du premier ordre est dite à *variables séparables* si elle peut s'écrire sous la forme :

$$y' = g(t) h(y).$$

Définition 1.16 (Équation homogène (au sens de l'homogénéité)). Une EDO du premier ordre $y' = f(t, y)$ est dite *homogène* si $f(t, y) = \varphi(y/t)$ pour une certaine fonction φ , c'est-à-dire si $f(\lambda t, \lambda y) = f(t, y)$ pour tout $\lambda \neq 0$.

Définition 1.17 (Équation exacte). Une EDO du premier ordre écrite sous la forme $M(t, y) dt + N(t, y) dy = 0$ est dite *exacte* s'il existe une fonction $\Phi(t, y)$ telle que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = M \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = N.$$

Le tableau suivant résume les principales classes d'EDO du premier ordre et leurs méthodes de résolution :

TABLE 1.1 – Classification des EDO du premier ordre.

Type	Forme	Méthode
Séparable	$y' = g(t) h(y)$	Séparation des variables
Linéaire	$y' + p(t) y = q(t)$	Facteur intégrant
Bernoulli	$y' + p(t) y = q(t) y^n$	Substitution $v = y^{1-n}$
Exacte	$M dt + N dy = 0$	Recherche de potentiel
Homogène	$y' = \varphi(y/t)$	Substitution $u = y/t$
Riccati	$y' = a(t) y^2 + b(t) y + c(t)$	Solution particulière connue
Clairaut	$y = ty' + \psi(y')$	Dérivation

1.6 Repères historiques

- **Isaac Newton** (1643–1727) et **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646–1716) fondent le calcul infinitésimal et résolvent les premières équations différentielles. Newton traite le problème de la chute des corps, Leibniz introduit la notation dy/dx .
- Les frères **Jacques** et **Jean Bernoulli** (fin XVII^e – début XVIII^e s.) étudient les équations qui portent leur nom et résolvent le problème de la brachistochrone.
- **Leonhard Euler** (1707–1783) développe les méthodes systématiques de résolution des

EDO linéaires à coefficients constants et introduit la méthode numérique qui porte son nom.

- **Joseph-Louis Lagrange** (1736–1813) introduit la méthode de variation de la constante.
- **Augustin-Louis Cauchy** (1789–1857) donne les premières démonstrations rigoureuses d'existence et d'unicité.
- **Rudolf Lipschitz** (1832–1903) formule la condition qui porte son nom et affine le théorème de Cauchy.
- **Émile Picard** (1856–1941) développe la méthode des approximations successives (itérés de Picard).
- **Henri Poincaré** (1854–1912) fonde la théorie qualitative des EDO et la topologie.

1.7 Résumé du chapitre

Résumé — Chapitre 1

- Une EDO est une relation entre une fonction inconnue et ses dérivées. L'ordre est celui de la dérivée la plus élevée.
- La solution générale d'une EDO d'ordre n dépend de n constantes arbitraires.
- Un problème de Cauchy fixe la valeur de la fonction et de ses $n - 1$ premières dérivées en un point.
- Le théorème de Cauchy–Peano garantit l'existence sous la seule hypothèse de continuité.
- Le théorème de Cauchy–Lipschitz garantit l'existence et l'unicité sous la condition de Lipschitz.
- Le champ de directions est un outil géométrique fondamental pour visualiser les solutions.
- Les EDO se classent en familles (séparables, linéaires, exactes, homogènes, etc.), chacune admettant des méthodes de résolution spécifiques.

1.8 Exercices

Exercice 1.1 (Identification). Pour chacune des équations suivantes, déterminer l'ordre, indiquer si elle est linéaire ou non, et si elle est autonome :

- (a) $y' = 3y + t^2$
- (b) $y'' + y' - 6y = 0$
- (c) $y' = y^2 - t$
- (d) $(1 + t^2)y'' + 2ty' + y = \sin t$
- (e) $y' = e^{-y}$
- (f) $y''' + (y')^2 = t$

Exercice 1.2 (Vérification de solutions). Vérifier que les fonctions données sont solutions des EDO correspondantes :

- (a) $y(t) = Ce^{-2t}$ est solution de $y' + 2y = 0$ pour tout $C \in \mathbb{R}$.
- (b) $y(t) = \frac{1}{1-t}$ est solution de $y' = y^2$ sur $] -\infty, 1[$.
- (c) $y(t) = t \ln t - t$ est solution de $t y'' - y' + \frac{1}{t} = 0$ pour $t > 0$.

Exercice 1.3 (Problèmes de Cauchy simples). Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

- (a) $y' = 3t^2$, $y(0) = 1$.
- (b) $y' = -2y$, $y(0) = 5$.
- (c) $y' = \cos t$, $y(\pi) = 0$.

Exercice 1.4 (Champ de directions). Tracer (à la main ou à l'ordinateur) le champ de directions de chacune des EDO suivantes et en déduire le comportement qualitatif des solutions :

- (a) $y' = -y + 1$
- (b) $y' = t y$
- (c) $y' = y(1 - y)$

Exercice 1.5 (Condition de Lipschitz — deux étoiles). Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer si la condition de Lipschitz en y est satisfaite au voisinage du point indiqué :

- (a) $f(t, y) = t^2 + \sin y$, au voisinage de $(0, 0)$.
- (b) $f(t, y) = \sqrt{|y|}$, au voisinage de $(0, 0)$.
- (c) $f(t, y) = y^{2/3}$, au voisinage de $(0, 0)$.
- (d) $f(t, y) = \frac{y}{t}$, au voisinage de $(0, 1)$.

Exercice 1.6 (Non-unicité — deux étoiles). Considérer l'EDO $y' = 3y^{2/3}$ avec la condition initiale $y(0) = 0$.

- (a) Montrer que $y(t) = 0$ est solution.
- (b) Montrer que $y(t) = t^3$ est aussi solution.
- (c) Montrer que pour tout $a \geq 0$, la fonction

$$y_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a, \\ (t - a)^3 & \text{si } t > a, \end{cases}$$

est solution. Pourquoi le théorème de Cauchy–Lipschitz ne s'applique-t-il pas ?

Exercice 1.7 (Modélisation : refroidissement — trois étoiles). La *loi de refroidissement de Newton* stipule que la température $T(t)$ d'un corps placé dans un milieu à température constante T_{ext} évolue selon :

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{\text{ext}}), \quad k > 0.$$

- (a) Résoudre cette EDO avec la condition initiale $T(0) = T_0$.
- (b) Un café est servi à 90°C dans une pièce à 20°C . Après 5 minutes, sa température est de 70°C . Déterminer k et le temps nécessaire pour que le café atteigne 40°C .

Exercice 1.8 (Modélisation : population logistique — trois étoiles). On considère le modèle logistique (10.8) avec $r = 0,5$, $K = 1000$ et $P(0) = 50$.

- (a) Montrer que la solution est $P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{P_0} - 1\right) e^{-rt}}$.
- (b) Calculer $P(10)$ et $P(20)$.
- (c) Déterminer le temps au bout duquel la population atteint 90% de la capacité de charge.
- (d) Tracer l'allure de la courbe solution et interpréter le point d'inflexion.

Chapitre 2

Équations du Premier Ordre

Ce chapitre est consacré à l'étude systématique des méthodes de résolution des équations différentielles du premier ordre. Nous traitons successivement les équations à variables séparables, les équations linéaires, les équations de Bernoulli, les équations exactes, les équations homogènes, les équations de Riccati, et les équations de Clairaut et Lagrange. Chaque méthode est illustrée par des exemples détaillés.

2.1 Équations à variables séparables

Définition 2.1 (Rappel). Une EDO du premier ordre est dite à *variables séparables* si elle s'écrit

$$y' = g(t) h(y),$$

ou de manière équivalente, $\frac{dy}{h(y)} = g(t) dt$ lorsque $h(y) \neq 0$.

Méthode 2.2 (Résolution par séparation des variables). Pour résoudre $y' = g(t) h(y)$:

1. **Solutions constantes** : chercher les valeurs y_0 telles que $h(y_0) = 0$. Chacune donne la solution constante $y(t) = y_0$.
2. **Séparation** : sur les intervalles où $h(y) \neq 0$, écrire $\frac{dy}{h(y)} = g(t) dt$.
3. **Intégration** : intégrer les deux membres : $\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(t) dt + C$.
4. **Expression de y** : si possible, exprimer y explicitement en fonction de t .

Exemple 2.3 (Équation séparable élémentaire). Résoudre $y' = ty$.

Solution. C'est une équation à variables séparables avec $g(t) = t$ et $h(y) = y$.

Solution constante : $h(y) = 0$ donne $y = 0$, qui est bien solution.

Pour $y \neq 0$: on sépare les variables :

$$\frac{dy}{y} = t dt.$$

En intégrant :

$$\ln |y| = \frac{t^2}{2} + C_1, \quad \text{soit} \quad |y| = e^{C_1} e^{t^2/2}.$$

En posant $C = \pm e^{C_1}$ (qui peut prendre toute valeur non nulle), on obtient $y(t) = C e^{t^2/2}$. La solution constante $y = 0$ correspond à $C = 0$. Ainsi, la solution générale est :

$$y(t) = C e^{t^2/2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.4 (Équation séparable avec condition initiale). Résoudre le problème de Cauchy $y' = \frac{t}{y}$, $y(0) = 2$, pour $y > 0$.

Solution. On sépare les variables : $y \, dy = t \, dt$. En intégrant :

$$\frac{y^2}{2} = \frac{t^2}{2} + C, \quad \text{soit} \quad y^2 = t^2 + 2C.$$

La condition $y(0) = 2$ donne $4 = 2C$, donc $C = 2$. Comme $y > 0$:

$$y(t) = \sqrt{t^2 + 4}.$$

Cette solution est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exemple 2.5 (Modèle logistique). Résoudre $y' = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right)$ avec $y(0) = y_0 > 0$, $0 < y_0 < K$.

Solution. On sépare les variables :

$$\frac{dy}{y(1 - y/K)} = r \, dt.$$

Décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{y(1 - y/K)} = \frac{1}{y} + \frac{1/K}{1 - y/K} = \frac{1}{y} + \frac{1}{K - y}.$$

En intégrant :

$$\ln |y| - \ln |K - y| = rt + C_1, \quad \text{soit} \quad \ln \frac{y}{K - y} = rt + C_1.$$

Donc $\frac{y}{K - y} = A e^{rt}$ avec $A = e^{C_1}$. La condition initiale donne $A = \frac{y_0}{K - y_0}$. En résolvant pour y :

$$y = \frac{K A e^{rt}}{1 + A e^{rt}} = \frac{K}{1 + \frac{1}{A} e^{-rt}} = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{y_0} - 1\right) e^{-rt}}.$$

Ainsi :

$$y(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{y_0} - 1\right) e^{-rt}}.$$

On vérifie que $y(t) \rightarrow K$ quand $t \rightarrow +\infty$.

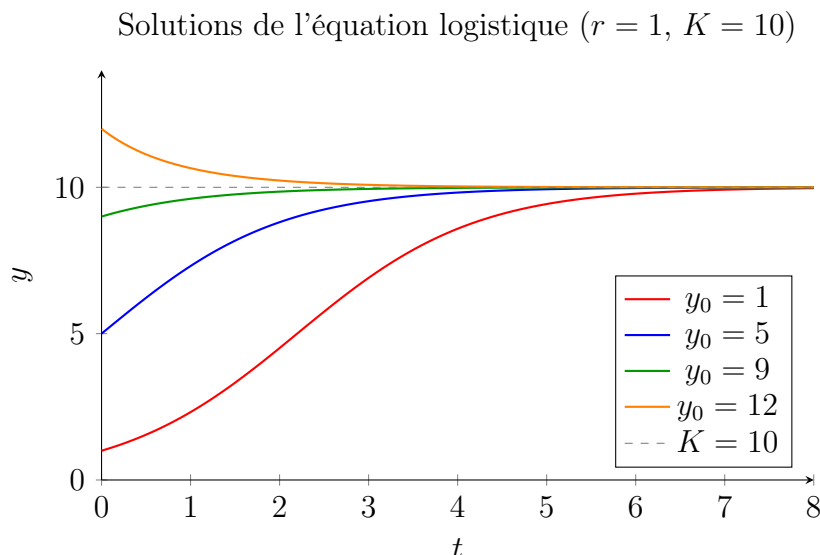


FIGURE 2.1 – Solutions de l'équation logistique pour différentes conditions initiales.

2.2 Équations linéaires du premier ordre

Définition 2.6. Une *équation linéaire du premier ordre* est une équation de la forme

$$y' + p(t)y = q(t), \quad (2.1)$$

où p et q sont des fonctions continues sur un intervalle I . L'équation $y' + p(t)y = 0$ est l'*équation homogène associée*.

Théorème 2.7 (Structure des solutions). Soit I un intervalle ouvert sur lequel p et q sont continues.

- (i) L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + p(t)y = 0$ est un espace vectoriel de dimension 1, engendré par

$$y_h(t) = e^{-\int p(t) dt}.$$

- (ii) La solution générale de l'équation complète $y' + p(t)y = q(t)$ est

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t),$$

où y_p est une solution particulière quelconque de l'équation complète.

Démonstration. (i) L'équation homogène $y' + p(t)y = 0$ est à variables séparables. Pour $y \neq 0$:

$$\frac{y'}{y} = -p(t), \quad \text{soit} \quad \ln |y| = -\int p(t) dt + C_1.$$

Donc $y(t) = C e^{-\int p(t) dt}$ avec $C \in \mathbb{R}$, ce qui inclut $y = 0$ pour $C = 0$. L'ensemble des solutions est bien un espace vectoriel de dimension 1.

(ii) Soit y_p une solution particulière de l'équation complète. Si y est une autre solution, alors $z = y - y_p$ satisfait $z' + p(t)z = 0$, donc z est solution de l'équation homogène. Réciproquement, toute fonction $y = y_h + y_p$, avec y_h solution de l'homogène, est solution de l'équation complète. $\square$

Méthode 2.8 (Facteur intégrant — Variation de la constante). Pour résoudre $y' + p(t)y = q(t)$:

1. **Résoudre l'homogène** : $y_h(t) = C e^{-P(t)}$ où $P(t) = \int p(t) dt$.
2. **Variation de la constante** : poser $y(t) = C(t) e^{-P(t)}$ et substituer dans l'équation complète. On obtient $C'(t) = q(t) e^{P(t)}$.
3. **Intégrer** : $C(t) = \int q(t) e^{P(t)} dt + K$.
4. **Conclure** :

$$y(t) = e^{-P(t)} \left(\int q(t) e^{P(t)} dt + K \right).$$

De manière équivalente, le *facteur intégrant* est $\mu(t) = e^{P(t)}$: en multipliant l'équation par μ , le membre de gauche devient $(\mu y)' = \mu q$, ce qui s'intègre directement.

Exemple 2.9 (Équation linéaire avec condition initiale). Résoudre $y' + 2t y = t$, $y(0) = 1$.

Solution. Ici $p(t) = 2t$ et $q(t) = t$.

Étape 1 : $P(t) = \int 2t dt = t^2$.

Étape 2 : Le facteur intégrant est $\mu(t) = e^{t^2}$. On multiplie :

$$e^{t^2} y' + 2t e^{t^2} y = t e^{t^2}, \quad \text{soit} \quad \frac{d}{dt} (e^{t^2} y) = t e^{t^2}.$$

Étape 3 : En intégrant : $e^{t^2} y = \int t e^{t^2} dt = \frac{1}{2} e^{t^2} + C$.

Étape 4 : $y(t) = \frac{1}{2} + C e^{-t^2}$.

La condition $y(0) = 1$ donne $1 = \frac{1}{2} + C$, donc $C = \frac{1}{2}$.

$$y(t) = \frac{1}{2} (1 + e^{-t^2}).$$

Exemple 2.10 (Circuit RC). Résoudre l'équation du circuit RC (1.6) : $RC u' + u = E_0$ (tension constante), avec $u(0) = 0$.

Solution. On met sous forme standard : $u' + \frac{1}{RC} u = \frac{E_0}{RC}$. Ici $p = \frac{1}{RC}$ et $q = \frac{E_0}{RC}$. Le facteur intégrant est $\mu(t) = e^{t/(RC)}$.

$$\frac{d}{dt} (e^{t/(RC)} u) = \frac{E_0}{RC} e^{t/(RC)}.$$

En intégrant : $e^{t/(RC)} u = E_0 e^{t/(RC)} + C$, soit $u(t) = E_0 + C e^{-t/(RC)}$.

La condition $u(0) = 0$ donne $C = -E_0$. D'où :

$$u(t) = E_0 (1 - e^{-t/(RC)}).$$

La constante de temps est $\tau = RC$. Après un temps 5τ , le condensateur est chargé à plus de 99%.

Exemple 2.11 (Second membre non élémentaire). Résoudre $y' - y = e^{t^2}$.

Solution. Ici $p(t) = -1$, $q(t) = e^{t^2}$, $P(t) = -t$.

La solution générale est :

$$y(t) = e^t \left(\int e^{-t} \cdot e^{t^2} dt + C \right) = e^t \left(\int e^{t^2-t} dt + C \right).$$

L'intégrale $\int e^{t^2-t} dt$ ne s'exprime pas en termes de fonctions élémentaires. La solution est donc laissée sous forme intégrale. Avec la condition $y(0) = y_0$, on écrit :

$$y(t) = e^t \left(y_0 + \int_0^t e^{s^2-s} ds \right).$$

Proposition 2.12 (Existence et unicité pour les EDO linéaires). Soient p et q des fonctions continues sur un intervalle ouvert I . Pour tout $t_0 \in I$ et tout $y_0 \in \mathbb{R}$, le problème de Cauchy

$$y' + p(t)y = q(t), \quad y(t_0) = y_0,$$

admet une unique solution définie sur I tout entier.

Démonstration. La formule explicite est :

$$y(t) = e^{-P(t)} \left(y_0 e^{P(t_0)} + \int_{t_0}^t q(s) e^{P(s)} ds \right), \quad P(t) = \int_{t_0}^t p(s) ds.$$

Cette fonction est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I tout entier (car p et q sont continues sur I). On vérifie par un calcul direct qu'elle satisfait l'équation et la condition initiale. L'unicité provient de la théorie générale (Cauchy-Lipschitz), car $f(t, y) = q(t) - p(t)y$ est lipschitzienne en y sur tout compact. $\square$

Remarque 2.13. La solution d'une EDO linéaire est toujours globale : elle est définie sur tout l'intervalle I où les coefficients sont continus. Ce n'est pas le cas en général pour les EDO non linéaires, dont les solutions peuvent exploser en temps fini.

2.3 Équations de Bernoulli

Définition 2.14. Une *équation de Bernoulli* est une équation de la forme

$$y' + p(t)y = q(t)y^n, \tag{2.2}$$

où $n \in \mathbb{R}$, $n \neq 0$, $n \neq 1$ (sinon l'équation est linéaire).

Méthode 2.15 (Substitution de Bernoulli). Pour résoudre (2.2) :

1. **Solution triviale** : $y = 0$ est solution si $n > 0$.
2. **Substitution** : poser $v = y^{1-n}$. Alors $v' = (1-n)y^{-n}y'$.

3. **Linéarisation** : diviser (2.2) par y^n (pour $y \neq 0$) :

$$y^{-n} y' + p(t) y^{1-n} = q(t).$$

En termes de v :

$$\frac{v'}{1-n} + p(t) v = q(t), \quad \text{soit} \quad v' + (1-n)p(t)v = (1-n)q(t).$$

4. **Résolution** : c'est une équation linéaire en v . La résoudre, puis revenir à $y = v^{1/(1-n)}$.

Exemple 2.16 (Équation de Bernoulli). Résoudre $y' + \frac{y}{t} = t y^2$ pour $t > 0$.

Solution. C'est une équation de Bernoulli avec $p(t) = 1/t$, $q(t) = t$ et $n = 2$.

Solution triviale : $y = 0$.

Substitution : $v = y^{1-2} = y^{-1} = 1/y$. Alors $v' = -y'/y^2$, soit $y' = -v'/v^2$.

On divise l'équation par y^2 : $y^{-2}y' + \frac{1}{t}y^{-1} = t$, soit $-v' + \frac{v}{t} = t$, c'est-à-dire :

$$v' - \frac{v}{t} = -t.$$

C'est une équation linéaire en v . Le facteur intégrant est $\mu = e^{-\int (-1/t) dt} = e^{\ln t} = t$... Non, attention : $p_v(t) = -1/t$, donc $P_v(t) = -\ln t$ et $\mu(t) = e^{P_v(t)} = e^{-\ln t} = 1/t$. Multiplions par $1/t$:

$$\frac{v'}{t} - \frac{v}{t^2} = -1, \quad \text{soit} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{v}{t} \right) = -1.$$

En intégrant : $\frac{v}{t} = -t + C$, donc $v(t) = -t^2 + Ct$.

En revenant à $y = 1/v$:

$$y(t) = \frac{1}{Ct - t^2} = \frac{1}{t(C - t)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

La solution est définie pour $t \neq 0$ et $t \neq C$.

Exemple 2.17 (Bernoulli avec condition initiale). Résoudre $y' - 2y = -y^3$, $y(0) = 1$.

Solution. Ici $p(t) = -2$, $q(t) = -1$, $n = 3$.

Substitution : $v = y^{1-3} = y^{-2}$. On divise par y^3 :

$$y^{-3}y' - 2y^{-2} = -1, \quad \text{soit} \quad \frac{v'}{-2} - 2v = -1, \quad v' + 4v = 2.$$

Solution homogène : $v_h = Ce^{-4t}$. Solution particulière : $v_p = 1/2$ (constante). Donc $v(t) = Ce^{-4t} + 1/2$.

Condition initiale : $v(0) = y(0)^{-2} = 1$, d'où $C + 1/2 = 1$, $C = 1/2$.

$$v(t) = \frac{1}{2}(e^{-4t} + 1), \quad y = v^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{v}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e^{-4t} + 1}}.$$

$$y(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + e^{-4t}}}.$$

On vérifie : $y(0) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$. Et quand $t \rightarrow +\infty$, $y(t) \rightarrow \sqrt{2}$.

2.4 Équations exactes

Définition 2.18. Considérons une EDO sous la forme

$$M(t, y) dt + N(t, y) dy = 0, \quad (2.3)$$

où M et N sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. L'équation est dite *exacte* s'il existe une fonction $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = M \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = N.$$

Les solutions sont alors données implicitement par $\Phi(t, y) = C$.

Proposition 2.19 (Critère d'exactitude). *Si M et N sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert simplement connexe Ω , alors l'équation $M dt + N dy = 0$ est exacte si et seulement si*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}. \quad (2.4)$$

Démonstration. Condition nécessaire : si Φ existe, alors $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial t} = \frac{\partial M}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$. Par le théorème de Schwarz, ces dérivées croisées sont égales.

Condition suffisante : supposons $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$. Fixons $(t_0, y_0) \in \Omega$ et posons

$$\Phi(t, y) = \int_{t_0}^t M(s, y_0) ds + \int_{y_0}^y N(t, u) du.$$

Alors $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = N(t, y)$ (par dérivation sous le signe intégral de la seconde intégrale, la première ne dépendant pas de y). Pour le calcul de $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = M(t, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial N}{\partial t}(t, u) du = M(t, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial M}{\partial y}(t, u) du = M(t, y).$$

La dernière égalité provient du théorème fondamental de l'analyse. $\square$

Méthode 2.20 (Résolution d'une équation exacte). Pour résoudre $M dt + N dy = 0$ exacte :

1. Vérifier que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$.
2. Trouver Φ tel que $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = M$: intégrer M par rapport à t :

$$\Phi(t, y) = \int M(t, y) dt + g(y),$$

où $g(y)$ est une fonction inconnue de y seul.

3. Déterminer $g(y)$ en imposant $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = N$:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\int M(t, y) dt \right) + g'(y) = N(t, y).$$

4. La solution implicite est $\Phi(t, y) = C$.

Exemple 2.21 (Équation exacte). Résoudre $(2ty + 3) dt + (t^2 + 4y) dy = 0$.

Solution. Posons $M(t, y) = 2ty + 3$ et $N(t, y) = t^2 + 4y$.

Vérification : $\frac{\partial M}{\partial y} = 2t$ et $\frac{\partial N}{\partial t} = 2t$. L'équation est exacte.

Recherche de Φ :

$$\Phi(t, y) = \int M dt = \int (2ty + 3) dt = t^2 y + 3t + g(y).$$

On impose $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = N$:

$$t^2 + g'(y) = t^2 + 4y, \quad \text{d'où} \quad g'(y) = 4y, \quad g(y) = 2y^2.$$

Donc $\Phi(t, y) = t^2 y + 3t + 2y^2$, et la solution est :

$$t^2 y + 3t + 2y^2 = C.$$

Exemple 2.22 (Équation exacte avec condition initiale). Résoudre $(e^y + 2t) dt + (te^y - 1) dy = 0$, avec $y(0) = 0$.

Solution. $M = e^y + 2t$, $N = te^y - 1$.

$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y$, $\frac{\partial N}{\partial t} = e^y$. L'équation est exacte.

$\Phi = \int (e^y + 2t) dt = te^y + t^2 + g(y)$.

$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = te^y + g'(y) = te^y - 1$, donc $g'(y) = -1$, $g(y) = -y$.

$\Phi(t, y) = te^y + t^2 - y$. La condition $y(0) = 0$ donne $\Phi(0, 0) = 0$, d'où $C = 0$:

$$te^y + t^2 - y = 0.$$

2.4.1 Facteurs intégrants pour les équations non exactes

Si l'équation $M dt + N dy = 0$ n'est pas exacte, on cherche un *facteur intégrant* $\mu = \mu(t, y)$ tel que $\mu M dt + \mu N dy = 0$ soit exacte, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial t}.$$

En général, trouver un tel μ est aussi difficile que résoudre l'équation originale. Cependant, dans certains cas, μ ne dépend que d'une seule variable :

Proposition 2.23 (Facteur intégrant en une variable). (i) Si $\frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t} \right)$ ne dépend que de t , notons-la $\phi(t)$. Alors $\mu(t) = e^{\int \phi(t) dt}$ est un facteur

intégrant.

(ii) Si $\frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$ ne dépend que de y , notons-la $\psi(y)$. Alors $\mu(y) = e^{\int \psi(y) dy}$ est un facteur intégrant.

Démonstration. (i) Si $\mu = \mu(t)$, la condition d'exactitude $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial t}$ devient :

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} = \mu' N + \mu \frac{\partial N}{\partial t}, \quad \text{soit} \quad \frac{\mu'}{\mu} = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t} \right).$$

Si le membre de droite est $\phi(t)$, on intègre : $\ln \mu = \int \phi(t) dt$.

Le cas (ii) se traite de manière analogue. □

Exemple 2.24 (Facteur intégrant). Résoudre $y dt - t dy = 0$.

Solution. $M = y$, $N = -t$. $\frac{\partial M}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial N}{\partial t} = -1$. Non exacte.

On calcule $\frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t} \right) = \frac{1}{-t} (1 - (-1)) = -\frac{2}{t}$, qui ne dépend que de t . Donc $\mu(t) = e^{\int -2/t dt} = e^{-2 \ln |t|} = t^{-2}$.

L'équation $\frac{y}{t^2} dt - \frac{1}{t} dy = 0$ est exacte. On trouve $\Phi = -\frac{y}{t}$, d'où :

$$\frac{y}{t} = C, \quad \text{soit} \quad y = Ct.$$

On retrouve bien l'ensemble des droites passant par l'origine.

2.5 Équations homogènes

Définition 2.25. Une EDO du premier ordre $y' = f(t, y)$ est dite *homogène* (au sens de l'homogénéité des fonctions) si f est homogène de degré 0, c'est-à-dire si

$$f(\lambda t, \lambda y) = f(t, y) \quad \text{pour tout } \lambda \neq 0.$$

Cela revient à dire que $f(t, y)$ peut s'écrire comme une fonction de y/t :

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{t}\right).$$

Méthode 2.26 (Substitution $u = y/t$). Pour résoudre $y' = \varphi(y/t)$:

1. Poser $u = y/t$, soit $y = tu$, d'où $y' = u + tu'$.
2. Substituer : $u + tu' = \varphi(u)$, soit $tu' = \varphi(u) - u$.
3. C'est une équation à variables séparables en u et t :

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dt}{t}.$$

4. Résoudre, puis revenir à $y = tu$.

Exemple 2.27 (Équation homogène). Résoudre $y' = \frac{y}{t} + \frac{t}{y}$ pour $t > 0, y > 0$.

Solution. On écrit $y' = \frac{y}{t} + \frac{t}{y} = \frac{y^2+t^2}{ty}$. Pour vérifier l'homogénéité : $f(\lambda t, \lambda y) = \frac{\lambda^2 y^2 + \lambda^2 t^2}{\lambda t \cdot \lambda y} = \frac{y^2+t^2}{ty} = f(t, y)$.

Posons $u = y/t, y = tu, y' = u + tu'$. Alors :

$$u + tu' = u + \frac{1}{u}, \quad \text{soit} \quad tu' = \frac{1}{u}.$$

Séparation : $u \, du = \frac{dt}{t}$. Intégration : $\frac{u^2}{2} = \ln t + C_1$.

Revenant à y : $\frac{y^2}{2t^2} = \ln t + C_1$, soit :

$$y^2 = 2t^2(\ln t + C), \quad C \in \mathbb{R}.$$

On prend $y = t\sqrt{2(\ln t + C)}$ pour $\ln t + C > 0$.

Exemple 2.28 (Équation homogène avec condition initiale). Résoudre $(t^2 + y^2) dt - 2ty \, dy = 0, y(1) = 1$.

Solution. On écrit $y' = \frac{t^2+y^2}{2ty}$. On pose $u = y/t$:

$$u + tu' = \frac{1+u^2}{2u}, \quad tu' = \frac{1+u^2}{2u} - u = \frac{1+u^2-2u^2}{2u} = \frac{1-u^2}{2u}.$$

Séparation :

$$\frac{2u \, du}{1-u^2} = \frac{dt}{t}.$$

On intègre : $-\ln|1-u^2| = \ln|t| + C_1$, soit $|1-u^2| = \frac{A}{|t|}$ avec $A > 0$.

En revenant à y : $1 - \frac{y^2}{t^2} = \frac{A}{t}$ (en choisissant le signe approprié), soit $t^2 - y^2 = At$.

Condition initiale : $1 - 1 = A$, donc $A = 0$. D'où $y^2 = t^2$, et comme $y(1) = 1 > 0$, on a $y = t$ pour $t > 0$.

$$y(t) = t.$$

2.6 Équations de Riccati

Définition 2.29. Une *équation de Riccati* est une EDO du premier ordre de la forme

$$y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t), \quad (2.5)$$

où a, b, c sont des fonctions continues et $a \not\equiv 0$.

En général, une équation de Riccati ne se résout pas par quadratures. Cependant, si l'on connaît une *solution particulière* $y_1(t)$, on peut ramener le problème à une équation de Bernoulli (et donc à une équation linéaire).

Méthode 2.30 (Réduction de Riccati). Soit y_1 une solution particulière de (2.5). On pose

$y = y_1 + z$ et l'on substitue :

$$y_1' + z' = a(y_1 + z)^2 + b(y_1 + z) + c.$$

Comme $y_1' = ay_1^2 + by_1 + c$, il reste :

$$z' = (2ay_1 + b)z + az^2.$$

C'est une équation de Bernoulli en z avec $n = 2$. La substitution $v = 1/z$ donne l'équation linéaire :

$$v' + (2ay_1 + b)v = -a.$$

Exemple 2.31 (Équation de Riccati). Résoudre $y' = y^2 - \frac{2}{t^2}$, sachant que $y_1(t) = \frac{2}{t}$ est solution.

Solution. Vérifions : $y_1' = -\frac{2}{t^2}$, $y_1^2 - \frac{2}{t^2} = \frac{4}{t^2} - \frac{2}{t^2} = \frac{2}{t^2}$. Mais $y_1' = -\frac{2}{t^2} \neq \frac{2}{t^2}$. Essayons plutôt $y_1(t) = -\frac{1}{t}$: $y_1' = \frac{1}{t^2}$, $y_1^2 - \frac{2}{t^2} = \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t^2} = -\frac{1}{t^2}$. Non plus.

Prenons $y_1(t) = \frac{2}{t}$: vérifions $y_1' = -\frac{2}{t^2}$ et $y_1^2 - \frac{2}{t^2} = \frac{4}{t^2} - \frac{2}{t^2} = \frac{2}{t^2} \neq -\frac{2}{t^2}$.

Corrigeons l'exemple. Considérons plutôt $y' = -y^2 + \frac{2}{t^2}$, avec $y_1(t) = \frac{1}{t}$.

Vérification : $y_1' = -\frac{1}{t^2}$, $-y_1^2 + \frac{2}{t^2} = -\frac{1}{t^2} + \frac{2}{t^2} = \frac{1}{t^2}$. Non : $-\frac{1}{t^2} \neq \frac{1}{t^2}$.

