

Analyse Réelle II

Notes de Cours

De l'intégrale aux fonctions de plusieurs variables

Licence L1 — Mathématiques

Second semestre

Année universitaire 2025–2026

Table des matières

Préface	4
7 Intégrale de Riemann — Définition, Propriétés, Théorème Fondamental	5
Introduction	5
7.1 Subdivisions et sommes de Darboux	5
7.2 Intégrale inférieure et supérieure, fonctions intégrables	7
7.3 Fonctions intégrables	8
7.4 Propriétés de l'intégrale	10
7.5 Théorèmes fondamentaux	12
7.6 Techniques d'intégration	13
7.7 Intégrales impropres (intégrales généralisées)	15
7.8 Formules de Wallis et de Stirling	16
7.9 Exercices	17
8 Suites et Séries de Fonctions — Convergence Uniforme	19
Introduction	19
8.1 Convergence simple et convergence uniforme	19
8.2 Propriétés de la convergence uniforme	21
8.3 Séries de fonctions	23
8.4 Séries entières	24
8.5 Approximation	26
8.6 Exercices	27
9 Introduction au Calcul Différentiel en Plusieurs Variables	29
Introduction	29
9.1 Topologie de $\mathbb{R}^n$	29
9.1.1 Normes sur $\mathbb{R}^n$	29
9.1.2 Boules, ouverts, fermés	31
9.1.3 Suites dans $\mathbb{R}^n$	31
9.2 Limites et continuité dans $\mathbb{R}^n$	32
9.2.1 Définitions	32
9.2.2 Limites itérées et limite double	32
9.2.3 Continuité et compacité	32
9.3 Dérivées partielles	33
9.3.1 Définition et notation	33
9.3.2 Existence des dérivées partielles et continuité	34
9.4 Différentiabilité	34

9.4.1	Définition	35
9.4.2	Différentiabilité implique continuité	35
9.4.3	Différentiabilité et dérivées partielles	35
9.4.4	Matrice jacobienne	36
9.5	Condition suffisante de différentiabilité : $\mathcal{C}^1$	36
9.6	Règle de la chaîne	37
9.7	Gradient et interprétation géométrique	38
9.8	Dérivées partielles d'ordre supérieur et théorème de Schwarz	39
9.9	Formule de Taylor à plusieurs variables	40
9.9.1	Développement à l'ordre 1	40
9.9.2	Développement à l'ordre 2	41
9.10	Extrema locaux	41
9.10.1	Condition nécessaire du premier ordre	41
9.10.2	Condition suffisante du second ordre	42
9.11	Exercices	43
	Résumé du chapitre	44
10	Intégrales Multiples et Changement de Variables	46
10.1	Intégrale double sur un rectangle	46
10.2	Théorème de Fubini	47
10.3	Intégrale double sur un domaine borné	48
10.4	Changement de variables dans les intégrales multiples	49
10.4.1	Coordonnées polaires	49
10.5	Intégrales triples	51
10.5.1	Coordonnées cylindriques	51
10.5.2	Coordonnées sphériques	51
10.6	Applications : aires, volumes, centres de masse	53
10.7	Exercices	53
11	Introduction aux Courbes et Intégrales Curvilignes	55
11.1	Courbes paramétrées	55
11.2	Longueur d'arc	56
11.3	Intégrales curvilignes de première espèce	57
11.4	Intégrales curvilignes de seconde espèce	58
11.5	Champs de gradient et potentiel	59
11.6	Théorème de Green	60
11.7	Contre-exemple : forme fermée non exacte	61
11.8	Exercices	62
	Remarques conclusives	63

Préface

Ce cours constitue la suite naturelle d'*Analyse Réelle I*, dans lequel nous avons étudié les fondements de l'analyse : les nombres réels, les suites numériques, les fonctions continues et le calcul différentiel des fonctions d'une variable réelle. Le présent volume — *Analyse Réelle II* — prolonge et approfondit cette étude en abordant trois thèmes majeurs.

L'intégration. Nous construisons rigoureusement l'intégrale de Riemann, en démontrons les propriétés fondamentales, et établissons le théorème fondamental de l'analyse qui relie intégration et dérivation. Les techniques classiques d'intégration (intégration par parties, changement de variable) sont présentées avec toute la rigueur requise.

Les suites et séries de fonctions. L'étude de la convergence uniforme est un tournant conceptuel essentiel : elle permet de comprendre quand on peut intervertir limites et opérations d'analyse (continuité, intégration, dérivation). Les séries entières fournissent un cadre privilégié d'application de ces résultats.

Les fonctions de plusieurs variables. Nous étendons les notions de continuité, de différentiabilité et d'intégration au cadre des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, culminant avec le théorème d'inversion locale et le théorème des fonctions implicites.

Tout au long de ce texte, nous adoptons les conventions de Bourbaki : les démonstrations sont complètes, les énoncés sont précis, et les contre-exemples sont mis en avant pour délimiter la portée des théorèmes. Le lecteur est encouragé à traiter les exercices proposés à la fin de chaque chapitre, classés par ordre de difficulté croissante.

Bonne lecture.

Chapitre 7

Intégrale de Riemann — Définition, Propriétés, Théorème Fondamental

Introduction

Le problème du calcul de l'aire d'une figure plane est l'un des plus anciens de l'histoire des mathématiques. Dès l'Antiquité, Archimède sut calculer l'aire d'un segment parabolique par la *méthode d'exhaustion* : il encadrait la figure par des polygones inscrits et circonscrits dont les aires convergeaient vers une valeur commune. C'est précisément cette idée — approcher une quantité par des sommes finies de plus en plus fines — qui est au cœur de la construction de l'intégrale de Riemann.

Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction positive, l'aire du domaine compris entre le graphe de f et l'axe des abscisses est, intuitivement, la $\sum$ des aires de rectangles infiniment fins de largeur dx et de hauteur $f(x)$. La formalisation rigoureuse de cette idée passe par la notion de *subdivision* d'un intervalle et par les *sommes de Darboux*, que nous introduisons dans la section suivante.

7.1 Subdivisions et sommes de Darboux

Soit $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, avec $a < b$.

Définition 7.1 (Subdivision). On appelle *subdivision* (ou *partition*) de l'intervalle $[a, b]$ toute famille finie de points

$$\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$$

telle que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. L'entier n est le *nombre de sous-intervalles* de la subdivision, et les intervalles $[x_{i-1}, x_i]$, pour $1 \leq i \leq n$, sont les *sous-intervalles* de σ . On note $|\sigma| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$ le *pas* de la subdivision.

Définition 7.2 (Sommes de Darboux). Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$. Pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, on pose

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

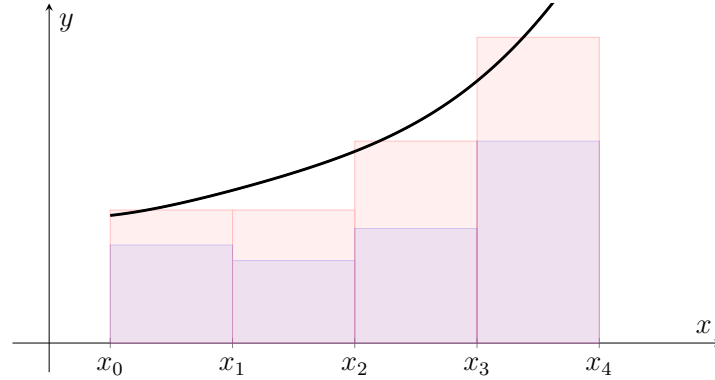
La *somme de Darboux inférieure* de f relativement à σ est

$$s(f, \sigma) = \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}),$$

et la *somme de Darboux supérieure* est

$$S(f, \sigma) = \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1}).$$

Sommes de Darboux inférieure (bleu) et supérieure (rouge)



Définition 7.3 (Raffinement). Soient σ et σ' deux subdivisions de $[a, b]$. On dit que σ' est un *raffinement* de σ si $\sigma \subset \sigma'$ (au sens ensembliste). La subdivision $\sigma \cup \sigma'$ est le raffinement commun le plus grossier de σ et σ' .

Proposition 7.1. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bornée. Si σ' est un raffinement de σ , alors

$$s(f, \sigma) \leq s(f, \sigma') \leq S(f, \sigma') \leq S(f, \sigma).$$

Démonstration. Il suffit de traiter le cas où σ' est obtenue en ajoutant un seul point c à σ . Le cas général s'en déduit par récurrence.

Soit $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ et supposons $c \in]x_{k-1}, x_k[$ pour un certain $k \in \{1, \dots, n\}$. Posons

$$m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f, \quad m'_k = \inf_{[x_{k-1}, c]} f, \quad m''_k = \inf_{[c, x_k]} f.$$

Puisque $[x_{k-1}, c] \subset [x_{k-1}, x_k]$ et $[c, x_k] \subset [x_{k-1}, x_k]$, on a $m'_k \geq m_k$ et $m''_k \geq m_k$. Par

conséquent,

$$\begin{aligned} s(f, \sigma') - s(f, \sigma) &= m'_k(c - x_{k-1}) + m''_k(x_k - c) - m_k(x_k - x_{k-1}) \\ &= (m'_k - m_k)(c - x_{k-1}) + (m''_k - m_k)(x_k - c) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi $s(f, \sigma) \leq s(f, \sigma')$. Le raisonnement pour les sommes supérieures est analogue (les inégalités sont renversées). L'inégalité $s(f, \sigma') \leq S(f, \sigma')$ est immédiate car $m_i \leq M_i$ pour tout i . $\square$

Corollaire 7.1. Pour toutes subdivisions σ et σ' de $[a, b]$ (pas nécessairement l'une raffinement de l'autre),

$$s(f, \sigma) \leq S(f, \sigma').$$

Démonstration. La subdivision $\sigma \cup \sigma'$ est un raffinement commun. Par la proposition 7.1,

$$s(f, \sigma) \leq s(f, \sigma \cup \sigma') \leq S(f, \sigma \cup \sigma') \leq S(f, \sigma'). \quad \square$$

7.2 Intégrale inférieure et supérieure, fonctions intégrables

Le corollaire 7.1 montre que l'ensemble des sommes de Darboux inférieures est majoré (par toute somme supérieure) et l'ensemble des sommes supérieures est minoré (par toute somme inférieure). La borne supérieure de l'un et la borne inférieure de l'autre existent donc dans $\mathbb{R}$.

Définition 7.4 (Intégrales inférieure et supérieure). Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bornée. On définit l'*intégrale inférieure* et l'*intégrale supérieure* de f sur $[a, b]$ par

$$\int_a^b f = \sup_{\sigma} s(f, \sigma), \quad \overline{\int_a^b} f = \inf_{\sigma} S(f, \sigma),$$

où le supremum et l'infimum sont pris sur toutes les subdivisions σ de $[a, b]$.

Par le corollaire 7.1, on a toujours

$$\int_a^b f \leq \overline{\int_a^b} f.$$

Définition 7.5 (Fonction intégrable au sens de Riemann). Une fonction bornée $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *intégrable au sens de Riemann* sur $[a, b]$ si

$$\int_a^b f = \overline{\int_a^b} f.$$

La valeur commune est alors notée $\int_a^b f(x) dx$, ou plus brièvement $\int_a^b f$, et s'appelle l'*intégrale de Riemann* de f sur $[a, b]$. L'ensemble des fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[a, b]$ est noté $\mathcal{R}([a, b])$.

Théorème 7.1 (Critère d'intégrabilité de Riemann). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bornée. Alors f est intégrable au sens de Riemann si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma \text{ subdivision de } [a, b], \quad S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \varepsilon.$$

Démonstration. Condition suffisante. Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision σ telle que $S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \varepsilon$. Alors

$$0 \leq \overline{\int_a^b f} - \underline{\int_a^b f} \leq S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \varepsilon.$$

Comme ceci vaut pour tout $\varepsilon > 0$, on conclut que $\overline{\int_a^b f} = \underline{\int_a^b f}$, donc f est intégrable.

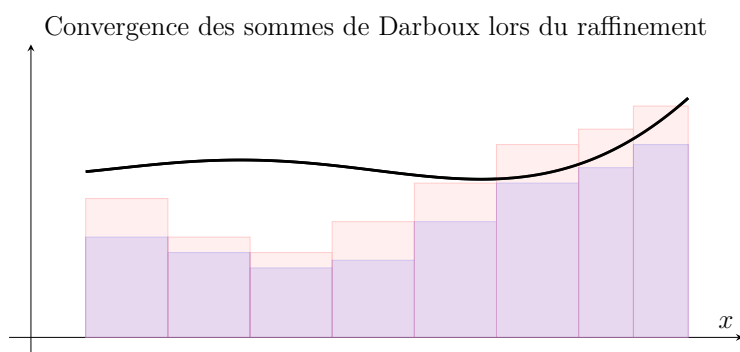
Condition nécessaire. Supposons f intégrable et soit $\varepsilon > 0$. Par définition du supremum et de l'infimum, il existe des subdivisions σ_1 et σ_2 telles que

$$\underline{\int_a^b f} - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, \sigma_1) \leq \underline{\int_a^b f} \quad \text{et} \quad \overline{\int_a^b f} \leq S(f, \sigma_2) < \overline{\int_a^b f} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$. Comme σ raffine à la fois σ_1 et σ_2 , on a

$$S(f, \sigma) - s(f, \sigma) \leq S(f, \sigma_2) - s(f, \sigma_1) < \overline{\int_a^b f} + \frac{\varepsilon}{2} - \underline{\int_a^b f} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

puisque l'intégrabilité donne $\overline{\int_a^b f} = \underline{\int_a^b f}$. □



7.3 Fonctions intégrables

Théorème 7.2. Toute fonction continue sur $[a, b]$ est intégrable au sens de Riemann.

Démonstration. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Puisque $[a, b]$ est compact, f est uniformément continue sur $[a, b]$ (théorème de Heine). Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [a, b], \quad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Choisissons une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de pas $|\sigma| < \delta$. Sur chaque sous-intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, la fonction f est continue et atteint ses bornes (théorème des valeurs extrêmes). Notons $M_i = \max_{[x_{i-1}, x_i]} f$ et $m_i = \min_{[x_{i-1}, x_i]} f$. Puisque $x_i - x_{i-1} < \delta$, les points où le maximum et le minimum sont atteints sont distants de moins de δ , d'où

$$M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Par conséquent,

$$S(f, \sigma) - s(f, \sigma) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b - a} \cdot (b - a) = \varepsilon.$$

Le critère d'intégrabilité (théorème 7.1) permet de conclure. $\square$

Théorème 7.3. Toute fonction monotone sur $[a, b]$ est intégrable au sens de Riemann.

Démonstration. Traitons le cas où f est croissante; le cas décroissant est analogue. La fonction f est bornée sur $[a, b]$ (par $f(a)$ et $f(b)$). Soit $\varepsilon > 0$. Considérons la subdivision régulière $\sigma_n = (x_0, \dots, x_n)$ avec $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$ pour $0 \leq i \leq n$.

Puisque f est croissante, sur chaque sous-intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, on a $m_i = f(x_{i-1})$ et $M_i = f(x_i)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} S(f, \sigma_n) - s(f, \sigma_n) &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)), \end{aligned}$$

par télescopage. En choisissant n assez grand pour que $\frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n} < \varepsilon$, on obtient $S(f, \sigma_n) - s(f, \sigma_n) < \varepsilon$, et le critère d'intégrabilité s'applique. $\square$

Définition 7.6 (Fonction continue par morceaux). Une fonction $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *continue par morceaux* s'il existe une subdivision $a = c_0 < c_1 < \dots < c_p = b$ telle que, pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, la restriction de f à $]c_{k-1}, c_k[$ se prolonge en une fonction continue sur $[c_{k-1}, c_k]$.