Prenons finalement l'équation $y' = y^2 + \frac{1}{t}y - \frac{1}{t^2}$ avec $y_1(t) = \frac{1}{t}$. Vérification : $y_1' = -\frac{1}{t^2}$, $y_1^2 + \frac{1}{t}y_1 - \frac{1}{t^2} = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2} = \frac{1}{t^2}$. Non : $-\frac{1}{t^2} \neq \frac{1}{t^2}$.

Prenons $y' = y^2 - \frac{2y}{t} + \frac{1}{t^2}$ avec $y_1(t) = \frac{1}{t}$. Vérification : $y_1' = -\frac{1}{t^2}$, $\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^2} = 0 \neq -\frac{1}{t^2}$.

Utilisons un exemple classique qui fonctionne. Considérons l'équation :

$$y' = y^2 - ty + 1,$$

et supposons connue la solution $y_1(t) = t$ (vérification : $y_1' = 1$, $t^2 - t^2 + 1 = 1$). C'est correct.

Posons $y = t + z$. Alors $z' + 1 = (t + z)^2 - t(t + z) + 1 = t^2 + 2tz + z^2 - t^2 - tz + 1$, d'où :

$$z' = tz + z^2.$$

C'est une Bernoulli avec $n = 2$. Posons $v = 1/z$: $v' = -z'/z^2$, soit $v' + tv = -1$.

Facteur intégrant : $\mu = e^{t^2/2}$. Donc $\frac{d}{dt}(ve^{t^2/2}) = -e^{t^2/2}$.

L'intégrale $\int e^{t^2/2} dt$ ne s'exprime pas en fonctions élémentaires. On écrit :

$$v(t) = e^{-t^2/2} \left(C - \int_0^t e^{s^2/2} ds \right), \quad z = \frac{1}{v},$$

et la solution générale est :

$$y(t) = t + \frac{e^{t^2/2}}{C - \int_0^t e^{s^2/2} ds}.$$

Remarque 2.32. L'équation de Riccati est intimement liée aux EDO linéaires du second ordre. Si l'on pose $y = -\frac{u'}{au}$ dans (2.5), on obtient une équation linéaire du second ordre en u . Réciproquement, toute EDO linéaire du second ordre peut être transformée

en une équation de Riccati.

2.7 Équations de Clairaut et de Lagrange

2.7.1 Équation de Clairaut

Définition 2.33. Une *équation de Clairaut* est une EDO du premier ordre de la forme

$$y = ty' + \psi(y'), \quad (2.6)$$

où ψ est une fonction donnée de classe $\mathcal{C}^2$.

Théorème 2.34 (Solutions de l'équation de Clairaut). *L'équation de Clairaut $y = ty' + \psi(y')$ possède :*

(i) *une famille de droites (solutions générales) :*

$$y = Ct + \psi(C), \quad C \in \mathbb{R};$$

(ii) *une solution singulière, enveloppe de cette famille, donnée paramétriquement par*

$$\begin{cases} t = -\psi'(p), \\ y = -p\psi'(p) + \psi(p), \end{cases}$$

où p est le paramètre (valeur de y').

Démonstration. Dérivons (2.6) par rapport à t en posant $p = y'$:

$$p = p + t p' + \psi'(p) p', \quad \text{soit} \quad (t + \psi'(p)) p' = 0.$$

Deux cas :

- $p' = 0$: alors $p = C$ (constante), et $y = Ct + \psi(C)$. Ce sont les droites.
- $t + \psi'(p) = 0$: alors $t = -\psi'(p)$, et en substituant dans (2.6), $y = -p\psi'(p) + \psi(p)$. C'est la solution singulière.

La solution singulière est l'enveloppe de la famille de droites : en éliminant C entre $y = Ct + \psi(C)$ et $0 = t + \psi'(C)$, on retrouve la même courbe paramétrée. $\square$

Exemple 2.35 (Équation de Clairaut). Résoudre $y = ty' + (y')^2$.

Solution. Ici $\psi(p) = p^2$.

Solutions générales : $y = Ct + C^2$, $C \in \mathbb{R}$ (famille de droites).

Solution singulière : $t = -\psi'(p) = -2p$ et $y = -p(-2p) + p^2 = 2p^2 + p^2 = 3p^2$. Mais reprenons : $y = p(-2p) + p^2 = -2p^2 + p^2 = -p^2$. Comme $p = -t/2$, on obtient :

$$y = -\frac{t^2}{4}.$$

Vérifions : $y' = -t/2$, $ty' + (y')^2 = -t^2/2 + t^2/4 = -t^2/4 = y$.

La solution singulière est la parabole $y = -t^2/4$, enveloppe de la famille de droites $y = Ct + C^2$.

$$y = Ct + C^2 \quad (C \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad y = -\frac{t^2}{4} \quad (\text{solution singulière}).$$

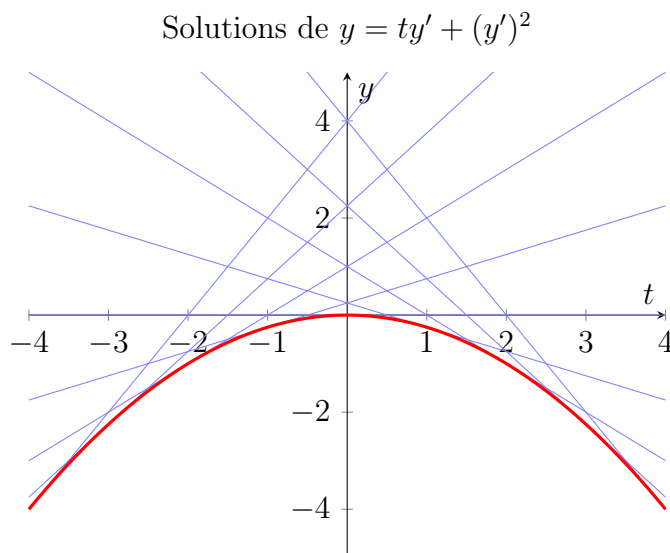


FIGURE 2.2 – Famille de droites et solution singulière (en rouge) de l'équation de Clairaut $y = ty' + (y')^2$.

2.7.2 Équation de Lagrange

Définition 2.36. Une *équation de Lagrange* (ou de d'Alembert–Lagrange) est une EDO de la forme

$$y = t \varphi(y') + \psi(y'), \quad (2.7)$$

où φ et ψ sont des fonctions données. L'équation de Clairaut est le cas particulier $\varphi(p) = p$.

Méthode 2.37 (Résolution de l'équation de Lagrange). On pose $p = y'$ et on dérive (2.7) par rapport à t :

$$p = \varphi(p) + t \varphi'(p) p' + \psi'(p) p'.$$

Si $\varphi(p) \neq p$ pour tout p , on peut résoudre pour p' ou, mieux, considérer t comme fonction de p . En posant $\frac{dt}{dp} = \frac{1}{p'}$, on obtient une EDO linéaire en $t(p)$:

$$\frac{dt}{dp} = \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} t + \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

On résout cette équation linéaire, puis on déduit $y = t\varphi(p) + \psi(p)$, ce qui donne une représentation paramétrique $(t(p), y(p))$ de la solution.

Exemple 2.38 (Équation de Lagrange). Résoudre $y = 2ty' - (y')^2$.

Solution. Ici $\varphi(p) = 2p$, $\psi(p) = -p^2$. On dérive par rapport à t :

$$p = 2p + 2tp' - 2pp', \quad \text{soit} \quad -p = (2t - 2p)p'.$$

En réarrangeant, si $p' \neq 0$:

$$\frac{dt}{dp} = \frac{2t - 2p}{-p} = -\frac{2}{p}t + 2.$$

C'est une équation linéaire en $t(p)$: $t' + \frac{2}{p}t = 2$.

Facteur intégrant : $\mu = e^{\int 2/p dp} = p^2$. Donc $(p^2t)' = 2p^2$, soit $p^2t = \frac{2p^3}{3} + C$, d'où :

$$t = \frac{2p}{3} + \frac{C}{p^2}.$$

Et $y = 2pt - p^2 = 2p\left(\frac{2p}{3} + \frac{C}{p^2}\right) - p^2 = \frac{4p^2}{3} + \frac{2C}{p} - p^2 = \frac{p^2}{3} + \frac{2C}{p}$.

La solution est donnée paramétriquement par :

$$\begin{cases} t = \frac{2p}{3} + \frac{C}{p^2}, \\ y = \frac{p^2}{3} + \frac{2C}{p}. \end{cases}$$

Il faut aussi vérifier si $p' = 0$ donne des solutions. Si $p = p_0$ constant, alors $y = 2p_0t - p_0^2$ et $y' = 2p_0$. Mais on a posé $p = y' = 2p_0$, donc $p_0 = 2p_0$, soit $p_0 = 0$. Cela donne la solution $y = 0$.

TABLE 2.1 – Tableau récapitulatif des méthodes de résolution des EDO du premier ordre.

Type	Forme canonique	Méthode de résolution
Séparable	$y' = g(t) h(y)$	Séparer : $\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(t) dt$
Linéaire	$y' + p(t)y = q(t)$	Facteur intégrant $\mu = e^{\int p dt}$ ou variation de la constante
Bernoulli	$y' + py = qy^n$	Substitution $v = y^{1-n}$, puis linéaire
Exacte	$M dt + N dy = 0$	Critère $\partial_y M = \partial_t N$, recherche de Φ
Non exacte	$M dt + N dy = 0$	Facteur intégrant $\mu(t)$ ou $\mu(y)$
Homogène	$y' = \varphi(y/t)$	Substitution $u = y/t$, puis séparable
Riccati	$y' = ay^2 + by + c$	Solution particulière connue y_1 , puis $y = y_1 + z$ (Bernoulli)
Clairaut	$y = ty' + \psi(y')$	Droites $y = Ct + \psi(C)$ et enveloppe
Lagrange	$y = t\varphi(y') + \psi(y')$	Poser $p = y'$, EDO linéaire en $t(p)$

2.8 Tableau récapitulatif des méthodes

2.9 Résumé du chapitre

Résumé — Chapitre 2

- Les **équations séparables** $y' = g(t)h(y)$ se résolvent par séparation et intégration. Ne pas oublier les solutions constantes.
- Les **équations linéaires** $y' + py = q$ se résolvent par facteur intégrant ou variation de la constante. La solution est toujours globale.
- Les **équations de Bernoulli** $y' + py = qy^n$ se ramènent à une équation linéaire par $v = y^{1-n}$.
- Les **équations exactes** $M dt + N dy = 0$ admettent un potentiel Φ si et seulement si $\partial_y M = \partial_t N$. Sinon, on cherche un facteur intégrant.
- Les **équations homogènes** $y' = \varphi(y/t)$ se ramènent à des équations séparables par $u = y/t$.
- Les **équations de Riccati** nécessitent la connaissance d'une solution particulière.
- Les **équations de Clairaut** admettent une famille de droites et une solution singulière (enveloppe).
- Les **équations de Lagrange** se résolvent par paramétrisation.

2.10 Exercices

Équations à variables séparables

Exercice 2.1 (Séparable — une étoile). Résoudre les équations suivantes :

- (a) $y' = \frac{t^2}{y}, y > 0$.
- (b) $y' = e^{t-y}$.
- (c) $y' = y \cos t, y(0) = 3$.
- (d) $y' = \frac{1+y^2}{1+t^2}$.

Exercice 2.2 (Séparable — deux étoiles). (a) Résoudre $y' = y^2(1-y)$ et discuter le comportement des solutions selon la condition initiale.

- (b) Montrer que la solution de $y' = 1 + y^2, y(0) = 0$ est $y(t) = \tan t$, définie sur $] -\pi/2, \pi/2[$. Commenter : la solution explose en temps fini.

Équations linéaires

Exercice 2.3 (Linéaire — une étoile). Résoudre les équations suivantes :

- (a) $y' + 3y = 6$.
- (b) $y' - y = e^{2t}$.
- (c) $ty' + 2y = t^3, t > 0$.
- (d) $y' + y \tan t = \cos t, y(0) = 1$.

Exercice 2.4 (Linéaire — deux étoiles). (a) Résoudre $y' + \frac{y}{t} = \frac{\sin t}{t}$ pour $t > 0$.

- (b) Résoudre $y' + 2ty = 2te^{-t^2}$.
- (c) Montrer que toutes les solutions de $y' + y = \sin t$ convergent vers la même fonction quand $t \rightarrow +\infty$, et déterminer cette fonction.

Équations de Bernoulli

Exercice 2.5 (Bernoulli — deux étoiles). Résoudre les équations suivantes :

- (a) $y' + y = y^3$.
- (b) $y' - \frac{y}{t} = -t^2 y^3, t > 0$.
- (c) $y' + ty = ty^{1/2}, y > 0, y(0) = 4$.

Équations exactes

Exercice 2.6 (Exacte — une étoile). Vérifier que les équations suivantes sont exactes et les résoudre :

- (a) $(3t^2 + 4ty) dt + (2t^2 + 3y^2) dy = 0$.
- (b) $(\cos y - y \sin t) dt + (t \cos t - \sin y + \cos y) dy = 0$. (Vérifier d'abord.)
- (c) $(ye^{ty} + 2t) dt + (te^{ty} - 1) dy = 0$.

Exercice 2.7 (Facteur intégrant — deux étoiles). Les équations suivantes ne sont pas exactes. Trouver un facteur intégrant et résoudre :

- (a) $(y + t) dt + (3t - y) dy = 0$. Chercher $\mu = \mu(t)$.
- (b) $y dt + (2ty + 1) dy = 0$. Chercher $\mu = \mu(y)$.

Équations homogènes

Exercice 2.8 (Homogène — une étoile). Résoudre :

- (a) $y' = \frac{y - t}{y + t}$.
- (b) $t y' = y + \sqrt{t^2 + y^2}$, $t > 0$.
- (c) $y' = \frac{t + 2y}{t}$, $y(1) = 0$.

Riccati, Clairaut, Lagrange

Exercice 2.9 (Riccati — deux étoiles). (a) Résoudre $y' = y^2 + \frac{1}{t}y - \frac{1}{t^2}$, sachant que $y_1(t) = \frac{1}{t}$ est solution. Vérifier d'abord.
 (b) Résoudre $y' = 1 + t^2 - 2ty + y^2$, sachant que $y_1(t) = t$ est solution.

Exercice 2.10 (Clairaut — deux étoiles). Résoudre les équations de Clairaut suivantes et déterminer les solutions singulières :

- (a) $y = ty' - (y')^2$.
- (b) $y = ty' + \frac{1}{y'}$, $y' \neq 0$.

Problèmes de modélisation

Exercice 2.11 (Mélange — trois étoiles). Un réservoir contient initialement 100 litres d'eau pure. On y verse une solution saline de concentration 0,5 kg/L au débit de 2 L/min. Le mélange, supposé homogène, s'écoule au même débit.

- (a) Soit $q(t)$ la quantité de sel (en kg) dans le réservoir à l'instant t (en min). Montrer que q satisfait l'EDO $q' + \frac{q}{50} = 1$, $q(0) = 0$.
- (b) Résoudre ce problème de Cauchy.
- (c) Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t)$ et la concentration limite.
- (d) Au bout de combien de temps la concentration dans le réservoir atteint-elle 0,4 kg/L ?

Exercice 2.12 (Chute avec résistance de l'air — trois étoiles). Un objet de masse m tombe sous l'effet de la gravité, avec une force de résistance proportionnelle au carré de la vitesse : $F_{\text{air}} = -kv^2$ ($k > 0$). En prenant l'axe vers le bas, $v(t) > 0$:

- (a) Montrer que la vitesse $v(t)$ satisfait $m v' = mg - kv^2$.
- (b) Montrer que c'est une équation séparable et la résoudre avec $v(0) = 0$.
- (c) Déterminer la vitesse limite $v_{\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)$.
- (d) Application numérique : $m = 80$ kg, $g = 9,81$ m/s², $k = 0,25$ kg/m. Calculer v_{∞} et le temps pour atteindre 95% de v_{∞} .

Exercice 2.13 (Courbes orthogonales — trois étoiles). Soit la famille de courbes $y = Ce^{-t}$, $C \in \mathbb{R}$.

- (a) Montrer que les courbes de cette famille satisfont $y' = -y$.
- (b) Les *trajectoires orthogonales* sont les courbes qui coupent à angle droit chaque courbe de la famille. Montrer qu'elles satisfont $y' = 1/y$.
- (c) Résoudre cette équation et tracer quelques courbes de chaque famille.

Exercice 2.14 (Synthèse — trois étoiles). Pour chacune des équations suivantes, identifier le type, choisir la méthode appropriée et résoudre :

- (a) $(t^2 + 1)y' + 2ty = t$.
- (b) $y' = \frac{y^2 + ty}{t^2}$.
- (c) $(2t + y^2) dt + 2ty dy = 0$.
- (d) $y' + y = y^2 e^t$.
- (e) $y = ty' + \sin(y')$.
- (f) $y' = \frac{y}{t} + \tan\left(\frac{y}{t}\right)$, $t > 0$.

Chapitre 3

Theoremes d'Existence et d'Unicite

Introduction et motivation

Considerons le probleme de Cauchy general :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

ou $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est definie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, et $(t_0, y_0) \in \Omega$.

Deux questions fondamentales se posent :

- (i) **Existence** : le probleme (3.1) admet-il au moins une solution ?
- (ii) **Unicite** : cette solution est-elle la seule ?

Comme nous le verrons, la continuite de f suffit a garantir l'existence (theoreme de Cauchy–Peano), mais pas l'unicite. Pour obtenir l'unicite, il faut une hypothese supplementaire : la condition de Lipschitz.

3.1 Condition de Lipschitz

Définition 3.1 (Fonction lipschitzienne par rapport a y). Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ definie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. On dit que f est *lipschitzienne par rapport a la seconde variable y* sur Ω s'il existe une constante $L \geq 0$ telle que

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\|$$

pour tout $(t, y_1), (t, y_2) \in \Omega$. La constante L est appelee *constante de Lipschitz*.

Définition 3.2 (Lipschitz locale). On dit que f est *localement lipschitzienne par rapport a y* si, pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $L_K \geq 0$ tel que

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L_K \|y_1 - y_2\|$$

pour tout $(t, y_1), (t, y_2) \in K$.

Proposition 3.3 (Critere de differentiability). *Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport a y , alors f est localement lipschitzienne par rapport a y .*

Démonstration. Soit $K \subset \Omega$ un compact convexe en y . Par le theoreme des accroissements finis, pour $(t, y_1), (t, y_2) \in K$:

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq \sup_{(t, y) \in K} \left\| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right\| \cdot \|y_1 - y_2\|.$$

Comme $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur le compact K , le supremum est fini. On pose $L_K = \sup_K \left\| \frac{\partial f}{\partial y} \right\|$. $\square$

Exemple 3.4 (Fonctions lipschitziennes). (a) $f(t, y) = t^2 + 3y$ est globalement lipschitzienne avec $L = 3$.

(b) $f(t, y) = y^2$ est localement lipschitzienne mais pas globalement lipschitzienne. En effet, sur $|y| \leq M$, on a $|y_1^2 - y_2^2| = |y_1 + y_2| |y_1 - y_2| \leq 2M |y_1 - y_2|$.

(c) $f(t, y) = \sin(y)$ est globalement lipschitzienne avec $L = 1$.

(d) $f(t, y) = |y|^{2/3}$ n'est pas lipschitzienne en $y = 0$.

Exercice 3.1 ($\star$). Determiner si les fonctions suivantes sont lipschitziennes par rapport a y . Si oui, trouver une constante de Lipschitz.

(a) $f(t, y) = e^{-t}y + \cos(t)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(b) $f(t, y) = \sqrt{|y|}$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(c) $f(t, y) = t \sin(y^2)$ sur $[-1, 1] \times [-M, M]$.

3.2 Theoreme de Cauchy–Lipschitz local

Théorème 3.5 (Cauchy–Lipschitz local). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue, localement lipschitzienne par rapport a y . Alors, pour tout $(t_0, y_0) \in \Omega$, le probleme de Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

admet une unique solution maximale.

Nous allons demontrer ce theoreme en utilisant la methode des *approximations successives de Picard*. La preuve se decompose en plusieurs etapes.

3.2.1 Construction des iterees de Picard

Remarque 3.6 (Formulation integrale). Le probleme de Cauchy (3.1) est equivalent a l'equation integrale :

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds. \quad (3.2)$$

En effet, si y est de classe $\mathcal{C}^1$ et verifie (3.1), alors par integration on obtient (3.2). Reciproquement, si y est continue et verifie (3.2), alors y est $\mathcal{C}^1$ et verifie (3.1).

On definit l'operateur de Picard T par :

$$(Ty)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds. \quad (3.3)$$

Trouver une solution de (3.1) revient a trouver un *point fixe* de T .

Définition 3.7 (Iterees de Picard). On definit la suite de fonctions $(y_k)_{k \geq 0}$ par recurrence :

$$y_0(t) = y_0, \quad (3.4)$$

$$y_{k+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_k(s)) ds, \quad k \geq 0. \quad (3.5)$$

3.2.2 Preuve complete du theoreme de Cauchy–Lipschitz

Preuve du theoreme 3.5. Etape 1 : Localisation. Puisque Ω est ouvert et $(t_0, y_0) \in \Omega$, il existe $a > 0$ et $b > 0$ tels que le pave

$$R = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq a, \|y - y_0\| \leq b\} \subset \Omega.$$

Comme f est continue sur le compact R , elle y est bornee : posons $M = \sup_R \|f(t, y)\|$. De plus, par hypothese, f est lipschitzienne en y sur R avec une constante $L > 0$.

Posons $\alpha = \min(a, b/M)$ et travaillons sur l'intervalle $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Etape 2 : Espace fonctionnel. Considerons l'espace de Banach

$$E = \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n), \quad \text{muni de la norme } \|\varphi\|_\infty = \sup_{t \in I} \|\varphi(t)\|,$$

et le sous-ensemble ferme

$$B = \{\varphi \in E : \|\varphi - y_0\|_\infty \leq b\}.$$

L'operateur de Picard $T : B \rightarrow E$ est defini par (3.3).

Etape 3 : T envoie B dans B . Pour $\varphi \in B$ et $t \in I$, on a :

$$\|(T\varphi)(t) - y_0\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \right\| \leq M |t - t_0| \leq M\alpha \leq b.$$

Donc $T\varphi \in B$.

Etape 4 : Convergence des itérées de Picard. Montrons par récurrence que pour tout $k \geq 0$ et $t \in I$:

$$\|y_{k+1}(t) - y_k(t)\| \leq \frac{ML^k}{(k+1)!} |t - t_0|^{k+1}. \quad (3.6)$$

Initialisation ($k = 0$) : $\|y_1(t) - y_0\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, y_0) ds \right\| \leq M |t - t_0|. \checkmark$

Hérédité : supposons (3.6) vraie au rang k . Alors :

$$\begin{aligned} \|y_{k+2}(t) - y_{k+1}(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t [f(s, y_{k+1}(s)) - f(s, y_k(s))] ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t L \|y_{k+1}(s) - y_k(s)\| ds \\ &\leq \int_{t_0}^t L \cdot \frac{ML^k}{(k+1)!} |s - t_0|^{k+1} ds \\ &= \frac{ML^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{|t - t_0|^{k+2}}{k+2} = \frac{ML^{k+1}}{(k+2)!} |t - t_0|^{k+2}. \end{aligned}$$

La série télescopique $y_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (y_{k+1} - y_k)$ converge donc normalement sur I , car :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|y_{k+1} - y_k\|_{\infty} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{ML^k \alpha^{k+1}}{(k+1)!} \leq \frac{M}{L} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(L\alpha)^{k+1}}{(k+1)!} \leq \frac{M}{L} (e^{L\alpha} - 1) < \infty.$$

Soit $y^* = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k$. Cette fonction est continue sur I .

Etape 5 : y^* est un point fixe de T . Par convergence uniforme, on peut passer à la limite dans (3.5) :

$$y^*(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{k+1}(t) = y_0 + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, y_k(s)) ds = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y^*(s)) ds.$$

L'interversion limite-intégrale est justifiée par la convergence uniforme de $f(s, y_k(s))$ vers $f(s, y^*(s))$ (car f est continue et $y_k \rightarrow y^*$ uniformément).

Donc y^* est solution du problème de Cauchy.

Etape 6 : Unicité. Soient y et z deux solutions sur I . Posons $\varphi(t) = \|y(t) - z(t)\|$. Alors :

$$\varphi(t) = \left\| \int_{t_0}^t [f(s, y(s)) - f(s, z(s))] ds \right\| \leq L \int_{t_0}^t \varphi(s) ds.$$

Par le lemme de Gronwall (théorème 3.18 ci-dessous), $\varphi(t) = 0$ pour tout $t \in I$, d'où $y = z$. $\square$

Remarque 3.8. On peut aussi utiliser une *norme pondérée* $\|\varphi\|_{\lambda} = \sup_{t \in I} e^{-\lambda|t-t_0|} \|\varphi(t)\|$ avec $\lambda > L$ pour montrer que T est une contraction stricte, et conclure par le théorème du point fixe de Banach.

3.3 Méthode de Picard : exemples détaillés

Exemple 3.9 (Picard pour $y' = y$, $y(0) = 1$). Ici $f(t, y) = y$. Les itérées de Picard sont :

$$\begin{aligned} y_0(t) &= 1, \\ y_1(t) &= 1 + \int_0^t 1 \, ds = 1 + t, \\ y_2(t) &= 1 + \int_0^t (1 + s) \, ds = 1 + t + \frac{t^2}{2}, \\ y_3(t) &= 1 + \int_0^t \left(1 + s + \frac{s^2}{2}\right) \, ds = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}. \end{aligned}$$

Par recurrence, $y_k(t) = \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!}$, qui converge vers e^t .

Exemple 3.10 (Picard pour $y' = 2ty$, $y(0) = 1$). Ici $f(t, y) = 2ty$. Les itérées :

$$\begin{aligned} y_0(t) &= 1, \\ y_1(t) &= 1 + \int_0^t 2s \cdot 1 \, ds = 1 + t^2, \\ y_2(t) &= 1 + \int_0^t 2s(1 + s^2) \, ds = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2}, \\ y_3(t) &= 1 + t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{6}. \end{aligned}$$

On reconnaît les sommes partielles de $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{k!} = e^{t^2}$.

Exercice 3.2 (★★). Calculer les trois premières itérées de Picard pour les problèmes suivants et conjecturer la limite.

- (a) $y' = -y + 1$, $y(0) = 0$.
- (b) $y' = t + y^2$, $y(0) = 0$ (calculer y_1 , y_2 , y_3).
- (c) $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$.

3.4 Theoreme de Cauchy–Peano

Théorème 3.11 (Cauchy–Peano). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Alors, pour tout $(t_0, y_0) \in \Omega$, le probleme de Cauchy (3.1) admet au moins une solution locale.*

Remarque 3.12. La continuité seule ne suffit pas pour l'unicité, comme le montre le contre-exemple classique suivant.

Exemple 3.13 (Non-unicité : $y' = y^{2/3}$). Considerons le probleme de Cauchy :

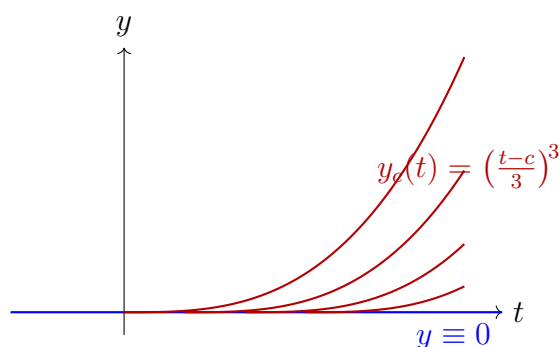
$$y' = y^{2/3}, \quad y(0) = 0.$$

La fonction $f(t, y) = y^{2/3}$ est continue mais n'est *pas* lipschitzienne en $y = 0$ (car $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3}y^{-1/3} \rightarrow \infty$ quand $y \rightarrow 0$).

Ce probleme admet la solution triviale $y(t) = 0$ et aussi, pour tout $c \geq 0$, la solution :

$$y_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq c, \\ \left(\frac{t-c}{3}\right)^3 & \text{si } t > c. \end{cases}$$

On verifie aisement que chaque y_c est de classe $\mathcal{C}^1$ et satisfait l'equation. Il y a donc une *infinite* de solutions.



Infinite de solutions passant par $(0,0)$

FIGURE 3.1 – Non-unicite pour $y' = y^{2/3}$, $y(0) = 0$.

3.5 Solutions maximales et explosion en temps fini

Définition 3.14 (Solution maximale). Une solution $y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ du probleme de Cauchy (3.1) est dite *maximale* si elle ne peut pas etre prolongee a un intervalle strictement plus grand. L'intervalle J est appele *intervalle maximal d'existence*.

Théorème 3.15 (Alternative d'explosion). Soit $y :]\omega^-, \omega^+[\rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution maximale du probleme de Cauchy (3.1), ou f est localement lipschitzienne. Si $\omega^+ < +\infty$, alors $y(t)$ « explose » : pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $t_K < \omega^+$ tel que $(t, y(t)) \notin K$ pour $t > t_K$.
En particulier, $\|y(t)\| \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow \omega^+$ (si $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$).

Exemple 3.16 (Explosion en temps fini : $y' = y^2$). Le probleme $y' = y^2$, $y(0) = 1$ a pour solution :

$$y(t) = \frac{1}{1-t}, \quad t \in]-\infty, 1[.$$

L'intervalle maximal est $]-\infty, 1[$ et $y(t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow 1^-$. La solution « explose » en temps fini $\omega^+ = 1$.

Exemple 3.17 (Solution globale vs locale). Comparons deux equations :

- (a) $y' = y$: solution $y(t) = e^t$, definie sur $\mathbb{R}$ tout entier (solution *globale*).
- (b) $y' = 1 + y^2$: solution $y(t) = \tan(t)$ avec $y(0) = 0$, definie sur $]-\pi/2, \pi/2[$ seulement.

3.6 Lemme de Gronwall et dependance continue

Lemme 3.18 (Gronwall, forme differentielle). Soit $\varphi : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue verifiant :

$$\varphi(t) \leq \alpha + \beta \int_{t_0}^t \varphi(s) ds, \quad \forall t \in [t_0, T],$$

ou $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$ sont des constantes. Alors :

$$\varphi(t) \leq \alpha e^{\beta(t-t_0)}, \quad \forall t \in [t_0, T]. \quad (3.7)$$

Démonstration. Posons $\Phi(t) = \int_{t_0}^t \varphi(s) ds$. Alors $\Phi'(t) = \varphi(t) \leq \alpha + \beta\Phi(t)$, donc :

$$\frac{d}{dt} [e^{-\beta(t-t_0)} \Phi(t)] = e^{-\beta(t-t_0)} [\Phi'(t) - \beta\Phi(t)] \leq \alpha e^{-\beta(t-t_0)}.$$

En integrant de t_0 a t et en utilisant $\Phi(t_0) = 0$:

$$e^{-\beta(t-t_0)} \Phi(t) \leq \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta(t-t_0)}).$$

Donc $\beta\Phi(t) \leq \alpha(e^{\beta(t-t_0)} - 1)$, et :

$$\varphi(t) \leq \alpha + \beta\Phi(t) \leq \alpha + \alpha(e^{\beta(t-t_0)} - 1) = \alpha e^{\beta(t-t_0)}. \quad \square$$

Corollaire 3.19 (Gronwall, cas $\alpha = 0$). Si $\varphi(t) \leq \beta \int_{t_0}^t \varphi(s) ds$ pour tout $t \in [t_0, T]$, alors $\varphi(t) = 0$ sur $[t_0, T]$.

Théorème 3.20 (Dependance continue par rapport aux conditions initiales). Sous les hypotheses du theoreme de Cauchy-Lipschitz, soient y et z les solutions des problemes de Cauchy avec conditions initiales $y(t_0) = y_0$ et $z(t_0) = z_0$ respectivement. Alors, sur tout intervalle commun de definition $[t_0, T]$:

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \|y_0 - z_0\| e^{L(t-t_0)}, \quad \forall t \in [t_0, T].$$

Démonstration. Posons $\varphi(t) = \|y(t) - z(t)\|$. Alors :

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \left\| y_0 - z_0 + \int_{t_0}^t [f(s, y(s)) - f(s, z(s))] ds \right\| \\ &\leq \|y_0 - z_0\| + L \int_{t_0}^t \varphi(s) ds. \end{aligned}$$

Le lemme de Gronwall avec $\alpha = \|y_0 - z_0\|$ et $\beta = L$ donne le resultat. $\square$

Remarque 3.21. Ce resultat montre que l'erreur croit au plus exponentiellement avec le temps. Pour les systemes chaotiques, cette borne est essentiellement optimale.