Théorème 7.4. Toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est intégrable au sens de Riemann.

Démonstration. Soit f continue par morceaux, de subdivision associée $(c_0, \dots, c_p)$. Soit $\varepsilon > 0$. Sur chaque intervalle $[c_{k-1}, c_k]$, le prolongement continu $\tilde{f}_k$ est intégrable d'après le théorème 7.2. Il existe donc une subdivision σ_k de $[c_{k-1}, c_k]$ telle que $S(\tilde{f}_k, \sigma_k) - s(\tilde{f}_k, \sigma_k) < \varepsilon/p$. Comme f et $\tilde{f}_k$ ne diffèrent qu'en au plus deux points (les extrémités), et que la modification d'une fonction bornée en un nombre fini de points ne change pas ses sommes de Darboux, la subdivision $\sigma = \sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_p$ satisfait $S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \varepsilon$. $\square$

7.4 Propriétés de l'intégrale

Dans cette section, f et g désignent des fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[a, b]$.

Théorème 7.5 (Linéarité). Si $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}([a, b])$ et

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Démonstration. Traitons d'abord l'homogénéité. Si $\alpha \geq 0$, pour toute subdivision σ , $s(\alpha f, \sigma) = \alpha s(f, \sigma)$ et $S(\alpha f, \sigma) = \alpha S(f, \sigma)$, d'où $S(\alpha f, \sigma) - s(\alpha f, \sigma) = \alpha(S(f, \sigma) - s(f, \sigma))$, et l'intégrabilité de αf suit de celle de f . Si $\alpha < 0$, on a $s(\alpha f, \sigma) = \alpha S(f, \sigma)$ et $S(\alpha f, \sigma) = \alpha s(f, \sigma)$, et le même raisonnement s'applique.

Pour l'additivité, on utilise l'inégalité

$$\inf_{[x_{i-1}, x_i]} f + \inf_{[x_{i-1}, x_i]} g \leq \inf_{[x_{i-1}, x_i]} (f + g)$$

et l'inégalité analogue pour le supremum :

$$\sup_{[x_{i-1}, x_i]} (f + g) \leq \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f + \sup_{[x_{i-1}, x_i]} g.$$

Par conséquent, pour toute subdivision σ ,

$$s(f, \sigma) + s(g, \sigma) \leq s(f + g, \sigma) \leq S(f + g, \sigma) \leq S(f, \sigma) + S(g, \sigma).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons σ_1 et σ_2 telles que $S(f, \sigma_1) - s(f, \sigma_1) < \varepsilon/2$ et $S(g, \sigma_2) - s(g, \sigma_2) < \varepsilon/2$. Posons $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$. Alors

$$S(f + g, \sigma) - s(f + g, \sigma) \leq (S(f, \sigma) - s(f, \sigma)) + (S(g, \sigma) - s(g, \sigma)) < \varepsilon.$$

Donc $f + g$ est intégrable. Pour la valeur de l'intégrale, les encadrements ci-dessus donnent, en passant au supremum et à l'infimum :

$$\int_a^b f + \int_a^b g \leq \int_a^b (f + g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g. \quad \square$$

Théorème 7.6 (Positivité). Si $f \in \mathcal{R}([a, b])$ et $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f \geq 0.$$

Démonstration. Si $f \geq 0$, alors pour toute subdivision σ , les bornes inférieures $m_i \geq 0$, d'où $s(f, \sigma) \geq 0$. Par passage au supremum, $\int_a^b f = \sup_{\sigma} s(f, \sigma) \geq 0$. $\square$

Corollaire 7.2 (Croissance). Si $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ et $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Démonstration. La fonction $g - f \geq 0$ est intégrable par linéarité, et $\int_a^b (g - f) \geq 0$ par positivité. La linéarité conclut. $\square$

Théorème 7.7 (Relation de Chasles). Soit $f \in \mathcal{R}([a, b])$ et $c \in]a, b[$. Alors f est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$, et

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une subdivision σ de $[a, b]$ telle que $S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \varepsilon$. Posons $\sigma' = \sigma \cup \{c\}$, qui est un raffinement de σ , d'où $S(f, \sigma') - s(f, \sigma') \leq S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \varepsilon$.

La subdivision σ' se décompose naturellement en σ'_1 (points dans $[a, c]$) et σ'_2 (points dans $[c, b]$), et l'on a

$$S(f, \sigma') - s(f, \sigma') = (S(f|_{[a, c]}, \sigma'_1) - s(f|_{[a, c]}, \sigma'_1)) + (S(f|_{[c, b]}, \sigma'_2) - s(f|_{[c, b]}, \sigma'_2)).$$

Chaque terme étant positif et leur somme étant inférieure à ε , chaque terme est inférieur à ε . Donc f est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$. L'égalité des intégrales suit de $s(f, \sigma') = s(f|_{[a, c]}, \sigma'_1) + s(f|_{[c, b]}, \sigma'_2)$ et du passage au supremum. $\square$

Théorème 7.8 (Inégalité de la valeur moyenne). Si $f \in \mathcal{R}([a, b])$, alors $|f| \in \mathcal{R}([a, b])$ et

$$|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|.$$

Démonstration. Montrons d'abord que $|f|$ est intégrable. Pour tout sous-intervalle $[x_{i-1}, x_i]$,

$$\sup_{[x_{i-1}, x_i]} |f| - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} |f| \leq \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f,$$

car $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$ pour tous x, y . Donc $S(|f|, \sigma) - s(|f|, \sigma) \leq S(f, \sigma) - s(f, \sigma)$, et l'intégrabilité de $|f|$ découle de celle de f .

Pour l'inégalité, on utilise $-|f| \leq f \leq |f|$. Par croissance de l'intégrale,

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|,$$

ce qui revient à $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$. □

Théorème 7.9 (Inégalité de Cauchy–Schwarz intégrale). Si $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$, alors

$$\left(\int_a^b f g \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2 \right) \left(\int_a^b g^2 \right).$$

7.5 Théorèmes fondamentaux

Théorème 7.10 (Premier théorème fondamental de l'analyse). Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. La fonction

$$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

est dérivable sur $[a, b]$ et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

Démonstration. Soit $x \in [a, b]$ et $h \neq 0$ tel que $x + h \in [a, b]$. Par la relation de Chasles,

$$F(x + h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

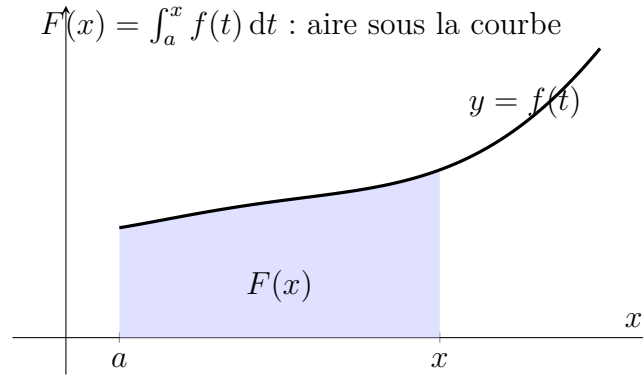
On peut écrire

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue en x , il existe $\delta > 0$ tel que $|t - x| < \delta$ implique $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$. Si $0 < |h| < \delta$, alors pour tout t entre x et $x + h$, on a $|t - x| \leq |h| < \delta$, d'où $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$. Par conséquent (en supposant $h > 0$, le cas $h < 0$ étant analogue),

$$|\ast| \frac{F(x + h) - F(x)}{h} - f(x) = |\ast| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt < \frac{1}{h} \cdot \varepsilon \cdot h = \varepsilon.$$

Ceci montre que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} = f(x)$, c'est-à-dire $F'(x) = f(x)$. □



Corollaire 7.3. Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive.

Théorème 7.11 (Second théorème fondamental — formule de Newton–Leibniz). Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et G une primitive de f sur $[a, b]$ (c'est-à-dire G est dérivable et $G' = f$). Alors

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a).$$

On note $G(b) - G(a) = [G(t)]_a^b$.

Démonstration. Soit $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Par le premier théorème fondamental, $F' = f = G'$ sur $[a, b]$. Donc $(F - G)' = 0$ sur $[a, b]$, ce qui implique que $F - G$ est constante (conséquence du théorème des accroissements finis). Notons $c = F(a) - G(a) = 0 - G(a) = -G(a)$. Alors $F(x) = G(x) - G(a)$ pour tout $x \in [a, b]$, et en particulier

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) = G(b) - G(a). \quad \square$$

7.6 Techniques d'intégration

Théorème 7.12 (Intégration par parties). Soient $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors

$$\int_a^b u(t) v'(t) dt = [u(t) v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt.$$

Démonstration. La fonction uv est de classe $\mathcal{C}^1$ et $(uv)' = u'v + uv'$. En intégrant les deux membres entre a et b et en appliquant le second théorème fondamental,

$$u(b)v(b) - u(a)v(a) = \int_a^b u'(t) v(t) dt + \int_a^b u(t) v'(t) dt.$$

Le résultat s'obtient par réarrangement. $\square$

Exemple 7.1. Calculons $I = \int_0^1 t e^t dt$. On pose $u(t) = t$ et $v'(t) = e^t$, d'où $u'(t) = 1$ et $v(t) = e^t$. Ainsi

$$I = [t e^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt = e - [e^t]_0^1 = e - (e - 1) = 1.$$

CHAPITRE 7. INTÉGRALE DE RIEMANN — DÉFINITION, PROPRIÉTÉS, THÉORÈME FONDAMENTAL

Exemple 7.2. Calculons $J = \int_0^\pi t \sin t \, dt$. On pose $u(t) = t$ et $v'(t) = \sin t$, d'où $u'(t) = 1$ et $v(t) = -\cos t$. Ainsi

$$J = [-t \cos t]_0^\pi + \int_0^\pi \cos t \, dt = \pi + [\sin t]_0^\pi = \pi + 0 = \pi.$$

Exemple 7.3. Calculons $K = \int_1^e (\ln t)^2 \, dt$. On pose $u(t) = (\ln t)^2$ et $v'(t) = 1$, d'où $u'(t) = \frac{2 \ln t}{t}$ et $v(t) = t$. Ainsi

$$K = [t(\ln t)^2]_1^e - 2 \int_1^e \ln t \, dt.$$

Or $\int_1^e \ln t \, dt = [t \ln t - t]_1^e = (e - e) - (0 - 1) = 1$, d'où $K = e - 2$.

Théorème 7.13 (Changement de variable). Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$. Alors

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt.$$

Démonstration. Soit F une primitive de f (qui existe d'après le corollaire 7.3). La fonction composée $F \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$ et

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \varphi'(t).$$

Par le second théorème fondamental,

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) \, dx. \quad \square$$

Exemple 7.4. Calculons $\int_0^1 \frac{2t}{1+t^2} \, dt$. On pose $x = \varphi(t) = t^2$, d'où $\varphi'(t) = 2t$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$. Alors

$$\int_0^1 \frac{2t}{1+t^2} \, dt = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2.$$

Exemple 7.5. Calculons $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} \, dt$. On pose $t = \sin \theta$, $dt = \cos \theta \, d\theta$, $\theta \in [0, \pi/2]$. Alors

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2} \, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \, d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

On retrouve l'aire d'un quart de disque de rayon 1.

Exemple 7.6. Calculons $\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \sin t}$. On effectue le changement de variable $u = \tan(t/2)$, d'où $\sin t = \frac{2u}{1+u^2}$ et $dt = \frac{2du}{1+u^2}$. Pour $t = 0$, $u = 0$; pour $t = \pi/2$, $u = 1$. Ainsi

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \sin t} = \int_0^1 \frac{1}{1 + \frac{2u}{1+u^2}} \cdot \frac{2du}{1+u^2} = \int_0^1 \frac{2du}{(1+u)^2} = \left[-\frac{2}{1+u} \right]_0^1 = -1 + 2 = 1.$$

Exemples classiques.

Exemple 7.7. *Intégrale de $\sin^2 x$.* En utilisant la linéarisation $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$,

$$\int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \left[\pi - \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Exemple 7.8. *Intégrale de $1/(1+x^2)$.* On a $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

Exemple 7.9. *Fractions rationnelles.* Calculons $\int_2^3 \frac{dx}{x^2-1}$. La décomposition en éléments simples donne $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$, d'où

$$\int_2^3 \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left[\ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right]_2^3 = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.$$

7.7 Intégrales impropres (intégrales généralisées)

Lorsque l'intervalle d'intégration est non borné ou que l'intégrande n'est pas bornée, l'intégrale de Riemann au sens strict ne s'applique plus. On étend la notion par passage à la limite.

Définition 7.7 (Intégrale impropre en $+\infty$). Soit $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue (ou continue par morceaux). On dit que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t) \, dt$ converge si la limite

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(t) \, dt$$

existe et est finie. Cette limite est alors notée $\int_a^{+\infty} f(t) \, dt$.

Définition 7.8 (Intégrale impropre en une singularité). Si $f:]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et non bornée au voisinage de a , on pose

$$\int_a^b f(t) \, dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(t) \, dt,$$

lorsque cette limite existe.

Théorème 7.14 (Critère de comparaison). Soient $f, g: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continues avec $0 \leq f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \geq a$.

- (i) Si $\int_a^{+\infty} g$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge et $\int_a^{+\infty} f \leq \int_a^{+\infty} g$.

(ii) Si $\int_a^{+\infty} f$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g$ diverge.

Démonstration. Posons $F(A) = \int_a^A f(t) dt$ et $G(A) = \int_a^A g(t) dt$. Puisque $f \geq 0$, la fonction F est croissante. De même pour G . L'hypothèse $f \leq g$ implique $F(A) \leq G(A)$ pour tout $A \geq a$.

(i) Si $G(A)$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $F(A) \leq G(A) \leq \ell$ pour tout A . Donc F est croissante et majorée, d'où convergente, et sa limite satisfait $\int_a^{+\infty} f \leq \ell = \int_a^{+\infty} g$.

(ii) Contraposée de (i). $\square$

Exemple 7.10. *Intégrales de Riemann.* Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. En effet, si $\alpha \neq 1$,

$$\int_1^A \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{A^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha},$$

qui converge lorsque $A \rightarrow +\infty$ si et seulement si $1-\alpha < 0$, c'est-à-dire $\alpha > 1$, et la valeur est $\frac{1}{\alpha-1}$. Si $\alpha = 1$, $\int_1^A \frac{dt}{t} = \ln A \rightarrow +\infty$.

Remarque 7.1. La *fonction Gamma d'Euler*, définie pour $s > 0$ par

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt,$$

est une intégrale impropre convergente. Elle vérifie $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la relation fonctionnelle $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. La *fonction Bêta*, définie pour $p, q > 0$ par

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt,$$

est liée à la fonction Gamma par $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

7.8 Formules de Wallis et de Stirling

Définition 7.9 (Intégrales de Wallis). Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt.$$

Proposition 7.2 (Formule de récurrence). Pour tout $n \geq 2$,

$$W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2},$$

avec $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$.

Démonstration. Par intégration par parties, en posant $u(t) = \sin^{n-1} t$ et $v'(t) = \sin t$, on a $u'(t) = (n-1) \sin^{n-2} t \cos t$ et $v(t) = -\cos t$. Ainsi

$$\begin{aligned} W_n &= [-\sin^{n-1} t \cos t]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} t \cos^2 t \, dt \\ &= 0 + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} t (1 - \sin^2 t) \, dt \\ &= (n-1)(W_{n-2} - W_n). \end{aligned}$$

D'où $W_n + (n-1)W_n = (n-1)W_{n-2}$, soit $nW_n = (n-1)W_{n-2}$. $\square$

Théorème 7.15 (Formule de Wallis).