3.7 Theoremes de comparaison

Théorème 3.22 (Comparaison en dimension 1). Soient $f, g : [t_0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues et localement lipschitziennes en y , avec $f(t, y) \leq g(t, y)$ pour tout (t, y) . Soient y et z les solutions de $y' = f(t, y)$ et $z' = g(t, z)$ respectivement, avec $y(t_0) \leq z(t_0)$. Alors :

$$y(t) \leq z(t), \quad \forall t \in [t_0, T].$$

Démonstration. Posons $w(t) = z(t) - y(t)$. Alors $w(t_0) \geq 0$ et :

$$w'(t) = g(t, z(t)) - f(t, y(t)) \geq f(t, z(t)) - f(t, y(t)).$$

Si $w(t_1) < 0$ pour un certain $t_1 > t_0$, soit $\tau = \inf\{t > t_0 : w(t) < 0\}$. Alors $w(\tau) = 0$ et $w'(\tau) \leq 0$. Mais $w'(\tau) = g(\tau, z(\tau)) - f(\tau, y(\tau)) \geq g(\tau, z(\tau)) - f(\tau, z(\tau)) \geq 0$, car $y(\tau) = z(\tau)$. Contradiction avec $w'(\tau) \leq 0$ et w strictement décroissante en τ .

Une preuve rigoureuse utilise une perturbation $z'_\varepsilon = g(t, z_\varepsilon) + \varepsilon$ avec passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. $\square$

Exemple 3.23. Soit $y' = -y + \sin(t)$, $y(0) = 0$. Comme $-1 \leq \sin(t) \leq 1$, en comparant avec $z' = -z + 1$, $z(0) = 0$ (dont la solution est $z(t) = 1 - e^{-t}$), on obtient $y(t) \leq 1 - e^{-t} < 1$ pour tout $t > 0$.

3.8 Contre-exemples fondamentaux

Exemple 3.24 (Recapitulatif : non-unicité). Pour $y' = 3y^{2/3}$, $y(0) = 0$, la fonction $f(t, y) = 3y^{2/3}$ est continue mais pas lipschitzienne en $y = 0$. Les solutions $y \equiv 0$ et $y(t) = t^3$ coexistent. Plus généralement, pour tout $c \geq 0$, la fonction

$$y_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq c, \\ (t - c)^3 & \text{si } t > c \end{cases}$$

est solution.

Exemple 3.25 (Recapitulatif : explosion en temps fini). Pour $y' = y^2$, $y(0) = y_0 > 0$, la solution $y(t) = \frac{y_0}{1 - y_0 t}$ explose en $t^* = 1/y_0$. Plus y_0 est grand, plus l'explosion est rapide.

3.9 Exercices

Exercice 3.3 (*). Montrer que $f(t, y) = t^2 \cos(y)$ est globalement lipschitzienne en y sur $[-T, T] \times \mathbb{R}$ et donner une constante de Lipschitz.

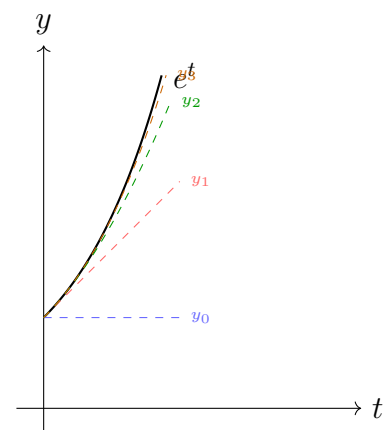

 Iterées de Picard pour $y' = y$

 FIGURE 3.2 – Convergence des itérées de Picard vers e^t .

Exercice 3.4 (★). Soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue vérifiant $\varphi(t) \leq 2 + 3 \int_0^t \varphi(s) ds$. Montrer que $\varphi(t) \leq 2e^{3t}$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Exercice 3.5 (★★). Considerer $y' = \sin(y)$, $y(0) = \pi/2$.

- (a) Vérifier que la condition de Lipschitz est satisfaite.
- (b) Calculer les deux premières itérées de Picard $y_1(t)$ et $y_2(t)$.

Exercice 3.6 (★★). Pour l'équation $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$:

- (a) Résoudre explicitement.
- (b) Déterminer l'intervalle maximal d'existence.
- (c) Calculer les trois premières itérées de Picard et comparer avec la solution exacte.

Exercice 3.7 (★★). On considère $y' = -y + e^{-t}$, $y(0) = y_0$. Résoudre, puis montrer directement (sans utiliser le théorème 3.20) que si $|y_0 - z_0| \leq \varepsilon$, alors les solutions correspondantes satisfont $|y(t) - z(t)| \leq \varepsilon e^{-t}$ pour $t \geq 0$.

Exercice 3.8 (★★★). (**Gronwall généralisé.**) Soit $\varphi, \psi : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ des fonctions continues avec ψ croissante, vérifiant :

$$\varphi(t) \leq \psi(t) + \beta \int_{t_0}^t \varphi(s) ds.$$

Montrer que $\varphi(t) \leq \psi(t) e^{\beta(t-t_0)}$.

Exercice 3.9 (★★★). Soit le système $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)$ ou $A : [0, T] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{b} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont continues. Montrer que la solution existe sur $[0, T]$ tout entier (pas d'explosion en temps fini).

Resume du chapitre

Resultat	Enonce succinct
Cauchy–Lipschitz	f continue + Lipschitz en $y \Rightarrow$ existence et unicite locale
Cauchy–Peano	f continue $\Rightarrow$ existence (pas d’unicite en general)
Gronwall	$\varphi \leq \alpha + \beta \int \varphi \Rightarrow \varphi \leq \alpha e^{\beta t}$
Dependance continue	Petite perturbation de $y_0 \Rightarrow$ petite perturbation de $y(t)$
Alternative d’explosion	Solution maximale : ou bien globale, ou bien $\ y\ \rightarrow \infty$
Comparaison	$f \leq g$ et $y_0 \leq z_0 \Rightarrow y(t) \leq z(t)$

Chapitre 4

Equations Lineaires du Second Ordre a Coefficients Constants

Introduction et motivation

Les equations differentielles lineaires du second ordre a coefficients constants interviennent dans de nombreux domaines de la physique et de l'ingenierie.

Exemple 4.1 (Systeme masse-ressort). Considerons une masse m attachee a un ressort de raideur k , avec un amortissement visqueux de coefficient c . Le principe fondamental de la dynamique donne :

$$m x''(t) + c x'(t) + k x(t) = F(t),$$

ou $x(t)$ est le deplacement par rapport a la position d'equilibre et $F(t)$ une force exterieure.

Exemple 4.2 (Circuit RLC). Pour un circuit RLC serie avec une tension $e(t)$, la charge $q(t)$ verifie :

$$L q''(t) + R q'(t) + \frac{1}{C} q(t) = e(t).$$

Dans toute la suite, nous etudions l'equation generale :

$$a y''(t) + b y'(t) + c y(t) = f(t), \quad a \neq 0, \quad (4.1)$$

que l'on divise par a pour obtenir la forme standard :

$$y''(t) + p y'(t) + q y(t) = g(t), \quad (4.2)$$

ou $p = b/a$, $q = c/a$ et $g = f/a$.

4.1 Equation homogene

4.1.1 Equation caracteristique

Considerons l'equation homogene :

$$a y'' + b y' + c y = 0, \quad a \neq 0. \quad (4.3)$$

Cherchons des solutions de la forme $y(t) = e^{rt}$. En substituant :

$$a r^2 e^{rt} + b r e^{rt} + c e^{rt} = 0 \implies e^{rt}(ar^2 + br + c) = 0.$$

Comme $e^{rt} \neq 0$, on obtient l'équation caractéristique :

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (4.4)$$

Définition 4.3 (Discriminant). Le *discriminant* de l'équation caractéristique est $\Delta = b^2 - 4ac$.

Trois cas se présentent.

4.1.2 Cas 1 : $\Delta > 0$ (deux racines réelles distinctes)

Théorème 4.4 (Solution, cas $\Delta > 0$). Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes :

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

La solution générale de (4.3) est :

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (4.5)$$

Démonstration. Les fonctions $y_1(t) = e^{r_1 t}$ et $y_2(t) = e^{r_2 t}$ sont solutions (par construction). Elles sont linéairement indépendantes car leur wronskien (voir section 4.1.5) est :

$$W(t) = (r_2 - r_1)e^{(r_1 + r_2)t} \neq 0$$

puisque $r_1 \neq r_2$. Par le théorème de structure des équations linéaires (l'espace des solutions est de dimension 2), toute solution est combinaison linéaire de y_1 et y_2 . $\square$

Exemple 4.5. Résoudre $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Equation caractéristique : $r^2 - 5r + 6 = 0$, donc $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$ et $r_1 = 2$, $r_2 = 3$.

Solution générale : $y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$.

4.1.3 Cas 2 : $\Delta = 0$ (racine double)

Théorème 4.6 (Solution, cas $\Delta = 0$). Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une racine double $r_0 = -b/(2a)$. La solution générale est :

$$y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{r_0 t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (4.6)$$

Démonstration. La fonction $y_1(t) = e^{r_0 t}$ est solution. Pour trouver une seconde solution indépendante, utilisons la *réduction d'ordre* (section 6.6) : posons $y(t) = v(t)e^{r_0 t}$. En substituant dans (4.3) et en utilisant $2ar_0 + b = 0$ (car $r_0 = -b/(2a)$) :

$$a v''(t) e^{r_0 t} = 0 \implies v''(t) = 0 \implies v(t) = C_1 + C_2 t.$$

Les fonctions $e^{r_0 t}$ et $t e^{r_0 t}$ sont linéairement indépendantes. $\square$

Exemple 4.7. Resoudre $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Equation caracteristique : $r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2 = 0$, donc $r_0 = -2$.

Solution generale : $y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-2t}$.

4.1.4 Cas 3 : $\Delta < 0$ (racines complexes conjuguees)

Théorème 4.8 (Solution, cas $\Delta < 0$). Si $\Delta < 0$, l'equation caracteristique a deux racines complexes conjuguees :

$$r = \alpha \pm i\beta, \quad \text{ou} \quad \alpha = -\frac{b}{2a}, \quad \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

La solution generale reelle est :

$$y(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (4.7)$$

Démonstration. Formellement, les solutions complexes sont $e^{(\alpha+i\beta)t}$ et $e^{(\alpha-i\beta)t}$. Par la formule d'Euler :

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)).$$

En prenant la partie reelle et la partie imaginaire, on obtient deux solutions reelles lineairement independantes : $y_1(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ et $y_2(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t)$. $\square$

Remarque 4.9 (Forme amplitude-phase). La solution peut s'ecrire sous la forme :

$$y(t) = A e^{\alpha t} \cos(\beta t - \phi),$$

ou $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ est l'amplitude et $\phi = \arctan(C_2/C_1)$ la phase.

Exemple 4.10. Resoudre $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Equation caracteristique : $r^2 + 2r + 5 = 0$, donc $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$. Les racines sont $r = -1 \pm 2i$.

Solution generale : $y(t) = e^{-t} (C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t))$.

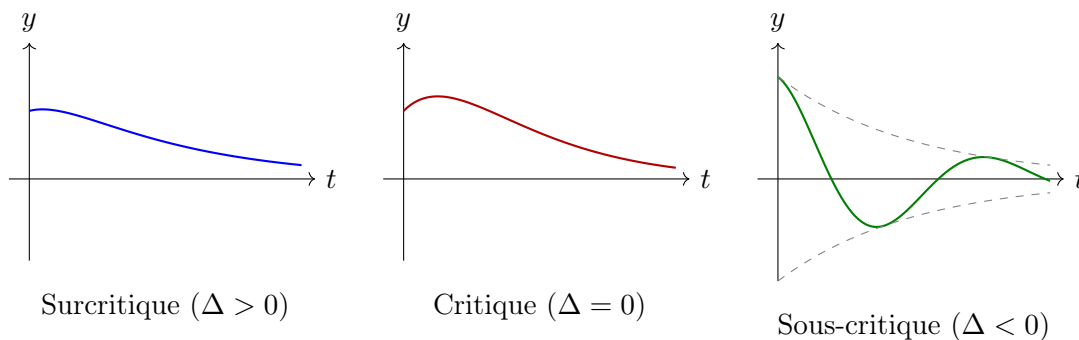


FIGURE 4.1 – Les trois regimes d'amortissement.

4.1.5 Wronskien

Définition 4.11 (Wronskien). Soient y_1, y_2 deux solutions de (4.3). Le *wronskien* de y_1 et y_2 est :

$$W(t) = W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t).$$

Théorème 4.12 (Formule d'Abel). Si y_1, y_2 sont solutions de $y'' + p y' + q y = 0$, alors :

$$W(t) = W(t_0) e^{-\int_{t_0}^t p \, ds} = W(t_0) e^{-p(t-t_0)}. \quad (4.8)$$

En particulier, soit $W(t) = 0$ pour tout t , soit $W(t) \neq 0$ pour tout t .

Démonstration. Calculons $W'(t)$:

$$\begin{aligned} W'(t) &= y_1'(t)y_2'(t) + y_1(t)y_2''(t) - y_2'(t)y_1'(t) - y_2(t)y_1''(t) \\ &= y_1(t)y_2''(t) - y_2(t)y_1''(t). \end{aligned}$$

Comme $y_i'' = -p y_i' - q y_i$ pour $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} W'(t) &= y_1(-p y_2' - q y_2) - y_2(-p y_1' - q y_1) \\ &= -p(y_1 y_2' - y_2 y_1') = -p W(t). \end{aligned}$$

Donc $W' = -pW$, d'où $W(t) = W(t_0)e^{-p(t-t_0)}$. □

Proposition 4.13. Deux solutions y_1, y_2 de (4.3) forment un système fondamental de solutions si et seulement si $W(t_0) \neq 0$ pour un (et donc pour tout) t_0 .

4.2 Problèmes de Cauchy

Théorème 4.14 (Existence et unicité pour l'équation linéaire). Pour tous $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$, le problème de Cauchy

$$y'' + p y' + q y = g(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1,$$

ou g est continue, admet une unique solution définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Méthode 4.15 (Détermination des constantes). Pour résoudre un problème de Cauchy :

1. Écrire la solution générale $y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$.
2. Imposer $y(t_0) = y_0$: on obtient une première équation en C_1, C_2 .
3. Imposer $y'(t_0) = y_1$: on obtient une seconde équation.
4. Résoudre le système 2×2 (le déterminant est $W(t_0) \neq 0$).

Exemple 4.16. Resoudre $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Equation caracteristique : $r^2 - 3r + 2 = (r - 1)(r - 2) = 0$, donc $r_1 = 1$, $r_2 = 2$.

Solution generale : $y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$.

$$y(0) = 1 \implies C_1 + C_2 = 1,$$

$$y'(0) = 0 \implies C_1 + 2C_2 = 0.$$

D'où $C_2 = -1$ et $C_1 = 2$. Solution : $y(t) = 2e^t - e^{2t}$.

Exemple 4.17. Resoudre $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -2$.

Equation caracteristique : $r^2 + 4 = 0$, donc $r = \pm 2i$ ($\alpha = 0$, $\beta = 2$).

Solution generale : $y(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$.

$$y(0) = 3 \implies C_1 = 3,$$

$$y'(0) = -2 \implies 2C_2 = -2 \implies C_2 = -1.$$

Solution : $y(t) = 3 \cos(2t) - \sin(2t)$.

4.3 Equation non homogene : methode des coefficients indetermines

Théorème 4.18 (Structure de la solution generale). *La solution generale de l'equation non homogene $ay'' + by' + cy = f(t)$ est :*

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t),$$

ou y_h est la solution generale de l'equation homogene associee et y_p est une solution particuliere quelconque de l'equation non homogene.

Théorème 4.19 (Principe de superposition). *Si y_{p_1} est une solution particuliere de $ay'' + by' + cy = f_1(t)$ et y_{p_2} est une solution particuliere de $ay'' + by' + cy = f_2(t)$, alors $\lambda_1 y_{p_1} + \lambda_2 y_{p_2}$ est une solution particuliere de $ay'' + by' + cy = \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)$.*

4.3.1 Table des solutions particulieres

Pour l'equation $ay'' + by' + cy = f(t)$, voici les formes a essayer :

Second membre $f(t)$	Forme de $y_p(t)$ a essayer
$P_n(t)$ (polynome degre n)	$t^s Q_n(t)$
$e^{\gamma t}$	$t^s A e^{\gamma t}$
$P_n(t) e^{\gamma t}$	$t^s Q_n(t) e^{\gamma t}$
$e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ ou $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$	$t^s e^{\alpha t} (A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t))$
$P_n(t) e^{\alpha t} \cos(\beta t)$	$t^s e^{\alpha t} (Q_n(t) \cos(\beta t) + R_n(t) \sin(\beta t))$

Remarque 4.20 (Valeur de s). L'entier s est la *multiplicite* de γ (ou $\alpha + i\beta$) comme racine de l'equation caracteristique :

- $s = 0$ si γ (ou $\alpha + i\beta$) n'est pas racine de $ar^2 + br + c = 0$,
- $s = 1$ si c'est une racine simple,
- $s = 2$ si c'est une racine double.

Exemple 4.21 (Second membre polynomiale). Resoudre $y'' - 3y' + 2y = 4t^2$.

Solution homogene : $r^2 - 3r + 2 = 0$ donne $r_1 = 1, r_2 = 2$, donc $y_h = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$.

Solution particuliere : comme $\gamma = 0$ n'est pas racine de l'equation caracteristique, $s = 0$. On cherche $y_p = At^2 + Bt + C$. Alors $y'_p = 2At + B, y''_p = 2A$.

En substituant :

$$2A - 3(2At + B) + 2(At^2 + Bt + C) = 4t^2.$$

Identification : $t^2 : 2A = 4, t^1 : -6A + 2B = 0, t^0 : 2A - 3B + 2C = 0$.

D'où $A = 2, B = 6, C = 7$. Solution particuliere : $y_p = 2t^2 + 6t + 7$.

Solution generale : $y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + 2t^2 + 6t + 7$.

Exemple 4.22 (Second membre exponentiel). Resoudre $y'' - 3y' + 2y = e^{3t}$.

Equation caracteristique : $r_1 = 1, r_2 = 2$. Comme $\gamma = 3$ n'est pas racine, $s = 0$. On cherche $y_p = Ae^{3t}$.

$$y''_p - 3y'_p + 2y_p = 9Ae^{3t} - 9Ae^{3t} + 2Ae^{3t} = 2Ae^{3t} = e^{3t}.$$

Donc $A = 1/2$ et $y_p = \frac{1}{2}e^{3t}$.

Exemple 4.23 (Cas de resonance partielle ($s = 1$)). Resoudre $y'' - 3y' + 2y = e^{2t}$.

Ici $\gamma = 2$ est racine *simple* de l'equation caracteristique, donc $s = 1$. On cherche $y_p = At e^{2t}$.

$$y'_p = A(1 + 2t)e^{2t}, y''_p = A(4 + 4t)e^{2t}.$$

En substituant :

$$A(4 + 4t)e^{2t} - 3A(1 + 2t)e^{2t} + 2At e^{2t} = Ae^{2t}(4 + 4t - 3 - 6t + 2t) = Ae^{2t}.$$

Donc $A = 1$ et $y_p = te^{2t}$.

Exemple 4.24 (Cas de resonance double ($s = 2$)). Resoudre $y'' + 4y' + 4y = e^{-2t}$. Equation caracteristique : $(r + 2)^2 = 0$, racine double $r_0 = -2$. Comme $\gamma = -2$ est racine de multiplicité 2, $s = 2$. On cherche $y_p = At^2e^{-2t}$.

$$y'_p = A(2t - 2t^2)e^{-2t}, y''_p = A(2 - 8t + 4t^2)e^{-2t}.$$

En substituant :

$$A(2 - 8t + 4t^2 + 8t - 8t^2 + 4t^2)e^{-2t} = 2Ae^{-2t} = e^{-2t}.$$

Donc $A = 1/2$ et $y_p = \frac{t^2}{2}e^{-2t}$.

Exemple 4.25 (Second membre trigonometrique). Resoudre $y'' + y = \cos(2t)$.

Equation caracteristique : $r^2 + 1 = 0$, racines $r = \pm i$. Comme $\alpha + i\beta = 2i$ n'est pas racine ($\beta = 2 \neq 1$), $s = 0$. On cherche $y_p = A \cos(2t) + B \sin(2t)$.

$$y''_p = -4A \cos(2t) - 4B \sin(2t).$$

$$y''_p + y_p = -3A \cos(2t) - 3B \sin(2t) = \cos(2t).$$

Donc $A = -1/3$, $B = 0$. Solution particuliere : $y_p = -\frac{1}{3} \cos(2t)$.

Solution generale : $y(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t) - \frac{1}{3} \cos(2t)$.

4.4 Phenomene de resonance

Définition 4.26 (Resonance). Il y a *resonance* lorsque la frequence de l'excitation coincide avec une frequence propre du systeme. Mathematiquement, cela correspond au cas ou $\alpha + i\beta$ est racine de l'equation caracteristique.

Exemple 4.27 (Resonance pure). Considerons $y'' + \omega_0^2 y = \cos(\omega_0 t)$ (pas d'amortissement, excitation a la frequence propre ω_0).

Comme $i\omega_0$ est racine simple, $s = 1$. On cherche $y_p = t(A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t))$.

Apres calcul : $y_p = \frac{t}{2\omega_0} \sin(\omega_0 t)$.

L'amplitude croit *lineairement* avec le temps. C'est la **resonance pure**.

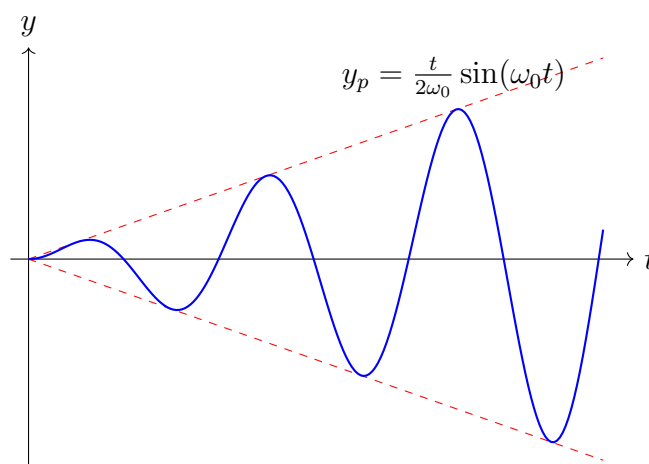
Exemple 4.28 (Resonance amortie). Pour $y'' + 2\gamma y' + \omega_0^2 y = F_0 \cos(\omega t)$ avec $\gamma > 0$, l'amplitude de la reponse stationnaire est :

$$A(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}.$$

Le maximum est atteint pour $\omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$ (si $\omega_0^2 > 2\gamma^2$).

4.5 Variation des constantes

Méthode 4.29 (Variation des constantes (Lagrange)). Pour trouver une solution particuliere de $y'' + py' + qy = g(t)$ quand la methode des coefficients indetermines ne s'applique pas,



Resonance pure : amplitude croissante

FIGURE 4.2 – Phenomene de resonance pure (sans amortissement).

on pose :

$$y_p(t) = c_1(t) y_1(t) + c_2(t) y_2(t),$$

ou $\{y_1, y_2\}$ est un systeme fondamental, et on impose :

$$\begin{cases} c_1'(t) y_1(t) + c_2'(t) y_2(t) = 0, \\ c_1'(t) y_1'(t) + c_2'(t) y_2'(t) = g(t). \end{cases} \quad (4.9)$$

Ce systeme admet une unique solution car le determinant est le wronskien $W(t) \neq 0$.

Proposition 4.30. Les solutions du systeme (4.9) sont :

$$c_1'(t) = -\frac{y_2(t) g(t)}{W(t)}, \quad c_2'(t) = \frac{y_1(t) g(t)}{W(t)}. \quad (4.10)$$

La solution particuliere est donc :

$$y_p(t) = -y_1(t) \int \frac{y_2(s) g(s)}{W(s)} ds + y_2(t) \int \frac{y_1(s) g(s)}{W(s)} ds.$$

Exemple 4.31. Resoudre $y'' + y = \frac{1}{\cos(t)}$.

Solution homogene : $y_1 = \cos(t)$, $y_2 = \sin(t)$, $W = 1$.

Par variation des constantes :

$$\begin{aligned} c_1'(t) &= -\sin(t) \cdot \frac{1}{\cos(t)} = -\tan(t), & c_1(t) &= \ln |\cos(t)|, \\ c_2'(t) &= \cos(t) \cdot \frac{1}{\cos(t)} = 1, & c_2(t) &= t. \end{aligned}$$

Solution particuliere : $y_p(t) = \cos(t) \ln |\cos(t)| + t \sin(t)$.

Solution generale : $y(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t) + \cos(t) \ln |\cos(t)| + t \sin(t)$.

4.6 Equation d'Euler–Cauchy

Définition 4.32 (Equation d'Euler–Cauchy). L'équation d'Euler–Cauchy est une équation de la forme :

$$t^2 y'' + \alpha t y' + \beta y = 0, \quad t > 0, \quad (4.11)$$

ou $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Méthode 4.33 (Resolution par le changement $t = e^u$). Le changement de variable $t = e^u$ (soit $u = \ln t$) transforme l'équation d'Euler–Cauchy en une équation à coefficients constants. En posant $z(u) = y(e^u)$:

$$t y' = \dot{z}, \quad t^2 y'' = \ddot{z} - \dot{z},$$

ou le point désigne $\frac{d}{du}$. L'équation (4.11) devient :

$$\ddot{z} + (\alpha - 1)\dot{z} + \beta z = 0. \quad (4.12)$$

Remarque 4.34. Alternativement, on cherche directement des solutions de la forme $y(t) = t^r$. En substituant dans (4.11) :

$$t^r [r(r-1) + \alpha r + \beta] = 0,$$

ce qui donne l'équation indiciale :

$$r(r-1) + \alpha r + \beta = r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0. \quad (4.13)$$

Les trois cas du discriminant $\Delta' = (\alpha - 1)^2 - 4\beta$ donnent :

Cas	Racines	Solution generale ($t > 0$)
$\Delta' > 0$	$r_1, r_2 \in \mathbb{R}, r_1 \neq r_2$	$y(t) = C_1 t^{r_1} + C_2 t^{r_2}$
$\Delta' = 0$	r_0 double	$y(t) = (C_1 + C_2 \ln t) t^{r_0}$
$\Delta' < 0$	$r = \mu \pm i\nu$	$y(t) = t^\mu (C_1 \cos(\nu \ln t) + C_2 \sin(\nu \ln t))$

Exemple 4.35. Résoudre $t^2 y'' + 3t y' + y = 0$ pour $t > 0$.

Equation indiciale : $r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2 = 0$, racine double $r_0 = -1$.

Solution generale : $y(t) = (C_1 + C_2 \ln t) t^{-1} = \frac{C_1 + C_2 \ln t}{t}$.

Exemple 4.36. Résoudre $t^2 y'' + t y' + y = 0$ pour $t > 0$.

Equation indiciale : $r^2 + 1 = 0$, racines $r = \pm i$ ($\mu = 0, \nu = 1$).

Solution generale : $y(t) = C_1 \cos(\ln t) + C_2 \sin(\ln t)$.

4.7 Reduction d'ordre

Méthode 4.37 (Reduction d'ordre). Si l'on connaît une solution $y_1 \neq 0$ de l'équation homogene $y'' + p y' + q y = 0$, on peut trouver la solution generale en posant $y(t) = v(t) y_1(t)$.

En substituant :

$$v''y_1 + (2y_1' + py_1)v' = 0.$$

C'est une equation du premier ordre en $v' = w$:

$$w' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + p \right) w = 0,$$

d'ou $w(t) = \frac{K}{y_1(t)^2} e^{-\int p dt}$ et $v(t) = \int w(s) ds$.

Exemple 4.38. On sait que $y_1(t) = e^t$ est solution de $y'' - 2y' + y = 0$. Trouvons la solution generale.

Posons $y = ve^t$. Alors $y' = (v' + v)e^t$, $y'' = (v'' + 2v' + v)e^t$.

$(v'' + 2v' + v - 2v' - 2v + v)e^t = v''e^t = 0$.

Donc $v'' = 0$, $v(t) = C_1 + C_2t$, et $y(t) = (C_1 + C_2t)e^t$.

4.8 Exemples recapitulatifs completement resolus

Exemple 4.39 (Probleme complet avec conditions initiales). Resoudre $y'' + 2y' + 5y = 10 \cos(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Equation caracteristique : $r^2 + 2r + 5 = 0$, $\Delta = 4 - 20 = -16$, $r = -1 \pm 2i$.

Solution homogene : $y_h(t) = e^{-t}(C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t))$.

Solution particuliere : $\alpha + i\beta = i$ n'est pas racine. On cherche $y_p = A \cos(t) + B \sin(t)$.
 $y_p'' + 2y_p' + 5y_p = (-A + 2B + 5A) \cos(t) + (-B - 2A + 5B) \sin(t) = (4A + 2B) \cos(t) + (-2A + 4B) \sin(t) = 10 \cos(t)$.

Systeme : $4A + 2B = 10$ et $-2A + 4B = 0$. D'ou $A = 2$, $B = 1$.

$y_p(t) = 2 \cos(t) + \sin(t)$.

Conditions initiales :

$$y(0) = C_1 + 2 = 0 \implies C_1 = -2,$$

$$y'(0) = -C_1 + 2C_2 + 1 = 0 \implies 2 + 2C_2 + 1 = 0 \implies C_2 = -\frac{3}{2}.$$

Solution : $y(t) = e^{-t}(-2 \cos(2t) - \frac{3}{2} \sin(2t)) + 2 \cos(t) + \sin(t)$.

Le terme transitoire $e^{-t}(\dots)$ tend vers 0 ; la reponse stationnaire est $2 \cos(t) + \sin(t)$.

Exemple 4.40 (Equation d'Euler-Cauchy non homogene). Resoudre $t^2 y'' - 2y = t^3$ pour $t > 0$.

Equation homogene : $t^2 y'' - 2y = 0$. Equation indicielle : $r(r-1) - 2 = r^2 - r - 2 = (r-2)(r+1) = 0$.

$y_h(t) = C_1 t^2 + C_2 t^{-1}$.

Solution particuliere par variation des constantes. Avec $y_1 = t^2$, $y_2 = t^{-1}$:

$$W = t^2 \cdot (-t^{-2}) - t^{-1} \cdot 2t = -1 - 2 = -3.$$

On écrit l'équation sous forme standard : $y'' - 2t^{-2}y = t$. Donc $g(t) = t$.

$$\begin{aligned} c_1'(t) &= -\frac{t^{-1} \cdot t}{-3} = \frac{1}{3}, & c_1(t) &= \frac{t}{3}, \\ c_2'(t) &= \frac{t^2 \cdot t}{-3} = -\frac{t^3}{3}, & c_2(t) &= -\frac{t^4}{12}. \end{aligned}$$

$$y_p(t) = \frac{t}{3} \cdot t^2 + \left(-\frac{t^4}{12}\right) t^{-1} = \frac{t^3}{3} - \frac{t^3}{12} = \frac{t^3}{4}.$$

$$\text{Solution generale : } y(t) = C_1 t^2 + C_2 t^{-1} + \frac{t^3}{4}.$$

4.9 Exercices

Exercice 4.1 (★). Résoudre les équations homogènes suivantes :

- (a) $y'' - 4y' + 3y = 0$.
- (b) $y'' + 6y' + 9y = 0$.
- (c) $y'' + 2y' + 10y = 0$.
- (d) $4y'' + 4y' + y = 0$.

Exercice 4.2 (★). Résoudre les problèmes de Cauchy :

- (a) $y'' - y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.
- (b) $y'' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.
- (c) $y'' + 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Exercice 4.3 (★★). Trouver la solution générale des équations :

- (a) $y'' - 4y = e^{2t}$.
- (b) $y'' + y = 3 \sin(t)$.
- (c) $y'' - 2y' + y = e^t$.
- (d) $y'' + 4y = \cos(2t)$.
- (e) $y'' + y' - 2y = t^2 + t$.

Exercice 4.4 (★★). Résoudre par variation des constantes :

- (a) $y'' + y = \tan(t)$.
- (b) $y'' - y = \frac{1}{\cosh(t)}$.
- (c) $y'' + 4y = \frac{1}{\sin(2t)}$.

Exercice 4.5 (★★). Résoudre pour $t > 0$:

- (a) $t^2 y'' - 2t y' + 2y = 0$.
- (b) $t^2 y'' + 5t y' + 4y = 0$.
- (c) $t^2 y'' + t y' + 4y = 0$.

Exercice 4.6 (★★★). Soit $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ où p et q sont continues sur $\mathbb{R}$.

- (a) Montrer que si y_1 et y_2 sont deux solutions, alors $W[y_1, y_2]$ vérifie $W' = -p(t)W$.
- (b) En déduire que si $W(t_0) = 0$ pour un t_0 , alors y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes.

- (c) Application : montrer que $\sin(t)$ et $\cos(t)$ ne peuvent pas être simultanément solutions d'une équation $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ avec p non identiquement nul.

Exercice 4.7 (***). On considère l'oscillateur amorti force $y'' + 2\gamma y' + \omega_0^2 y = F_0 \cos(\omega t)$ avec $\gamma > 0$.