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!!^2}{(2n-1)!!^2 \cdot (2n+1)} = \frac{\pi}{2},$$

ou de manière équivalente, $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Théorème 7.16 (Formule de Stirling). Lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

7.9 Exercices

Exercice 7.1. Calculer les intégrales suivantes :

- (a) $\int_0^1 (3t^2 - 2t + 1) \, dt$;
- (b) $\int_0^{\pi/2} \cos^3 t \, dt$;
- (c) $\int_1^2 \frac{\ln t}{t} \, dt$.

Exercice 7.2. Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Calculer explicitement $s(f, \sigma_n)$ et $S(f, \sigma_n)$ pour la subdivision régulière σ_n d'ordre n , et vérifier que les deux suites convergent vers $\frac{1}{3}$.

Exercice 7.3. Montrer que si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et $f \geq 0$, avec $\int_a^b f = 0$, alors $f = 0$.

Exercice 7.4 (★★). Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) \, dx.$$

(Sommations de Riemann.)

Exercice 7.5 (★). Calculer par intégration par parties : $\int_0^1 \arctan t \, dt$.

Exercice 7.6 (★). Calculer par changement de variable : $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin t}{\cos^2 t} \, dt$.

Exercice 7.7 (★★). Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2}$ par le changement de variable $t = \tan \theta$.

Exercice 7.8 (★★). Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, dt$ converge. (*On ne demande pas la valeur exacte.*)

Exercice 7.9 (★). Étudier la convergence de $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ et calculer sa valeur.

Exercice 7.10 (★★). Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec $f(a) = 0$. Montrer que

$$\int_a^b f(t)^2 \, dt \leq (b-a)^2 \int_a^b f'(t)^2 \, dt.$$

(*Inégalité de Poincaré.*)

Exercice 7.11 (★★★). Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et positive. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 f(x)^n \, dx \right)^{1/n} = \sup_{x \in [0,1]} f(x).$$

Exercice 7.12 (★★★). Montrer la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$, en utilisant les intégrales de Wallis et la méthode de Laplace.

Résumé du chapitre 7.

- L'intégrale de Riemann est définie via les sommes de Darboux : f est intégrable si $\sup s(f, \sigma) = \inf S(f, \sigma)$.
- Toute fonction continue ou monotone sur $[a, b]$ est intégrable.
- L'intégrale est linéaire, positive, croissante et vérifie la relation de Chasles.
- Le premier théorème fondamental : $F(x) = \int_a^x f$ est une primitive de f .
- Le second théorème fondamental (Newton–Leibniz) : $\int_a^b f = G(b) - G(a)$.
- Techniques : intégration par parties et changement de variable.
- Les intégrales impropres étendent l'intégrale aux intervalles non bornés ou aux fonctions non bornées.

Chapitre 8

Suites et Séries de Fonctions — Convergence Uniforme

Introduction

En Analyse I, nous avons étudié les suites numériques et les séries numériques. Une question naturelle se pose : que se passe-t-il lorsqu'on considère des suites ou des séries dont les termes sont eux-mêmes des *fonctions*? Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues convergeant vers une fonction f , la limite f est-elle encore continue? Peut-on intervertir limite et intégrale? Limite et dérivée?

La réponse est en général **négative**, comme le montrent des contre-exemples classiques. C'est la notion de *convergence uniforme*, distincte de la convergence simple, qui fournit les conditions suffisantes pour ces interversions. Ce chapitre est consacré à l'étude de cette notion fondamentale.

8.1 Convergence simple et convergence uniforme

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans $\mathbb{R}$.

Définition 8.1 (Convergence simple). La suite (f_n) *converge simplement* (ou *ponctuellement*) vers $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si

$$\forall x \in A, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x),$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in A, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

L'entier N dépend en général de x et de ε .

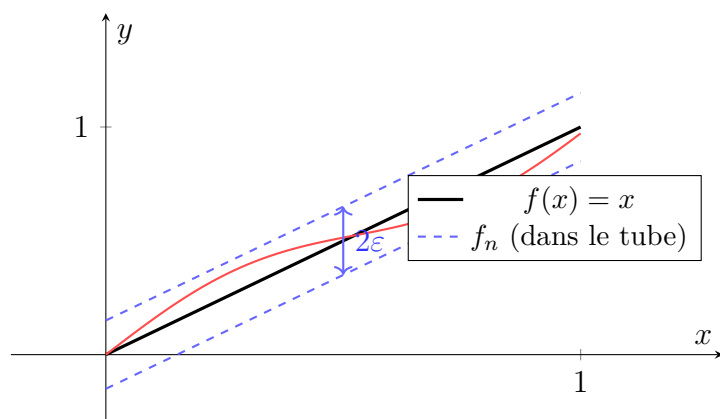
Définition 8.2 (Convergence uniforme). La suite (f_n) converge uniformément vers $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \forall x \in A, \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

autrement dit, si $\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Remarque 8.1. La convergence uniforme implique la convergence simple, mais la réciproque est fautive. La différence cruciale est que dans la convergence uniforme, l'entier N ne dépend que de ε , et non de x . On peut reformuler : la convergence uniforme signifie que $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$, où $\|\cdot\|_\infty$ est la norme de la convergence uniforme (ou norme du supremum).

Convergence uniforme : le graphe de f_n reste dans le tube de largeur 2ε



Théorème 8.1 (Critère de Cauchy uniforme). La suite (f_n) converge uniformément sur A si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall m, n \geq N, \quad \forall x \in A, \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Démonstration. Condition nécessaire. Si (f_n) converge uniformément vers f , soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que pour tout $n \geq N$ et tout $x \in A$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$. Pour $m, n \geq N$,

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Condition suffisante. Supposons la condition de Cauchy uniforme satisfaite. Pour chaque $x \in A$, la suite numérique $(f_n(x))$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ (complet), donc converge. Posons $f(x) = \lim_n f_n(x)$.

Soit $\varepsilon > 0$ et N donné par la condition de Cauchy. Pour $m, n \geq N$ et $x \in A$, $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. En faisant tendre $m \rightarrow +\infty$ à n et x fixés, on obtient $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$ et tout $x \in A$. Ceci montre la convergence uniforme. $\square$

Exemple 8.1 (Contre-exemple fondamental). Considérons $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$. Pour tout $x \in [0, 1[$, on a $f_n(x) = x^n \rightarrow 0$, et $f_n(1) = 1 \rightarrow 1$. La suite

converge simplement vers

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[, \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

La convergence n'est **pas** uniforme sur $[0, 1]$. En effet,

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(1 - 1/n) - f(1 - 1/n)| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} \neq 0.$$

De plus, chaque f_n est continue, mais la limite f est discontinue en $x = 1$: la convergence simple de fonctions continues ne préserve pas la continuité.

8.2 Propriétés de la convergence uniforme

Le théorème suivant est l'un des résultats centraux de ce chapitre.

Théorème 8.2 (Limite uniforme de fonctions continues). Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $A \subset \mathbb{R}$ convergeant uniformément vers $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Alors f est continue sur A .

Démonstration. Soit $x_0 \in A$ et $\varepsilon > 0$. Puisque la convergence est uniforme, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad \forall x \in A, \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Fixons un tel $n \geq N$. La fonction f_n est continue en x_0 , donc il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in A, \quad |x - x_0| < \delta \implies |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour $x \in A$ avec $|x - x_0| < \delta$, on a alors

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci montre que f est continue en x_0 . Comme x_0 est arbitraire, f est continue sur A . $\square$

Remarque 8.2. Le contre-exemple 8.1 ($f_n(x) = x^n$ sur $[0, 1]$) montre que l'hypothèse de convergence uniforme est essentielle : la convergence simple de fonctions continues peut produire une limite discontinue.

Théorème 8.3 (Interversion limite-intégrale). Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[a, b]$ convergeant uniformément vers $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Alors f est intégrable sur $[a, b]$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt.$$

CHAPITRE 8. SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS — CONVERGENCE UNIFORME

Démonstration. Montrons d'abord que f est intégrable. Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence uniforme, il existe N tel que pour tout $n \geq N$ et tout $x \in [a, b]$, $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$, c'est-à-dire

$$f_n(x) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} < f(x) < f_n(x) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}.$$

Fixons un tel $n \geq N$. Puisque f_n est intégrable, il existe une subdivision σ telle que $S(f_n, \sigma) - s(f_n, \sigma) < \varepsilon/3$. Sur chaque sous-intervalle $[x_{i-1}, x_i]$,

$$\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \leq \left(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f_n + \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \right) - \left(\inf_{[x_{i-1}, x_i]} f_n - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \right).$$

D'où

$$\begin{aligned} S(f, \sigma) - s(f, \sigma) &\leq S(f_n, \sigma) - s(f_n, \sigma) + \frac{2\varepsilon}{3(b-a)} \sum_i (x_i - x_{i-1}) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc f est intégrable.

Pour la convergence des intégrales, on a

$$|*| \int_a^b f_n - \int_a^b f = |*| \int_a^b (f_n - f) \leq \int_a^b |f_n - f| \leq (b-a) \sup_{[a,b]} |f_n - f|.$$

Comme $\sup_{[a,b]} |f_n - f| \rightarrow 0$ par convergence uniforme, on conclut $\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$. $\square$

Théorème 8.4 (Interversion limite-dérivée). Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ vérifiant :

- (i) il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que la suite $(f_n(x_0))$ converge ;
- (ii) la suite (f'_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction g .

Alors (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$, et $f' = g$, c'est-à-dire

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n.$$

Démonstration. Posons $\ell = \lim_n f_n(x_0)$. Par le théorème fondamental, pour tout $x \in [a, b]$,

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt.$$

Puisque (f'_n) converge uniformément vers g sur $[a, b]$, le théorème 8.3 donne

$$\int_{x_0}^x f'_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^x g(t) dt$$

uniformément en x (car $\left| \int_{x_0}^x (f'_n - g) \right| \leq (b-a) \|f'_n - g\|_\infty$). Donc (f_n) converge uniformément vers

$$f(x) = \ell + \int_{x_0}^x g(t) dt.$$

La fonction g est continue sur $[a, b]$ (comme limite uniforme de fonctions continues f'_n , par le théorème 8.2). Par le premier théorème fondamental, f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f' = g$. $\square$

8.3 Séries de fonctions

Définition 8.3 (Convergence d'une série de fonctions). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans $\mathbb{R}$. La *série de fonctions* $\sum u_n$ est la suite des sommes partielles $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$. On dit que la série

- *converge simplement* sur A si la suite (S_N) converge simplement ;
- *converge uniformément* sur A si la suite (S_N) converge uniformément ;
- *converge normalement* sur A si la série numérique $\sum_{n \geq 0} \|u_n\|_\infty$ converge, où $\|u_n\|_\infty = \sup_{x \in A} |u_n(x)|$.

Proposition 8.1. La convergence normale entraîne la convergence uniforme, qui entraîne la convergence simple. Les réciproques sont fausses en général.

Démonstration. Supposons la convergence normale. Pour $N < M$,

$$\sup_{x \in A} |S_M(x) - S_N(x)| = \sup_{x \in A} \left| \sum_{n=N+1}^M u_n(x) \right| \leq \sum_{n=N+1}^M \|u_n\|_\infty.$$

Comme la série $\sum \|u_n\|_\infty$ converge, son reste tend vers 0, donc (S_N) vérifie le critère de Cauchy uniforme. L'implication convergence uniforme $\Rightarrow$ convergence simple est immédiate. $\square$

Théorème 8.5 (Critère de Weierstrass — test M). Soit (u_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{R}$. S'il existe une suite (M_n) de réels positifs telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in A, \quad |u_n(x)| \leq M_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} M_n < +\infty,$$

alors la série $\sum u_n$ converge normalement (donc uniformément) sur A .

Démonstration. On a $\|u_n\|_\infty = \sup_{x \in A} |u_n(x)| \leq M_n$ pour tout n . La convergence de $\sum M_n$ entraîne celle de $\sum \|u_n\|_\infty$ par comparaison de séries à termes positifs. Donc $\sum u_n$ converge normalement. $\square$

Les théorèmes d'interversion s'appliquent naturellement aux séries de fonctions via leurs sommes partielles :

Corollaire 8.1 (Continuité d'une somme de série). Si chaque u_n est continue sur A et si $\sum u_n$ converge uniformément sur A , alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue sur A .

Corollaire 8.2 (Intégration terme à terme). Si chaque u_n est intégrable sur $[a, b]$ et si $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t) dt.$$

Corollaire 8.3 (Dérivation terme à terme). Si chaque u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, si $\sum u_n(x_0)$ converge en un point x_0 , et si $\sum u'_n$ converge uniformément sur $[a, b]$, alors $\sum u_n$ converge uniformément vers une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n.$$

8.4 Séries entières

Définition 8.4 (Série entière). On appelle *série entière* toute série de fonctions de la forme $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels (ou de complexes) appelés les *coefficients* de la série.

Définition 8.5 (Rayon de convergence). Le *rayon de convergence* de la série entière $\sum a_n x^n$ est

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n}} \in [0, +\infty].$$

La série converge absolument pour $|x| < R$ et diverge pour $|x| > R$.

Théorème 8.6. Si $R > 0$ est le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$, alors pour tout $0 < r < R$, la série converge normalement (donc uniformément) sur $[-r, r]$.

Démonstration. Soit $0 < r < R$. Choisissons ρ tel que $r < \rho < R$. Puisque $\sum a_n \rho^n$ converge absolument, la suite $(|a_n| \rho^n)$ est bornée : il existe $M > 0$ tel que $|a_n| \rho^n \leq M$ pour tout n . Pour $|x| \leq r$,

$$|a_n x^n| \leq |a_n| r^n = |a_n| \rho^n \cdot \left(\frac{r}{\rho} \right)^n \leq M \left(\frac{r}{\rho} \right)^n.$$

Puisque $r/\rho < 1$, la série géométrique $\sum M(r/\rho)^n$ converge. Le critère de Weierstrass conclut. $\square$

Théorème 8.7 (Dérivation des séries entières). Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors sa somme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$ et

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \quad \forall x \in] -R, R[.$$

De plus, la série dérivée a le même rayon de convergence R .

Démonstration. Montrons que la série dérivée $\sum n a_n x^{n-1}$ a le même rayon de convergence. On utilise la formule de Hadamard. Posons $b_n = (n+1)a_{n+1}$. Alors

$$|b_n|^{1/n} = (n+1)^{1/n} |a_{n+1}|^{1/n}.$$

Puisque $(n+1)^{1/n} \rightarrow 1$ et $|a_{n+1}|^{1/n} = (|a_{n+1}|^{1/(n+1)})^{(n+1)/n}$, on obtient $\limsup |b_n|^{1/n} = \limsup |a_n|^{1/n}$, donc le rayon de convergence est le même.

Soit $0 < r < R$. Sur $[-r, r]$, la série $\sum na_n x^{n-1}$ converge uniformément (par le théorème 8.6 appliqué à la série dérivée). Le corollaire 8.3 donne alors $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1}$ sur $] -r, r[$. Comme ceci vaut pour tout $r < R$, le résultat est vrai sur $] -R, R[$. Par récurrence, f est $\mathcal{C}^\infty$. $\square$

Corollaire 8.4 (Intégration des séries entières). Sous les mêmes hypothèses, pour tout $x \in] -R, R[$,

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Théorème 8.8 (Théorème d'Abel radial). Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Si la série numérique $\sum a_n R^n$ converge (de somme S), alors

$$\lim_{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n.$$

Exemple 8.2. *Développements en série entière classiques.*

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, & R &= +\infty, \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, & R &= +\infty, \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, & R &= +\infty, \\ \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, & R &= 1, \\ \ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, & R &= 1, \\ \arctan x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, & R &= 1. \end{aligned}$$

Théorème 8.9 (Unicité du développement en série entière). Si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ pour tout x dans un voisinage de 0, alors $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Posons $f(x) = \sum a_n x^n = \sum b_n x^n$. Par le théorème 8.7, f est $\mathcal{C}^\infty$ et $f^{(n)}(0) = n! a_n = n! b_n$ pour tout n , d'où $a_n = b_n$. $\square$

8.5 Approximation

Définition 8.6 (Polynômes de Bernstein). Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Le n -ième *polynôme de Bernstein* de f est

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Théorème 8.10 (Théorème d'approximation de Weierstrass). Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors la suite $(B_n(f))_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.
En d'autres termes, toute fonction continue sur un segment peut être approchée uniformément par des polynômes.