- Trouver la solution particulière stationnaire sous la forme $y_p = A \cos(\omega t - \phi)$.
- Exprimer A et ϕ en fonction de ω , ω_0 , γ , F_0 .
- Montrer que $A(\omega)$ est maximale pour $\omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$ (si cette quantité est positive).
- Que se passe-t-il quand $\gamma \rightarrow 0^+$?

Exercice 4.8 (***). On sait que $y_1(t) = t$ est solution de $t^2 y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 0$ pour $t > 0$.

- Utiliser la réduction d'ordre pour trouver une seconde solution linéairement indépendante.
- Ecrire la solution générale.

Resume du chapitre

Resultat/Methode	Enonce succinct
Equation caracteristique	$ar^2 + br + c = 0$ determine la nature des solutions
$\Delta > 0$	$y_h = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$
$\Delta = 0$	$y_h = (C_1 + C_2 t) e^{r_0 t}$
$\Delta < 0$	$y_h = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$
Wronskien (Abel)	$W(t) = W(t_0) e^{-p(t-t_0)}$
Coefficients indetermines	Forme de y_p selon $f(t)$ et multiplicité s
Variation des constantes	Methode universelle : systeme (4.9)
Equation d'Euler–Cauchy	$t = e^u$ ou $y = t^r$ pour se ramener a coefficients constants
Resonance	$s \geq 1$: amplification ; sans amortissement : $A \rightarrow \infty$

Chapitre 5

Systèmes différentiels linéaires

Contents

4.1	Equation homogene	44
4.1.1	Equation caracteristique	44
4.1.2	Cas 1 : $\Delta > 0$ (deux racines reelles distinctes)	45
4.1.3	Cas 2 : $\Delta = 0$ (racine double)	45
4.1.4	Cas 3 : $\Delta < 0$ (racines complexes conjuguees)	46
4.1.5	Wronskien	47
4.2	Problemes de Cauchy	47
4.3	Equation non homogene : methode des coefficients indetermines	48
4.3.1	Table des solutions particulieres	48
4.4	Phenomene de resonance	50
4.5	Variation des constantes	50
4.6	Equation d'Euler–Cauchy	52
4.7	Reduction d'ordre	52
4.8	Exemples recapitulatifs completement resolus	53
4.9	Exercices	54

Introduction

Jusqu'à présent, nous avons principalement étudié des équations différentielles scalaires. De nombreux phénomènes physiques, biologiques ou économiques font cependant intervenir *plusieurs grandeurs couplées*, dont l'évolution est décrite simultanément par un *système* d'équations différentielles.

Oscillateurs couplés. Considérons deux masses m_1 et m_2 reliées entre elles et à deux murs par des ressorts de raideurs k_1 , k_2 , k_3 . En notant $x_1(t)$ et $x_2(t)$ les déplacements par rapport aux positions d'équilibre, le principe fondamental de la dynamique donne :

$$\begin{cases} m_1 x_1'' = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1), \\ m_2 x_2'' = -k_3 x_2 - k_2 (x_2 - x_1). \end{cases}$$

En posant $X = (x_1, x'_1, x_2, x'_2)^\top$, ce système d'ordre 2 se ramène à un système d'ordre 1 de dimension 4 : $X' = AX$.

Modèle proie–prédateur linéarisé. Le modèle de Lotka–Volterra linéarisé autour d'un point d'équilibre s'écrit

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

où $x(t)$ représente la variation de la population de proies et $y(t)$ celle de prédateurs. L'analyse des valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$ détermine la nature du point d'équilibre.

Ce chapitre développe la théorie des systèmes différentiels linéaires, en se concentrant sur les systèmes à coefficients constants, et propose une classification complète des portraits de phase en dimension 2.

5.1 Forme générale et premières propriétés

Définition 5.1 (Système différentiel linéaire). Soient $n \geq 1$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $A: I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux fonctions continues. On appelle *système différentiel linéaire* l'équation

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t), \quad (5.1)$$

où $X: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est l'inconnue. Lorsque $B \equiv 0$, le système est dit *homogène*.

Théorème 5.2 (Cauchy–Lipschitz pour les systèmes linéaires). Soit le système (5.1) avec A et B continues sur I . Pour tout $(t_0, X_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, le problème de Cauchy

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t), \quad X(t_0) = X_0,$$

admet une unique solution définie sur I tout entier.

Démonstration. La fonction $F(t, X) = A(t)X + B(t)$ est continue en (t, X) et globalement lipschitzienne en X sur tout compact $[a, b] \subset I$:

$$\|F(t, X) - F(t, Y)\| = \|A(t)(X - Y)\| \leq \|A(t)\| \|X - Y\| \leq M \|X - Y\|,$$

où $M = \sup_{t \in [a, b]} \|A(t)\| < +\infty$ par continuité sur un compact. Le théorème de Cauchy–Lipschitz global s'applique et donne l'existence et l'unicité sur I tout entier. $\square$

Corollaire 5.3 (Structure de l'espace des solutions). L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions du système homogène $X' = A(t)X$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ de dimension n . L'ensemble des solutions du système complet (5.1) est un sous-espace affine de direction $\mathcal{S}_H$.

5.2 Exponentielle de matrice

Pour résoudre le système homogène $X' = AX$ à coefficients constants, l'outil central est l'*exponentielle de matrice*.

Définition 5.4 (Exponentielle de matrice). Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$), on définit

$$e^A = \exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}. \quad (5.2)$$

Cette série converge absolument pour toute norme matricielle sous-multiplicative.

Proposition 5.5 (Propriétés de l'exponentielle). Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $t, s \in \mathbb{R}$.

- (i) $e^{0_n} = I_n$.
- (ii) Si $AB = BA$, alors $e^{A+B} = e^A e^B$.
- (iii) e^A est inversible et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.
- (iv) $\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A$.
- (v) Si P est inversible, alors $e^{P^{-1}AP} = P^{-1} e^A P$.
- (vi) $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$.

Démonstration. (iv) On dérive terme à terme la série convergente :

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k t^{k-1} A^k}{k!} = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1} A^{k-1}}{(k-1)!} = A e^{tA}.$$

La convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$ justifie la dérivation.

(vi) On utilise la formule de Jacobi $\det(e^A) = \lim_{m \rightarrow \infty} \det((I + A/m)^m) = \lim_{m \rightarrow \infty} (1 + \text{tr}(A)/m + O(1/m^2))^m = e^{\text{tr}(A)}$. Une preuve plus rigoureuse passe par la forme de Jordan. $\square$

Théorème 5.6 (Solution du système homogène à coefficients constants). La solution du problème de Cauchy $X' = AX$, $X(t_0) = X_0$ ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constante) est

$$X(t) = e^{(t-t_0)A} X_0. \quad (5.3)$$

En particulier, si $t_0 = 0$, alors $X(t) = e^{tA} X_0$.

Démonstration. Posons $\varphi(t) = e^{(t-t_0)A} X_0$. Alors $\varphi(t_0) = e^0 X_0 = X_0$ et $\varphi'(t) = A e^{(t-t_0)A} X_0 = A \varphi(t)$ d'après la proposition 5.5 (iv). L'unicité de Cauchy–Lipschitz conclut. $\square$

5.3 Systèmes homogènes à coefficients constants : méthode des valeurs propres

5.3.1 Cas diagonalisable

Proposition 5.7 (Exponentielle d'une matrice diagonalisable). Si $A = P D P^{-1}$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors

$$e^{tA} = P \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) P^{-1}.$$

Méthode 5.8 (Résolution par diagonalisation). Pour résoudre $X' = AX$:

1. Calculer les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A .
2. Trouver une base de vecteurs propres $(V_1, \dots, V_n)$.
3. La solution générale est $X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} V_n$, $c_i \in \mathbb{R}$.

Exemple 5.9 (Système 2×2 diagonalisable). Résolvons $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Valeurs propres. $\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(3 - \lambda) = 0$, d'où $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$.

Vecteurs propres. Pour $\lambda_1 = 1$: $(A - I)V = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} V = 0$, d'où $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Pour

$\lambda_2 = 3$: $(A - 3I)V = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V = 0$, d'où $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solution générale :

$$X(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{3t} \\ c_2 e^{3t} \end{pmatrix}.$$

5.3.2 Valeurs propres complexes

Proposition 5.10 (Forme réelle des solutions complexes). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec une valeur propre complexe $\lambda = \alpha + i\beta$ ($\beta \neq 0$) et un vecteur propre associé $V = U + iW \in \mathbb{C}^n$. Alors $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ est aussi valeur propre, de vecteur propre $\bar{V} = U - iW$, et les deux solutions réelles indépendantes associées sont

$$X_1(t) = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) U - \sin(\beta t) W), \quad (5.4)$$

$$X_2(t) = e^{\alpha t} (\sin(\beta t) U + \cos(\beta t) W). \quad (5.5)$$

Démonstration. La solution complexe $e^{\lambda t} V = e^{(\alpha + i\beta)t} (U + iW)$ se développe en

$$e^{\alpha t} [\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)] (U + iW) = e^{\alpha t} [(\cos(\beta t) U - \sin(\beta t) W) + i(\sin(\beta t) U + \cos(\beta t) W)].$$

Les parties réelle et imaginaire sont des solutions réelles du système. $\square$

Exemple 5.11 (Valeurs propres complexes conjuguées). Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. On a

$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 4 = 0$, d'où $\lambda = \pm 2i$.

Pour $\lambda = 2i$: $(A - 2iI)V = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2i & -2 \\ 2 & -2i \end{pmatrix} V = 0$, d'où $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ici $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. La solution générale est :

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix}.$$

Les trajectoires sont des *cercles* centrés à l'origine : c'est un *centre*.

5.3.3 Valeurs propres répétées : vecteurs propres généralisés

Définition 5.12 (Vecteur propre généralisé). Soit λ une valeur propre de A de multiplicité algébrique m . Un vecteur $V \neq 0$ est un *vecteur propre généralisé* de rang k si $(A - \lambda I)^k V = 0$ mais $(A - \lambda I)^{k-1} V \neq 0$.

Proposition 5.13 (Solution associée à un bloc de Jordan). Soit $J_m(\lambda) = \lambda I_m + N$ le bloc de Jordan de taille m associé à λ , où N est nilpotente ($N^m = 0$). Alors

$$e^{tJ_m(\lambda)} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & t \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Puisque λI et N commutent, $e^{tJ_m(\lambda)} = e^{t\lambda I} e^{tN} = e^{\lambda t} e^{tN}$. Or $N^m = 0$, donc $e^{tN} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k N^k}{k!}$, et les coefficients (i, j) de N^k valent $\delta_{j, i+k}$. $\square$

Méthode 5.14 (Résolution avec valeurs propres répétées (2×2)). Si A a une valeur propre double λ avec un seul vecteur propre V_1 (à proportionnalité près), on cherche un vecteur propre généralisé V_2 tel que $(A - \lambda I)V_2 = V_1$. La solution générale est alors :

$$X(t) = c_1 e^{\lambda t} V_1 + c_2 e^{\lambda t} (V_2 + t V_1).$$

Exemple 5.15 (Valeur propre double, un seul vecteur propre). Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. La seule valeur propre est $\lambda = 3$ (double). On a $A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, d'où $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Cherchons V_2 tel que $(A - 3I)V_2 = V_1$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où $b = 1$ et a libre, on prend $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solution générale :

$$X(t) = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = e^{3t} \begin{pmatrix} c_1 + c_2 t \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

5.4 Classification des systèmes 2×2

Théorème 5.16 (Classification des points d'équilibre en dimension 2). *Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec $\det(A) \neq 0$. Notons $\tau = \text{tr}(A)$, $\delta = \det(A)$ et $\Delta = \tau^2 - 4\delta$ le discriminant du polynôme caractéristique $\lambda^2 - \tau\lambda + \delta = 0$.*

<i>Condition</i>	<i>Valeurs propres</i>	<i>Type</i>	<i>Stabilité</i>
$\Delta > 0, \delta > 0, \tau < 0$	$\lambda_1, \lambda_2 < 0$ réels	Nœud stable	Asympt. stable
$\Delta > 0, \delta > 0, \tau > 0$	$\lambda_1, \lambda_2 > 0$ réels	Nœud instable	Instable
$\Delta > 0, \delta < 0$	$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	Point-selle	Instable
$\Delta < 0, \tau < 0$	$\alpha \pm i\beta, \alpha < 0$	Foyer stable	Asympt. stable
$\Delta < 0, \tau > 0$	$\alpha \pm i\beta, \alpha > 0$	Foyer instable	Instable
$\Delta < 0, \tau = 0$	$\pm i\beta$ purs imaginaires	Centre	Stable (non asympt.)
$\Delta = 0, \tau < 0$	$\lambda < 0$ double	Nœud dégénéré stable	Asympt. stable
$\Delta = 0, \tau > 0$	$\lambda > 0$ double	Nœud dégénéré instable	Instable

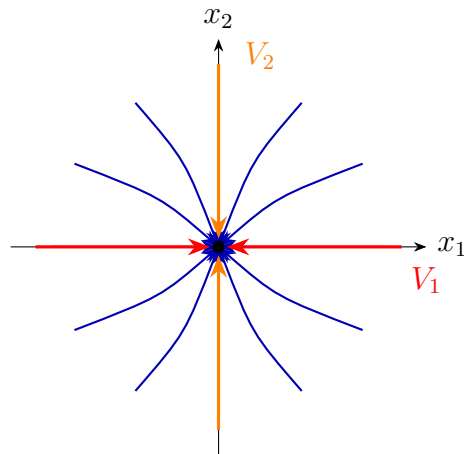
Remarque 5.17. Le plan (τ, δ) permet une visualisation synthétique : la parabole $\delta = \tau^2/4$ sépare les valeurs propres réelles ($\Delta > 0$, au-dessous) des valeurs propres complexes ($\Delta < 0$, au-dessus). L'axe $\delta = 0$ correspond au cas dégénéré $\det(A) = 0$.

5.5 Portraits de phase en dimension 2

Nous illustrons chaque type de point d'équilibre par un portrait de phase.

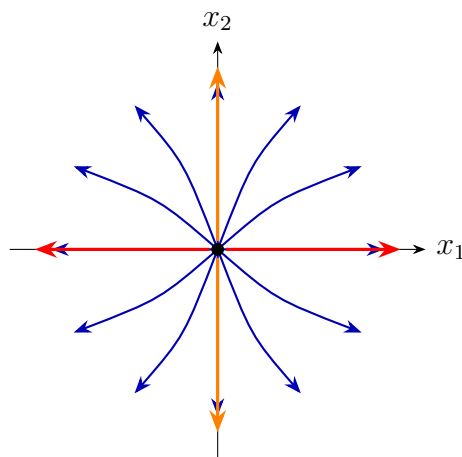
5.5.1 Nœud stable

Exemple 5.18 (Nœud stable). Considérons $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, de valeurs propres $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = -1$, toutes deux négatives.


 Nœud stable ($\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$)

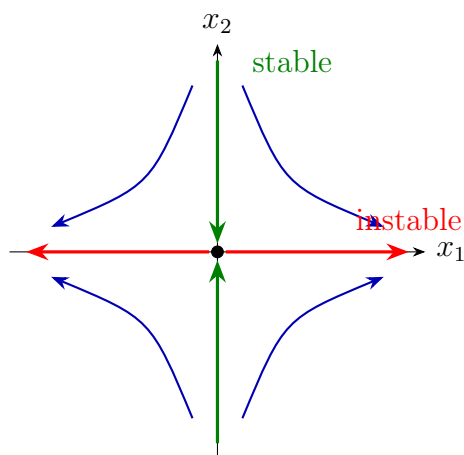
5.5.2 Nœud instable

Exemple 5.19 (Nœud instable). $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: $\lambda_1 = 2 > 0$, $\lambda_2 = 1 > 0$. Les trajectoires s'éloignent de l'origine.


 Nœud instable ($\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$)

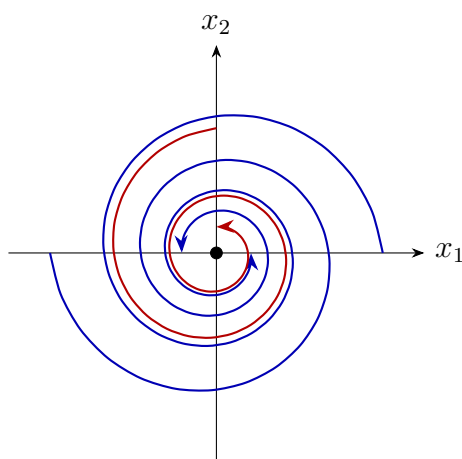
5.5.3 Point-selle

Exemple 5.20 (Point-selle). $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$: $\lambda_1 = 1 > 0$, $\lambda_2 = -2 < 0$. L'axe x_2 est la variété stable, l'axe x_1 est la variété instable.

Point-selle ($\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$)

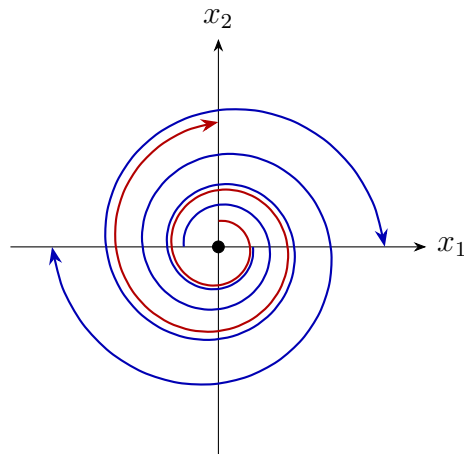
5.5.4 Foyer stable

Exemple 5.21 (Foyer stable). $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, de valeurs propres $\lambda = -1 \pm 2i$. Les trajectoires sont des spirales convergeant vers l'origine.

Foyer stable ($\lambda = -1 \pm 2i$)

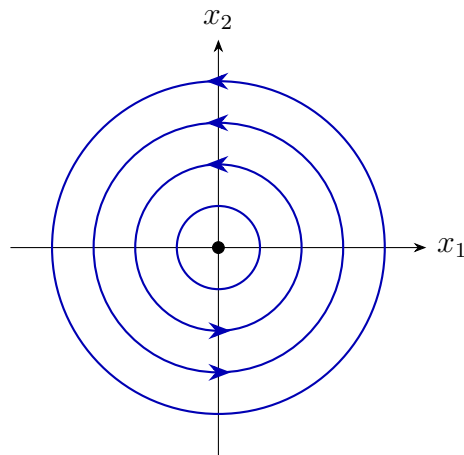
5.5.5 Foyer instable

Exemple 5.22 (Foyer instable). $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, de valeurs propres $\lambda = 1 \pm 2i$. Les spirales s'éloignent de l'origine.


 Foyer instable ($\lambda = 1 \pm 2i$)

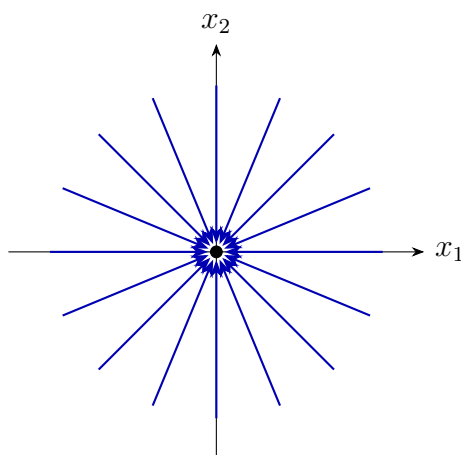
5.5.6 Centre

Exemple 5.23 (Centre). $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, de valeurs propres $\lambda = \pm 2i$. Les trajectoires sont des ellipses (ici des cercles).

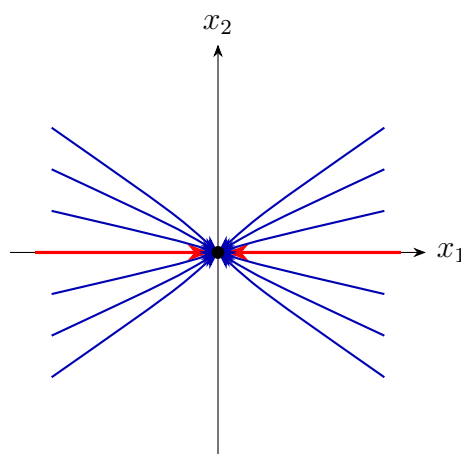

 Centre ($\lambda = \pm 2i$)

5.5.7 Nœud dégénéré (étoile et non-étoile)

Exemple 5.24 (Nœud dégénéré étoile). $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$. La valeur propre $\lambda = -1$ est double avec deux vecteurs propres indépendants. Toutes les droites passant par l'origine sont des trajectoires rectilignes convergentes : c'est un *nœud étoile*.

Nœud étoile stable ($\lambda = -1$ double)

Exemple 5.25 (Nœud dégénéré non-étoile). $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Valeur propre $\lambda = -1$ double, un seul vecteur propre $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Les trajectoires sont tangentes à la direction propre en l'origine.

Nœud dégénéré stable ($\lambda = -1$ double, Jordan)

5.6 Matrice fondamentale et wronskien matriciel

Définition 5.26 (Système fondamental, matrice fondamentale). Soit $X' = A(t)X$ un système linéaire homogène sur un intervalle I .

- (i) Un *système fondamental de solutions* est une famille $(X_1, \dots, X_n)$ de n solutions formant, pour tout $t \in I$, une base de $\mathbb{R}^n$.
- (ii) La *matrice fondamentale* (ou résolvante) associée est la matrice $\Phi(t) = (X_1(t) \mid \dots \mid X_n(t)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont les colonnes sont les solutions du système fondamental.

Remarque 5.27. Pour le système à coefficients constants $X' = AX$, la matrice résolvante vérifiant $\Phi(0) = I_n$ est $\Phi(t) = e^{tA}$.

Définition 5.28 (Wronskien matriciel). Le *wronskien* du système fondamental $(X_1, \dots, X_n)$ est la fonction

$$W(t) = \det(\Phi(t)) = \det(X_1(t), \dots, X_n(t)).$$

Théorème 5.29 (Formule d'Abel–Liouville). Soient $(X_1, \dots, X_n)$ des solutions de $X' = A(t)X$ sur I et $W(t) = \det(X_1(t), \dots, X_n(t))$. Alors, pour tout $t_0 \in I$:

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \operatorname{tr}(A(s)) \, ds\right). \quad (5.6)$$

En particulier, W ne s'annule jamais ou est identiquement nul.

Démonstration. Posons $\Phi = (X_1 \mid \dots \mid X_n)$. On a $\Phi' = A(t)\Phi$. Dérivons le déterminant :

$$W'(t) = \frac{d}{dt} \det(\Phi(t)).$$

En utilisant la multilinéarité du déterminant par rapport aux colonnes :

$$W'(t) = \sum_{j=1}^n \det(X_1, \dots, X'_j, \dots, X_n).$$

Or $X'_j = A(t)X_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}(t)X_i$, donc le j -ème terme vaut

$$\det(X_1, \dots, \sum_i a_{ij}X_i, \dots, X_n) = a_{jj}(t) \det(X_1, \dots, X_n) = a_{jj}(t) W(t),$$

car les termes $i \neq j$ donnent un déterminant avec deux colonnes égales, donc nul. On obtient $W'(t) = \operatorname{tr}(A(t)) W(t)$, qui est une EDO linéaire scalaire dont la solution est (5.6). $\square$

Corollaire 5.30. Les solutions $X_1, \dots, X_n$ forment un système fondamental si et seulement si $W(t_0) \neq 0$ pour un (et donc tout) $t_0 \in I$.

5.7 Systèmes non homogènes : variation des constantes

Théorème 5.31 (Variation des constantes pour les systèmes). La solution du système complet $X' = A(t)X + B(t)$ vérifiant $X(t_0) = X_0$ est

$$X(t) = \Phi(t) \Phi(t_0)^{-1} X_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1} B(s) \, ds, \quad (5.7)$$

où Φ est une matrice fondamentale du système homogène associé.

Démonstration. On cherche la solution sous la forme $X(t) = \Phi(t) C(t)$ avec $C: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ (méthode de variation des constantes). En dérivant :

$$X' = \Phi' C + \Phi C' = A\Phi C + \Phi C'.$$

Or $X' = AX + B = A\Phi C + B$, d'où $\Phi C' = B$, soit $C'(t) = \Phi(t)^{-1}B(t)$. En intégrant :

$$C(t) = C(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1}B(s) \, ds.$$

La condition $X(t_0) = X_0$ donne $\Phi(t_0)C(t_0) = X_0$, donc $C(t_0) = \Phi(t_0)^{-1}X_0$, et on obtient (5.7). $\square$

Corollaire 5.32 (Cas des coefficients constants). *Si A est constante et $t_0 = 0$:*

$$X(t) = e^{tA}X_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}B(s) \, ds. \quad (5.8)$$

Cette formule est appelée formule de Duhamel.

Exemple 5.33 (Système non homogène 2×2). Résolvons $X' = AX + B(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$, $X(0) = 0$.

La matrice fondamentale est $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$, d'où $\Phi(t)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$.

On calcule :

$$\int_0^t \Phi(s)^{-1}B(s) \, ds = \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-s} & 0 \\ 0 & e^{-2s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^s \\ 0 \end{pmatrix} \, ds = \int_0^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \, ds = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $X(t) = \Phi(t) \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^t \\ 0 \end{pmatrix}$.

5.8 Exercices

Exercice 5.1 (Résolution par diagonalisation). Résoudre le système $X' = AX$ avec $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et :

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 5.2 (Valeurs propres complexes). Résoudre $X' = AX$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Identifier le type du point d'équilibre et esquisser le portrait de phase.

Exercice 5.3 (Valeur propre double). Résoudre $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Indication :* la valeur propre est $\lambda = 3$ (double).

Exercice 5.4 (Exponentielle de matrice). Calculer e^{tA} dans les cas suivants :

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 5.5 (Formule d'Abel–Liouville). Soit $X' = A(t)X$ avec $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -t & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Montrer que $\text{tr}(A(t)) = 0$ et en déduire que le wronskien de tout système fondamental est constant.
- b) Si $X_1(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \end{pmatrix}$ est une solution, exprimer une seconde solution indépendante à l'aide de φ .

Exercice 5.6 (Système non homogène ★★). Résoudre $X' = AX + B(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \end{pmatrix}$, $X(0) = 0$.

Exercice 5.7 (Classification ★★). Pour chacune des matrices suivantes, déterminer le type du point d'équilibre de $X' = AX$ et esquisser le portrait de phase :

a) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 5.8 (Système 3×3 ★★★). Résoudre le système $X' = AX$ pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

En déduire l'exponentielle e^{tA} .

Résumé du chapitre 5

Points clés du chapitre 5 :

- Un système $X' = A(t)X + B(t)$ admet une unique solution globale pour toute condition initiale (Cauchy–Lipschitz).
- L'espace des solutions du système homogène est un espace vectoriel de dimension n .
- Pour A constante, la solution est $X(t) = e^{tA}X_0$. Le calcul de e^{tA} repose sur la réduction de A (diagonalisation ou forme de Jordan).
- La formule d'Abel–Liouville relie le wronskien à la trace de $A(t)$: $W(t) = W(t_0) \exp \int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s) \, ds$.
- La classification des points d'équilibre en dimension 2 dépend de $\tau = \operatorname{tr}(A)$, $\delta = \det(A)$ et du signe de $\Delta = \tau^2 - 4\delta$.
- La méthode de variation des constantes donne la solution du système complet : $X(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}X_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1}B(s) \, ds$.

Chapitre 6

Méthodes de résolution explicite : wronskien, variation des constantes et séries entières

Contents

Introduction	56
5.1 Forme générale et premières propriétés	57
5.2 Exponentielle de matrice	58
5.3 Systèmes homogènes à coefficients constants : méthode des valeurs propres	59
5.3.1 Cas diagonalisable	59
5.3.2 Valeurs propres complexes	59
5.3.3 Valeurs propres répétées : vecteurs propres généralisés	60
5.4 Classification des systèmes 2×2	61
5.5 Portraits de phase en dimension 2	61
5.5.1 Nœud stable	61
5.5.2 Nœud instable	62
5.5.3 Point-selle	62
5.5.4 Foyer stable	63
5.5.5 Foyer instable	63
5.5.6 Centre	64
5.5.7 Nœud dégénéré (étoile et non-étoile)	64
5.6 Matrice fondamentale et wronskien matriciel	65
5.7 Systèmes non homogènes : variation des constantes	66
5.8 Exercices	67
Résumé du chapitre 5	69

Introduction

Ce chapitre rassemble les principales méthodes de résolution *explicite* des équations et systèmes différentiels linéaires. Si le chapitre précédent a développé la théorie des systèmes,

nous adoptons ici un point de vue plus calculatoire, en détaillant : le *wronskien* et ses applications, la méthode de *variation des constantes* (pour les équations d'ordre n et les systèmes), une introduction aux *fonctions de Green*, la méthode des *séries entières*, et la *réduction d'ordre*.

6.1 Wronskien : définition, propriétés, théorème d'Abel

6.1.1 Wronskien d'une équation scalaire d'ordre n

Définition 6.1 (Wronskien). Soient $y_1, \dots, y_n$ des fonctions $(n-1)$ fois dérivables sur un intervalle I . Le *wronskien* de $(y_1, \dots, y_n)$ est la fonction

$$W(t) = W[y_1, \dots, y_n](t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}. \quad (6.1)$$

Proposition 6.2 (Wronskien et indépendance linéaire). Soient $y_1, \dots, y_n$ des solutions de l'équation linéaire homogène d'ordre n

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t) y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t) y' + a_0(t) y = 0, \quad (6.2)$$

où les a_i sont continues sur I . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $(y_1, \dots, y_n)$ est un système fondamental de solutions.
- (ii) $W(t_0) \neq 0$ pour un $t_0 \in I$.
- (iii) $W(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.

Théorème 6.3 (Théorème d'Abel pour les EDO scalaires). Soient $y_1, \dots, y_n$ des solutions de (6.2). Alors

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t a_{n-1}(s) ds\right). \quad (6.3)$$

Démonstration. On ramène l'équation (6.2) au système $X' = A(t)X$ par le changement de variables $X = (y, y', \dots, y^{(n-1)})^\top$, avec la matrice compagnon

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}.$$

On a $\text{tr}(A(t)) = -a_{n-1}(t)$. Le théorème d'Abel–Liouville (théorème 5.29) appliqué au système donne immédiatement (6.3), car le wronskien du système fondamental coïncide avec le wronskien scalaire. $\square$

Exemple 6.4 (Application du théorème d'Abel). Considérons l'équation $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ (ordre 2). Si y_1 est une solution connue non nulle, le wronskien est $W(t) = W_0 e^{-\int_{t_0}^t p(s) ds}$. Or $W = y_1 y_2' - y_1' y_2$, d'où

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{y_2}{y_1} \right) = \frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} = \frac{W(t)}{y_1(t)^2}.$$

En intégrant :

$$y_2(t) = y_1(t) \int_{t_0}^t \frac{W_0 e^{-\int_{t_0}^s p(u) du}}{y_1(s)^2} ds. \quad (6.4)$$

Ceci fournit une seconde solution indépendante à partir d'une seule solution connue.

6.2 Variation des constantes pour les EDO d'ordre n

Théorème 6.5 (Variation des constantes — ordre n). *Considérons l'équation linéaire complète*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y = f(t), \quad (6.5)$$

et soit $(y_1, \dots, y_n)$ un système fondamental de l'équation homogène associée. Une solution particulière de (6.5) est

$$y_p(t) = \sum_{k=1}^n y_k(t) \int_{t_0}^t \frac{W_k(s)}{W(s)} f(s) ds, \quad (6.6)$$

où $W(t)$ est le wronskien de $(y_1, \dots, y_n)$ et $W_k(t)$ est le déterminant obtenu en remplaçant la k -ème colonne de la matrice wronskienne par $(0, 0, \dots, 0, 1)^\top$.

Démonstration. On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(t) = \sum_{k=1}^n c_k(t) y_k(t)$ avec des fonctions c_k à déterminer. En imposant les $n - 1$ conditions¹

$$\sum_{k=1}^n c_k'(t) y_k^{(j)}(t) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-2,$$

et en substituant dans (6.5), on obtient le système de Cramer :

$$\sum_{k=1}^n c_k'(t) y_k^{(n-1)}(t) = f(t).$$

Le système complet pour $(c_1', \dots, c_n')$ s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

1. Ces conditions de Lagrange garantissent que $y_p^{(j)}$ a la même forme que si les c_k étaient constantes, pour $j = 0, \dots, n-2$.

Le déterminant de ce système est $W(t) \neq 0$. Par la règle de Cramer, $c'_k(t) = W_k(t) f(t)/W(t)$, et on conclut en intégrant. $\square$

Exemple 6.6 (Variation des constantes pour une EDO d'ordre 2). Résolvons $y'' + y = \frac{1}{\cos t}$ sur $] -\pi/2, \pi/2[$.

Système fondamental : $y_1 = \cos t$, $y_2 = \sin t$.