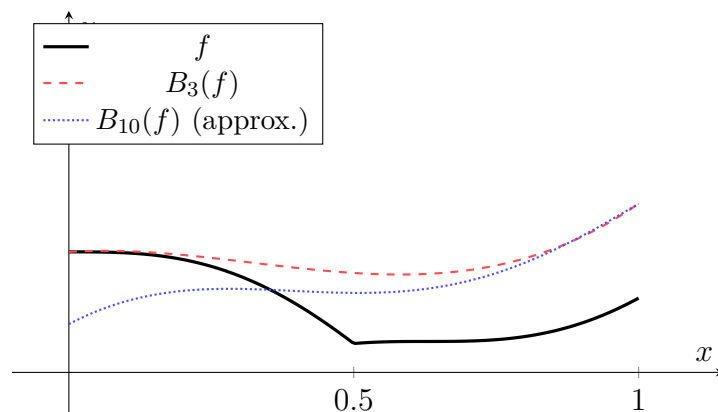
Idée de la preuve (via les polynômes de Bernstein). On utilise l'interprétation probabiliste : si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre x , alors $B_n(f)(x) = \mathbb{E}[f(\bar{X}_n)]$ où $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$. Par la loi des grands nombres, $\bar{X}_n \rightarrow x$ en probabilité, et la continuité uniforme de f sur le compact $[0, 1]$ permet de conclure que $\mathbb{E}[f(\bar{X}_n)] \rightarrow f(x)$ uniformément.

Plus précisément, soit $\varepsilon > 0$. Par continuité uniforme de f , il existe $\delta > 0$ tel que $|s - t| < \delta$ implique $|f(s) - f(t)| < \varepsilon/2$. Soit $M = \|f\|_\infty$. On décompose

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \sum_{k=0}^n \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

en séparant les indices k tels que $|k/n - x| < \delta$ (contribution $< \varepsilon/2$) et ceux tels que $|k/n - x| \geq \delta$ (contribution majorée par $\frac{2M}{\delta^2} \cdot \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{M}{2n\delta^2}$ grâce à l'identité $\sum_{k=0}^n (k/n - x)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}$). En choisissant n assez grand, la somme totale est inférieure à ε .

Approximation de f par les polynômes de Bernstein $B_n(f)$



8.6 Exercices

Exercice 8.1. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[0, 1]$ définie par $f_n(x) = nx e^{-nx}$.

Exercice 8.2. Soit $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que (f_n) converge simplement vers 0 mais pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8.3 (*). Soit $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que (f_n) converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8.4 (*). Soit $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = nx^n(1-x)$. Montrer que (f_n) converge simplement vers 0 sur $[0, 1]$ mais que $\int_0^1 f_n(x) dx \not\rightarrow 0$. Pourquoi cela ne contredit-il pas le théorème 8.3?

Exercice 8.5 (**). Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et que sa somme est continue.

Exercice 8.6 (**). Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge uniformément sur tout segment $[-R, R]$ mais pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8.7 (**). Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ pour $x \in]-1, 1]$. Montrer que $f(x) = \ln(1+x)$. En déduire, à l'aide du théorème d'Abel radial, que $\ln 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Exercice 8.8 (*). Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ converge normalement sur $[-r, r]$ pour tout $0 < r < 1$, mais pas normalement sur $] -1, 1[$.

Exercice 8.9 (**). Calculer le rayon de convergence et la somme de $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$.

Exercice 8.10 (**). Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

Exercice 8.11 (***). Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ telle que (f'_n) converge uniformément vers g et $(f_n(0))$ converge. Montrer que (f_n) converge uniformément et que la limite est de classe $\mathcal{C}^1$ de dérivée g .

Exercice 8.12 (***). Montrer que la fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(3^n x)}{2^n}$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est dérivable en aucun point. (*Fonction de Weierstrass.*)

Résumé du chapitre 8.

- Convergence simple : $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pour chaque x (N dépend de x et ε).
- Convergence uniforme : $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ (N ne dépend que de ε).
- La convergence uniforme préserve la continuité (théorème clé).
- Sous convergence uniforme, on peut intervertir limite et intégrale.
- Pour intervertir limite et dérivée, il faut la convergence uniforme des dérivées.
- Convergence normale $\Rightarrow$ convergence uniforme (critère de Weierstrass).
- Les séries entières convergent uniformément sur tout compact du disque ouvert de convergence.
- On peut dériver et intégrer une série entière terme à terme dans le disque ouvert.
- Théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment est limite uniforme de polynômes.

Chapitre 9

Introduction au Calcul Différentiel en Plusieurs Variables

Introduction

Les phénomènes naturels dépendent le plus souvent de plusieurs grandeurs simultanément. La température en un point de l'atmosphère est fonction de trois coordonnées spatiales et du temps; l'énergie cinétique d'un système mécanique dépend des vitesses de chacune de ses particules; le profit d'une entreprise dépend des prix, des quantités produites et des coûts des facteurs de production. Le passage de l'analyse en une variable à l'analyse en plusieurs variables n'est donc pas un luxe théorique : il est imposé par la nature même des objets que l'on souhaite modéliser.

Ce chapitre étend au cadre des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ les notions fondamentales étudiées en Analyse Réelle I : limites, continuité, dérivabilité. Nous verrons que certains résultats se généralisent sans difficulté, tandis que d'autres exigent des précautions nouvelles. En particulier, l'existence des *dérivées partielles* ne garantit ni la continuité, ni la différentiabilité d'une fonction — un phénomène sans analogue en dimension un. La notion correcte est celle de *différentiabilité*, qui fait intervenir une *application linéaire* approchant la fonction au voisinage d'un point. C'est autour de cette idée centrale que s'organise tout le calcul différentiel en plusieurs variables.

9.1 Topologie de $\mathbb{R}^n$

9.1.1 Normes sur $\mathbb{R}^n$

Nous munissons $\mathbb{R}^n$ de sa structure naturelle d'espace vectoriel réel. Un point de $\mathbb{R}^n$ est un n -uplet $x = (x_1, \dots, x_n)$ avec $x_i \in \mathbb{R}$ pour tout i .

Définition 9.1 (Norme sur $\mathbb{R}^n$). On appelle *norme* sur $\mathbb{R}^n$ toute application $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

- (i) *Séparation* : $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
- (ii) *Homogénéité* : $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;

(iii) *Inégalité triangulaire* : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Exemple 9.1. Les trois normes les plus courantes sur $\mathbb{R}^n$ sont :

- la *norme euclidienne* : $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$;
- la *norme 1* (ou norme de Manhattan) : $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$;
- la *norme infinie* (ou norme du sup) : $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Remarque 9.1. On vérifie aisément que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty.$$

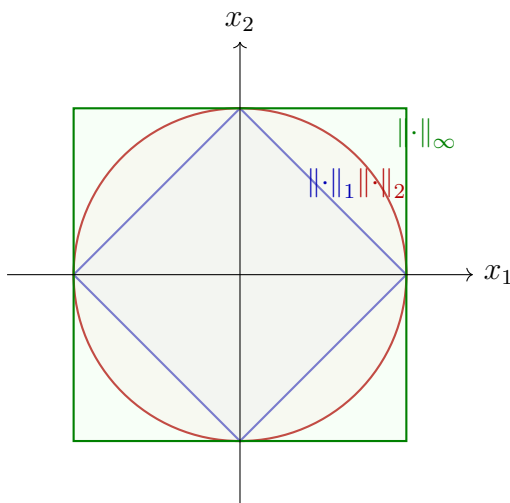
Ces inégalités montrent que les trois normes sont *comparables* au sens que la convergence d'une suite dans l'une entraîne la convergence dans les deux autres.

Le résultat fondamental suivant affirme que ce phénomène est général en dimension finie.

Théorème 9.1 (Équivalence des normes en dimension finie). Sur un espace vectoriel réel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Plus précisément, si $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ sont deux normes sur $\mathbb{R}^n$, il existe des constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que

$$\alpha \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq \beta \|x\|_a \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

En conséquence, les notions topologiques (ouverts, fermés, convergence, compacité) sont les mêmes pour toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$. On pourra donc choisir, selon les besoins de la démonstration, la norme la plus commode.



Boules unités fermées dans $\mathbb{R}^2$ pour les trois normes classiques

9.1.2 Boules, ouverts, fermés

Dans toute la suite, sauf mention contraire, $\mathbb{R}^n$ est muni d'une norme quelconque, notée $\|\cdot\|$.

Définition 9.2 (Boule ouverte et boule fermée). Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. La *boule ouverte* de centre a et de rayon r est

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}.$$

La *boule fermée* de centre a et de rayon r est

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}.$$

Définition 9.3 (Ouvert, fermé). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

- (i) Ω est *ouvert* si pour tout $a \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \Omega$.
- (ii) Ω est *fermé* si son complémentaire $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ est ouvert, ou de manière équivalente, si Ω contient toutes ses valeurs d'adhérence.

Définition 9.4 (Partie compacte). Une partie $K \subset \mathbb{R}^n$ est dite *compacte* si elle est fermée et bornée (c'est-à-dire contenue dans une boule de rayon fini). De manière équivalente, K est compacte si et seulement si de toute suite d'éléments de K on peut extraire une sous-suite convergente dont la limite appartient à K .

9.1.3 Suites dans $\mathbb{R}^n$

Proposition 9.1 (Convergence composante par composante). Soit $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^n$, où $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$, et soit $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$x^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \ell \iff \forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \ell_i.$$

Démonstration. $(\Rightarrow)$ Pour tout i , on a $|x_i^{(k)} - \ell_i| \leq \|x^{(k)} - \ell\|_\infty \leq \|x^{(k)} - \ell\|$ (en utilisant l'équivalence des normes). Donc $\|x^{(k)} - \ell\| \rightarrow 0$ entraîne $x_i^{(k)} \rightarrow \ell_i$.

$(\Leftarrow)$ Réciproquement, $\|x^{(k)} - \ell\|_\infty = \max_i |x_i^{(k)} - \ell_i| \rightarrow 0$ si chaque composante converge.

□

9.2 Limites et continuité dans $\mathbb{R}^n$

9.2.1 Définitions

Définition 9.5 (Limite d'une fonction de plusieurs variables). Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $a \in \Omega$ (ou a point d'accumulation de Ω), $f: \Omega \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $\ell \in \mathbb{R}^p$. On dit que f admet la *limite* ℓ en a , et on écrit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \Omega, 0 < \|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - \ell\| < \varepsilon.$$

Définition 9.6 (Continuité). Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$. On dit que f est *continue* en $a \in \Omega$ si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. On dit que f est continue sur Ω si elle est continue en tout point de Ω .

9.2.2 Limites itérées et limite double

Un piège redoutable en dimension supérieure est la confusion entre *limite double* et *limites itérées*.

Exemple 9.2 (Limites itérées $\neq$ limite double). Considérons la fonction $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Les limites itérées existent et sont nulles :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Cependant, le long de la droite $y = x$, on a $f(x, x) = x^2/(2x^2) = 1/2$, et le long de la droite $y = -x$, on a $f(x, -x) = -1/2$. La limite double $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ *n'existe pas*, bien que les deux limites itérées existent et coïncident.

Remarque 9.2. Cet exemple illustre un principe fondamental : pour montrer qu'une limite double n'existe pas, il suffit de trouver deux chemins d'approche donnant des limites distinctes. En revanche, pour montrer qu'une limite existe, il faut la démontrer pour *tous* les chemins simultanément, ce qui nécessite en général une majoration directe en ε - δ .

9.2.3 Continuité et compacité

Le théorème suivant étend au cadre multidimensionnel le résultat classique des bornes atteintes.

Théorème 9.2 (Bornes atteintes sur un compact). Soient $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact non vide et $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes : il existe $a, b \in K$ tels que

$$f(a) = \inf_{x \in K} f(x), \quad f(b) = \sup_{x \in K} f(x).$$

Démonstration. Montrons que f atteint son maximum (le raisonnement est analogue pour le minimum). Posons $M = \sup_{x \in K} f(x)$. Si $M = -\infty$, alors $K = \emptyset$, ce qui est exclu. Sinon, il existe une suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de K telle que $f(x^{(k)}) \rightarrow M$. Comme K est compact, on peut extraire une sous-suite $(x^{(\varphi(k))})$ convergeant vers un point $b \in K$. Par continuité de f , on a $f(b) = \lim_k f(x^{(\varphi(k))}) = M$. En particulier, $M \in \mathbb{R}$ et f est majorée. $\square$

9.3 Dérivées partielles

9.3.1 Définition et notation

Définition 9.7 (Dérivée partielle). Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $a = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega$. La *dérivée partielle* de f par rapport à la i -ème variable en a est, lorsque la limite existe :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a)}{h}.$$

On note aussi $\partial_i f(a)$, $f_{x_i}(a)$ ou $D_i f(a)$.

Remarque 9.3. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ revient à dériver la fonction d'une variable $t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots)$ en $t = a_i$. Autrement dit, on *gèle* toutes les variables sauf la i -ème et on dérive par rapport à celle-ci.

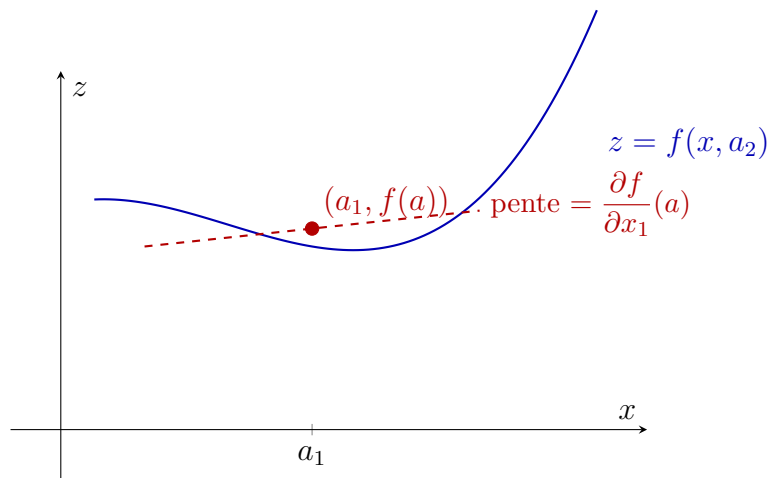


FIGURE 9.1 – La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$ est la pente de la courbe obtenue en coupant le graphe de f par le plan $x_2 = a_2$.

9.3.2 Existence des dérivées partielles et continuité

Théorème 9.3. L'existence de toutes les dérivées partielles en un point n'entraîne pas la continuité en ce point.

Exemple 9.3 (Contre-exemple fondamental). Considérons la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Vérification. Étape 1 : Existence des dérivées partielles en $(0, 0)$.

Pour $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$: on calcule

$$\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{0 - 0}{h} = 0,$$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$. De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

Étape 2 : f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Considérons le chemin $y = x^2$: pour $x \neq 0$,

$$f(x, x^2) = \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4 + x^4} = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0)$.