Wronskien : $W = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Calcul des W_k :

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin t \\ 1 & \cos t \end{vmatrix} = -\sin t, \quad W_2 = \begin{vmatrix} \cos t & 0 \\ -\sin t & 1 \end{vmatrix} = \cos t.$$

Solution particulière :

$$\begin{aligned} y_p &= \cos t \int \frac{-\sin t}{\cos t} dt + \sin t \int \frac{\cos t}{\cos t} dt \\ &= \cos t \cdot \ln |\cos t| + t \sin t. \end{aligned}$$

Solution générale : $y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \cos t \cdot \ln |\cos t| + t \sin t$.

6.3 Variation des constantes pour les systèmes

La méthode a déjà été établie au théorème 5.31. Nous la reformulons ici dans un cadre plus général et donnons un exemple détaillé supplémentaire.

Méthode 6.7 (Variation des constantes pour $X' = A(t)X + B(t)$). 1. Résoudre le système homogène $X' = A(t)X$ pour obtenir une matrice fondamentale $\Phi(t)$.

2. Poser $X(t) = \Phi(t)C(t)$ et dériver : $\Phi' C + \Phi C' = A\Phi C + B$, d'où $\Phi C' = B$.

3. Résoudre $C'(t) = \Phi(t)^{-1}B(t)$ par intégration.

4. La solution est $X(t) = \Phi(t)[C(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1}B(s) ds]$.

Exemple 6.8 (Variation des constantes : système 2×2). Résolvons $X' = AX + B(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$, $X(0) = 0$.

Étape 1. Les valeurs propres de A sont $\pm i$. La matrice fondamentale avec $\Phi(0) = I_2$ est

$$\Phi(t) = e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Étape 2. $\Phi(t)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

Étape 3.

$$\Phi(s)^{-1}B(s) = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \sin s \\ s \cos s \end{pmatrix}.$$

Intégrons composante par composante (intégration par parties) :

$$\begin{aligned}\int_0^t (-s \sin s) \, ds &= s \cos s \Big|_0^t - \int_0^t \cos s \, ds = t \cos t - \sin t, \\ \int_0^t s \cos s \, ds &= s \sin s \Big|_0^t - \int_0^t \sin s \, ds = t \sin t + \cos t - 1.\end{aligned}$$

Étape 4.

$$\begin{aligned}X(t) &= \Phi(t) \begin{pmatrix} t \cos t - \sin t \\ t \sin t + \cos t - 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \cos t - \sin t \\ t \sin t + \cos t - 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Développons la première composante :

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \cos t(t \cos t - \sin t) + \sin t(t \sin t + \cos t - 1) \\ &= t \cos^2 t - \sin t \cos t + t \sin^2 t + \sin t \cos t - \sin t \\ &= t - \sin t.\end{aligned}$$

Et la seconde :

$$\begin{aligned}x_2(t) &= -\sin t(t \cos t - \sin t) + \cos t(t \sin t + \cos t - 1) \\ &= -t \sin t \cos t + \sin^2 t + t \sin t \cos t + \cos^2 t - \cos t \\ &= 1 - \cos t.\end{aligned}$$

Résultat : $X(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}.$

6.4 Fonction de Green

Définition 6.9 (Fonction de Green). Considérons l'équation $y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y = f(t)$ sur I , avec un système fondamental $(y_1, \dots, y_n)$. La *fonction de Green* associée est

$$G(t, s) = \sum_{k=1}^n y_k(t) \frac{W_k(s)}{W(s)}, \quad (6.7)$$

où W et W_k sont définis comme au théorème 6.5. La solution particulière vérifiant $y_p(t_0) = y'_p(t_0) = \dots = y_p^{(n-1)}(t_0) = 0$ s'écrit alors :

$$y_p(t) = \int_{t_0}^t G(t, s) f(s) \, ds. \quad (6.8)$$

Proposition 6.10 (Propriétés de la fonction de Green). La fonction G vérifie :

(i) Pour s fixé, $t \mapsto G(t, s)$ est solution de l'équation homogène pour $t \neq s$.

- (ii) $G(s, s) = \frac{\partial G}{\partial t}(s, s) = \dots = \frac{\partial^{n-2} G}{\partial t^{n-2}}(s, s) = 0$ et $\frac{\partial^{n-1} G}{\partial t^{n-1}}(s, s) = 1$.
- (iii) La fonction de Green « encode » l'opérateur de résolution du problème non homogène comme un opérateur intégral.

Exemple 6.11 (Fonction de Green pour $y'' + y = f(t)$). Le système fondamental est $y_1 = \cos t$, $y_2 = \sin t$, $W = 1$. On a :

$$G(t, s) = \cos t \cdot (-\sin s) + \sin t \cdot \cos s = \sin(t - s).$$

La solution particulière nulle en $t_0 = 0$ est :

$$y_p(t) = \int_0^t \sin(t - s) f(s) ds.$$

On reconnaît un *produit de convolution* avec le noyau $\sin$.

6.5 Solutions en séries entières

Lorsque les coefficients d'une EDO ne sont pas constants mais analytiques, on peut chercher des solutions sous forme de séries entières.

6.5.1 Points ordinaires

Définition 6.12 (Point ordinaire). Considérons l'équation

$$y'' + p(t) y' + q(t) y = 0. \quad (6.9)$$

Un point t_0 est dit *ordinaire* si p et q sont analytiques (développables en séries entières) au voisinage de t_0 .

Théorème 6.13 (Solutions en séries entières aux points ordinaires). Si t_0 est un point ordinaire de (6.9), alors l'équation admet deux solutions linéairement indépendantes de la forme

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n,$$

dont le rayon de convergence est au moins égal au minimum des rayons de convergence des séries de p et q en t_0 .

Méthode 6.14 (Recherche de solutions en séries entières). 1. Poser $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ (en prenant $t_0 = 0$ pour simplifier).

2. Calculer $y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$ et $y''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$.

3. Substituer dans l'équation et regrouper les termes par puissances de t .

4. Identifier les coefficients : on obtient une *relation de récurrence* pour les a_n .

5. Déterminer a_0 et a_1 à l'aide des conditions initiales.

Exemple 6.15 (Équation d'Airy). Résolvons $y'' - ty = 0$ en série entière autour de $t_0 = 0$.

Posons $y = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$, d'où $y'' = \sum_{n \geq 2} n(n-1)a_n t^{n-2} = \sum_{m \geq 0} (m+2)(m+1)a_{m+2} t^m$.
Le terme $ty = \sum_{n \geq 0} a_n t^{n+1} = \sum_{m \geq 1} a_{m-1} t^m$.

L'équation $y'' - ty = 0$ donne :

- $m = 0 : 2 \cdot 1 \cdot a_2 = 0$, donc $a_2 = 0$.
- $m \geq 1 : (m+2)(m+1)a_{m+2} = a_{m-1}$, soit

$$a_{m+2} = \frac{a_{m-1}}{(m+2)(m+1)}, \quad m \geq 1. \quad (6.10)$$

Les deux suites indépendantes (en posant a_0 et a_1 libres) :

Suite $a_0 : a_0, 0, 0, \frac{a_0}{3 \cdot 2}, 0, 0, \frac{a_0}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}, \dots$

Suite $a_1 : 0, a_1, 0, 0, \frac{a_1}{4 \cdot 3}, 0, 0, \frac{a_1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}, \dots$

Ces séries convergent pour tout $t \in \mathbb{R}$ (rayon de convergence infini). Les deux solutions indépendantes sont les *fonctions d'Airy* $\text{Ai}(t)$ et $\text{Bi}(t)$.

Exemple 6.16 (Équation de Hermite). L'équation $y'' - 2ty' + 2\alpha y = 0$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) se résout en posant $y = \sum a_n t^n$. On obtient la récurrence :

$$a_{n+2} = \frac{2(n-\alpha)}{(n+2)(n+1)} a_n, \quad n \geq 0.$$

Pour $\alpha = N \in \mathbb{N}$, la série s'interrompt et fournit un *polynôme de Hermite* $H_N(t)$.

6.5.2 Points singuliers réguliers : méthode de Frobenius

Définition 6.17 (Point singulier régulier). Le point t_0 est un *point singulier régulier* de (6.9) si les fonctions $(t - t_0)p(t)$ et $(t - t_0)^2 q(t)$ sont analytiques en t_0 , c'est-à-dire si p a au plus un pôle simple et q un pôle d'ordre au plus 2 en t_0 .

Théorème 6.18 (Méthode de Frobenius). Si t_0 est un point singulier régulier de (6.9), il existe au moins une solution de la forme

$$y(t) = (t - t_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n, \quad a_0 \neq 0, \quad (6.11)$$

où r est une racine de l'équation indiciale

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0, \quad p_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} (t - t_0)p(t), \quad q_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} (t - t_0)^2 q(t).$$

Si les deux racines r_1, r_2 (avec $\text{Re}(r_1) \geq \text{Re}(r_2)$) de l'équation indiciale ne diffèrent pas d'un entier, on obtient deux solutions indépendantes de la forme (6.11). Sinon, la seconde solution peut contenir un terme logarithmique.

Exemple 6.19 (Équation de Bessel d'ordre ν). L'équation de Bessel $t^2 y'' + ty' + (t^2 - \nu^2)y = 0$ a un point singulier régulier en $t_0 = 0$. Sous forme normalisée : $y'' + \frac{1}{t}y' + \frac{t^2 - \nu^2}{t^2}y = 0$, d'où $p_0 = 1$ et $q_0 = -\nu^2$.

L'équation indiciale est $r(r-1) + r - \nu^2 = r^2 - \nu^2 = 0$, de racines $r_1 = \nu$ et $r_2 = -\nu$. Pour $r = \nu$, la méthode de Frobenius donne la *fonction de Bessel de première espèce* :

$$J_\nu(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \nu + 1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m+\nu}.$$

6.6 Réduction d'ordre

Théorème 6.20 (Réduction d'ordre). Soit y_1 une solution non nulle de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$. En posant $y = y_1 v$, on obtient pour v l'équation

$$v'' + \left(2\frac{y_1'}{y_1} + p\right)v' = 0, \quad (6.12)$$

qui est du premier ordre en $w = v'$. Sa résolution donne une seconde solution indépendante :

$$y_2(t) = y_1(t) \int \frac{e^{-\int p(t) dt}}{y_1(t)^2} dt. \quad (6.13)$$

Démonstration. Posons $y = y_1 v$. Alors $y' = y_1' v + y_1 v'$ et $y'' = y_1'' v + 2y_1' v' + y_1 v''$. En substituant :

$$\begin{aligned} y_1'' v + 2y_1' v' + y_1 v'' + p(y_1' v + y_1 v') + q y_1 v &= 0 \\ \underbrace{(y_1'' + p y_1' + q y_1)}_{=0} v + y_1 v'' + (2y_1' + p y_1) v' &= 0. \end{aligned}$$

Il reste $y_1 v'' + (2y_1' + p y_1) v' = 0$, soit $v'' + (2y_1'/y_1 + p) v' = 0$. C'est une EDO du premier ordre en $w = v'$: $w' + (2y_1'/y_1 + p)w = 0$, d'où $w(t) = \frac{C}{y_1(t)^2} e^{-\int p(t) dt}$. En intégrant w , on obtient v , puis $y_2 = y_1 v$. $\square$

Exemple 6.21 (Réduction d'ordre). Considérons $y'' - \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2}y = 0$ sur $]0, +\infty[$, qui admet $y_1(t) = t$ comme solution.

Posons $y = tv$, alors :

$$v'' + \left(\frac{2}{t} - \frac{2}{t}\right)v' = 0, \quad \text{soit } v'' = 0.$$

Donc $v(t) = c_1 + c_2 t$, et la seconde solution est $y_2(t) = t \cdot t = t^2$.

Solution générale : $y(t) = c_1 t + c_2 t^2$.

6.7 Tableau récapitulatif des méthodes

Type d'équation	Méthode	Référence
$y' = f(t, y)$ séparable	Séparation des variables	Chap. précédents
$y' + p(t)y = q(t)$ (linéaire ordre 1)	Facteur intégrant $e^{\int p}$	Chap. précédents
$y'' + ay' + by = 0$ (coeff. constants)	Polynôme caractéristique	Chap. précédents
$y'' + ay' + by = f(t)$ (coeff. constants)	Variation des constantes ou second membre particulier	§6.2
$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots = f$	Variation des constantes (formule de Lagrange–Cramer)	Thm 6.5
$X' = AX + B$ (système)	Variation des constantes matricielle	§6.3
$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, y_1 connue	Réduction d'ordre	§6.6
$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, p, q analytiques	Séries entières	§6.5
$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, point singulier régulier	Frobenius	§6.5.2
Problème non homogène, cadre intégral	Fonction de Green	§6.4

6.8 Exemples supplémentaires

Exemple 6.22 (Variation des constantes — ordre 3). Résolvons $y''' - y' = e^t$.
Équation caractéristique : $r^3 - r = r(r-1)(r+1) = 0$, racines $r = 0, 1, -1$.
Système fondamental : $y_1 = 1$, $y_2 = e^t$, $y_3 = e^{-t}$.
Wronskien :

$$W = \begin{vmatrix} 1 & e^t & e^{-t} \\ 0 & e^t & -e^{-t} \\ 0 & e^t & e^{-t} \end{vmatrix} = 1 \cdot (e^t \cdot e^{-t} - (-e^{-t}) \cdot e^t) = 2.$$

Calcul de W_k :

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^t & e^{-t} \\ 0 & e^t & -e^{-t} \\ 1 & e^t & e^{-t} \end{vmatrix} = 1 \cdot (e^t \cdot (-e^{-t}) - e^{-t} \cdot e^t) = -2,$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & e^{-t} \\ 0 & 0 & -e^{-t} \\ 0 & 1 & e^{-t} \end{vmatrix} = 1 \cdot (0 \cdot e^{-t} - (-e^{-t}) \cdot 1) = e^{-t},$$

$$W_3 = \begin{vmatrix} 1 & e^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & e^t & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (e^t \cdot 1 - 0) = e^t.$$

Les c'_k :

$$c'_1 = \frac{-2 \cdot e^t}{2} = -e^t, \quad c'_2 = \frac{e^{-t} \cdot e^t}{2} = \frac{1}{2}, \quad c'_3 = \frac{e^t \cdot e^t}{2} = \frac{e^{2t}}{2}.$$

Intégration : $c_1 = -e^t$, $c_2 = t/2$, $c_3 = e^{2t}/4$.

Solution particulière :

$$y_p = 1 \cdot (-e^t) + e^t \cdot \frac{t}{2} + e^{-t} \cdot \frac{e^{2t}}{4} = -e^t + \frac{t}{2}e^t + \frac{e^t}{4} = e^t \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4} \right).$$

Solution générale : $y(t) = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{-t} + e^t \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4} \right)$.

Exemple 6.23 (Équation d'Euler). L'équation $t^2 y'' + \alpha t y' + \beta y = 0$ ($t > 0$) est dite *d'Euler* (ou de Cauchy–Euler). Le changement de variable $t = e^s$ la transforme en une EDO à coefficients constants :

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + (\alpha - 1) \frac{dy}{ds} + \beta y = 0.$$

L'équation indicelle est $r(r-1) + \alpha r + \beta = 0$, soit $r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0$.

Exemple concret : $t^2 y'' + 3t y' + y = 0$. Ici $\alpha = 3$, $\beta = 1$, donc $r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2 = 0$, racine double $r = -1$. Solution : $y(t) = (C_1 + C_2 \ln t)/t$.

Exemple 6.24 (Série entière : équation de Legendre). L'équation de Legendre $(1 - t^2)y'' - 2ty' + n(n+1)y = 0$ ($n \in \mathbb{N}$) a $t_0 = 0$ comme point ordinaire. La récurrence est :

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1) - n(n+1)}{(k+2)(k+1)} a_k.$$

Pour $k = n$, le numérateur s'annule, et la série s'interrompt : on obtient le *polynôme de Legendre* $P_n(t)$.

Par exemple, pour $n = 2$: $a_4 = 0$ et, en normalisant $P_2(1) = 1$: $P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1)$.

6.9 Exercices

Exercice 6.1 (★ Wronskien). Calculer le wronskien de :

a) $y_1 = e^t, y_2 = e^{2t}, y_3 = e^{3t}$.

b) $y_1 = t, y_2 = t^2, y_3 = t^3$ sur $]0, +\infty[$.

Vérifier la formule d'Abel dans chaque cas.

Exercice 6.2 (★ Variation des constantes). Résoudre par variation des constantes :

a) $y'' + 4y = \tan(2t)$ sur $] -\pi/4, \pi/4[$.

b) $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3t}}{1 + e^t}$.

Exercice 6.3 (★ Réduction d'ordre). L'équation $t^2 y'' - 2ty' + 2y = 0$ admet $y_1(t) = t$ comme solution. Trouver la solution générale par réduction d'ordre.

Exercice 6.4 (★ Séries entières). Résoudre en séries entières autour de $t_0 = 0$:

a) $y'' + ty = 0$ (équation d'Airy).

b) $y'' + t^2 y = 0$.

Déterminer le rayon de convergence des solutions.

Exercice 6.5 (★★ Formule d'Abel et reconstruction). Soit $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ sur $]0, +\infty[$ avec $y_1(t) = \sin t/t$.

a) Sachant que $p(t) = 2/t$, utiliser la formule (6.4) pour trouver une seconde solution y_2 .

b) En déduire que $y_2(t) = -\cos t/t$ (à une constante multiplicative près).

Exercice 6.6 (★★ Fonction de Green). a) Calculer la fonction de Green $G(t, s)$ de l'équation $y'' + \omega^2 y = f(t)$ pour $\omega > 0$.

b) En déduire la solution du problème $y'' + \omega^2 y = \cos(\omega t), y(0) = y'(0) = 0$.

Exercice 6.7 (★★ Méthode de Frobenius). Appliquer la méthode de Frobenius à l'équation de Bessel d'ordre $\nu = 0$: $ty'' + y' + ty = 0$.

a) Écrire l'équation indicelle et trouver ses racines.

b) Déterminer les premiers termes de la solution $J_0(t)$.

c) Montrer que $J_0(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m}$.

Exercice 6.8 (★★ Identité du wronskien). Soient y_1, y_2 deux solutions de $y'' + q(t)y = 0$ ($p \equiv 0$).

a) Montrer que $W[y_1, y_2]$ est constant.

b) En déduire que si y_1 a deux zéros consécutifs $\alpha < \beta$, alors y_2 a au moins un zéro dans $]\alpha, \beta[$. (*Théorème de séparation de Sturm.*)

Exercice 6.9 (★★★ Équation de Tchebychev). L'équation de Tchebychev est $(1 - t^2)y'' - ty' + n^2 y = 0, n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $t_0 = 0$ est un point ordinaire.

b) Trouver la récurrence sur les coefficients de la série entière.

c) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, une des deux séries s'interrompt et donne le polynôme de Tchebychev $T_n(t)$.

d) Vérifier que $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.

Exercice 6.10 (★★★ Opérateur de résolution). Soit $L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y$ un opérateur différentiel linéaire d'ordre 2, et $G(t, s)$ sa fonction de Green.

- Montrer que $y_p(t) = \int_{t_0}^t G(t, s)f(s) ds$ vérifie $L[y_p] = f$ et $y_p(t_0) = y_p'(t_0) = 0$.
- En déduire que l'opérateur $T: f \mapsto y_p$ est un opérateur intégral borné de $L^2(I)$ dans $\mathcal{C}^1(I)$ (sous des hypothèses de régularité convenables).
- Montrer que si $q(t) > 0$ et $p \equiv 0$, la fonction de Green vérifie $G(t, s) \geq 0$ pour $t \geq s$.

Résumé du chapitre 6

Points clés du chapitre 6 :

- Le **wronskien** $W[y_1, \dots, y_n]$ est non nul si et seulement si les y_i sont linéairement indépendantes (pour des solutions d'une même EDO linéaire). Le **théorème d'Abel** donne $W(t) = W(t_0) \exp(-\int_{t_0}^t a_{n-1})$.
- La **variation des constantes** fournit une solution particulière via le système de Cramer : $c'_k(t) = W_k(t) f(t)/W(t)$.
- La **fonction de Green** reformule la solution particulière comme opérateur intégral : $y_p(t) = \int_{t_0}^t G(t, s) f(s) ds$.
- Aux **points ordinaires**, on cherche des solutions en séries entières $\sum a_n(t - t_0)^n$, qui convergent au moins aussi loin que les coefficients.
- Aux **points singuliers réguliers**, la **méthode de Frobenius** cherche $y = (t - t_0)^r \sum a_n(t - t_0)^n$, où r est racine de l'équation indiciale.
- La **réduction d'ordre** : connaissant y_1 , on obtient $y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p}}{y_1^2}$.
- Consulter le **tableau récapitulatif** (§6.7) pour choisir la méthode adaptée à chaque type d'équation.

Chapitre 7

Transformées de Laplace et Applications

Introduction

Considérons le circuit RLC série suivant : une résistance R , une inductance L et un condensateur C sont alimentés par une source de tension $E(t)$ qui vaut E_0 pour $0 \leq t < T$ et 0 pour $t \geq T$. La loi de Kirchhoff donne

$$L q''(t) + R q'(t) + \frac{1}{C} q(t) = E(t), \quad q(0) = 0, \quad q'(0) = 0,$$

où $q(t)$ est la charge du condensateur. La discontinuité de E en $t = T$ empêche toute approche directe par les méthodes classiques des chapitres précédents. La *transformée de Laplace* transforme cette équation intégro-différentielle en une équation *algébrique* en s , que l'on résout aisément ; on revient ensuite à $q(t)$ par transformation inverse. C'est cette stratégie puissante que nous développons dans ce chapitre.

Conventions. Dans tout ce chapitre, les fonctions considérées sont définies sur $[0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On note s la variable complexe de la transformée.

7.1 Définition et existence

Définition 7.1 (Transformée de Laplace). Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. La *transformée de Laplace* de f est la fonction F définie par

$$F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que l'intégrale converge.

Définition 7.2 (Fonction d'ordre exponentiel). Une fonction $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est dite *d'ordre exponentiel* $\alpha \in \mathbb{R}$ s'il existe des constantes $M > 0$ et $T \geq 0$ telles que

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}, \quad \forall t \geq T.$$

Définition 7.3 (Continuité par morceaux). Une fonction $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est *continue par morceaux* sur tout intervalle borné $[0, A]$ si elle possède au plus un nombre fini de discontinuités sur $[0, A]$, et si les limites à gauche et à droite existent en chaque point de discontinuité.

Théorème 7.4 (Existence de la transformée de Laplace). Si $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur tout intervalle borné et d'ordre exponentiel α , alors $\mathcal{L}\{f\}(s)$ existe pour tout $s > \alpha$ et

$$|\mathcal{L}\{f\}(s)| \leq \frac{M}{s - \alpha}, \quad s > \alpha.$$

En particulier, $\lim_{s \rightarrow +\infty} \mathcal{L}\{f\}(s) = 0$.

Démonstration. Pour $t \geq T$ et $s > \alpha$, on a $|e^{-st}f(t)| \leq M e^{-(s-\alpha)t}$. La fonction $t \mapsto M e^{-(s-\alpha)t}$ est intégrable sur $[T, +\infty[$ car $s - \alpha > 0$. Par ailleurs, f est bornée sur $[0, T]$ car continue par morceaux sur un compact, donc $\int_0^T |e^{-st}f(t)| dt < +\infty$. Par comparaison, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t) dt$ converge absolument. De plus,

$$|\mathcal{L}\{f\}(s)| \leq \int_0^T |f(t)| e^{-st} dt + M \int_T^{+\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt \leq C_T + \frac{M e^{-(s-\alpha)T}}{s - \alpha} \leq \frac{M'}{s - \alpha}$$

pour une constante M' appropriée. La limite en $+\infty$ en découle immédiatement. $\square$

Remarque 7.5 (Unicité). Si f et g sont continues par morceaux et si $\mathcal{L}\{f\}(s) = \mathcal{L}\{g\}(s)$ pour s assez grand, alors $f(t) = g(t)$ en tout point de continuité commun. C'est le *théorème de Lerch*.

7.2 Table des transformées usuelles

Nous démontrons les transformées les plus importantes; les autres se déduisent des propriétés de la section 7.3.

Proposition 7.6 (Transformée de la constante). Pour $s > 0$, $\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}$.

Démonstration. $\mathcal{L}\{1\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s}$. $\square$

Proposition 7.7 (Transformée de t^n). Pour $n \in \mathbb{N}$ et $s > 0$, $\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$.

Démonstration. Par récurrence. Le cas $n = 0$ est la proposition 7.6. En intégrant par parties,

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-st} dt = \left[-\frac{t^n e^{-st}}{s} \right]_0^{+\infty} + \frac{n}{s} \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-st} dt = \frac{n}{s} \mathcal{L}\{t^{n-1}\}(s).$$

L'hypothèse de récurrence donne $\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n}{s} \cdot \frac{(n-1)!}{s^n} = \frac{n!}{s^{n+1}}$. $\square$

Proposition 7.8 (Transformée de e^{at}). Pour $a \in \mathbb{R}$ et $s > a$, $\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}$.

Démonstration. $\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a}$ pour $s > a$. $\square$

Proposition 7.9 (Transformées de $\sin(bt)$ et $\cos(bt)$). Pour $b \in \mathbb{R}$ et $s > 0$,

$$\mathcal{L}\{\sin(bt)\}(s) = \frac{b}{s^2 + b^2}, \quad \mathcal{L}\{\cos(bt)\}(s) = \frac{s}{s^2 + b^2}.$$

Démonstration. On utilise la formule d'Euler $e^{ibt} = \cos(bt) + i \sin(bt)$ et la linéarité. On a $\mathcal{L}\{e^{ibt}\}(s) = \frac{1}{s-ib}$ pour $s > 0$. En rationalisant :

$$\frac{1}{s-ib} = \frac{s+ib}{s^2+b^2} = \frac{s}{s^2+b^2} + i \frac{b}{s^2+b^2}.$$

En identifiant parties réelle et imaginaire, on obtient le résultat. $\square$

Proposition 7.10 (Transformée de $t^n e^{at}$). Pour $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ et $s > a$, $\mathcal{L}\{t^n e^{at}\}(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$.

Démonstration. Ceci résulte directement de la propriété de translation en s (théorème 7.12) appliquée à $\mathcal{L}\{t^n\}$. $\square$

7.3 Propriétés de la transformée de Laplace

Théorème 7.11 (Linéarité). Soient f, g deux fonctions admettant des transformées de Laplace et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\}(s) = \alpha \mathcal{L}\{f\}(s) + \beta \mathcal{L}\{g\}(s).$$

Démonstration. Immédiat par linéarité de l'intégrale. $\square$

Théorème 7.12 (Translation en s (s -shift)). Si $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$, alors

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(s) = F(s-a), \quad s > s_0 + a.$$

Démonstration. $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{at} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt = F(s-a)$. $\square$

Théorème 7.13 (Translation en t (t -shift)). Si $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ et $a \geq 0$, alors

$$\mathcal{L}\{u_a(t) f(t-a)\}(s) = e^{-as} F(s),$$

où u_a désigne la fonction de Heaviside (définition 7.25).

Démonstration. On effectue le changement de variable $\tau = t - a$:

$$\mathcal{L}\{u_a(t) f(t-a)\}(s) = \int_a^{+\infty} e^{-st} f(t-a) dt = \int_0^{+\infty} e^{-s(\tau+a)} f(\tau) d\tau = e^{-as} F(s). \quad \square$$

Théorème 7.14 (Transformée des dérivées). Si f est continue, f' est continue par morceaux, et les deux sont d'ordre exponentiel, alors

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s \mathcal{L}\{f\}(s) - f(0).$$

Plus généralement, si $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ sont continues et $f^{(n)}$ est continue par morceaux, toutes d'ordre exponentiel,

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Démonstration. Pour $n = 1$, on intègre par parties :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t) dt = [e^{-st} f(t)]_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= -f(0) + s F(s). \end{aligned}$$

Le terme en $+\infty$ est nul car f est d'ordre exponentiel et s est suffisamment grand. Le cas général s'obtient par récurrence : on pose $g = f'$ et on applique le résultat à $g^{(n-1)}$. $\square$

Corollaire 7.15 (Dérivée seconde). $\mathcal{L}\{f''\}(s) = s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$.

Théorème 7.16 (Transformée d'une intégrale). Si $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$, alors

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\}(s) = \frac{F(s)}{s}.$$

Démonstration. Posons $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$. Alors $g'(t) = f(t)$ et $g(0) = 0$. Par le théorème 7.14, $\mathcal{L}\{g'\}(s) = s G(s) - g(0) = s G(s)$, d'où $G(s) = F(s)/s$. $\square$

Théorème 7.17 (Dérivation de la transformée). Si $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$, alors

$$\mathcal{L}\{t f(t)\}(s) = -F'(s).$$

Plus généralement, $\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n F^{(n)}(s)$.

Démonstration. On dérive sous le signe intégral (justifié par convergence dominée) :

$$F'(s) = \frac{d}{ds} \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{+\infty} (-t) e^{-st} f(t) dt = -\mathcal{L}\{t f(t)\}(s). \quad \square$$

Théorème 7.18 (Convolution). *Soient f et g deux fonctions admettant des transformées de Laplace. Le produit de convolution est défini par*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau.$$

*Alors $\mathcal{L}\{f * g\}(s) = F(s) \cdot G(s)$.*

Démonstration. On calcule :

$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \left(\int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right) dt.$$

On échange l'ordre d'intégration (Fubini) : le domaine est $\{(\tau, t) : 0 \leq \tau \leq t < +\infty\} = \{(\tau, t) : 0 \leq \tau < +\infty, t \geq \tau\}$. Ainsi,

$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = \int_0^{+\infty} f(\tau) \left(\int_\tau^{+\infty} e^{-st} g(t - \tau) dt \right) d\tau.$$

Dans l'intégrale intérieure, on pose $u = t - \tau$:

$$\int_\tau^{+\infty} e^{-st} g(t - \tau) dt = \int_0^{+\infty} e^{-s(u+\tau)} g(u) du = e^{-s\tau} G(s).$$

Par conséquent, $\mathcal{L}\{f * g\}(s) = \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \cdot G(s) = F(s) G(s)$. $\square$

Théorème 7.19 (Théorème de la valeur initiale). *Si f et f' sont d'ordre exponentiel et si f est continue en 0, alors*

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s F(s).$$

Démonstration. D'après le théorème 7.14, $\mathcal{L}\{f'\}(s) = sF(s) - f(0)$. Quand $s \rightarrow +\infty$, $\mathcal{L}\{f'\}(s) \rightarrow 0$ (théorème 7.4), d'où $\lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s) = f(0)$. $\square$

Théorème 7.20 (Théorème de la valeur finale). *Si $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ existe (et est finie), alors*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s F(s).$$

Démonstration. On a $\mathcal{L}\{f'\}(s) = sF(s) - f(0)$. En faisant $s \rightarrow 0^+$:

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} (sF(s) - f(0)) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t) dt = \int_0^{+\infty} f'(t) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} f(T) - f(0),$$

d'où le résultat. $\square$

7.4 Transformée inverse et fractions partielles

Définition 7.21 (Transformée inverse). Si $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$, on écrit $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F\}(t)$. Grâce à l'unicité (remarque 7.5), cette inverse est essentiellement unique.

Remarque 7.22 (Linéarité de l'inverse). $\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F + \beta G\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F\} + \beta \mathcal{L}^{-1}\{G\}$.

La méthode des *fractions partielles* est l'outil principal pour calculer des transformées inverses. Soit $F(s) = P(s)/Q(s)$ une fraction rationnelle avec $\deg P < \deg Q$.

Méthode 7.23 (Décomposition en fractions partielles). (1) Factoriser $Q(s)$ en produit de facteurs linéaires et quadratiques irréductibles.

(2) Pour chaque facteur linéaire simple $(s - a)$: terme $\frac{A}{s - a}$.

(3) Pour chaque facteur linéaire répété $(s - a)^k$: termes $\frac{A_1}{s - a} + \frac{A_2}{(s - a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(s - a)^k}$.

(4) Pour chaque facteur quadratique $(s^2 + ps + q)$: terme $\frac{As + B}{s^2 + ps + q}$.

(5) Identifier les coefficients et appliquer les transformées inverses connues.

Exemple 7.24 (Fractions partielles). Calculons $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s + 3}{(s - 1)(s + 2)}\right\}$.

On écrit $\frac{5s + 3}{(s - 1)(s + 2)} = \frac{A}{s - 1} + \frac{B}{s + 2}$. En multipliant par $(s - 1)(s + 2)$: $5s + 3 = A(s + 2) + B(s - 1)$.

Pour $s = 1$: $8 = 3A$, soit $A = 8/3$. Pour $s = -2$: $-7 = -3B$, soit $B = 7/3$.

Donc $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s + 3}{(s - 1)(s + 2)}\right\} = \frac{8}{3}e^t + \frac{7}{3}e^{-2t}$.

7.5 Fonctions de Heaviside et distribution de Dirac

Définition 7.25 (Fonction échelon de Heaviside). Pour $a \geq 0$, la *fonction de Heaviside* (ou fonction échelon unité) est

$$u_a(t) = u(t - a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a, \\ 1 & \text{si } t \geq a. \end{cases}$$

On note parfois $\theta(t - a)$ ou $H(t - a)$.

Proposition 7.26 (Transformée de Heaviside). Pour $a \geq 0$ et $s > 0$, $\mathcal{L}\{u_a(t)\}(s) = \frac{e^{-as}}{s}$.

Démonstration. $\mathcal{L}\{u_a(t)\}(s) = \int_a^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-as}}{s}$. □

Remarque 7.27 (Fenêtre rectangulaire). La fonction porte $\Pi_{a,b}(t) = u_a(t) - u_b(t)$ ($0 \leq a < b$) vaut 1 sur $[a, b[$ et 0 ailleurs. Sa transformée est $\frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s}$.

Définition 7.28 (Distribution de Dirac). La *distribution de Dirac* δ_a (ou $\delta(t - a)$) est définie comme la « limite » de fonctions concentrées en $t = a$: formellement, elle vérifie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - a) \varphi(t) dt = \varphi(a)$$

pour toute fonction test φ continue. En particulier, $\delta_0 = \delta$ vérifie $\int \delta(t) dt = 1$.

Proposition 7.29 (Transformée de Dirac). Pour $a \geq 0$, $\mathcal{L}\{\delta(t - a)\}(s) = e^{-as}$. En particulier, $\mathcal{L}\{\delta(t)\}(s) = 1$.

Démonstration. Formellement, $\mathcal{L}\{\delta(t - a)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \delta(t - a) dt = e^{-as}$ par la propriété caractéristique de δ . $\square$

7.6 Résolution d'EDO par la transformée de Laplace

Méthode 7.30 (Résolution d'un PVI par Laplace). **Étape 1.** Appliquer $\mathcal{L}$ aux deux membres de l'EDO.

Étape 2. Utiliser le théorème 7.14 pour exprimer $\mathcal{L}\{y'\}$, $\mathcal{L}\{y''\}$, etc., en fonction de $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$ et des conditions initiales.

Étape 3. Résoudre l'équation algébrique en $Y(s)$.

Étape 4. Calculer $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y\}(t)$ par fractions partielles.

Exemple 7.31 (EDO du second ordre à coefficients constants). Résolvons le problème de Cauchy

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Étape 1–2. On applique $\mathcal{L}$:

$$s^2 Y - sy(0) - y'(0) - 3(sY - y(0)) + 2Y = 0,$$

soit $(s^2 - 3s + 2)Y = s - 3$.

Étape 3. $Y(s) = \frac{s-3}{s^2-3s+2} = \frac{s-3}{(s-1)(s-2)}$.

Étape 4. Décomposition : $\frac{s-3}{(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2}$.
 $s = 1$: $-2 = -A$, soit $A = 2$. $s = 2$: $-1 = B$, soit $B = -1$.

$$y(t) = 2e^t - e^{2t}.$$

Exemple 7.32 (Forçage discontinu). Considérons

$$y'' + y = g(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad \text{où} \quad g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \pi, \\ 0 & \text{si } t \geq \pi. \end{cases}$$

On écrit $g(t) = 1 - u_\pi(t)$, de sorte que $G(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-\pi s}}{s}$.

En appliquant $\mathcal{L} : (s^2 + 1)Y(s) = \frac{1 - e^{-\pi s}}{s}$, d'où

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 1)} - \frac{e^{-\pi s}}{s(s^2 + 1)}.$$

Or $\frac{1}{s(s^2 + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1}$, dont l'inverse est $1 - \cos t$. Par le théorème 7.13,

$$y(t) = (1 - \cos t) - u_\pi(t) (1 - \cos(t - \pi)) = (1 - \cos t) - u_\pi(t) (1 + \cos t).$$

Pour $t \geq \pi$, on obtient $y(t) = -2 \cos t$.

Exemple 7.33 (Système d'EDO). Résolvons

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$$

En appliquant $\mathcal{L}$ et notant $X = \mathcal{L}\{x\}$, $\mathcal{Y} = \mathcal{L}\{y\}$:

$$sX - 1 = 2X + \mathcal{Y}, \quad s\mathcal{Y} = 3X.$$

De la seconde : $\mathcal{Y} = 3X/s$. En substituant : $sX - 1 = 2X + 3X/s$, soit $X(s^2 - 2s - 3) = s$, d'où

$$X(s) = \frac{s}{(s - 3)(s + 1)} = \frac{3/4}{s - 3} + \frac{1/4}{s + 1}.$$

Ainsi $x(t) = \frac{3}{4}e^{3t} + \frac{1}{4}e^{-t}$. Puis $\mathcal{Y} = 3X/s$ et par fractions partielles :

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{3}{(s - 3)(s + 1)} = \frac{3/4}{s - 3} - \frac{3/4}{s + 1},$$

d'où $y(t) = \frac{3}{4}e^{3t} - \frac{3}{4}e^{-t}$.

Exemple 7.34 (Forçage périodique). Soit f une fonction périodique de période $T > 0$. Alors

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

En effet, en découpant l'intégrale sur les intervalles $[nT, (n + 1)T]$ et en effectuant le changement $t \mapsto t - nT$:

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nsT} \int_0^T e^{-st} f(t) dt = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

Application. Considérons l'onde carrée $f(t) = (-1)^{\lfloor t/\pi \rfloor}$ de période 2π . Sur $[0, 2\pi[$, $f(t) = 1$ pour $t \in [0, \pi[$ et $f(t) = -1$ pour $t \in [\pi, 2\pi[$. Alors

$$\int_0^{2\pi} e^{-st} f(t) dt = \frac{1 - e^{-\pi s}}{s} - \frac{e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}}{s} = \frac{(1 - e^{-\pi s})^2}{s},$$

d'où $\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{(1 - e^{-\pi s})^2}{s(1 - e^{-2\pi s})} = \frac{1 - e^{-\pi s}}{s(1 + e^{-\pi s})} = \frac{1}{s} \tanh\left(\frac{\pi s}{2}\right)$.

Exemple 7.35 (Impulsion de Dirac). Résolvons $y'' + 4y = \delta(t - \pi)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. On applique $\mathcal{L} : (s^2 + 4)Y(s) = e^{-\pi s}$, d'où $Y(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 4}$.

Or $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 4}\right\} = \frac{1}{2} \sin(2t)$. Par le t -shift :

$$y(t) = \frac{1}{2} u_\pi(t) \sin(2(t - \pi)) = \frac{1}{2} u_\pi(t) \sin(2t).$$

7.7 Retour à l'exemple introductif

Reprenons le circuit RLC de l'introduction. On a l'EDO $Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = E_0(1 - u_T(t))$ avec $q(0) = q'(0) = 0$. Après application de $\mathcal{L}$:

$$\left(Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}\right) Q(s) = E_0 \frac{1 - e^{-Ts}}{s}.$$

Posons $Z(s) = Ls^2 + Rs + 1/C$ (l'impédance). Alors $Q(s) = E_0 \frac{1 - e^{-Ts}}{sZ(s)}$. L'inversion par fractions partielles dépend des racines de $Z(s)$: cas sur-amorti ($R^2 > 4L/C$), critique ($R^2 = 4L/C$), ou sous-amorti ($R^2 < 4L/C$), qui donnent respectivement des exponentielles réelles, un terme $te^{-\alpha t}$, ou des oscillations amorties $e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi)$.

7.8 Table complète des transformées de Laplace

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$	Domaine
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s > a$
$\sin(bt)$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$	$s > 0$
$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$	$s > 0$
$e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$	$s > a$
$e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$	$s > a$
$t \sin(bt)$	$\frac{2bs}{(s^2 + b^2)^2}$	$s > 0$
$t \cos(bt)$	$\frac{s^2 - b^2}{(s^2 + b^2)^2}$	$s > 0$
$\sinh(bt)$	$\frac{b}{s^2 - b^2}$	$s > b $
$\cosh(bt)$	$\frac{s}{s^2 - b^2}$	$s > b $
$u_a(t)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	$s > 0$
$\delta(t-a)$	e^{-as}	tout s
$u_a(t) f(t-a)$	$e^{-as} F(s)$	
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$	
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$	
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	
$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$	
$(f * g)(t)$	$F(s) G(s)$	

7.9 Exercices

Exercice 7.1 (Calculs directs). Calculer les transformées de Laplace suivantes :

- $\mathcal{L}\{3t^2 - 2e^{-t} + 5\sin(3t)\}$.
- $\mathcal{L}\{t^2 e^{3t}\}$.
- $\mathcal{L}\{e^{-2t} \cos(4t)\}$.

d) $\mathcal{L}\{t \sin(2t)\}$.

Exercice 7.2 (Transformées inverses). Calculer les transformées inverses :

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+2}{s^2+4s+13}\right\}$.

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^3}\right\}$.

c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\}$.

d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2+4}\right\}$.

Exercice 7.3 (Résolution de PVI). Résoudre par la transformée de Laplace :

a) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

b) $y'' - 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

c) $y'' + y = u_2(t) \sin(t-2)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Exercice 7.4 (Convolution). a) Montrer que $\sin t * \sin t = \frac{1}{2}(\sin t - t \cos t)$.

b) Utiliser la convolution pour résoudre $y'' + y = f(t)$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Exercice 7.5 (Système). Résoudre par la transformée de Laplace :

$$\begin{cases} x' + y' = -x + 2y, \\ x' - y' = 4x - y, \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = -1.$$

Exercice 7.6 (Forçage périodique). Soit $f(t) = t$ pour $t \in [0, 1[$ prolongée par périodicité de période 1 (onde en dents de scie).

a) Calculer $\mathcal{L}\{f\}(s)$.

b) Résoudre $y' + y = f(t)$, $y(0) = 0$.

Résumé du chapitre

- La transformée de Laplace $\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$ convertit une EDO en équation algébrique.
- Les conditions d'existence reposent sur la continuité par morceaux et l'ordre exponentiel.
- Les propriétés clés sont : linéarité, translation en s et en t , transformée des dérivées ($\mathcal{L}\{f'\} = sF - f(0)$), convolution ($\mathcal{L}\{f * g\} = FG$).
- La fonction de Heaviside u_a et la distribution de Dirac δ permettent de traiter les forçages discontinus et impulsions.
- La méthode de résolution : appliquer $\mathcal{L}$, résoudre en $Y(s)$, inverser par fractions partielles.
- Les théorèmes de la valeur initiale et finale relient le comportement asymptotique de f à celui de $sF(s)$.

Chapitre 8

Stabilité des Solutions et Équilibres

Introduction

Considérons un pendule pesant de longueur ℓ . L'angle θ vérifie $\theta'' + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$. Cette équation admet deux positions d'équilibre : $\theta = 0$ (pendule en bas) et $\theta = \pi$ (pendule en haut). L'intuition physique dit que la première est *stable* et la seconde *instable*. Mais comment formaliser mathématiquement cette notion ? Et que se passe-t-il pour des systèmes plus complexes où l'intuition fait défaut ?

Ce chapitre développe la théorie de la stabilité au sens de *Lyapunov*, qui fournit des outils rigoureux pour analyser le comportement des solutions au voisinage des points d'équilibre. Nous étudierons deux approches complémentaires : la *méthode directe* de Lyapunov (construction de fonctions d'énergie) et la *linéarisation* (étude de la matrice jacobienne).

Cadre. On considère le système autonome

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (8.1)$$

où $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

8.1 Points d'équilibre : définition et classification

Définition 8.1 (Point d'équilibre). Un point $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ est un *point d'équilibre* (ou *point stationnaire*, ou *point critique*) du système (8.1) si $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. La solution constante $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}_0$ est alors une solution du système.

Remarque 8.2 (Translation). Par le changement de variable $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, on peut toujours supposer que le point d'équilibre est l'origine $\mathbf{0}$. On suppose cette normalisation dans la suite.

Exemple 8.3 (Points d'équilibre du pendule). Le pendule non linéaire $\theta'' + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$ se réécrit comme le système

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -\frac{g}{\ell} \sin x_1, \end{cases}$$

avec $x_1 = \theta$, $x_2 = \theta'$. Les points d'équilibre sont les $(k\pi, 0)$ pour $k \in \mathbb{Z}$: positions verticales haute et basse.

Exemple 8.4 (Lotka-Volterra). Le système prédateur-proie

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta xy, \\ y' = -\gamma y + \delta xy, \end{cases} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0,$$

admet deux équilibres : $(0, 0)$ (extinction) et $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$ (coexistence).

8.2 Définitions de stabilité

Définition 8.5 (Stabilité au sens de Lyapunov). Le point d'équilibre $\mathbf{0}$ est *stable au sens de Lyapunov* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \implies \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Définition 8.6 (Stabilité asymptotique). Le point d'équilibre $\mathbf{0}$ est *asymptotiquement stable* s'il est stable au sens de Lyapunov et s'il existe $\delta_0 > 0$ tel que

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \delta_0 \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}.$$

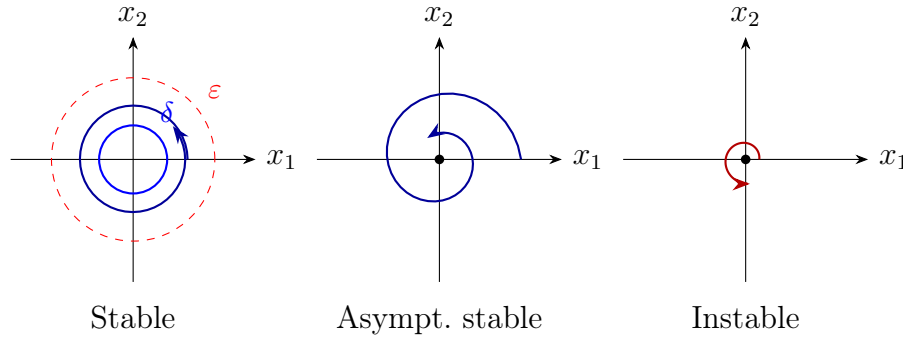
Définition 8.7 (Instabilité). Le point d'équilibre $\mathbf{0}$ est *instable* s'il n'est pas stable au sens de Lyapunov : il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $\delta > 0$, il existe une solution $\mathbf{x}(t)$ avec $\|\mathbf{x}(0)\| < \delta$ et un temps $t_0 > 0$ tel que $\|\mathbf{x}(t_0)\| \geq \varepsilon_0$.

Définition 8.8 (Stabilité asymptotique globale). Le point d'équilibre $\mathbf{0}$ est *globalement asymptotiquement stable* s'il est stable et si $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ pour toute condition initiale $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$.

Remarque 8.9 (Hiérarchie). On a les implications :

$$\text{glob. asympt. stable} \implies \text{asympt. stable} \implies \text{stable (Lyapunov)}.$$

Les réciproques sont fausses en général.



8.3 Méthode directe de Lyapunov

Définition 8.10 (Fonction de Lyapunov). Soit $V : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbf{0}$.

- (i) V est *définie positive* si $V(\mathbf{0}) = 0$ et $V(\mathbf{x}) > 0$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{U} \setminus \{\mathbf{0}\}$.
- (ii) V est *semi-définie positive* si $V(\mathbf{0}) = 0$ et $V(\mathbf{x}) \geq 0$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$.
- (iii) La *dérivée orbitale* de V le long des trajectoires du système (8.1) est

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \nabla V(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x}).$$

Remarque 8.11 (Interprétation). La dérivée orbitale $\dot{V}$ mesure la variation de V le long des solutions sans qu'il soit nécessaire de résoudre le système. C'est la puissance de la méthode : on raisonne sur V et $\dot{V}$ sans connaître explicitement les trajectoires.

Théorème 8.12 (Stabilité de Lyapunov). Si V est définie positive et $\dot{V} \leq 0$ sur $\mathcal{U} \setminus \{\mathbf{0}\}$, alors l'origine est stable au sens de Lyapunov.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ assez petit pour que la boule fermée $\bar{B}_\varepsilon \subset \mathcal{U}$. Sur la sphère $S_\varepsilon = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| = \varepsilon\}$, la fonction V est continue et strictement positive, donc elle atteint son minimum $m = \min_{S_\varepsilon} V > 0$.

Par continuité de V en $\mathbf{0}$ (avec $V(\mathbf{0}) = 0$), il existe $\delta \in]0, \varepsilon[$ tel que $\|\mathbf{x}\| < \delta \implies V(\mathbf{x}) < m$.

Soit $\mathbf{x}(t)$ une solution avec $\|\mathbf{x}(0)\| < \delta$. Comme $\dot{V} \leq 0$, la fonction $t \mapsto V(\mathbf{x}(t))$ est décroissante, donc $V(\mathbf{x}(t)) \leq V(\mathbf{x}(0)) < m$ pour tout $t \geq 0$.

Or si $\mathbf{x}(t)$ atteignait S_ε pour un certain t , on aurait $V(\mathbf{x}(t)) \geq m$, contradiction. Donc $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$ pour tout $t \geq 0$. $\square$

Théorème 8.13 (Stabilité asymptotique de Lyapunov). Si V est définie positive et $\dot{V}$ est définie négative (c'est-à-dire $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ pour tout $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$), alors l'origine est asymptotiquement stable.

Démonstration. La stabilité découle du théorème 8.12. Il reste à montrer la convergence.

Prenons δ comme dans la preuve précédente et $\|\mathbf{x}(0)\| < \delta$. Alors $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$ et $t \mapsto V(\mathbf{x}(t))$ est strictement décroissante, bornée inférieurement par 0, donc converge vers une limite $c \geq 0$.

Montrons que $c = 0$. Par l'absurde, si $c > 0$, alors $\mathbf{x}(t)$ reste dans l'anneau compact $K = \{\mathbf{x} : c \leq V(\mathbf{x}) \leq V(\mathbf{x}(0))\} \subset \bar{B}_\varepsilon \setminus \{\mathbf{0}\}$. Sur K , $\dot{V}$ atteint son maximum $-\mu < 0$ ($\dot{V}$ est continue et strictement négative sur un compact ne contenant pas l'origine). Donc $V(\mathbf{x}(t)) \leq V(\mathbf{x}(0)) - \mu t \rightarrow -\infty$, ce qui contredit $V \geq 0$. Ainsi $c = 0$, et comme V est définie positive, $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$. $\square$

Théorème 8.14 (Instabilité de Chetaev). *Supposons qu'il existe une fonction V de classe $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage $\mathcal{U}$ de $\mathbf{0}$ et un ouvert $\mathcal{D} \subset \mathcal{U}$ tels que :*

- (i) $\mathbf{0} \in \partial\mathcal{D}$;
- (ii) $V(\mathbf{x}) > 0$ et $\dot{V}(\mathbf{x}) > 0$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{D} \cap \mathcal{U}$;
- (iii) $V(\mathbf{x}) = 0$ pour $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{D} \cap \mathcal{U}$.

Alors l'origine est instable.

Démonstration. Soit $B_\varepsilon \subset \mathcal{U}$. Comme $\mathbf{0} \in \partial\mathcal{D}$, il existe $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{D} \cap B_\varepsilon$ arbitrairement proche de l'origine. Considérons la solution $\mathbf{x}(t)$ avec $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

Tant que $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{D} \cap \mathcal{U}$, $\dot{V} > 0$ donc $V(\mathbf{x}(t)) > V(\mathbf{x}_0) > 0$, ce qui empêche $\mathbf{x}(t)$ de toucher $\partial\mathcal{D}$ (où $V = 0$). Donc $\mathbf{x}(t)$ reste dans $\mathcal{D}$ tant qu'il reste dans $\mathcal{U}$. Comme V croît strictement et est bornée dans tout compact inclus dans $B_\varepsilon \cap \mathcal{D}$, la trajectoire doit finir par quitter B_ε . Ceci montre l'instabilité. $\square$

Théorème 8.15 (Principe d'invariance de La Salle). *Soit V une fonction de Lyapunov définie positive avec $\dot{V} \leq 0$ sur un ensemble compact positivement invariant $\mathcal{K}$. Posons*

$$E = \{\mathbf{x} \in \mathcal{K} : \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Soit M le plus grand sous-ensemble invariant contenu dans E . Alors toute trajectoire issue de $\mathcal{K}$ converge vers M quand $t \rightarrow +\infty$.

Idée de la preuve. Soit $\mathbf{x}(t)$ une trajectoire dans $\mathcal{K}$. Comme V est décroissante et bornée, elle converge vers $c \geq 0$. L'ensemble ω -limite $\omega(\mathbf{x}_0)$ est non vide (compacité de $\mathcal{K}$), invariant, et $V \equiv c$ sur $\omega(\mathbf{x}_0)$. Donc $\dot{V} = 0$ sur $\omega(\mathbf{x}_0)$, ce qui implique $\omega(\mathbf{x}_0) \subset E$. Par invariance de $\omega(\mathbf{x}_0)$, on a $\omega(\mathbf{x}_0) \subset M$. $\square$

Remarque 8.16 (Utilité). Le principe de La Salle est crucial quand $\dot{V}$ est seulement semi-définie négative : on ne peut pas conclure directement par le théorème 8.13, mais le principe d'invariance permet souvent de prouver la stabilité asymptotique malgré tout.

Exemple 8.17 (Pendule amorti et La Salle). Considérons le pendule avec frottement :

$$\theta'' + b\theta' + \sin \theta = 0, \quad b > 0.$$

Posons $x_1 = \theta$, $x_2 = \theta'$ et l'énergie $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + (1 - \cos x_1)$. Alors V est définie

positive au voisinage de l'origine et

$$\dot{V} = x_2(-\sin x_1 - bx_2) + x_2 \sin x_1 = -bx_2^2 \leq 0.$$

Ici $\dot{V}$ n'est que semi-définie négative ($\dot{V} = 0$ si $x_2 = 0$). L'ensemble $E = \{(x_1, x_2) : \dot{V} = 0\} = \{x_2 = 0\}$. Sur E , $x_2 = 0$ implique $x_2' = -\sin x_1 - bx_2 = -\sin x_1$, et pour rester dans E (c'est-à-dire $x_2' \equiv 0$), il faut $\sin x_1 = 0$. Localement autour de l'origine, $M = \{(0, 0)\}$. Par le principe de La Salle, l'origine est asymptotiquement stable.

8.4 Méthode de linéarisation

Définition 8.18 (Linéarisation). La *linéarisation* du système (8.1) en l'équilibre $\mathbf{0}$ est le système linéaire

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \quad A = D\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{0}) \right)_{1 \leq i, j \leq n},$$

où A est la matrice jacobienne de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{0}$.

Définition 8.19 (Équilibre hyperbolique). Le point d'équilibre $\mathbf{0}$ est dit *hyperbolique* si toutes les valeurs propres de $A = D\mathbf{f}(\mathbf{0})$ ont une partie réelle non nulle.

Théorème 8.20 (Hartman–Grobman). Si $\mathbf{0}$ est un point d'équilibre hyperbolique du système (8.1), alors au voisinage de l'origine, le portrait de phase du système non linéaire est topologiquement conjugué à celui du système linéarisé $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$: il existe un homéomorphisme local qui envoie les trajectoires de l'un sur celles de l'autre en préservant le sens du temps.

Remarque 8.21 (Portée et limites). Ce théorème garantit que la linéarisation donne la bonne *topologie* du portrait de phase pour les équilibres hyperboliques. L'homéomorphisme n'est pas nécessairement un difféomorphisme : les angles et les distances ne sont pas préservés.

Corollaire 8.22 (Stabilité par linéarisation). Soit $\mathbf{0}$ un point d'équilibre du système (8.1) et $A = D\mathbf{f}(\mathbf{0})$.

- (i) Si toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative ($\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ pour tout i), alors $\mathbf{0}$ est asymptotiquement stable.
- (ii) Si au moins une valeur propre a une partie réelle strictement positive, alors $\mathbf{0}$ est instable.

Remarque 8.23 (Cas non hyperbolique). Lorsque certaines valeurs propres sont purement imaginaires (partie réelle nulle) et les autres à partie réelle négative, la linéarisation ne permet pas de conclure. Le système linéarisé présente un *centre*, mais le système non linéaire peut être stable, asymptotiquement stable, ou instable selon les termes d'ordre supérieur.

8.5 Stabilité des systèmes linéaires

Théorème 8.24 (Stabilité et valeurs propres). *Pour le système linéaire $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ avec $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:*

- (i) *L'origine est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A satisfont $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$.*
- (ii) *L'origine est stable (mais pas asymptotiquement) si et seulement si $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$ pour toute valeur propre, et les valeurs propres à partie réelle nulle sont semi-simples (blocs de Jordan de taille 1).*
- (iii) *L'origine est instable dans tous les autres cas.*

Démonstration. La solution générale est $\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x}(0)$. Le comportement de e^{tA} est déterminé par la forme de Jordan de A . Un bloc de Jordan $J_k(\lambda)$ contribue des termes de la forme $t^j e^{\lambda t}$ avec $0 \leq j < k$.

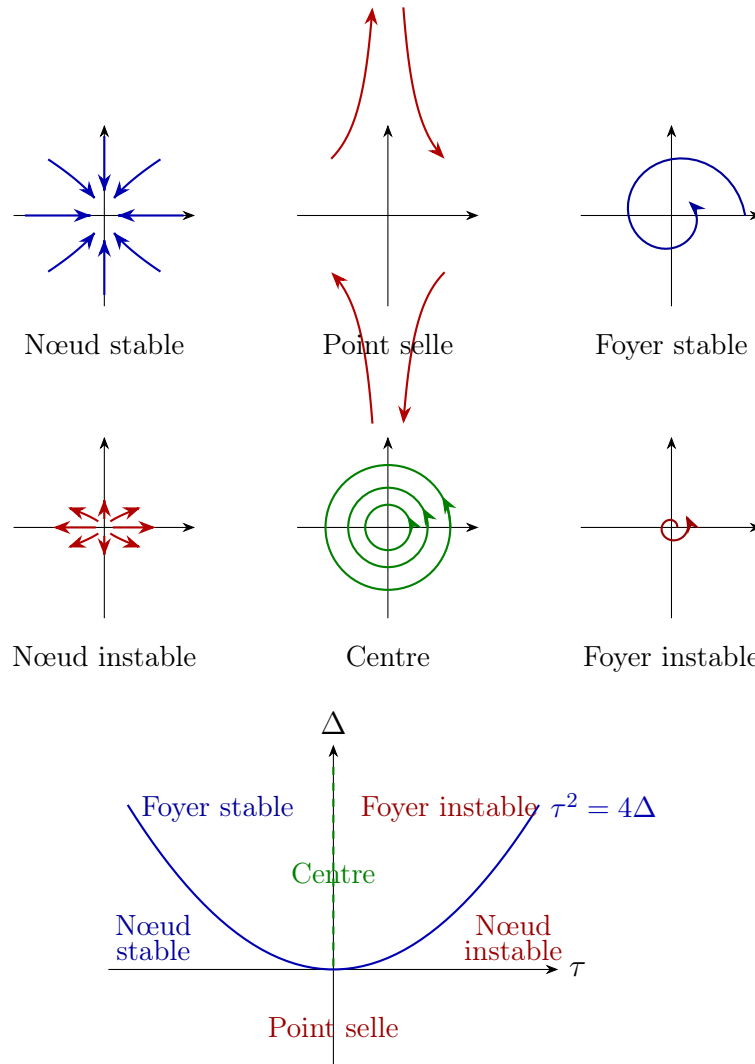
- Si $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$, alors $t^j e^{\operatorname{Re}(\lambda)t} \rightarrow 0$ pour tout j .
- Si $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ et $k = 1$, les termes $e^{i\operatorname{Im}(\lambda)t}$ restent bornés.
- Si $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ et $k > 1$, les termes $t^j e^{i\operatorname{Im}(\lambda)t}$ sont non bornés.
- Si $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$, les termes explosent. □

8.6 Analyse du plan de phase pour les systèmes 2×2

Considérons le système linéaire plan $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ avec $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Soient λ_1, λ_2 les valeurs propres de A . On note $\tau = \operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\Delta = \det(A) = \lambda_1 \lambda_2$. Les valeurs propres sont les racines de $\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$.

- Proposition 8.25** (Classification des portraits de phase plans). (1) **Nœud stable** ($\Delta > 0, \tau < 0, \tau^2 > 4\Delta$) : deux valeurs propres réelles négatives. Toutes les trajectoires convergent vers l'origine.
- (2) **Nœud instable** ($\Delta > 0, \tau > 0, \tau^2 > 4\Delta$) : deux valeurs propres réelles positives. Divergence.
- (3) **Point selle** ($\Delta < 0$) : une valeur propre positive, une négative. Instable.
- (4) **Foyer stable** ($\Delta > 0, \tau < 0, \tau^2 < 4\Delta$) : valeurs propres complexes à partie réelle négative. Spirales convergentes.
- (5) **Foyer instable** ($\Delta > 0, \tau > 0, \tau^2 < 4\Delta$) : valeurs propres complexes à partie réelle positive. Spirales divergentes.
- (6) **Centre** ($\Delta > 0, \tau = 0$) : valeurs propres purement imaginaires. Orbites

périodiques (stable mais pas asymptotiquement, pour le système linéaire).



8.7 Exemples détaillés

Exemple 8.26 (Pendule non linéaire). Reprenons le pendule $\theta'' + \omega_0^2 \sin \theta = 0$ avec $\omega_0^2 = g/\ell$, soit le système

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = -\omega_0^2 \sin x_1.$$

Équilibre $(0, 0)$ (pendule en bas). La jacobienne est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \pm i\omega_0.$$

Les valeurs propres sont purement imaginaires : le linéarisé donne un *centre*. La linéarisation seule ne conclut pas. Utilisons une fonction de Lyapunov : l'énergie mécanique

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + \omega_0^2(1 - \cos x_1).$$

On vérifie : $V(0, 0) = 0$, $V > 0$ au voisinage de l'origine, et

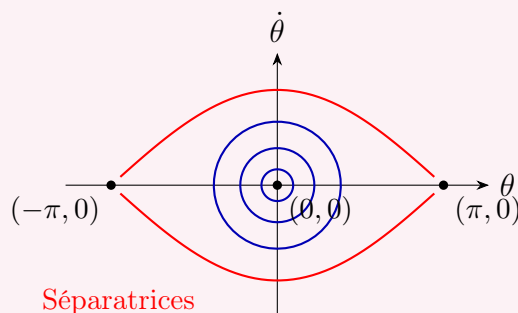
$$\dot{V} = x_2 \cdot (-\omega_0^2 \sin x_1) + \omega_0^2 \sin x_1 \cdot x_2 = 0.$$

Donc $\dot{V} \equiv 0$: l'énergie est conservée. Par le théorème 8.12, l'origine est stable. Les trajectoires sont les courbes de niveau de V : orbites périodiques fermées.

Équilibre $(\pi, 0)$ (pendule en haut). La jacobienne est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \pm \omega_0.$$

Une valeur propre réelle positive : l'équilibre est un *point selle*, donc *instable*.



Exemple 8.27 (Système de Lotka–Volterra). Reprenons le système prédateur-proie avec $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$:

$$x' = x(1 - y), \quad y' = y(-1 + x).$$

L'équilibre de coexistence est $(1, 1)$. Posons $u = x - 1$, $v = y - 1$:

$$u' = (1 + u)(-v) = -v - uv, \quad v' = (1 + v)u = u + uv.$$

La jacobienne en $(0, 0)$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, de valeurs propres $\pm i$: c'est un *centre*. La linéarisation ne conclut pas.

Construisons une fonction de Lyapunov. Posons

$$V(x, y) = x - \ln x + y - \ln y - 2 \quad (x, y > 0).$$

On vérifie $V(1, 1) = 0$ et $V > 0$ pour $(x, y) \neq (1, 1)$ (par convexité de $t \mapsto t - \ln t$, dont le minimum est 1 en $t = 1$). Puis

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \left(1 - \frac{1}{x}\right) x(1 - y) + \left(1 - \frac{1}{y}\right) y(-1 + x) \\ &= (x - 1)(1 - y) + (y - 1)(x - 1) \\ &= (x - 1)(1 - y) + (x - 1)(y - 1) = 0. \end{aligned}$$

L'énergie V est conservée : l'équilibre $(1, 1)$ est stable et les trajectoires sont des courbes fermées.

Exemple 8.28 (Oscillateur de van der Pol). L'équation de van der Pol est

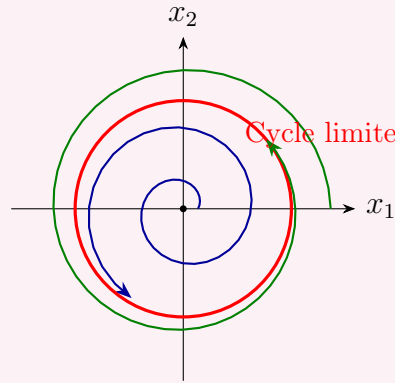
$$x'' - \mu(1 - x^2)x' + x = 0, \quad \mu > 0.$$

Le système associé est $x_1' = x_2$, $x_2' = -x_1 + \mu(1 - x_1^2)x_2$.