Cependant, le long de toute droite passant par l'origine (c'est-à-dire pour $y = mx$ avec m fixé), on a

$$f(x, mx) = \frac{x^2 \cdot mx}{x^4 + m^2 x^2} = \frac{mx}{x^2 + m^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

La fonction admet donc une limite nulle le long de toute droite, mais n'est pas continue à l'origine. Ceci montre que la vérification le long des droites ne suffit pas à établir l'existence d'une limite double. $\square$

9.4 Différentiabilité

Le bon concept de dérivabilité en plusieurs variables est celui de *différentiabilité*, qui fait intervenir une approximation *linéaire* globale (et non direction par direction comme les dérivées partielles).

9.4.1 Définition

Définition centrale : Différentiabilité

Définition 9.8 (Application différentiable). Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $a \in \Omega$. On dit que f est *différentiable* en a s'il existe une application linéaire $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ telle que

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \|h\| \varepsilon(h),$$

où $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$ dans $\mathbb{R}^n$. De manière équivalente :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

L'application linéaire L , lorsqu'elle existe, est unique ; on l'appelle la *différentielle* de f en a et on la note df_a ou $Df(a)$.

Remarque 9.4. En dimension $n = p = 1$, la différentiabilité de f en a signifie l'existence d'un réel λ tel que $f(a+h) = f(a) + \lambda h + o(h)$. On retrouve la dérivabilité ordinaire, avec $\lambda = f'(a)$.

9.4.2 Différentiabilité implique continuité

Théorème 9.4. Si $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable en a , alors f est continue en a .

Démonstration. Par hypothèse, $f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \|h\| \varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) \rightarrow 0$. L'application linéaire $df_a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est continue (toute application linéaire entre espaces de dimension finie est continue), donc $df_a(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$. De plus, $\|h\| \varepsilon(h) \rightarrow 0$ car $\|h\| \rightarrow 0$ et $\varepsilon(h)$ est bornée au voisinage de 0. Il vient

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a) + 0 + 0 = f(a),$$

ce qui prouve la continuité de f en a . □

9.4.3 Différentiabilité et dérivées partielles

Théorème 9.5. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a \in \Omega$. Alors toutes les dérivées partielles de f existent en a et

$$df_a(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i \quad \text{pour tout } h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Démonstration. Soit $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ le i -ème vecteur de la base canonique. Par

hypothèse de différentiabilité :

$$f(a + t e_i) = f(a) + t \, df_a(e_i) + |t| \, \varepsilon(t e_i),$$

d'où

$$\frac{f(a + t e_i) - f(a)}{t} = df_a(e_i) + \frac{|t|}{t} \varepsilon(t e_i).$$

Lorsque $t \rightarrow 0$, le terme $\varepsilon(t e_i) \rightarrow 0$, donc

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t e_i) - f(a)}{t} = df_a(e_i).$$

Comme df_a est linéaire et déterminée par ses valeurs sur la base canonique :

$$df_a(h) = df_a\left(\sum_{i=1}^n h_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n h_i df_a(e_i) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i. \quad \square$$

9.4.4 Matrice jacobienne

Définition 9.9 (Matrice jacobienne). Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f = (f_1, \dots, f_p) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable en $a \in \Omega$. La *matrice jacobienne* de f en a est la matrice de la différentielle df_a dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$:

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}).$$

Lorsque $n = p$, le *jacobien* de f en a est le déterminant $\det J_f(a)$.

9.5 Condition suffisante de différentiabilité : $\mathcal{C}^1$

Théorème 9.6 ($\mathcal{C}^1 \Rightarrow$ différentiable). Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Si toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existent sur Ω et sont continues en un point $a \in \Omega$, alors f est différentiable en a .

Nous donnons la démonstration complète dans le cas $n = 2$.

Démonstration pour $n = 2$. Soient $a = (a_1, a_2)$ et $h = (h_1, h_2)$ avec $a + h \in \Omega$. On écrit

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) = \underbrace{[f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2)]}_{(I)} + \underbrace{[f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2)]}_{(II)}.$$

Traitement de (I). La fonction $\varphi: t \mapsto f(t, a_2 + h_2)$ est dérivable sur un voisinage de a_1 (car $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ existe sur Ω). Par le théorème des accroissements finis, il existe $\theta_1 \in]0, 1[$ tel que

$$(I) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + h_2).$$

Par continuité de $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ en a , on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + h_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \varepsilon_1(h),$$

où $\varepsilon_1(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$. Donc $(I) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_1 \varepsilon_1(h)$.

Traitement de (II). De même, en appliquant le théorème des accroissements finis à $\psi: t \mapsto f(a_1, t)$, il existe $\theta_2 \in]0, 1[$ tel que

$$(II) = h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2 + \theta_2 h_2) = h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + h_2 \varepsilon_2(h),$$

où $\varepsilon_2(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.

Conclusion. En sommant :

$$f(a + h) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) h_2 + h_1 \varepsilon_1(h) + h_2 \varepsilon_2(h).$$

Or $|h_i| \leq \|h\|$ pour $i = 1, 2$, donc

$$|h_1 \varepsilon_1(h) + h_2 \varepsilon_2(h)| \leq \|h\| (|\varepsilon_1(h)| + |\varepsilon_2(h)|) = \|h\| \varepsilon(h),$$

où $\varepsilon(h) = |\varepsilon_1(h)| + |\varepsilon_2(h)| \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.

Ceci prouve que f est différentiable en a , avec $df_a(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) h_2$. $\square$

9.6 Règle de la chaîne

Théorème 9.7 (Règle de la chaîne — Chain rule). Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $\Omega' \subset \mathbb{R}^p$ des ouverts, $f: \Omega \rightarrow \Omega'$ différentiable en a et $g: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^q$ différentiable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est différentiable en a et

$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a.$$

En termes de matrices jacobiniennes :

$$J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \cdot J_f(a).$$

Démonstration. Posons $b = f(a)$. Par hypothèse :

$$\begin{aligned} f(a + h) &= f(a) + df_a(h) + \|h\| \varepsilon_1(h), & \text{avec } \varepsilon_1(h) &\rightarrow 0, \\ g(b + k) &= g(b) + dg_b(k) + \|k\| \varepsilon_2(k), & \text{avec } \varepsilon_2(k) &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

CHAPITRE 9. INTRODUCTION AU CALCUL DIFFÉRENTIEL EN PLUSIEURS VARIABLES

Posons $k = f(a + h) - f(a) = df_a(h) + \|h\| \varepsilon_1(h)$. Alors

$$g(f(a + h)) = g(b + k) = g(b) + dg_b(k) + \|k\| \varepsilon_2(k).$$

On a $dg_b(k) = dg_b(df_a(h)) + dg_b(\|h\| \varepsilon_1(h))$, et par linéarité de dg_b :

$$dg_b(k) = (dg_b \circ df_a)(h) + \|h\| dg_b(\varepsilon_1(h)).$$

Comme dg_b est linéaire continue et $\varepsilon_1(h) \rightarrow 0$, on a $dg_b(\varepsilon_1(h)) \rightarrow 0$.

Il reste à montrer que $\|k\| \varepsilon_2(k) = o(\|h\|)$. Il existe une constante $C > 0$ telle que $\|df_a(h)\| \leq C \|h\|$ (car df_a est linéaire continue), d'où

$$\|k\| \leq C \|h\| + \|h\| \|\varepsilon_1(h)\| = \|h\| (C + \|\varepsilon_1(h)\|).$$

Pour h suffisamment petit, $C + \|\varepsilon_1(h)\| \leq C + 1$, donc $\|k\| \leq (C + 1) \|h\|$. Par conséquent :

$$\frac{\|k\| \|\varepsilon_2(k)\|}{\|h\|} \leq (C + 1) \|\varepsilon_2(k)\| \rightarrow 0$$

puisque $k \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$ (par continuité de f), donc $\varepsilon_2(k) \rightarrow 0$.

En rassemblant tous les termes :

$$g(f(a + h)) = g(f(a)) + (dg_b \circ df_a)(h) + \|h\| \eta(h),$$

où $\eta(h) \rightarrow 0$, ce qui prouve la différentiabilité de $g \circ f$ en a avec $d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$. $\square$

Corollaire 9.1. Si $f = (f_1, \dots, f_p)$ et g sont comme ci-dessus, avec f et g de classe $\mathcal{C}^1$, alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a).$$

9.7 Gradient et interprétation géométrique

Définition 9.10 (Gradient). Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a \in \Omega$. Le *gradient* de f en a est le vecteur

$$\nabla f(a) = \text{grad } f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) \in \mathbb{R}^n.$$

La différentielle s'écrit alors $df_a(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien.

Proposition 9.2 (Direction de plus grande pente). Si $\nabla f(a) \neq 0$, alors le gradient $\nabla f(a)$ pointe dans la direction dans laquelle f croît le plus rapidement à partir de a . Plus précisément, pour tout vecteur unitaire $u \in \mathbb{R}^n$ avec $\|u\|_2 = 1$, on a

$$df_a(u) = \langle \nabla f(a), u \rangle \leq \|\nabla f(a)\|_2,$$

avec égalité si et seulement si $u = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|_2}$.

Démonstration. Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, $\langle \nabla f(a), u \rangle \leq \|\nabla f(a)\|_2 \|u\|_2 = \|\nabla f(a)\|_2$. L'égalité a lieu si et seulement si u et $\nabla f(a)$ sont colinéaires de même sens, c'est-à-dire $u = \nabla f(a) / \|\nabla f(a)\|_2$. $\square$

Remarque 9.5. Le gradient est *orthogonal* aux lignes de niveau de f . En effet, si $\gamma: t \mapsto \gamma(t)$ est une courbe tracée sur la ligne de niveau $\{f = c\}$, alors $f(\gamma(t)) = c$ pour tout t , d'où par la règle de la chaîne : $\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0$.

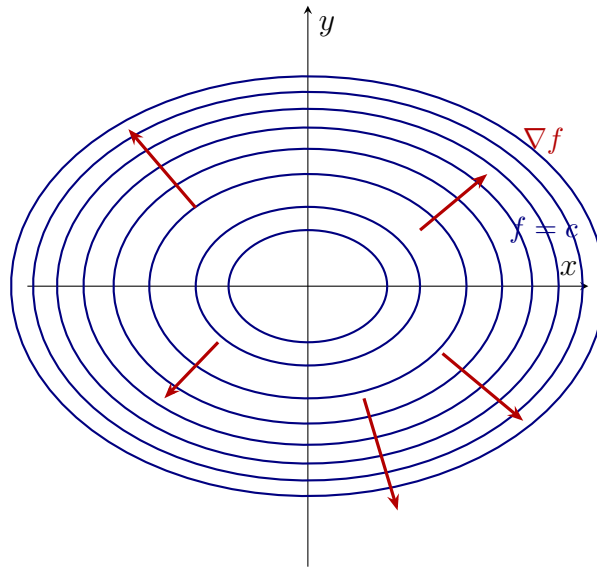


FIGURE 9.2 – Lignes de niveau de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ et vecteurs gradient (en rouge), orthogonaux aux courbes de niveau.

9.8 Dérivées partielles d'ordre supérieur et théorème de Schwarz

Définition 9.11 (Dérivées partielles d'ordre supérieur). Si $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est elle-même dérivable par rapport à x_j , on note

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$$

la dérivée partielle seconde de f par rapport à x_i puis x_j . On définit de même les dérivées d'ordre supérieur par récurrence.

Théorème 9.8 (Schwarz). Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Si les dérivées

partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existent sur Ω et sont continues en un point $a \in \Omega$, alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Démonstration. On se ramène au cas $n = 2$, $i = 1$, $j = 2$, en gelant les autres variables. Il s'agit de montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$.

Pour h, k petits, posons

$$\Delta(h, k) = f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b).$$

Définissons $\varphi(t) = f(t, b + k) - f(t, b)$; alors $\Delta(h, k) = \varphi(a + h) - \varphi(a)$.

Comme φ est dérivable avec $\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, b + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, b)$, le théorème des accroissements finis donne un $\theta_1 \in]0, 1[$ tel que

$$\Delta(h, k) = h \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a + \theta_1 h, b + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a + \theta_1 h, b) \right].$$

En appliquant à nouveau le théorème des accroissements finis à $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(a + \theta_1 h, t)$, il existe $\theta_2 \in]0, 1[$ tel que

$$\Delta(h, k) = hk \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a + \theta_1 h, b + \theta_2 k).$$

De manière symétrique, en posant $\psi(t) = f(a + h, t) - f(a, t)$ et en appliquant deux fois le théorème des accroissements finis, on obtient des $\theta_3, \theta_4 \in]0, 1[$ tels que

$$\Delta(h, k) = hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a + \theta_3 h, b + \theta_4 k).$$

En divisant par $hk \neq 0$ et en faisant tendre $(h, k) \rightarrow (0, 0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a + \theta_1 h, b + \theta_2 k) &\rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a + \theta_3 h, b + \theta_4 k) &\rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b), \end{aligned}$$

par continuité des dérivées secondes en (a, b) . L'unicité de la limite donne

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b). \quad \square$$

Corollaire 9.2. Si $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R})$, alors les dérivées partielles d'ordre $\leq k$ sont indépendantes de l'ordre de dérivation.

9.9 Formule de Taylor à plusieurs variables

9.9.1 Développement à l'ordre 1

Théorème 9.9 (Taylor à l'ordre 1). Soit $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a \in \Omega$. Alors

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i + o(\|h\|).$$

Ce n'est rien d'autre que la reformulation de la différentiabilité.

9.9.2 Développement à l'ordre 2

Théorème 9.10 (Taylor à l'ordre 2). Soit $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ avec $a \in \Omega$. Alors

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j + o(\|h\|^2).$$

Définition 9.12 (Matrice hessienne). Si $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$, la *matrice hessienne* de f en a est la matrice symétrique (d'après le théorème de Schwarz, cf. théorème 9.8)

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

La formule de Taylor à l'ordre 2 se réécrit matriciellement :

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(a) h, h \rangle + o(\|h\|^2).$$

9.10 Extrema locaux

9.10.1 Condition nécessaire du premier ordre

Théorème 9.11 (Condition nécessaire : gradient nul). Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable. Si f admet un extremum local en $a \in \Omega$, alors

$$\nabla f(a) = 0.$$

Un point vérifiant cette condition est appelé *point critique* ou *point stationnaire* de f .

Démonstration. Si f admet un extremum local en a , alors pour chaque i , la fonction d'une variable $t \mapsto f(a + t e_i)$ admet un extremum local en $t = 0$. Par le critère du premier ordre en une variable : $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ pour tout i , soit $\nabla f(a) = 0$. $\square$

9.10.2 Condition suffisante du second ordre

Théorème 9.12 (Critère du second ordre). Soit $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ avec $\nabla f(a) = 0$ (point critique). Notons $H = H_f(a)$ la matrice hessienne.

- (i) Si H est *définie positive*, alors f admet un *minimum local strict* en a .
- (ii) Si H est *définie négative*, alors f admet un *maximum local strict* en a .
- (iii) Si H est *indéfinie* (c'est-à-dire possède des valeurs propres de signes opposés), alors a est un *point selle*.
- (iv) Si H est semi-définie (positive ou négative), on ne peut pas conclure sans informations supplémentaires.