L'unique équilibre est l'origine. La jacobienne est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}, \quad \lambda = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}.$$

Pour $0 < \mu < 2$, les valeurs propres sont complexes de partie réelle $\mu/2 > 0$: l'origine est un *foyer instable*. Les trajectoires spiralent vers l'extérieur et convergent vers un *cycle limite* stable (existence garantie par le théorème de Poincaré–Bendixson).



Exemple 8.29 (Construction d'une fonction de Lyapunov). Considérons le système

$$x' = -x + y^2, \quad y' = -xy - y^3.$$

L'origine est un équilibre. Essayons la forme quadratique $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Alors

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x(-x + y^2) + y(-xy - y^3) \\ &= -x^2 + xy^2 - xy^2 - y^4 \\ &= -x^2 - y^4. \end{aligned}$$

On a $\dot{V} \leq 0$ et $\dot{V} = 0$ seulement si $x = 0$ et $y = 0$. Donc $\dot{V}$ est définie négative, et par le théorème 8.13, l'origine est *asymptotiquement stable*.

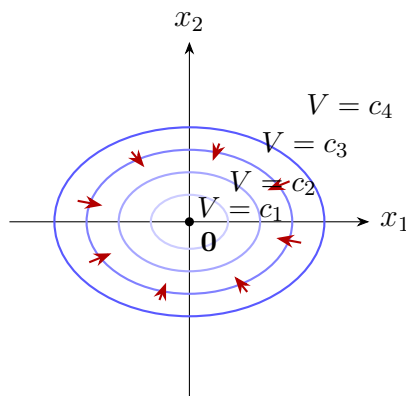
Exemple 8.30 (Instabilité par Chetaev). Considérons $x' = x + y^2$, $y' = -y + x^2$. L'origine est un équilibre. Posons $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$. Alors

$$\dot{V} = x(x + y^2) - y(-y + x^2) = x^2 + xy^2 + y^2 - x^2y = x^2 + y^2 + xy^2 - x^2y.$$

Au voisinage de l'origine, les termes dominants sont $x^2 + y^2 > 0$. Prenons $\mathcal{D} = \{(x, y) : x^2 > y^2, x > 0\}$. Sur $\partial\mathcal{D} \cap \mathcal{U}$, on a $x^2 = y^2$ donc $V = 0$. Dans $\mathcal{D}$, $V > 0$ et $\dot{V} > 0$ pour $\|(x, y)\|$ assez petit. Par le théorème de Chetaev 8.14, l'origine est *instable*.

8.8 Courbes de niveau de Lyapunov

Les courbes de niveau d'une fonction de Lyapunov V fournissent des informations géométriques précieuses : lorsque $\dot{V} < 0$, les trajectoires traversent les courbes de niveau vers l'intérieur (vers les valeurs plus faibles de V), ce qui illustre la convergence.



8.9 Exercices

Exercice 8.1 (Points d'équilibre et linéarisation). Pour chacun des systèmes suivants, trouver les points d'équilibre, calculer la matrice jacobienne, et déterminer la stabilité par linéarisation quand c'est possible.

- a) $x' = x(1 - x - y)$, $y' = y(2 - y - 3x)$.
- b) $x' = \sin y$, $y' = -x - y$.
- c) $x' = y$, $y' = -\sin x - y$.

Exercice 8.2 (Fonctions de Lyapunov). a) Montrer que $V(x, y) = x^2 + 2y^2$ est une fonction de Lyapunov pour le système $x' = -x + 2xy$, $y' = -y - x^2$ au voisinage de l'origine. Conclure sur la stabilité.

- b) Pour $x' = -x^3$, $y' = -y$, montrer que l'origine est asymptotiquement stable en utilisant $V(x, y) = x^4 + y^2$.
- c) Soit $x'' + h(x')x' + g(x) = 0$ où $g(0) = 0$, $xg(x) > 0$ pour $x \neq 0$, et $h(v) \geq h_0 > 0$. Montrer que l'origine est asymptotiquement stable en utilisant $V(x, v) = \int_0^x g(\xi) d\xi + \frac{1}{2}v^2$.

Exercice 8.3 (Classification des portraits de phase). Pour chaque matrice A , déterminer le type de portrait de phase et esquisser quelques trajectoires :

- a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.
- b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$.
- c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 8.4 (Principe de La Salle). Considérons le système

$$x'' + x' + x + x^3 = 0.$$

- Montrer que $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{4}x^4$ (avec $y = x'$) est une fonction de Lyapunov.
- Calculer $\dot{V}$ et appliquer le principe de La Salle pour prouver la stabilité asymptotique de l'origine.

Exercice 8.5 (Instabilité). Montrer que l'origine du système $x' = y + x(x^2 + y^2)$, $y' = -x + y(x^2 + y^2)$ est instable. *Indication : passer en coordonnées polaires et étudier r' .*

Exercice 8.6 (Système de Lorenz simplifié). Considérons le système simplifié

$$x' = -\sigma x + \sigma y, \quad y' = rx - y - xz, \quad z' = xy - bz,$$

avec $\sigma, b > 0$ et $r > 0$.

- Trouver les points d'équilibre.
- Pour $r < 1$, montrer que l'origine est globalement asymptotiquement stable en utilisant $V(x, y, z) = \frac{1}{2\sigma}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2$.
- Pour $r > 1$, étudier la stabilité des trois équilibres par linéarisation.

Exercice 8.7 (Compétition entre deux espèces). Deux espèces en compétition sont modélisées par

$$x' = x(1 - x - \alpha y), \quad y' = y(1 - y - \beta x), \quad \alpha, \beta > 0.$$

- Trouver tous les points d'équilibre dans le quadrant $\{x \geq 0, y \geq 0\}$.
- Analyser la stabilité de chaque équilibre en fonction des paramètres α et β .
- Interpréter biologiquement les cas $\alpha\beta < 1$ et $\alpha\beta > 1$.

Résumé du chapitre

- Un point d'équilibre $\mathbf{x}_0$ vérifie $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.
- La *stabilité au sens de Lyapunov* : les trajectoires proches restent proches. La *stabilité asymptotique* : de plus, elles convergent vers l'équilibre.
- *Méthode de Lyapunov* : si V est définie positive et $\dot{V} \leq 0$, alors stabilité ; si $\dot{V} < 0$, alors stabilité asymptotique.
- Le *principe de La Salle* étend la méthode au cas $\dot{V} \leq 0$ semi-définie : les trajectoires convergent vers le plus grand invariant dans $\{\dot{V} = 0\}$.
- Le théorème de *Chetaev* fournit un critère d'instabilité.
- *Linéarisation* : si $A = D\mathbf{f}(\mathbf{0})$ a toutes ses valeurs propres à partie réelle < 0 , alors stabilité asymptotique. Si une valeur propre a $\text{Re} > 0$, instabilité.
- Le théorème de *Hartman–Grobman* : pour un équilibre hyperbolique, le portrait de phase non linéaire est topologiquement conjugué au linéarisé.
- En dimension 2, la classification des portraits de phase (nœud, selle, foyer, centre) dépend du discriminant et de la trace de la jacobienne.

Chapitre 9

Introduction aux Systèmes Non-Linéaires et Bifurcations

Introduction

Les chapitres précédents ont traité des équations différentielles linéaires, pour lesquelles la théorie est essentiellement complète. Cependant, la grande majorité des modèles issus de la physique, de la biologie ou de la chimie sont *non-linéaires*. Le comportement qualitatif de ces systèmes — cycles limites, bifurcations, chaos — constitue l'un des domaines les plus riches des mathématiques appliquées contemporaines.

Exemple 9.1 (Dynamique des populations). Le modèle de Lotka–Volterra pour un système proie–prédateur s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta xy, \\ \dot{y} = \delta xy - \gamma y, \end{cases}$$

où $x(t)$ et $y(t)$ désignent les populations de proies et de prédateurs respectivement. Le terme xy rend ce système intrinsèquement non-linéaire.

Exemple 9.2 (Réactions chimiques). La cinétique de Michaelis–Menten, modélisant l'action d'une enzyme sur un substrat, conduit au système

$$\begin{cases} \dot{s} = -k_1 e s + k_{-1} c, \\ \dot{c} = k_1 e s - (k_{-1} + k_2) c, \end{cases}$$

où s est la concentration du substrat, c celle du complexe enzyme-substrat, et $e = e_0 - c$ est la concentration en enzyme libre.

9.1 Systèmes non-linéaires dans $\mathbb{R}^2$

On considère un système autonome dans $\mathbb{R}^2$:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2. \quad (9.1)$$

Théorème 9.3 (Existence et unicité — Cauchy–Lipschitz). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ localement lipschitzienne. Pour tout $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, il existe un intervalle maximal $I = (\alpha, \omega)$ contenant 0 et une unique solution maximale $\mathbf{x} : I \rightarrow \Omega$ du problème de Cauchy

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

Définition 9.4 (Flot). Le *flot* du système (9.1) est l'application $\varphi : D \subset \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \Omega$ définie par $\varphi(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t)$, où $\mathbf{x}$ est la solution maximale issue de $\mathbf{x}_0$. Le flot vérifie :

- (i) $\varphi(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$;
- (ii) $\varphi(t + s, \mathbf{x}_0) = \varphi(t, \varphi(s, \mathbf{x}_0))$ (propriété de semi-groupe).

Définition 9.5 (Points d'équilibre). Un point $\mathbf{x}^* \in \Omega$ est un *point d'équilibre* (ou point singulier, point critique) du système (9.1) si $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$.

9.2 Analyse du plan de phase

9.2.1 Isoclines nulles

Définition 9.6 (Isoclines nulles). Pour le système $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$, $\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$, on appelle :

- *isocline nulle de x_1* : l'ensemble $\{(x_1, x_2) : f_1(x_1, x_2) = 0\}$;
- *isocline nulle de x_2* : l'ensemble $\{(x_1, x_2) : f_2(x_1, x_2) = 0\}$.

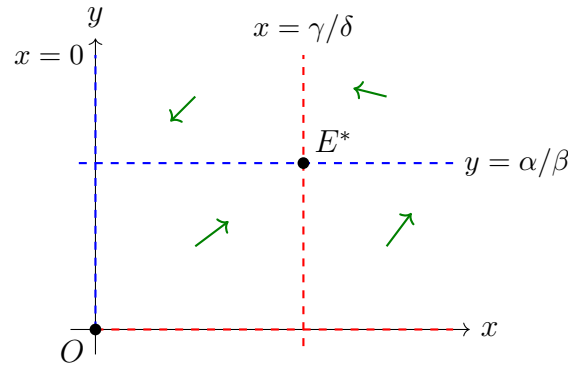
Les points d'équilibre sont les intersections de ces deux ensembles.

Remarque 9.7. Les isoclines nulles décomposent le plan en régions où le signe de chaque composante du champ de vecteurs est constant. Cela permet de déterminer la direction qualitative du flot dans chaque région.

Exemple 9.8 (Isoclines du système de Lotka–Volterra). Pour le système $\dot{x} = x(\alpha - \beta y)$, $\dot{y} = y(\delta x - \gamma)$, les isoclines nulles sont :

- $\dot{x} = 0$: $x = 0$ ou $y = \alpha/\beta$;
- $\dot{y} = 0$: $y = 0$ ou $x = \gamma/\delta$.

Les points d'équilibre sont $(0, 0)$ et $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$.



9.2.2 Champ de directions

L'analyse du champ de directions consiste à tracer en chaque point (x_1, x_2) un petit vecteur proportionnel à $\mathbf{f}(x_1, x_2)$. Combinée aux isoclines nulles, cette technique fournit une description qualitative complète du portrait de phase.

9.2.3 Théorème de Poincaré–Bendixson

Le théorème suivant est l'un des résultats les plus puissants de la théorie qualitative des EDO en dimension deux.

Théorème 9.9 (Poincaré–Bendixson). *Soit $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ et soit $\mathbf{x}(t)$ une solution définie pour tout $t \geq 0$ dont l'ensemble ω -limite $\omega(\mathbf{x})$ est un compact non vide contenu dans Ω et ne contenant qu'un nombre fini de points d'équilibre. Alors $\omega(\mathbf{x})$ est l'un des ensembles suivants :*

- (i) *un point d'équilibre ;*
- (ii) *une orbite périodique (cycle) ;*
- (iii) *un ensemble formé de points d'équilibre et d'orbites homoclines ou hétéroclines les reliant.*

Corollaire 9.10. *Si le flot d'un système plan $\mathcal{C}^1$ est piégé dans un compact K (c'est-à-dire $\varphi(t, \mathbf{x}_0) \in K$ pour tout $t \geq 0$) et si K ne contient aucun point d'équilibre, alors K contient au moins une orbite périodique.*

Remarque 9.11. Le théorème de Poincaré–Bendixson est *spécifique à la dimension 2*. En dimension 3 ou plus, des comportements beaucoup plus complexes (attracteurs étranges, chaos) sont possibles.

9.2.4 Cycles limites

Définition 9.12 (Cycle limite). Un *cycle limite* est une orbite périodique isolée, c'est-à-dire une orbite fermée Γ telle qu'il existe un voisinage de Γ ne contenant aucune autre orbite fermée.

Un cycle limite est dit :

- *stable* (attractif) si les trajectoires voisines spiralent vers Γ quand $t \rightarrow +\infty$;
- *instable* (répulsif) si elles spiralent vers Γ quand $t \rightarrow -\infty$;
- *semi-stable* sinon.

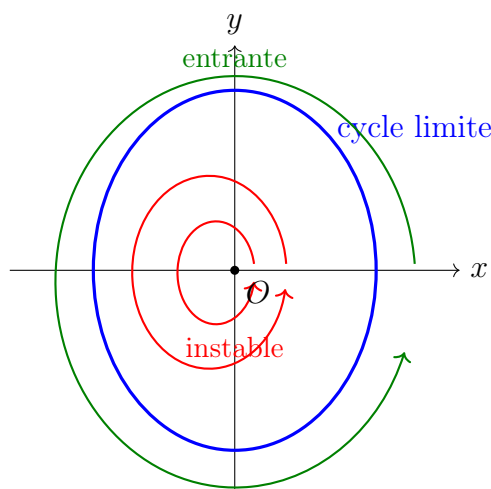
Exemple 9.13 (Oscillateur de van der Pol). L'équation de van der Pol

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0, \quad \mu > 0, \quad (9.2)$$

se réécrit comme le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \mu(1 - x^2)y - x. \end{cases}$$

L'unique point d'équilibre est l'origine, qui est un foyer instable (pour $\mu > 0$). Le théorème de Poincaré–Bendixson permet de montrer l'existence d'un cycle limite stable entourant l'origine.



9.2.5 Critère de Dulac

Théorème 9.14 (Critère de Dulac–Bendixson). Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine simplement connexe et soit $B : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\frac{\partial(Bf_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(Bf_2)}{\partial x_2}$$

ne change pas de signe dans D et ne soit pas identiquement nulle sur un ouvert. Alors le système $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ n'a pas d'orbite périodique entièrement contenue dans D .

Démonstration. Par l'absurde, supposons l'existence d'une orbite périodique Γ contenue

dans D et soit Σ le domaine qu'elle délimite. Par le théorème de Green :

$$\oint_{\Gamma} (Bf_1 dx_2 - Bf_2 dx_1) = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial(Bf_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(Bf_2)}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2.$$

Le membre de droite est de signe constant et non nul. Or, sur Γ , on a $dx_i = f_i dt$, d'où le membre de gauche vaut $\oint_{\Gamma} B(f_1 f_2 - f_2 f_1) dt = 0$. Contradiction. $\square$

Exemple 9.15. Pour le système $\dot{x} = y + x^3$, $\dot{y} = -x + y^3$, choisissons $B \equiv 1$. Alors

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2 > 0$$

pour $(x, y) \neq (0, 0)$. Par le critère de Dulac, il n'y a aucune orbite périodique.

9.3 Théorie des bifurcations

On considère un système dépendant d'un paramètre $\mu \in \mathbb{R}$:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu). \quad (9.3)$$

Définition 9.16 (Stabilité structurelle). Un système est dit *structurellement stable* si sa structure qualitative (nombre et type de points d'équilibre, orbites périodiques) ne change pas sous de petites perturbations du champ de vecteurs.

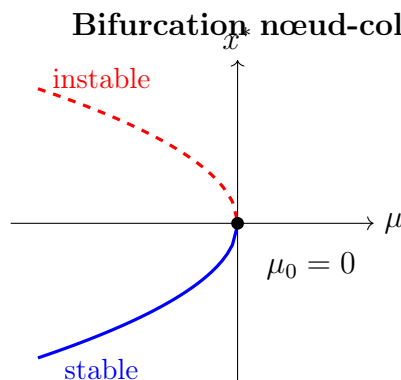
Définition 9.17 (Bifurcation). Une *bifurcation* se produit en une valeur $\mu = \mu_0$ du paramètre si le portrait de phase du système change qualitativement lorsque μ traverse μ_0 . La valeur μ_0 est appelée *valeur de bifurcation*.

9.3.1 Bifurcation nœud-col

La forme normale unidimensionnelle est :

$$\dot{x} = \mu + x^2. \quad (9.4)$$

- Pour $\mu < 0$: deux points d'équilibre $x^* = \pm\sqrt{-\mu}$ (un stable, un instable).
- Pour $\mu = 0$: un unique point d'équilibre $x^* = 0$ (semi-stable).
- Pour $\mu > 0$: aucun point d'équilibre.

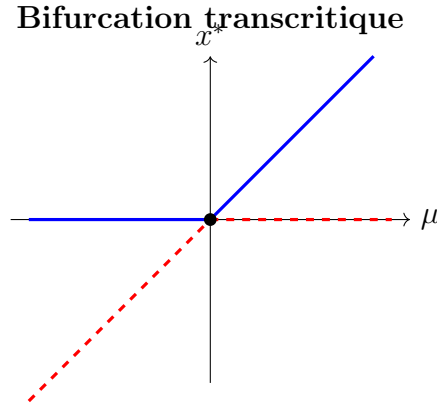


9.3.2 Bifurcation transcritique

La forme normale est :

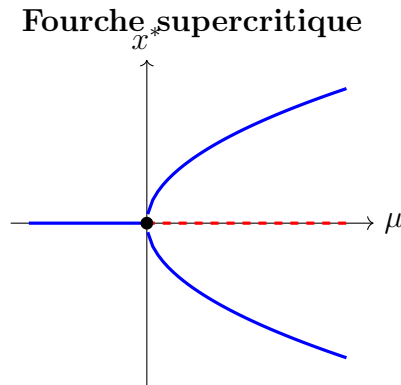
$$\dot{x} = \mu x - x^2. \quad (9.5)$$

Les points d'équilibre sont $x^* = 0$ et $x^* = \mu$. Pour $\mu < 0$, $x^* = 0$ est stable et $x^* = \mu$ instable ; pour $\mu > 0$, les rôles s'échangent. Il y a échange de stabilité en $\mu = 0$.

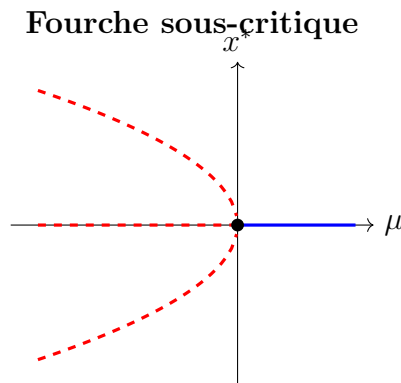


9.3.3 Bifurcation fourche

Fourche supercritique. Forme normale : $\dot{x} = \mu x - x^3$.



Fourche sous-critique. Forme normale : $\dot{x} = \mu x + x^3$.



9.3.4 Bifurcation de Hopf

Théorème 9.18 (Bifurcation de Hopf). Soit $\mathbf{x}^*(\mu)$ une famille de points d'équilibre du système $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu)$ dans $\mathbb{R}^2$. Supposons que la matrice jacobienne $D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}^*(\mu), \mu)$ possède une paire de valeurs propres conjuguées $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$ vérifiant :

- (i) $\alpha(\mu_0) = 0$ et $\beta(\mu_0) \neq 0$ (paire purement imaginaire en $\mu = \mu_0$) ;
- (ii) $\alpha'(\mu_0) \neq 0$ (condition de transversalité).

Alors il existe un voisinage de $(\mathbf{x}^*(\mu_0), \mu_0)$ dans lequel naît (ou disparaît) une famille d'orbites périodiques dont la période tend vers $2\pi/|\beta(\mu_0)|$ quand $\mu \rightarrow \mu_0$.

La bifurcation est dite :

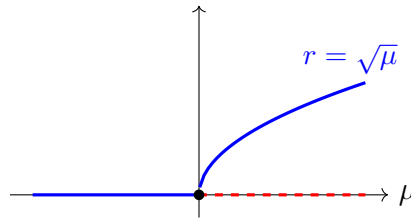
- supercritique si un cycle limite stable naît du côté où l'équilibre devient instable ;
- sous-critique si un cycle limite instable naît du côté où l'équilibre est encore stable.

Exemple 9.19 (Bifurcation de Hopf — forme normale). Le système en coordonnées polaires

$$\dot{r} = \mu r - r^3, \quad \dot{\theta} = 1,$$

possède l'origine comme équilibre pour tout μ . Pour $\mu > 0$, un cycle limite stable $r = \sqrt{\mu}$ apparaît. C'est une bifurcation de Hopf supercritique.

Bifurcation de Hopf supercritique



9.4 Théorie de l'indice (introduction)

Définition 9.20 (Indice d'un point singulier). Soit $\mathbf{x}^*$ un point d'équilibre isolé et Γ une courbe fermée simple orientée positivement entourant $\mathbf{x}^*$ et ne passant par aucun autre point d'équilibre. L'indice de $\mathbf{x}^*$ est le nombre de tours que fait le vecteur $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ lorsque $\mathbf{x}$ parcourt Γ une fois :

$$I_{\mathbf{x}^*} = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} d \left[\arctan \frac{f_2}{f_1} \right].$$

Proposition 9.21 (Propriétés de l'indice). (i) L'indice d'un nœud, d'un foyer ou d'un centre est $+1$.

(ii) L'indice d'un col est -1 .

(iii) Si une courbe fermée simple ne contient aucun point d'équilibre, son indice est

0.

(iv) Si une orbite périodique Γ existe, alors la somme des indices des points d'équilibre à l'intérieur de Γ vaut $+1$.

Corollaire 9.22. Toute orbite périodique entoure au moins un point d'équilibre. Si elle n'entoure qu'un seul point d'équilibre, celui-ci est nécessairement un nœud, un foyer ou un centre (indice $+1$).

9.5 Exemples développés

9.5.1 Système de Lotka–Volterra

Considérons le système classique avec $\alpha = \beta = \delta = \gamma = 1$:

$$\dot{x} = x(1 - y), \quad \dot{y} = y(x - 1). \quad (9.6)$$

Points d'équilibre. $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

Linéarisation en $(1, 1)$. La matrice jacobienne est

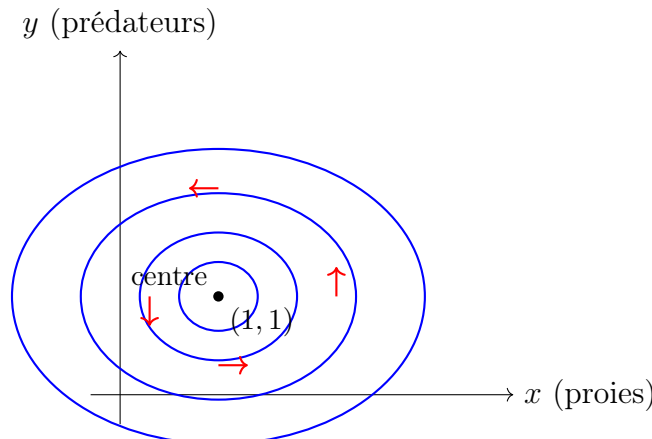
$$J = \begin{pmatrix} 1 - y & -x \\ y & x - 1 \end{pmatrix} \Big|_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont $\lambda = \pm i$: le point $(1, 1)$ est un centre pour le système linéarisé. On montre que c'est aussi un centre pour le système non-linéaire grâce à l'intégrale première

$$H(x, y) = x - \ln x + y - \ln y, \quad (9.7)$$

qui est constante le long des trajectoires.

Portrait de phase. Les trajectoires sont des courbes fermées autour de $(1, 1)$ dans le quadrant $x > 0, y > 0$.



9.5.2 Oscillateur de van der Pol

Reprenons l'équation (9.2) avec $\mu = 1$:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = (1 - x^2)y - x.$$

Linéarisation en $(0, 0)$.

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Les parties réelles sont positives : l'origine est un foyer instable.

Existence du cycle limite. On construit un anneau de piégeage $K = \{\mathbf{x} : r_1 \leq \|\mathbf{x}\| \leq r_2\}$ tel que le champ pointe vers l'intérieur sur les deux cercles frontières. Par le corollaire 9.10 du théorème de Poincaré–Bendixson, K contient un cycle limite.

9.5.3 Modèle SIR

Le modèle SIR de Kermack–McKendrick pour la propagation d'une épidémie s'écrit :

$$\dot{S} = -\beta SI, \quad \dot{I} = \beta SI - \gamma I, \quad \dot{R} = \gamma I, \quad (9.8)$$

où S, I, R désignent les proportions de susceptibles, infectés et rétablis, avec $S + I + R = 1$.

Puisque $R = 1 - S - I$, on étudie le système plan :

$$\dot{S} = -\beta SI, \quad \dot{I} = (\beta S - \gamma)I.$$

Nombre de reproduction de base. Le nombre de reproduction de base est $\mathcal{R}_0 = \beta/\gamma$. L'épidémie se propage si et seulement si $\mathcal{R}_0 S(0) > 1$.

Analyse qualitative. Les isoclines nulles sont $I = 0$ (axe des S) et $S = \gamma/\beta = 1/\mathcal{R}_0$. Les trajectoires dans le plan (S, I) satisfont

$$\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{1}{\mathcal{R}_0 S},$$

d'où $I + S - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \ln S = \text{const.}$ Les courbes de phase montent (l'épidémie croît) tant que $S > 1/\mathcal{R}_0$, puis décroissent.

9.6 Exercices

Exercice 9.1. Pour le système $\dot{x} = x(3 - x - 2y)$, $\dot{y} = y(2 - x - y)$, tracer les isoclines nulles, trouver tous les points d'équilibre et déterminer leur nature par linéarisation.

Exercice 9.2. Montrer, à l'aide du critère de Dulac avec $B(x, y) = e^{-2x}$, que le système $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x - y + x^2 + y^2$ n'admet pas d'orbite périodique dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9.3. Considérer le système

$$\dot{x} = \mu x - y - x(x^2 + y^2), \quad \dot{y} = x + \mu y - y(x^2 + y^2).$$

- a) Passer en coordonnées polaires et montrer que l'équation en r admet une bifurcation de Hopf en $\mu = 0$.
- b) Déterminer si la bifurcation est supercritique ou sous-critique.
- c) Tracer le diagramme de bifurcation.

Exercice 9.4. Pour le système de Lotka–Volterra généralisé

$$\dot{x} = x(\alpha - \beta y), \quad \dot{y} = y(-\gamma + \delta x),$$

avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$:

- a) Montrer que $H(x, y) = \delta x - \gamma \ln x + \beta y - \alpha \ln y$ est une intégrale première dans le quadrant $x > 0, y > 0$.
- b) En déduire que toutes les trajectoires sont fermées autour du point d'équilibre intérieur.

Exercice 9.5. Étudier les bifurcations du système $\dot{x} = \mu - x^2, \dot{y} = -y$, en fonction du paramètre $\mu \in \mathbb{R}$. Tracer les portraits de phase pour $\mu < 0, \mu = 0$ et $\mu > 0$.

Exercice 9.6. Soit $\dot{x} = -y + x(x^2 + y^2 - 1), \dot{y} = x + y(x^2 + y^2 - 1)$.

- a) Montrer que le cercle unité est une orbite périodique.
- b) Calculer l'indice de l'origine.
- c) Déterminer la stabilité du cycle.

Résumé du chapitre

- Les **isoclines nulles** permettent de localiser les points d'équilibre et de déterminer la direction qualitative du flot.
- Le **théorème de Poincaré–Bendixson** garantit, en dimension 2, qu'un flot piégé dans un compact sans point d'équilibre engendre un cycle limite.
- Le **critère de Dulac** permet d'exclure l'existence d'orbites périodiques.
- Les **bifurcations** classiques (nœud-col, transcritique, fourche, Hopf) décrivent les changements qualitatifs du portrait de phase en fonction d'un paramètre.
- La **théorie de l'indice** fournit des contraintes topologiques sur la disposition des points d'équilibre et des orbites périodiques.

Chapitre 10

Applications — Mécanique, Électricité, Biologie, Démographie

Introduction

Ce chapitre illustre la puissance des méthodes développées tout au long de ce cours en les appliquant à des problèmes concrets issus de la mécanique, de l'électrotechnique, de la biologie et de la démographie. L'accent est mis sur la *modélisation* — c'est-à-dire la traduction d'un problème physique ou biologique en une équation différentielle — et sur l'*interprétation* des solutions obtenues.

10.1 Oscillations mécaniques

10.1.1 Le pendule simple

L'équation du pendule simple de longueur ℓ dans un champ de gravité g est :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0. \quad (10.1)$$

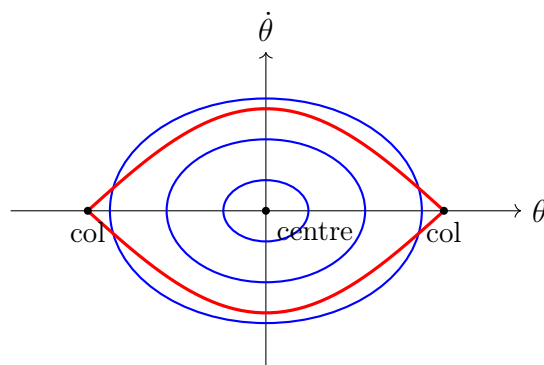
Remarque 10.1. Pour de petites oscillations ($|\theta| \ll 1$), l'approximation $\sin \theta \approx \theta$ donne l'oscillateur harmonique $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$.

Analyse dans le plan de phase. En posant $x = \theta$, $y = \dot{\theta}$, on obtient le système

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\omega_0^2 \sin x.$$

L'énergie $E = \frac{1}{2}y^2 - \omega_0^2 \cos x$ est une intégrale première. Le portrait de phase présente :

- des centres en $(2k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$ (oscillations) ;
- des cols en $((2k+1)\pi, 0)$ (positions instables) ;
- des *séparatrices* reliant les cols (mouvement apériodique limite).



Portrait de phase du pendule

10.1.2 Pendule amorti et forcé

Avec amortissement visqueux de coefficient c et forçage harmonique :

$$\ddot{\theta} + \frac{c}{m\ell}\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = \frac{F_0}{m\ell}\cos(\omega t). \quad (10.2)$$

Dans le régime linéarisé, on retrouve l'oscillateur harmonique amorti forcé, dont la solution en régime permanent est

$$\theta_p(t) = A(\omega) \cos(\omega t - \varphi(\omega)),$$

avec l'amplitude de résonance

$$A(\omega) = \frac{F_0/(m\ell)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (c\omega/(m\ell))^2}}.$$

10.1.3 Oscillateurs couplés

Deux masses m reliées par des ressorts de raideur k (aux murs) et k_c (couplage) conduisent au système :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k_c(x_1 - x_2), \\ m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k_c(x_2 - x_1). \end{cases} \quad (10.3)$$

Les *modes normaux* s'obtiennent par le changement de variables $q_1 = x_1 + x_2$, $q_2 = x_1 - x_2$:

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = 0, \quad \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = 0,$$

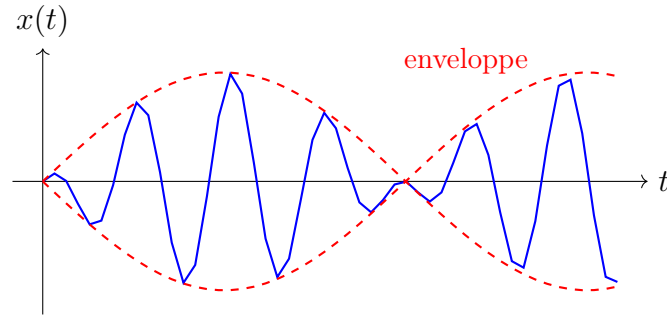
avec $\omega_1 = \sqrt{k/m}$ et $\omega_2 = \sqrt{(k + 2k_c)/m}$.

10.1.4 Résonance et battements

Lorsque la fréquence d'excitation ω est proche de la fréquence propre ω_0 , la superposition des deux modes donne le phénomène de *battements* :

$$x(t) = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}t\right).$$

L'enveloppe oscille à la fréquence lente $|\omega_0 - \omega|/2$.



10.2 Circuits électriques

10.2.1 Circuit RC

Un condensateur C en série avec une résistance R soumis à une tension $E(t)$ obéit à :

$$RC \dot{v}_C + v_C = E(t), \quad (10.4)$$

où v_C est la tension aux bornes du condensateur. C'est une EDO linéaire du premier ordre de constante de temps $\tau = RC$.