Remarque 9.6. Dans le cas $n = 2$, la matrice hessienne en un point critique a est

$$H = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}, \quad \text{où } r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a).$$

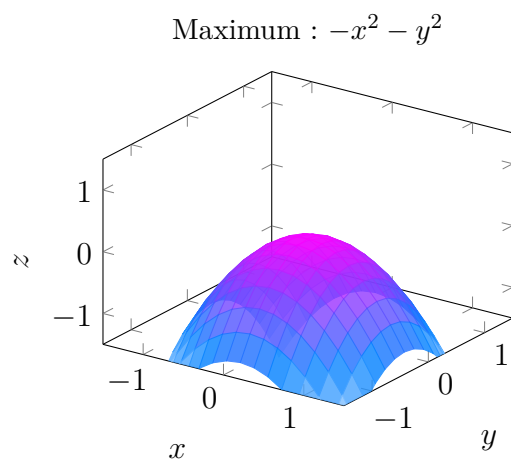
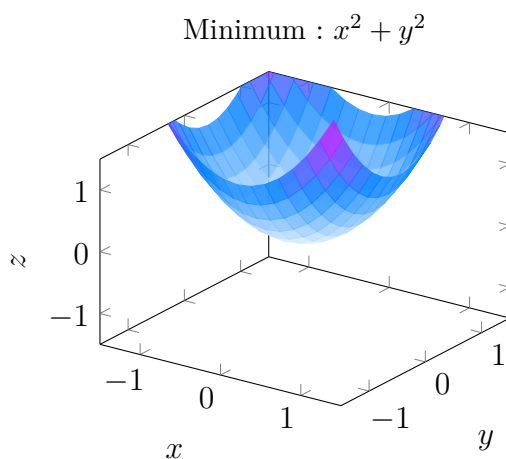
Posons $\Delta = rt - s^2 = \det H$.

- Si $\Delta > 0$ et $r > 0$: minimum local strict.
- Si $\Delta > 0$ et $r < 0$: maximum local strict.
- Si $\Delta < 0$: point selle.
- Si $\Delta = 0$: cas douteux.

Exemple 9.4. (a) $f(x, y) = x^2 + y^2$. Point critique : $(0, 0)$. Hessienne : $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\Delta = 4 > 0$, $r = 2 > 0$: *minimum local* (et global).

(b) $f(x, y) = -x^2 - y^2$. Point critique : $(0, 0)$. $H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\Delta = 4 > 0$, $r = -2 < 0$: *maximum local* (et global).

(c) $f(x, y) = x^2 - y^2$. Point critique : $(0, 0)$. $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\Delta = -4 < 0$: *point selle*.



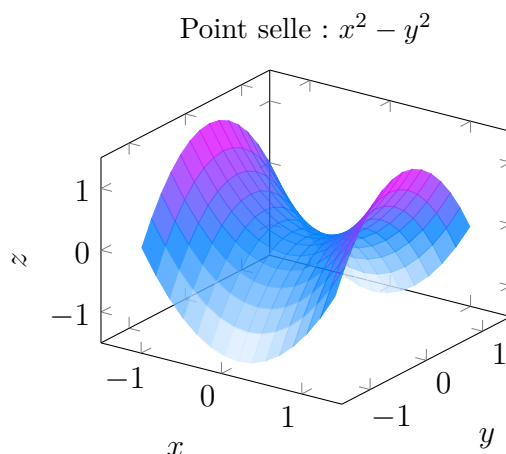


FIGURE 9.3 – De gauche à droite : minimum local, maximum local, point selle.

9.11 Exercices

Exercice 9.1 (Normes et topologie). Soit $x = (3, -4, 1) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ et $\|x\|_\infty$. Vérifier que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq 3 \|x\|_\infty$.

Exercice 9.2 (Ouverts et fermés). Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts, fermés, les deux ou ni l'un ni l'autre :

- (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$;
- (b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$;
- (c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$;
- (d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\}$.

Exercice 9.3 (Limites en plusieurs variables). Déterminer si les limites suivantes existent et, le cas échéant, les calculer :

- (a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$;
- (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$;
- (c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$.

Indication : Pour (a) et (c), passer en coordonnées polaires. Pour (b), essayer $y = 0$ puis $x = 0$.

Exercice 9.4 (Continuité et dérivées partielles). Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Montrer que les dérivées partielles de f existent en $(0, 0)$, mais que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

CHAPITRE 9. INTRODUCTION AU CALCUL DIFFÉRENTIEL EN PLUSIEURS VARIABLES

Exercice 9.5 (Calcul de différentielle). Soit $f(x, y) = x^2y + e^{xy}$. Calculer $df_{(1,1)}$ et écrire l'approximation affine de f au voisinage de $(1, 1)$.

Exercice 9.6 (Matrice jacobienne). Soit $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $F(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ (coordonnées polaires). Calculer la matrice jacobienne $J_F(r, \theta)$ et son déterminant. Interpréter géométriquement.

Exercice 9.7 (Règle de la chaîne). Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et soient $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Exprimer $\frac{\partial f}{\partial r}$ et $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 9.8 (Gradient et lignes de niveau). Soit $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2$.

- (a) Calculer $\nabla f(x, y)$.
- (b) Déterminer l'équation de la ligne de niveau passant par le point $(1, 1)$.
- (c) Vérifier que $\nabla f(1, 1)$ est orthogonal à cette ligne de niveau en ce point.

Exercice 9.9 (Théorème de Schwarz). Soit $f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ pour $x > 0$. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et vérifier l'égalité du théorème de Schwarz.

Exercice 9.10 (Recherche d'extrema). Trouver et classer les points critiques de $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Exercice 9.11 (Extrema sur un compact). Déterminer le maximum et le minimum de $f(x, y) = 2x + 3y$ sur le disque fermé $\overline{B}(0, 1) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. *Indication* : Le maximum et le minimum sont atteints sur le bord (pourquoi?). Paramétrer le bord.

Exercice 9.12 (Taylor à l'ordre 2). Soit $f(x, y) = e^x \sin y$. Écrire le développement de Taylor de f à l'ordre 2 au voisinage de $(0, 0)$.

Exercice 9.13 (Fonction non différentiable avec partielles). Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (a) Montrer que f est continue en $(0, 0)$.
- (b) Calculer les dérivées partielles de f en $(0, 0)$.
- (c) Montrer que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Résumé du chapitre

Résumé — Chapitre 9

1. **Topologie de $\mathbb{R}^n$.** Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes (théorème 9.1). Les notions d'ouverts, fermés, compacts, convergence de suites sont indépendantes de la norme choisie.

2. **Limites et continuité.** La limite double est plus forte que les limites itérées : celles-ci peuvent exister sans que la limite double n'existe (exemple 9.2). Une fonction continue sur un compact atteint ses bornes (théorème 9.2).
3. **Dérivées partielles.** L'existence de toutes les dérivées partielles en un point n'implique ni la continuité ni la différentiabilité (exemple 9.3).
4. **Différentiabilité.** Une fonction est différentiable en a si elle admet une approximation affine de la forme $f(a+h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|)$, où L est linéaire. La différentiabilité implique la continuité (théorème 9.4) et l'existence des dérivées partielles (théorème 9.5).
5. **Condition $\mathcal{C}^1$.** Si les dérivées partielles existent et sont continues, alors f est différentiable (théorème 9.6). C'est le critère le plus utilisé en pratique.
6. **Règle de la chaîne.** $d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$ (théorème 9.7). En termes de jacobiniennes : $J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \cdot J_f(a)$.
7. **Gradient.** $\nabla f(a)$ pointe dans la direction de plus grande croissance et est orthogonal aux lignes de niveau.
8. **Théorème de Schwarz.** Sous hypothèse de continuité des dérivées secondes, l'ordre de dérivation est indifférent (théorème 9.8).
9. **Taylor.** La formule de Taylor à l'ordre 2 fait intervenir la matrice hessienne $H_f(a)$ (théorème 9.10).
10. **Extrema.** Condition nécessaire : $\nabla f(a) = 0$. La nature du point critique est déterminée par le signe de la hessienne : définie positive (minimum), définie négative (maximum), indéfinie (point selle) (théorème 9.12).

Chapitre 10

Intégrales Multiples et Changement de Variables

Le calcul intégral d'une variable, développé au chapitre 7, permet de mesurer des longueurs, des aires sous une courbe, des travaux le long d'un axe. Mais dès que l'on souhaite calculer le *volume* d'un solide, la *masse* d'une plaque de densité variable, ou le *centre de masse* d'un objet plan, il faut intégrer des fonctions de *plusieurs* variables. Ce chapitre étend la théorie de l'intégrale de Riemann au cadre multidimensionnel et introduit l'outil fondamental qu'est le changement de variables, dont les coordonnées polaires, cylindriques et sphériques sont les applications les plus classiques.

10.1 Intégrale double sur un rectangle

Soit $R = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle fermé de $\mathbb{R}^2$. Une *partition* de R est la donnée de partitions $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ et $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$ des deux intervalles. Les sous-rectangles sont $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, d'aire $\Delta A_{ij} = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$.

Définition 10.1 (Somme de Riemann double). Soit $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et P une partition de R . Pour tout choix de points $(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \in R_{ij}$, la *somme de Riemann* associée est

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \Delta A_{ij}.$$

Définition 10.2. Intégrabilité au sens de Riemann sur un rectangle. La fonction $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ bornée est dite *intégrable au sens de Riemann* sur R si les sommes de Darboux supérieure et inférieure coïncident, c'est-à-dire si

$$\inf_P U(f, P) = \sup_P L(f, P),$$

où $U(f, P) = \sum_{i,j} \sup_{R_{ij}} f \Delta A_{ij}$ et $L(f, P) = \sum_{i,j} \inf_{R_{ij}} f \Delta A_{ij}$. La valeur commune est notée

$$\iint_R f(x, y) dx dy \quad \text{ou} \quad \iint_R f dA.$$

Théorème 10.1 (Intégrabilité des fonctions continues). Toute fonction continue sur un rectangle fermé $R = [a, b] \times [c, d]$ est intégrable au sens de Riemann sur R .

Démonstration. Puisque R est compact et f est continue sur R , la fonction f est uniformément continue sur R (théorème de Heine). Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que $\|(x, y) - (x', y')\| < \delta$ implique $|f(x, y) - f(x', y')| < \frac{\varepsilon}{|R|}$, où $|R| = (b - a)(d - c)$. Pour toute partition P de pas $\|P\| < \delta/\sqrt{2}$, le diamètre de chaque sous-rectangle R_{ij} est inférieur à δ . Par conséquent

$$\sup_{R_{ij}} f - \inf_{R_{ij}} f < \frac{\varepsilon}{|R|},$$

et donc

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i,j} (\sup_{R_{ij}} f - \inf_{R_{ij}} f) \Delta A_{ij} < \frac{\varepsilon}{|R|} \sum_{i,j} \Delta A_{ij} = \varepsilon.$$

Le critère de Riemann assure l'intégrabilité de f . □

10.2 Théorème de Fubini

Le théorème de Fubini ramène le calcul d'une intégrale double à deux intégrales itérées simples.

Théorème 10.2 (Fubini). Soit $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy. \quad (10.1)$$

Démonstration. Posons $\varphi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$. Montrons d'abord que φ est continue. Soit $x_0 \in [a, b]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, l'uniforme continuité de f sur R fournit $\delta > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta$ implique $|f(x, y) - f(x_0, y)| < \frac{\varepsilon}{d - c}$ pour tout $y \in [c, d]$. Alors

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq \int_c^d |f(x, y) - f(x_0, y)| dy < \frac{\varepsilon}{d - c} \cdot (d - c) = \varepsilon.$$

Montrons maintenant l'égalité (10.1) (première forme). Considérons une partition P de R en sous-rectangles $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$. Puisque f est continue et R_{ij} est compact, f atteint ses bornes sur R_{ij} . On a, pour chaque i fixé,

$$\sum_{j=1}^n \inf_{R_{ij}} f \cdot (y_j - y_{j-1}) \leq \int_c^d f(x_i^*, y) dy \leq \sum_{j=1}^n \sup_{R_{ij}} f \cdot (y_j - y_{j-1})$$

pour tout $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. En sommant sur i et en multipliant par $(x_i - x_{i-1})$, on encadre $\int_a^b \varphi(x) dx$ entre $L(f, P)$ et $U(f, P)$. Puisque f est intégrable sur R , on obtient

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \iint_R f(x, y) dx dy.$$

La seconde égalité s'obtient par symétrie des rôles de x et y . $\square$

Exemple 10.1. Calculons $I = \iint_R xy^2 dx dy$ avec $R = [0, 1] \times [0, 2]$.

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^2 xy^2 dy \right) dx = \int_0^1 x \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^2 dx = \int_0^1 \frac{8x}{3} dx = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{3}.$$

10.3 Intégrale double sur un domaine borné

En pratique, on intègre rarement sur un rectangle ; les domaines sont délimités par des courbes.

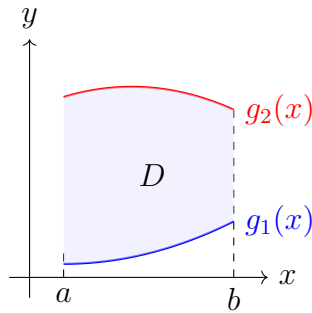
Définition 10.3 (Domaines simples). Un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ est dit de *type I* s'il est de la forme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

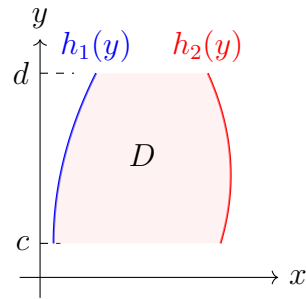
où $g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues avec $g_1 \leq g_2$. Le domaine D est de *type II* s'il est de la forme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

où $h_1, h_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues avec $h_1 \leq h_2$.



Type I



Type II

Proposition 10.1. Si D est un domaine de type I et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx. \quad (10.2)$$

Symétriquement, si D est de type II,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy. \quad (10.3)$$

Exemple 10.2 (Intégrale sur un triangle). Soit D le triangle de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, c'est-à-dire $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$. Calculons $I = \iint_D (x + y) \, dx \, dy$.

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x + y) \, dy \right) dx = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left(x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx.$$

Développons :

$$x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2} = x - x^2 + \frac{1 - 2x + x^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}.$$

$$\text{Donc } I = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Exemple 10.3 (Intégrale sur un disque). Soit $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. En tant que domaine de type I, $D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$. Alors

$$\iint_D 1 \, dx \, dy = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \, dx = \int_{-1}^1 2\sqrt{1-x^2} \, dx = \pi,$$

cette dernière intégrale se calculant par le changement de variable $x = \sin \theta$. Le résultat attendu πr^2 (ici $r = 1$) est retrouvé. Nous verrons en section 10.4 un calcul plus élégant en coordonnées polaires.

10.4 Changement de variables dans les intégrales multiples

Théorème 10.3 (Changement de variables). Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ d'image $V = \Phi(U)$. Pour toute fonction $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ continue à support compact (ou intégrable),

$$\int_V f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \int_U f(\Phi(\mathbf{u})) |\det J_\Phi(\mathbf{u})| \, d\mathbf{u}, \quad (10.4)$$

où $J_\Phi(\mathbf{u})$ est la matrice jacobienne de Φ en $\mathbf{u}$.

Remarque 10.1. Le facteur $|\det J_\Phi|$ s'appelle le *jacobien* du changement de variables. Il mesure le rapport local des volumes : un élément infinitésimal de volume $d\mathbf{u}$ est transformé en un élément de volume $|\det J_\Phi| \, d\mathbf{u}$.