Exemple 10.2 (Charge d'un condensateur). Pour $E(t) = E_0$ (échelon) et $v_C(0) = 0$:

$$v_C(t) = E_0(1 - e^{-t/\tau}).$$

Le condensateur se charge exponentiellement avec la constante de temps $\tau = RC$.

10.2.2 Circuit RL

Une inductance L en série avec une résistance R :

$$L \dot{i} + Ri = E(t). \quad (10.5)$$

Constante de temps : $\tau = L/R$.

10.2.3 Circuit RLC série

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = E(t), \quad (10.6)$$

où q est la charge du condensateur. C'est l'analogue électrique exact de l'oscillateur mécanique amorti forcé avec les correspondances :

$$m \leftrightarrow L, \quad c \leftrightarrow R, \quad k \leftrightarrow 1/C, \quad F(t) \leftrightarrow E(t).$$

Régimes de fonctionnement. Posons $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et $\xi = R/(2\sqrt{L/C})$ (facteur d'amortissement). L'équation caractéristique $Lr^2 + Rr + 1/C = 0$ donne :

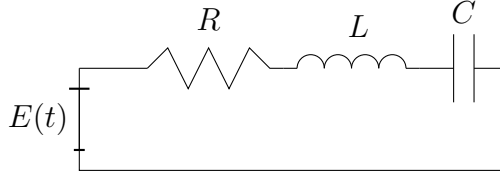
- $\xi < 1$: régime pseudo-périodique ($q(t) = e^{-\xi\omega_0 t}[A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t]$ avec $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$);
- $\xi = 1$: régime critique ($q(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$);
- $\xi > 1$: régime apériodique.

10.2.4 Fonctions de transfert et lien avec Laplace

En appliquant la transformée de Laplace à (10.6) avec conditions initiales nulles :

$$H(s) = \frac{Q(s)}{E(s)} = \frac{1}{Ls^2 + Rs + 1/C} = \frac{1/L}{s^2 + (R/L)s + 1/(LC)}.$$

Les pôles de $H(s)$ correspondent aux valeurs propres du système autonome associé. La réponse fréquentielle s'obtient en évaluant $H(i\omega)$.



10.3 Dynamique des populations

10.3.1 Modèle de Malthus

Le modèle le plus simple de croissance d'une population est :

$$\dot{N} = rN, \quad N(0) = N_0, \quad (10.7)$$

où r est le taux de croissance intrinsèque. La solution est $N(t) = N_0 e^{rt}$: croissance exponentielle si $r > 0$, décroissance si $r < 0$.

Remarque 10.3. Le modèle de Malthus est irréaliste à long terme car il prédit une croissance illimitée. Il est néanmoins valable sur de courtes périodes pour des populations en phase de croissance initiale.

10.3.2 Équation logistique de Verhulst

Pour tenir compte de la capacité limite K du milieu :

$$\dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right). \quad (10.8)$$

Théorème 10.4 (Solution de l'équation logistique). *La solution du problème de Cauchy (10.8) avec $N(0) = N_0 > 0$ est*

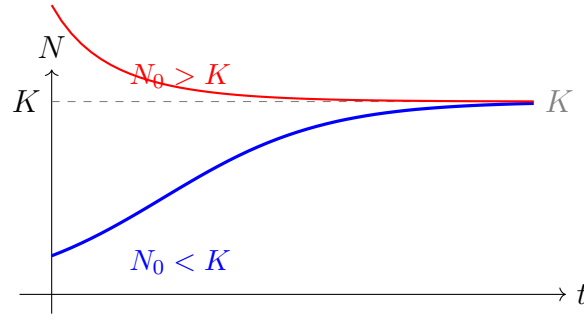
$$N(t) = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}}.$$

Elle vérifie $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = K$.

Démonstration. L'équation est à variables séparables. On écrit

$$\frac{dN}{N(1 - N/K)} = r dt.$$

Décomposition en éléments simples : $\frac{1}{N(1 - N/K)} = \frac{1}{N} + \frac{1}{K - N}$. L'intégration donne $\ln \frac{N}{K - N} = rt + C$, d'où le résultat. $\square$



10.3.3 Modèle de Lotka–Volterra proie–prédateur

Reprenons le modèle de l'exemple 9.1 avec des valeurs numériques : $\alpha = 1$, $\beta = 0,5$, $\gamma = 0,75$, $\delta = 0,25$.

Méthode 10.5 (Analyse complète d'un système proie–prédateur). 1. **Points d'équilibre.**

$E_0 = (0, 0)$ et $E^* = (\gamma/\delta, \alpha/\beta) = (3, 2)$.

2. **Linéarisation en E_0 .** $J(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0,75 \end{pmatrix}$: col (instable).

3. **Linéarisation en E^* .** $J(3, 2) = \begin{pmatrix} 0 & -1,5 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix}$: valeurs propres $\pm i\sqrt{0,75}$, centre.

4. **Intégrale première.** $H(x, y) = 0,25x - 0,75 \ln x + 0,5y - \ln y = C$.

5. **Conclusion.** Les trajectoires dans $\{x > 0, y > 0\}$ sont des courbes fermées : les populations oscillent périodiquement.

10.3.4 Espèces en compétition

Deux espèces exploitant la même ressource obéissent au modèle de Lotka–Volterra compétitif :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1 + \alpha_{12} x_2}{K_1} \right), \\ \dot{x}_2 = r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2 + \alpha_{21} x_1}{K_2} \right), \end{cases} \quad (10.9)$$

où α_{12} et α_{21} mesurent l'intensité de la compétition interspécifique.

Proposition 10.6 (Issue de la compétition). *L'issue dépend des positions relatives des isoclines nulles :*

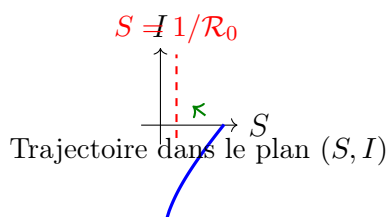
- (i) $K_1 > K_2/\alpha_{21}$ et $K_2 < K_1/\alpha_{12}$: l'espèce 1 exclut l'espèce 2.
- (ii) $K_2 > K_1/\alpha_{12}$ et $K_1 < K_2/\alpha_{21}$: l'espèce 2 exclut l'espèce 1.
- (iii) $K_1 > K_2/\alpha_{21}$ et $K_2 > K_1/\alpha_{12}$: bistabilité (le résultat dépend des conditions initiales).
- (iv) $K_1 < K_2/\alpha_{21}$ et $K_2 < K_1/\alpha_{12}$: coexistence stable.

10.3.5 Modèle SIR épidémiologique

Reprenons le modèle (9.8) de la section 9.5.3 avec des valeurs numériques pour illustrer la dynamique d'une épidémie.

Exemple 10.7 (Épidémie de grippe). Avec $\beta = 0,4$ (jour⁻¹), $\gamma = 0,1$ (jour⁻¹), on a $\mathcal{R}_0 = 4$. Pour $S(0) = 0,99$, $I(0) = 0,01$, $R(0) = 0$:

- La condition $\mathcal{R}_0 S(0) = 3,96 > 1$ est vérifiée : l'épidémie se propage.
- Le pic épidémique se produit quand $S = 1/\mathcal{R}_0 = 0,25$.
- La proportion finale de susceptibles S_∞ satisfait l'équation transcendante $S_\infty = S_0 e^{-\mathcal{R}_0(1-S_\infty)}$.



10.4 Cinétique chimique

10.4.1 Réactions du premier et du second ordre

Réaction du premier ordre. $A \rightarrow$ produits, loi cinétique :

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A], \quad [A](t) = [A]_0 e^{-kt}. \quad (10.10)$$

Temps de demi-vie : $t_{1/2} = \ln 2/k$.

Réaction du second ordre. $2A \rightarrow$ produits, loi cinétique :

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A]^2, \quad \frac{1}{[A](t)} = \frac{1}{[A]_0} + kt. \quad (10.11)$$

10.4.2 Cinétique enzymatique de Michaelis–Menten

Le mécanisme $E + S \xrightleftharpoons[k_{-1}]{k_1} ES \xrightarrow{k_2} E + P$ conduit, sous l'hypothèse de quasi-état stationnaire, à la loi de Michaelis–Menten :

$$v = \frac{d[P]}{dt} = \frac{V_{\max}[S]}{K_M + [S]}, \quad (10.12)$$

où $V_{\max} = k_2[E]_0$ et $K_M = (k_{-1} + k_2)/k_1$ est la constante de Michaelis.

Remarque 10.8. Pour $[S] \ll K_M$, on retrouve une cinétique de pseudo-premier ordre : $v \approx (V_{\max}/K_M)[S]$. Pour $[S] \gg K_M$, la vitesse sature : $v \approx V_{\max}$.

Exemple 10.9 (Équation différentielle du substrat). L'évolution du substrat satisfait

l'EDO

$$\frac{d[S]}{dt} = -\frac{V_{\max}[S]}{K_M + [S]}, \quad [S](0) = [S]_0.$$

Cette équation est à variables séparables :

$$\left(1 + \frac{K_M}{[S]}\right) d[S] = -V_{\max} dt,$$

d'où la solution implicite $[S] + K_M \ln[S] = [S]_0 + K_M \ln[S]_0 - V_{\max} t$.

10.5 Autres applications

10.5.1 Courbes de poursuite

Un objet B se déplace à vitesse constante v_B le long de l'axe des ordonnées. Un poursuivant A , de vitesse v_A , se dirige à chaque instant vers B . Si $y = y(x)$ décrit la trajectoire de A , on obtient l'EDO du second ordre :

$$x y'' = \frac{v_B}{v_A} \sqrt{1 + (y')^2}. \quad (10.13)$$

Exemple 10.10 (Cas $v_A = v_B$). Pour $v_A = v_B$ et les conditions $y(a) = 0$, $y'(a) = 0$, on pose $p = y'$ et l'on obtient l'équation de Bernoulli en p . La solution est

$$y(x) = \frac{a}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \frac{1}{2} - \ln \frac{x}{a} \right],$$

et le poursuivant n'atteint jamais sa cible.

10.5.2 La chaînette

Un câble homogène de masse linéique ρ suspendu entre deux points sous son propre poids adopte la forme $y = y(x)$ satisfaisant

$$y'' = \frac{\rho g}{T_0} \sqrt{1 + (y')^2}, \quad (10.14)$$

où T_0 est la tension horizontale. La solution est la *chaînette* :

$$y(x) = \frac{T_0}{\rho g} \cosh\left(\frac{\rho g}{T_0} x\right) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right), \quad a = \frac{T_0}{\rho g}.$$

Résolution. On pose $p = y'$, de sorte que $p' = (1/a)\sqrt{1 + p^2}$. En séparant les variables : $\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{dx}{a}$, d'où $\sinh^{-1}(p) = x/a + C$. Avec $p(0) = 0$ (symétrie), $C = 0$, soit $p = \sinh(x/a)$ et $y = a \cosh(x/a) + C'$. $\square$

10.5.3 La brachistochrone

Le problème de la brachistochrone consiste à trouver la courbe reliant deux points A et B le long de laquelle une particule glisse sans frottement sous l'effet de la gravité en un

temps minimal. Ce problème, historiquement posé par Jean Bernoulli en 1696, conduit par le calcul des variations à l'EDO

$$y(1 + (y')^2) = C,$$

dont la solution est une *cycloïde* :

$$x = R(\theta - \sin \theta), \quad y = R(1 - \cos \theta).$$

10.6 Exemples développés

Exemple 10.11 (Chute avec résistance de l'air). Un objet de masse m tombe dans l'air avec une force de résistance proportionnelle au carré de la vitesse. L'équation du mouvement est

$$m\dot{v} = mg - kv^2.$$

C'est une EDO à variables séparables. La vitesse limite est $v_\infty = \sqrt{mg/k}$ et la solution est

$$v(t) = v_\infty \tanh\left(\frac{g}{v_\infty}t\right).$$

Exemple 10.12 (Datation au carbone 14). La désintégration radioactive suit une loi de premier ordre : $\dot{N} = -\lambda N$, d'où $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$. Pour le carbone 14, $t_{1/2} = 5730$ ans, soit $\lambda = \ln 2 / 5730 \approx 1,21 \times 10^{-4} \text{ an}^{-1}$. Si un échantillon contient une fraction f de la quantité originale, son âge est

$$t = -\frac{1}{\lambda} \ln f = -\frac{t_{1/2}}{\ln 2} \ln f.$$

Exemple 10.13 (Refroidissement de Newton). La loi de refroidissement de Newton s'écrit $\dot{T} = -k(T - T_{\text{ext}})$, d'où

$$T(t) = T_{\text{ext}} + (T_0 - T_{\text{ext}})e^{-kt}.$$

Exemple 10.14 (Mélange dans un réservoir). Un réservoir de volume V contient initialement de l'eau pure. On y verse une solution de concentration c_{in} au débit Q (même débit sortant). Si $m(t)$ est la masse de soluté :

$$\dot{m} = Qc_{\text{in}} - \frac{Q}{V}m, \quad m(t) = c_{\text{in}}V(1 - e^{-Qt/V}).$$

La concentration tend vers c_{in} avec la constante de temps V/Q .

10.7 Exercices

Exercice 10.1 (Pendule amorti). Un pendule de longueur $\ell = 1 \text{ m}$ est soumis à un amortissement de coefficient $c/(m\ell) = 0,5 \text{ s}^{-1}$.

- a) Linéariser l'équation autour de $\theta = 0$ et résoudre.
- b) Déterminer le régime (pseudo-périodique, critique ou apériodique).
- c) Calculer le temps nécessaire pour que l'amplitude soit réduite à 1% de sa valeur initiale.

Exercice 10.2 (Circuit RLC). Un circuit RLC série a $R = 100 \, \Omega$, $L = 0,1 \, \text{H}$, $C = 10 \, \mu\text{F}$.

- a) Calculer ω_0 et ξ .
- b) Déterminer le régime de fonctionnement.
- c) Résoudre pour une tension échelon $E(t) = 10 \, \text{V}$ avec $q(0) = 0$, $\dot{q}(0) = 0$.
- d) Calculer la fonction de transfert $H(s)$ et tracer qualitativement le diagramme de Bode en amplitude.

Exercice 10.3 (Modèle logistique avec récolte). On modifie l'équation logistique en ajoutant une récolte constante : $\dot{N} = rN(1 - N/K) - h$.

- a) Trouver les points d'équilibre en fonction de h .
- b) Montrer qu'il existe une valeur critique $h_c = rK/4$ au-delà de laquelle la population s'éteint.
- c) Identifier le type de bifurcation en $h = h_c$.
- d) Tracer le diagramme de bifurcation.

Exercice 10.4 (Espèces en compétition). Soit le système

$$\dot{x} = x(3 - x - 2y), \quad \dot{y} = y(2 - x - y).$$

- a) Trouver tous les points d'équilibre.
- b) Linéariser en chaque point et déterminer leur stabilité.
- c) Tracer les isoclines nulles et le portrait de phase qualitatif.
- d) Interpréter biologiquement le résultat.

Exercice 10.5 (Cinétique de Michaelis–Menten). Pour une réaction enzymatique avec $V_{\max} = 2 \, \text{mol/L/s}$ et $K_M = 0,5 \, \text{mol/L}$:

- a) Écrire et résoudre (implicitement) l'EDO pour $[S](t)$ avec $[S]_0 = 5 \, \text{mol/L}$.
- b) Approximer la solution pour les temps courts ($[S] \gg K_M$) et les temps longs ($[S] \ll K_M$).
- c) Estimer le temps nécessaire pour consommer 90% du substrat.

Exercice 10.6 (Modèle SIR avec démographie). On ajoute un flux de naissances et de morts au modèle SIR :

$$\dot{S} = \mu - \beta SI - \mu S, \quad \dot{I} = \beta SI - \gamma I - \mu I, \quad \dot{R} = \gamma I - \mu R.$$

- a) Montrer que $S + I + R = 1$ est invariant.
- b) Trouver l'équilibre sans maladie (DFE) et l'équilibre endémique (EE).
- c) Calculer le nombre de reproduction de base $\mathcal{R}_0$.
- d) Montrer que le DFE est stable si $\mathcal{R}_0 < 1$ et que l'EE est stable si $\mathcal{R}_0 > 1$.

Exercice 10.7 (Courbe de poursuite). Un lapin court le long de l'axe des y à vitesse v . Un chien, partant de $(a, 0)$, court à vitesse kv ($k > 1$) en se dirigeant toujours vers le lapin.

- Établir l'EDO vérifiée par la trajectoire $y(x)$ du chien.
- Résoudre par le changement de variable $p = y'$.
- Déterminer le point de capture et le temps de capture.

Exercice 10.8 (Modélisation complète). Un lac de volume $V = 10^6 \text{ m}^3$ est pollué. De l'eau propre arrive au débit $Q_{\text{in}} = 500 \text{ m}^3/\text{jour}$ et de l'eau sort au même débit. La concentration initiale de polluant est $c_0 = 200 \text{ mg/m}^3$ et le polluant se dégrade chimiquement au taux $\lambda = 0,001 \text{ jour}^{-1}$.

- Écrire l'EDO pour la concentration $c(t)$.
- Résoudre et tracer la courbe de dépollution.
- Calculer le temps nécessaire pour atteindre $c = 10 \text{ mg/m}^3$.

Résumé du chapitre

- Les **oscillations mécaniques** (pendule, oscillateurs couplés) sont décrites par des EDO du second ordre ; le portrait de phase permet une analyse qualitative complète.
- Les **circuits électriques** (RC, RL, RLC) conduisent aux mêmes types d'EDO avec l'analogie $m \leftrightarrow L$, $c \leftrightarrow R$, $k \leftrightarrow 1/C$.
- En **dynamique des populations**, le modèle logistique de Verhulst, le système de Lotka–Volterra et le modèle SIR illustrent la richesse des comportements non-linéaires.
- La **cinétique chimique** produit des EDO à variables séparables (ordres 1 et 2) ou des systèmes non-linéaires (Michaelis–Menten).
- Les **courbes de poursuite**, la **chaînette** et la **brachistochrone** sont des applications géométriques classiques des EDO.
- La *modélisation* — c'est-à-dire le passage du problème physique à l'EDO, puis l'interprétation de la solution — est la compétence centrale de ce chapitre.

Formulaire Récapitulatif

I. Équations du premier ordre

Type	Forme	Méthode
Variables séparables	$y' = f(x)g(y)$	$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$
Linéaire	$y' + p(x)y = q(x)$	Facteur intégrant $e^{\int p dx}$
Bernoulli	$y' + p(x)y = q(x)y^n$	Substitution $z = y^{1-n}$
Exacte	$M dx + N dy = 0$	$\partial M / \partial y = \partial N / \partial x$
Homogène	$y' = F(y/x)$	Substitution $v = y/x$
Ricatti	$y' = P + Qy + Ry^2$	Solution part. y_1 , puis $y = y_1 + 1/z$

II. Équations linéaires d'ordre n à coefficients constants

Équation : $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$.

Équation caractéristique : $a_n r^n + \dots + a_1 r + a_0 = 0$.

Racine	Solutions fondamentales
r réelle simple	e^{rx}
r réelle de multiplicité m	$e^{rx}, xe^{rx}, \dots, x^{m-1}e^{rx}$
$\alpha \pm i\beta$ simples	$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x$
$\alpha \pm i\beta$ de mult. m	$x^k e^{\alpha x} \cos \beta x, x^k e^{\alpha x} \sin \beta x, k = 0, \dots, m-1$

III. Table de transformées de Laplace

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f\}(s)$	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f\}(s)$
1	$\frac{1}{s}$	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\sin(bt)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$	$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	$e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
$t \sin(bt)$	$\frac{2bs}{(s^2+b^2)^2}$	$t \cos(bt)$	$\frac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2}$
$\sinh(bt)$	$\frac{b}{s^2-b^2}$	$\cosh(bt)$	$\frac{s}{s^2-b^2}$
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	$\delta(t-a)$	e^{-as}
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$(f * g)(t)$	$F(s) \cdot G(s)$	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$

IV. Systèmes linéaires

Système $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Solution : $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$.

Valeurs propres ($n = 2$)	Type	Stabilité
$\lambda_1, \lambda_2 < 0$ réelles	Nœud stable	Stable
$\lambda_1, \lambda_2 > 0$ réelles	Nœud instable	Instable
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	Col	Instable
$\alpha \pm i\beta$, $\alpha < 0$	Foyer stable	Stable
$\alpha \pm i\beta$, $\alpha > 0$	Foyer instable	Instable
$\pm i\beta$	Centre	Stable (non asymp.)

V. Stabilité de Lyapunov

Théorème de Lyapunov : Si $V(\mathbf{x})$ est définie positive et $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$, alors l'équilibre est stable. Si $\dot{V} < 0$ (définie négative), il est asymptotiquement stable.

VI. Bifurcations en dimension 1

Bifurcation	Forme normale	Caractéristique
Nœud-col	$\dot{x} = \mu + x^2$	Création/destruction de 2 équilibres
Transcritique	$\dot{x} = \mu x - x^2$	Échange de stabilité
Fourche (sup.)	$\dot{x} = \mu x - x^3$	1 équilibre $\rightarrow$ 3 équilibres
Fourche (sous.)	$\dot{x} = \mu x + x^3$	Instabilité sous-critique

Bibliographie

- [1] TENENBAUM, M. et POLLARD, H., *Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, 1985.
- [2] ARNOLD, V. I., *Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, 3^e édition, 2006.
- [3] CHICONE, C., *Ordinary Differential Equations with Applications*, Springer, Texts in Applied Mathematics, vol. 34, 2^e édition, 2006.
- [4] HIRSCH, M. W., SMALE, S. et DEVANEY, R. L., *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, Academic Press, 3^e édition, 2013.
- [5] VERHULST, F., *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Universitext, 2^e édition, 1996.
- [6] BRAUN, M., *Differential Equations and Their Applications : An Introduction to Applied Mathematics*, Springer-Verlag, 4^e édition, 1993.
- [7] PERKO, L., *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Texts in Applied Mathematics, vol. 7, 3^e édition, 2001.

Index

- s -shift, 84
- t -shift, 85
- Abel, 66
 - formule de, 47
 - théorème (EDO scalaire), 71
- Airy
 - fonctions, 76
- alternative d'explosion, 39
- amortissement
 - critique, 46
 - surcritique, 45
- amplitude-phase, 46
- anneau de piégeage, 112
- applications des EDO, 114
- Arnold, 127
- Banach
 - espace de, 36
 - theoreme du point fixe, 37
- battements, 115
- Bernoulli, Jacques, 12
- Bernoulli, Jean, 12
- Bessel
 - fonctions de, 77
 - équation de, 77
- bifurcation, 104
 - définition, 108
 - fourche (pitchfork), 109
 - Hopf, 110
 - noeud-col, 108
 - théorie, 108
 - transcritique, 109
- bloc de Jordan
 - solution, 60
- brachistochrone, 120
- Braun, 127
- capacité de charge, 8
- Cauchy, Augustin-Louis, 13
- Cauchy–Lipschitz
 - systèmes linéaires, 57
 - theoreme de, 35
- Cauchy–Lipschitz (théorème), 105
- Cauchy–Peano
 - theoreme de, 38
- centre, 61, 98
- centre (cas non concluant), 98
- champ de directions, 11, 106
- changement de variable
 - $t = e^u$, 52
- chaînette, 120
- Chetaev (théorème d'instabilité), 96
 - exemple, 101
- Chicone, 127
- chute avec résistance de l'air, 32
- chute avec résistance, 121
- cinétique chimique, 119
- circuit RC, 8, 116
 - résolution, 19
- circuit RL, 116
- circuit RLC, 44, 82, 116
- circuits électriques, 116
- classification des EDO, 11
- classification des équilibres, 98
- coefficients constants, 44
- coefficients indetermines
 - methode des, 48
- comparaison
 - theoreme de, 41
- compétition entre espèces, 103
- condition de Lipschitz, 10
- condition initiale, 10
- conditions de Lagrange, 72
- constante de désintégration, 8
- constante de temps, 19
- constantes
 - determination des, 47
- continuité par morceaux, 83
- convolution, 75, 86
- courbe de poursuite, 120
- courbe intégrale, 10
- courbes orthogonales, 33

- critère d'exactitude, 22
- croissance de population, 7
- cycle limite, 101, 104, 106
 - définition, 106
- cycloïde, 121
- datation radioactive, 121
- décroissance radioactive, 8
- dependance continue, 40
- Dirac (distribution de), 88
 - dans une EDO, 90
- discriminant, 45
- distribution de Dirac, 88
- Dulac (critère), 107
- dynamique des populations, 117
- dérivée orbitale, 95
- ensemble ω -limite, 96
- ensemble oméga-limite, 106
- équation à variables séparables, 12, 16
- équation autonome, 12
- équation caractéristique, 44
- équation de Bernoulli, 20
- équation de Clairaut, 27
 - solutions, 27
- équation de Lagrange, 28
 - résolution, 28
- équation de Riccati, 25
 - réduction, 25
- équation différentielle linéaire, 9
- équation différentielle ordinaire, 2
 - définition, 8
- équation exacte, 12, 22
 - définition, 22
 - résolution, 22
- équation homogene
 - du second ordre, 44
- équation homogène, 9
 - au sens de l'homogénéité, 12, 24
- équation homogène associée, 18
- équation indicielle, 52
- équation lineaire
 - du second ordre, 44
- équation linéaire du premier ordre, 18
- équations du premier ordre, 16
- espace des solutions
 - système linéaire, 57
- espèces en compétition, 118
- Euler, Leonhard, 13
- Euler–Cauchy
 - équation d', 52
- existence et unicite, 34
- explosion
 - exemple, 39
- explosion en temps fini, 39
- exponentielle de matrice, 58
 - cas diagonalisable, 59
 - propriétés, 58
- facteur intégrant, 19, 23
 - pour équation non exacte, 23
- flot, 105
- fonction de Green, 71, 74
 - propriétés, 74
- fonction de Lyapunov, 95
- fonction de transfert, 117
- fonction échelon, 87
- forme résolue, 9
- formulaire récapitulatif, 124
- formulation integrale, 36
- formule d'Abel–Liouville, 66
- formule de Duhamel, 67
- forçage discontinu, 89
- forçage périodique, 89
- foyer instable, 61, 98
- foyer stable, 61, 98
- fractions partielles, 87
 - méthode, 87
- Frobenius, 76
 - méthode de, 76
- Gronwall
 - lemme de, 40
- Hartman–Grobman (théorème de), 97
- Heaviside (fonction de), 85, 87
- Hermite
 - polynômes de, 76
- Hirsch, 127
- historique, 12
- hyperbolique (équilibre), 97
- impédance, 90
- indice d'un point singulier, 110
- instabilité, 94
 - Chetaev, 96
- intervalle maximal, 39
- introduction, 7
- isocline, 11

- isocline nulle, 105
- Kermack–McKendrick, 112
- La Salle (principe d’invariance), 96
- Lagrange
 - variation des constantes, 50
- Lagrange, Joseph-Louis, 13
- Legendre
 - polynômes de, 79
 - équation de, 79
- Leibniz, Gottfried Wilhelm, 12
- Lerch (théorème de), 83
- linéarisation, 97
- Liouville, 66
- Lipschitz
 - condition de, 34
 - constante de, 34
 - et différentiabilité, 35
 - locale, 34
- Lipschitz, Rudolf, 13
- lipschitzienne (fonction), 10
- logistique avec récolte, 122
- loi de refroidissement de Newton, 14
- Lorenz (système de), 103
- Lotka–Volterra, 57
- Lotka–Volterra (système), 111
 - application, 118
- Lotka–Volterra, 94
 - stabilité, 100
- Lyapunov
 - construction, 101
 - courbes de niveau, 102
 - fonction de, 95
 - stabilité asymptotique, 95
 - théorème de stabilité, 95
- Lyapunov, A. M., 93
- Malthus (modèle), 117
- masse-ressort
 - système, 44
- matrice compagnon, 71
- matrice fondamentale, 65
- matrice jacobienne, 97
- Michaelis–Menten (cinétique), 119
- modèle de Malthus, 7
- modèle logistique, 7
 - résolution, 17
- modes normaux, 115
- multiplicité de la racine, 49
- méthode
 - diagonalisation, 59
 - séries entières, 75
 - valeurs propres répétées, 60
- Newton, Isaac, 12
- noeud instable, 61, 98
- noeud stable, 61, 98
- noeud étoile, 64
- nombre de reproduction de base, 112
- non-unicité, 38
- norme pondérée, 37
- ordre d’une EDO, 9
- ordre exponentiel, 82
- oscillateurs couplés, 56, 115
- oscillations
 - amorties, 46
- oscillations mécaniques, 114
- Peano
 - théorème de, 38
- pendule
 - amorti, 96, 115
 - forcé, 115
 - points d’équilibre, 93
 - simple, 114
 - stabilité, 99
- pendule simple, 7
- Perko, 127
- Picard
 - exemple exponentielle, 38
 - iterations de, 35
 - itérées de, 36
 - opérateur de, 36
- Picard, Émile, 13
- Picard–Lindelöf, 35
- plan de phase, 98, 105
- Poincaré, Henri, 13
- Poincaré–Bendixson, 101
- Poincaré–Bendixson (théorème), 106
- point d’équilibre, 93, 105
 - classification, 61
- point ordinaire, 75
- point selle, 98
- point singulier régulier, 76
- point-selle, 61
- portrait de phase, 61, 98

- principe d'exclusion compétitive, 118
- principe d'invariance, 96
- problème à valeur initiale, 10
- probleme de Cauchy
 - lineaire du second ordre, 47
- probleme de Cauchy, 34
- problème de Cauchy, 10
- problème de mélange, 32
- problème de mélange, 121
- quasi-état stationnaire, 119
- racine double, 45
- racines
 - complexes conjuguées, 46
 - reelles distinctes, 45
- reduction d'ordre, 53
- refroidissement de Newton, 121
- relation de récurrence, 75
- resonance, 50
 - amortie, 50
 - partielle, 49
 - pure, 50
- réaction
 - premier ordre, 119
 - second ordre, 119
- réduction d'ordre, 71, 77
- régime
 - apériodique, 116
 - critique, 116
 - pseudo-périodique, 116
- résonance, 115
- second membre, 9
- séparation des variables, 16
- SIR (modèle), 112
 - application, 118
 - avec démographie, 122
- Smale, 127
- solution
 - définition, 9
 - generale, 48
 - générale, 9
 - particulière, 9
 - singulière, 9
 - exemple, 9
- solution maximale, 39
- solution particuliere
 - table des, 48
- stabilité, 93
 - asymptotique, 94
 - asymptotique globale, 94
 - au sens de Lyapunov, 94
 - instabilité, 94
 - par linéarisation, 97
 - système linéaire, 98
- stabilité structurelle, 108
- structure des solutions, 18
- Sturm
 - théorème de séparation, 80
- substitution $u = y/t$, 24
- substitution de Bernoulli, 20
- superposition
 - principe de, 48
- systeme fondamental, 47
- système autonome, 104
- système différentiel, 56
 - linéaire, 57
- système fondamental de solutions, 65
- système homogène, 57
 - solution, 58
- systèmes non-linéaires, 104
- séparatrice, 114
- séries entières
 - méthode, 71
 - point ordinaire, 75
 - résolution d'EDO, 75
- Tchebychev
 - polynômes de, 80
- temps de demi-vie, 8
- Tenenbaum, 127
- théorème de Cauchy–Lipschitz, 10
- théorème de Cauchy–Peano, 10
- théorème de la valeur finale, 86
- théorème de la valeur initiale, 86
- trace
 - et exponentielle, 58
- transformée de Laplace, 82
 - convolution, 86
 - d'une intégrale, 85
 - de 1, 83
 - de $\cos(bt)$, 84
 - de $\sin(bt)$, 84
 - de e^{at} , 84
 - de $t^n e^{at}$, 84
 - de t^n , 83
 - de Dirac, 88

- de Heaviside, 87
- des dérivées, 85
- définition, 82
- dérivation en s , 85
- existence, 83
- inverse, 87
- linéarité, 84
- résolution d'EDO, 88
- système, 89
- table, 91
- translation en s , 84
- translation en t , 85
- unicité, 83

- valeurs propres complexes
 - forme réelle, 59
- van der Pol (oscillateur de), 101
- van der Pol (oscillateur), 107
 - analyse détaillée, 112
- variation de la constante, 19
- variation des constantes, 50, 71
 - ordre n , 72
 - systèmes, 66
 - systèmes (méthode), 73
- vecteur propre généralisé, 60
- Verhulst, 7, 127
- Verhulst (équation logistique), 117

- wronskien, 46, 71
 - définition, 71
 - et indépendance linéaire, 71
 - formule d'Abel, 71
 - matriciel, 66

- équation d'Airy, 76
- équation d'Euler, 79
- équation de Hermite, 76
- équation indicielle, 76
- équation logistique, 117
- équilibre, 93
 - point d', 93
- équilibre hyperbolique, 97