10.4.1 Coordonnées polaires

Le changement de variables le plus fondamental en dimension 2 est le passage en coordonnées polaires :

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta), \quad r > 0, \quad \theta \in]0, 2\pi[.$$

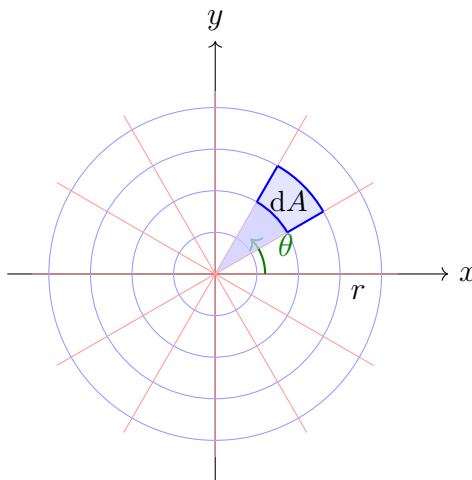
La matrice jacobienne est

$$J_{\Phi}(r, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Le jacobien vaut

$$\det J_{\Phi}(r, \theta) = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r. \quad (10.5)$$

On a donc $dx dy = r dr d\theta$.



Exemple 10.4 (Aire du disque). Soit $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$. En coordonnées polaires,

$$\text{Aire}(D) = \iint_D dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} d\theta = \pi R^2.$$

Théorème 10.4 (Intégrale de Gauss). On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (10.6)$$

Démonstration. Posons $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$. Puisque l'intégrande est positif et pair, $I > 0$; montrons que $I^2 = \pi$. Par le théorème de Fubini (étendu aux intégrales impropres, ce qui est licite ici car l'intégrande est positif),

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Effectuons le passage en coordonnées polaires ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $dx dy = r dr d\theta$) :

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr.$$

On calcule l'intégrale radiale par le changement de variable $u = r^2$, $du = 2r dr$:

$$\int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-u} du = \frac{1}{2} [-e^{-u}]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

Donc $I^2 = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$, et comme $I > 0$, on conclut $I = \sqrt{\pi}$. $\square$

Remarque 10.2. L'intégrale de Gauss est fondamentale en théorie des probabilités : la densité de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ est $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, dont l'intégrale vaut 1 précisément grâce à (10.6).

10.5 Intégrales triples

Le théorème de Fubini s'étend naturellement à la dimension 3 : si f est continue sur un domaine $E \subset \mathbb{R}^3$ borné et simplement connexe, l'intégrale triple $\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz$ se ramène à des intégrales itérées.

10.5.1 Coordonnées cylindriques

On pose $(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ avec $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$. Le jacobien est

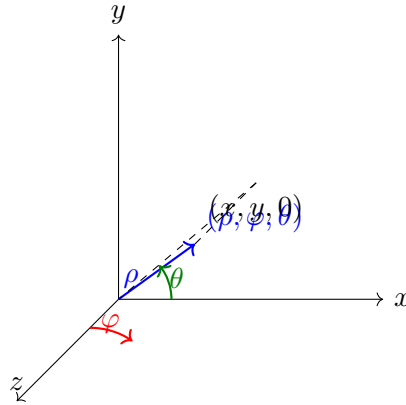
$$\det J = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r.$$

Donc $dx dy dz = r dr d\theta dz$.

10.5.2 Coordonnées sphériques

On pose

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta, \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \\ z = \rho \cos \varphi, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad \varphi \in [0, \pi], \quad \theta \in [0, 2\pi[.$$



La matrice jacobienne est

$$J = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

Un calcul direct (développement par rapport à la troisième ligne) donne

$$\det J = \rho^2 \sin \varphi. \quad (10.7)$$

Donc $dx dy dz = \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$.

Dérivation du jacobien sphérique. Développons selon la troisième ligne :

$$\begin{aligned} \det J &= \cos \varphi (\rho \cos \varphi \sin \theta \cdot (-\rho \sin \varphi \sin \theta) - \rho \sin \varphi \cos \theta \cdot \rho \cos \varphi \cos \theta) \cdot (-1)^{3+2} \\ &\quad + (-\rho \sin \varphi) (\sin \varphi \cos \theta \cdot \rho \sin \varphi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta \cdot \rho \sin \varphi \sin \theta) \cdot (-1)^{3+2} \\ &\quad \text{(en tenant compte de la convention de signe).} \end{aligned}$$

Plus simplement, développons par la troisième ligne :

$$\begin{aligned} \det J &= \cos \varphi \det \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta \end{pmatrix} \\ &\quad - (-\rho \sin \varphi) \det \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le premier déterminant vaut $\rho \sin^2 \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \rho \sin^2 \varphi$. Le second vaut 0 (les colonnes sont proportionnelles : la seconde est $\rho \cos \varphi$ fois la première... non, calculons). En fait, le second déterminant vaut $\rho \cos \varphi \sin \varphi (\sin \theta \cos \theta - \cos \theta \sin \theta) = 0$. Mais il faut aussi le troisième cofacteur.

Reprenons proprement le développement selon la troisième ligne :

$$\det J = \cos \varphi \cdot \rho \sin^2 \varphi + \rho \sin \varphi \cdot \det \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta \end{pmatrix} + 0.$$

Non — recalculons directement. Développons par la première colonne :

$$\begin{aligned} \det J &= \sin \varphi \cos \theta (\rho \cos \varphi \sin \theta \cdot 0 - \rho \sin \varphi \cos \theta \cdot (-\rho \sin \varphi)) \\ &\quad - \sin \varphi \sin \theta (\rho \cos \varphi \cos \theta \cdot 0 - (-\rho \sin \varphi \sin \theta) \cdot (-\rho \sin \varphi)) \\ &\quad + \cos \varphi (\rho \cos \varphi \cos \theta \cdot \rho \sin \varphi \cos \theta + \rho \sin \varphi \sin \theta \cdot \rho \cos \varphi \sin \theta). \end{aligned}$$

Simplifions chaque terme :

$$\begin{aligned} &= \sin \varphi \cos \theta \cdot \rho^2 \sin^2 \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta \cdot (-\rho^2 \sin^2 \varphi \sin \theta) \\ &\quad + \cos \varphi \cdot \rho^2 \cos \varphi \sin \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= \rho^2 \sin^3 \varphi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^3 \varphi \sin^2 \theta + \rho^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi \\ &= \rho^2 \sin^3 \varphi + \rho^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi = \rho^2 \sin \varphi. \end{aligned}$$

□

Exemple 10.5 (Volume de la boule). Le volume de la boule $B_R = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ est

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = 2\pi \cdot [-\cos \varphi]_0^\pi \cdot \frac{R^3}{3} = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Exemple 10.6 (Moment d'inertie de la boule homogène). Soit B_R la boule de centre O et de rayon R , de densité $\mu = 1$. Le moment d'inertie par rapport à l'axe Oz est

$$I_z = \iiint_{B_R} (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz.$$

En coordonnées sphériques, $x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2 \varphi$, d'où

$$\begin{aligned} I_z &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \rho^2 \sin^2 \varphi \cdot \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta \\ &= 2\pi \cdot \frac{R^5}{5} \cdot \int_0^\pi \sin^3 \varphi \, d\varphi = 2\pi \cdot \frac{R^5}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8\pi R^5}{15}. \end{aligned}$$

En termes de la masse $M = \frac{4}{3}\pi R^3$, on obtient $I_z = \frac{2}{5}MR^2$.

10.6 Applications : aires, volumes, centres de masse

Proposition 10.2 (Aire d'un domaine plan). L'aire d'un domaine mesurable $D \subset \mathbb{R}^2$ est $\text{Aire}(D) = \iint_D dx \, dy$.

Définition 10.4 (Centre de masse). Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine de densité surfacique $\mu(x, y)$. La masse totale est $M = \iint_D \mu \, dx \, dy$, et le centre de masse $(\bar{x}, \bar{y})$ est défini par

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_D x \mu(x, y) \, dx \, dy, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iint_D y \mu(x, y) \, dx \, dy.$$

Exemple 10.7 (Centre de masse d'un demi-disque). Soit $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}$ de densité uniforme $\mu = 1$. Par symétrie, $\bar{x} = 0$. La masse est $M = \frac{\pi R^2}{2}$. En coordonnées polaires,

$$M\bar{y} = \int_0^\pi \int_0^R r \sin \theta \cdot r \, dr \, d\theta = \frac{R^3}{3} \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta = \frac{R^3}{3} \cdot 2 = \frac{2R^3}{3}.$$

Donc $\bar{y} = \frac{2R^3}{3} \cdot \frac{2}{\pi R^2} = \frac{4R}{3\pi}$.

10.7 Exercices

Exercice 10.1 (★). Calculer $\iint_R (x^2 - y) \, dx \, dy$ avec $R = [0, 2] \times [-1, 1]$.

Exercice 10.2 (★). Calculer $\iint_D xy \, dx \, dy$ où D est le triangle de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$.

Exercice 10.3 (★). En utilisant le théorème de Fubini, montrer que $\int_0^1 \int_0^x e^{x^2} \, dy \, dx = \frac{e - 1}{2}$.

Exercice 10.4 (★). Calculer l'aire du domaine limité par les paraboles $y = x^2$ et $x = y^2$.

Exercice 10.5 (★★). Calculer $\iint_D e^{x^2+y^2} \, dx \, dy$ où $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Exercice 10.6 (★★). Calculer $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} \, dx \, dy$ en intervertissant l'ordre d'intégration.

Exercice 10.7 (★★). Calculer le volume du solide délimité par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et le plan $z = 4$.

Exercice 10.8 (★★). Soit D le domaine défini par $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ et $y \geq 0$. Calculer $\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \, dx \, dy$.

Exercice 10.9 (★★). Calculer le centre de masse du quart de disque $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ de densité uniforme.

Exercice 10.10 (★★★). Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que pour tout $x > 0$,

$$\int_0^x \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} f(t_3) dt_3 dt_2 dt_1 = \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 f(t) dt.$$

Indication : intervertir les ordres d'intégration.

Exercice 10.11 (★★★). Calculer $\iiint_{B_R} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz$ où B_R est la boule de rayon R centrée à l'origine.

Exercice 10.12 (★★★). Soit T le tétraèdre $\{(x, y, z) : x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$. Calculer son moment d'inertie par rapport à l'axe Oz , en supposant une densité uniforme.

Résumé du chapitre 10.

- L'intégrale double se définit via les sommes de Darboux sur un rectangle; toute fonction continue est intégrable.
- Le théorème de Fubini ramène une intégrale double à des intégrales itérées simples.
- Sur un domaine de type I (resp. II), on intègre d'abord en y (resp. x) entre les courbes frontières.
- Le changement de variables fait intervenir le jacobien $|\det J_\Phi|$.
- Coordonnées polaires : $dx dy = r dr d\theta$.
- Coordonnées cylindriques : $dx dy dz = r dr d\theta dz$.
- Coordonnées sphériques : $dx dy dz = \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$.
- L'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ se démontre par passage en polaires.

Chapitre 11

Introduction aux Courbes et Intégrales Curvilignes

Le mouvement d'un point matériel dans le plan ou l'espace, le travail d'une force le long d'une trajectoire, la longueur d'un fil courbe : autant de situations qui exigent de savoir *intégrer le long d'une courbe*. Ce chapitre développe le formalisme des courbes paramétrées, définit rigoureusement la notion de longueur d'arc, puis introduit les deux types d'intégrales curvilignes (scalaire et vectorielle). Il culmine avec le théorème de Green, qui relie une intégrale curviligne à une intégrale double.

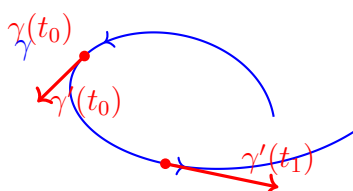
11.1 Courbes paramétrées

Définition 11.1 (Courbe paramétrée). Un *arc paramétré* de $\mathbb{R}^n$ est une application $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^0$. L'image $\gamma([a, b])$ est le *support* (ou *trace*) de la courbe. Les points $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ sont les *extrémités* ; la courbe est dite *fermée* si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Définition 11.2 (Courbe régulière). L'arc paramétré $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dit *de classe $\mathcal{C}^1$* si γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Il est *régulier* si de plus $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a, b]$. Il est $\mathcal{C}^1$ *par morceaux* s'il existe une subdivision $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ telle que $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ pour tout i .

Définition 11.3 (Vecteur tangent). Si γ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\gamma'(t_0) \neq 0$, le *vecteur tangent* à la courbe au point $\gamma(t_0)$ est $\gamma'(t_0)$, et la *droite tangente* est l'ensemble

$$\{\gamma(t_0) + s \gamma'(t_0) : s \in \mathbb{R}\}.$$



Exemple 11.1 (Exemples fondamentaux). (i) **Cercle** : $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. On a $\gamma'(t) = (-R \sin t, R \cos t)$, de norme $R \neq 0$: la courbe est régulière.

(ii) **Ellipse** : $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $a, b > 0$.

(iii) **Cycloïde** : $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$. On a $\gamma'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$, qui s'annule en $t = 0$ et $t = 2\pi$: la courbe n'est pas régulière mais est $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

(iv) **Hélice circulaire** : $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 4\pi]$, dans $\mathbb{R}^3$. On a $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$, de norme $\sqrt{2}$: la courbe est régulière.

11.2 Longueur d'arc

Définition 11.4 (Longueur d'une courbe). Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ un arc continu. Pour toute subdivision $\sigma = (a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b)$, on pose

$$\ell(\gamma, \sigma) = \sum_{i=1}^k \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|.$$

La *longueur* de γ est $L(\gamma) = \sup_{\sigma} \ell(\gamma, \sigma) \in [0, +\infty]$. La courbe est dite *rectifiable* si $L(\gamma) < +\infty$.

Théorème 11.1 (Formule de la longueur d'arc). Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors γ est rectifiable et

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt. \quad (11.1)$$

Démonstration. MAJORATION. Soit $\sigma = (t_0, \dots, t_k)$ une subdivision de $[a, b]$. Pour chaque i , par le théorème fondamental de l'analyse,

$$\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt,$$

d'où, par l'inégalité triangulaire pour les intégrales,

$$\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt.$$

En sommant sur i , $\ell(\gamma, \sigma) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$. En prenant le supremum sur σ , $L(\gamma) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt < +\infty$.

MINORATION. Puisque γ' est continue sur $[a, b]$ (compact), elle est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que $|s - t| < \delta$ implique $\|\gamma'(s) - \gamma'(t)\| < \varepsilon$. Prenons une subdivision σ de pas $\|\sigma\| < \delta$. Pour $t \in [t_{i-1}, t_i]$,

$$\|\gamma'(t)\| \leq \|\gamma'(t_{i-1})\| + \varepsilon,$$

et de même $\|\gamma'(t_{i-1})\| \leq \|\gamma'(t)\| + \varepsilon$, d'où $\|\gamma'(t)\| \geq \|\gamma'(t_{i-1})\| - \varepsilon$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| &= \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt \right\| \geq \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t_{i-1}) dt \right\| - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t) - \gamma'(t_{i-1})\| dt \\ &\geq \|\gamma'(t_{i-1})\| (t_i - t_{i-1}) - \varepsilon(t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

En sommant,

$$\ell(\gamma, \sigma) \geq \sum_{i=1}^k \|\gamma'(t_{i-1})\| (t_i - t_{i-1}) - \varepsilon(b - a).$$

Or la somme de droite est une somme de Riemann pour $\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$. En raffinant σ ,

$$L(\gamma) \geq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt - \varepsilon(b - a).$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, $L(\gamma) \geq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$. □

Définition 11.5 (Abscisse curviligne). Soit $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ un arc $\mathcal{C}^1$ régulier. L'*abscisse curviligne* à partir du point $\gamma(a)$ est la fonction $s: [a, b] \rightarrow [0, L]$ définie par

$$s(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du.$$

Puisque γ est régulier, $s'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$, donc s est un difféomorphisme croissant de $[a, b]$ sur $[0, L]$.

Proposition 11.1 (Paramétrisation par longueur d'arc). Si $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un arc $\mathcal{C}^1$ régulier et s est l'abscisse curviligne, alors $\tilde{\gamma} = \gamma \circ s^{-1}: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifie $\|\tilde{\gamma}'(\sigma)\| = 1$ pour tout $\sigma \in [0, L]$.

Démonstration. Par la règle de dérivation des fonctions composées, $\tilde{\gamma}'(\sigma) = \gamma'(s^{-1}(\sigma)) \cdot (s^{-1})'(\sigma)$. Or $(s^{-1})'(\sigma) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}$ en $t = s^{-1}(\sigma)$. Donc $\|\tilde{\gamma}'(\sigma)\| = \frac{\|\gamma'(t)\|}{\|\gamma'(t)\|} = 1$. □

Exemple 11.2 (Longueur du cercle). Pour le cercle $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, on a $\|\gamma'(t)\| = R$, d'où $L = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R$.

Exemple 11.3 (Longueur de la cycloïde). Pour $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $\|\gamma'(t)\|^2 = (1 - \cos t)^2 + \sin^2 t = 2(1 - \cos t) = 4 \sin^2(t/2)$, donc $\|\gamma'(t)\| = 2 |\sin(t/2)| = 2 \sin(t/2)$ sur $[0, 2\pi]$, et

$$L = \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{t}{2} dt = \left[-4 \cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = -4(-1) + 4(1) = 8.$$

11.3 Intégrales curvilignes de première espèce

Définition 11.6 (Intégrale curviligne scalaire). Soit $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ un arc $\mathcal{C}^1$ (ou $\mathcal{C}^1$ par morceaux) et f une fonction continue définie sur le support de γ . L'intégrale curviligne de première espèce (ou intégrale scalaire) de f le long de γ est

$$\int_{\gamma} f \, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt. \quad (11.2)$$

Remarque 11.1. Cette intégrale ne dépend pas de la paramétrisation choisie pour la courbe : si $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ est un reparamétrage admissible (avec φ croissant et de classe $\mathcal{C}^1$), alors $\int_{\tilde{\gamma}} f \, ds = \int_{\gamma} f \, ds$.

Exemple 11.4 (Masse d'un fil). Un fil en forme de demi-cercle $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi]$, a une densité linéique $\mu(x, y) = y$. Sa masse est

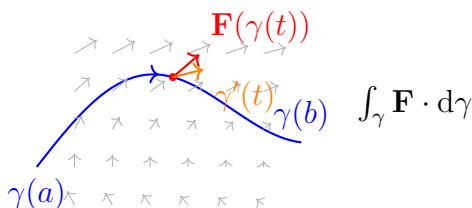
$$M = \int_{\gamma} \mu \, ds = \int_0^{\pi} \sin t \cdot 1 \, dt = [-\cos t]_0^{\pi} = 2.$$

11.4 Intégrales curvilignes de seconde espèce

Définition 11.7. Intégrale curviligne de seconde espèce (travail)int-curve-travail Soit $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ un arc $\mathcal{C}^1$ par morceaux et $\mathbf{F}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs continu défini sur un ouvert Ω contenant le support de γ . L'intégrale curviligne de seconde espèce (ou circulation) de $\mathbf{F}$ le long de γ est

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\gamma = \int_a^b \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt. \quad (11.3)$$

Remarque 11.2. En mécanique, si $\mathbf{F}$ est un champ de forces et γ une trajectoire, $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\gamma$ représente le *travail* de la force $\mathbf{F}$ le long du chemin γ . Contrairement à l'intégrale de première espèce, cette intégrale *change de signe* si l'on renverse le sens de parcours.



Exemple 11.5. Soit $\mathbf{F}(x, y) = (y, x)$ et $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi/2]$. Alors $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$ et

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\gamma &= \int_0^{\pi/2} (\sin t \cdot (-\sin t) + \cos t \cdot \cos t) \, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t - \sin^2 t) \, dt = \int_0^{\pi/2} \cos(2t) \, dt = \left[\frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{\pi/2} = 0. \end{aligned}$$

Lorsque $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ dans $\mathbb{R}^2$, on note aussi $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\gamma = \int_{\gamma} F_1 dx + F_2 dy$, qu'on appelle une *forme différentielle*.

11.5 Champs de gradient et potentiel

Définition 11.8 (Champ de gradient). Un champ de vecteurs $\mathbf{F}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ (avec Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$) est un *champ de gradient* (ou *champ conservatif*) s'il existe une fonction $V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\mathbf{F} = \nabla V$. La fonction V est appelée un *potentiel* de $\mathbf{F}$.

Théorème 11.2 (Formule fondamentale pour les champs de gradient). Soit $\mathbf{F} = \nabla V$ un champ de gradient sur un ouvert Ω et $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ un arc $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\gamma = V(\gamma(b)) - V(\gamma(a)). \quad (11.4)$$

En particulier, l'intégrale ne dépend que des extrémités et, si γ est fermée, elle est nulle.

Démonstration. Par la règle de dérivation des fonctions composées, la fonction $t \mapsto V(\gamma(t))$ est dérivable et

$$\frac{d}{dt} V(\gamma(t)) = \nabla V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t).$$

Le théorème fondamental de l'analyse (chapitre 7) donne alors

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\gamma = \int_a^b \frac{d}{dt} V(\gamma(t)) dt = V(\gamma(b)) - V(\gamma(a)). \quad \square$$

Corollaire 11.1. Si $\mathbf{F} = \nabla V$ et γ est une courbe fermée dans Ω , alors $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\gamma = 0$.

Proposition 11.2 (Condition nécessaire d'exactitude). Si $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ est un champ de gradient de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, alors

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \quad \text{sur } \Omega. \quad (11.5)$$

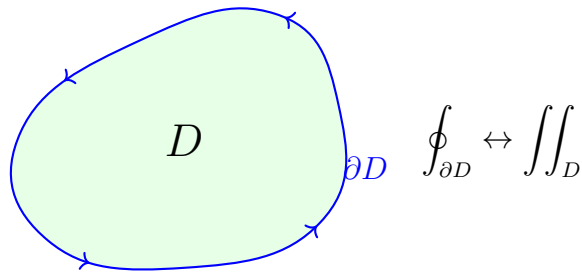
Démonstration. Si $\mathbf{F} = \nabla V = (\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y})$, alors $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}$ et $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$. Le théorème de Schwarz (les dérivées partielles croisées de classe $\mathcal{C}^1$ sont égales) donne le résultat. $\square$

Remarque 11.3. La condition (11.5) n'est pas suffisante en général ; elle l'est si Ω est *simplement connexe* (par exemple convexe, ou étoilé). Nous en verrons un contre-exemple célèbre en section 11.7.

11.6 Théorème de Green

Théorème 11.3 (Green). Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine borné dont la frontière ∂D est une courbe fermée $\mathcal{C}^1$ par morceaux, parcourue dans le sens trigonométrique (positif). Soient $P, Q: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors

$$\oint_{\partial D} (P dx + Q dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (11.6)$$



Idée de la preuve pour un domaine de type I et II. Supposons que D soit à la fois de type I et de type II. Montrons séparément que

$$\oint_{\partial D} P dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \quad (11.7)$$

et

$$\oint_{\partial D} Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy. \quad (11.8)$$

La somme donnera (11.6).

Preuve de (11.7). Écrivons D comme domaine de type I : $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$. Alors

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy dx = \int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))] dx.$$

D'autre part, la frontière ∂D , parcourue dans le sens positif, se décompose en :

- le chemin inférieur $C_1: x \mapsto (x, g_1(x))$, de a à b (sens positif en x),
- le chemin supérieur $C_2: x \mapsto (x, g_2(x))$, de b à a (sens négatif en x).

On a

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} P dx &= \int_a^b P(x, g_1(x)) dx + \int_b^a P(x, g_2(x)) dx \\ &= \int_a^b P(x, g_1(x)) dx - \int_a^b P(x, g_2(x)) dx \\ &= - \int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))] dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy. \end{aligned}$$

La preuve de (11.8) est analogue en écrivant D comme domaine de type II. □

Corollaire 11.2 (Formule de l'aire). Si D est un domaine vérifiant les hypothèses du théorème de Green, alors

$$\text{Aire}(D) = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} (x \, dy - y \, dx). \quad (11.9)$$

Démonstration. On applique (11.6) avec $P = -y$ et $Q = x$. Alors $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - (-1) = 2$, d'où $\oint_{\partial D} (-y \, dx + x \, dy) = \iint_D 2 \, dx \, dy = 2 \text{Aire}(D)$. $\square$

Exemple 11.6 (Aire de l'ellipse). Pour l'ellipse $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned} \text{Aire} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t \cdot b \cos t - b \sin t \cdot (-a \sin t)) \, dt \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) \, dt = \frac{ab}{2} \cdot 2\pi = \pi ab. \end{aligned}$$

11.7 Contre-exemple : forme fermée non exacte

Considérons le champ de vecteurs

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right), \quad (11.10)$$

défini sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Proposition 11.3. Le champ $\mathbf{F}$ vérifie $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ sur Ω (la forme $F_1 \, dx + F_2 \, dy$ est fermée), mais $\mathbf{F}$ n'est pas un champ de gradient sur Ω .

Démonstration. La forme est fermée. Calculons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial y} &= \frac{-(x^2 + y^2) + y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} &= \frac{(x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

On a bien $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$.

La forme n'est pas exacte. Prenons $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, qui est une courbe fermée dans Ω . Alors $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$ et

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\gamma &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{1} \cdot (-\sin t) + \frac{\cos t}{1} \cdot \cos t \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi \neq 0. \end{aligned}$$

Si $\mathbf{F}$ était un gradient, la circulation sur toute courbe fermée serait nulle (corollaire 11.1). C'est une contradiction. $\square$

Remarque 11.4. Sur le demi-plan $\{(x, y) : x > 0\}$ (ou tout ouvert simplement connexe contenu dans Ω), $\mathbf{F}$ est un gradient : $\mathbf{F} = \nabla(\arctan(y/x))$. Le défaut d'exactitude globale provient de la topologie non triviale de $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, qui n'est pas simplement connexe. L'intégrale $\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\gamma$ mesure l'indice de γ par rapport à l'origine, un invariant topologique.

11.8 Exercices

Exercice 11.1 (★). Calculer la longueur de l'arc $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ pour $t \in [0, 1]$.

Exercice 11.2 (★). Calculer la longueur d'une arche de cycloïde $\gamma(t) = (R(t - \sin t), R(1 - \cos t))$, $t \in [0, 2\pi]$.

Exercice 11.3 (★). Calculer l'intégrale curviligne $\int_{\gamma} (x^2 + y^2) ds$ où γ est le quart de cercle unité $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi/2]$.

Exercice 11.4 (★). Soit $\mathbf{F}(x, y) = (2xy, x^2)$. Vérifier que $\mathbf{F}$ est un champ de gradient et trouver un potentiel V .

Exercice 11.5 (★★). Calculer la circulation de $\mathbf{F}(x, y) = (x - y, x + y)$ le long du cercle $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, de deux façons : directement et par le théorème de Green.

Exercice 11.6 (★★). Soit $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Calculer $L(\gamma)$.

Exercice 11.7 (★★). Calculer $\int_{\gamma} y^2 dx + x dy$ où γ est la parabole $y = x^2$ de $(0, 0)$ à $(1, 1)$.

Exercice 11.8 (★★). En utilisant la formule de l'aire de Green, calculer l'aire du domaine délimité par l'astroïde $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Exercice 11.9 (★★★). Soit $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $\omega = \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$. Calculer $\int_{\gamma} \omega$ pour $\gamma(t) = (2 \cos t + 1, 2 \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Le résultat change-t-il si l'on remplace le centre du cercle par $(3, 0)$?

Exercice 11.10 (★★★). Soit D le domaine délimité par $y = 0$, $x = 1$ et $y = x$. Calculer $\oint_{\partial D} (e^x \sin y) dx + (e^x \cos y) dy$ de deux façons : directement et par le théorème de Green.

Exercice 11.11 (★★★). Montrer que tout champ de vecteurs $\mathbf{F}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert étoilé $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ vérifiant $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ est un champ de gradient. *Indication : construire explicitement le potentiel par intégration le long de segments.*

Exercice 11.12 (★★★). Soit γ une courbe fermée simple $\mathcal{C}^1$ dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbf{n}$ le vecteur normal unitaire extérieur. Pour $\mathbf{F}$ de classe $\mathcal{C}^1$, montrer la formule de flux-divergence en dimension 2 :

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy,$$

où D est le domaine intérieur à γ et $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$. *Indication : déduire cette formule du théorème de Green.*

Résumé du chapitre 11.

- Un arc paramétré $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est régulier si $\gamma'(t) \neq 0$ partout.
- Longueur d'arc : $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$.
- L'abscisse curviligne paramétrise la courbe à vitesse 1.
- Intégrale curviligne scalaire : $\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$.
- Intégrale curviligne de travail : $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\gamma = \int_a^b \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$.
- Si $\mathbf{F} = \nabla V$, alors $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\gamma = V(\gamma(b)) - V(\gamma(a))$.
- Théorème de Green : $\oint_{\partial D} (P dx + Q dy) = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dx dy$.
- La condition $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ est nécessaire mais pas suffisante pour l'existence d'un potentiel (topologie!).

Remarques conclusives : perspectives

Ce cours a parcouru un chemin allant de l'intégrale de Riemann en une variable jusqu'au théorème de Green, en passant par les séries de fonctions, le calcul différentiel en plusieurs variables et les intégrales multiples. Voici quelques pistes de prolongement naturel.

Vers la théorie de la mesure. L'intégrale de Riemann, si intuitive soit-elle, connaît des limitations sérieuses (fonctions intégrables trop restrictives, passages à la limite insuffisants). La *théorie de la mesure* de Lebesgue fournit un cadre beaucoup plus souple, où les théorèmes de convergence dominée et monotone remplacent avantageusement les conditions de convergence uniforme. C'est le fondement de l'analyse moderne et des probabilités.

Vers l'analyse complexe. Les intégrales curvilignes prennent une dimension nouvelle lorsque l'on remplace $\mathbb{R}^2$ par $\mathbb{C}$. La théorie des fonctions holomorphes (Cauchy, résidus, séries de Laurent) révèle des liens profonds entre l'analyse, l'algèbre et la géométrie. Le théorème de Green y apparaît comme un cas particulier de la formule intégrale de Cauchy.

Vers la géométrie différentielle. Les formes différentielles que nous avons rencontrées (du type $P dx + Q dy$) se généralisent en *formes différentielles de degré k* sur des variétés, et le théorème de Green se généralise en le *théorème de Stokes*

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega,$$

qui unifie les théorèmes de Green, de la divergence et de Stokes classique.

Bonne continuation.

Bibliographie

- [1] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3^e édition, McGraw-Hill, 1976.
- [2] C. Zuily et H. Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2013.
- [3] E. Ramis, C. Deschamps et J. Odoux, *Cours de mathématiques spéciales*, tomes 1–4, Masson, 1991.
- [4] T. Tao, *Analysis II*, 3^e édition, Hindustan Book Agency / Springer, 2016.
- [5] I. Pompeïani et A. Tarrago, *Analyse*, Ellipses, 2008.
- [6] M. Spivak, *Calculus on Manifolds*, W. A. Benjamin, 1965.

Index

$\mathcal{C}^1$

implique différentiable, 36

abscisse curviligne, 57

aire, 53

formule de Green, 61

analyse complexe, 63

arc paramétré, 55

astroïde, 62

boule

fermée, 31

ouverte, 31

volume, 52

calcul différentiel

plusieurs variables, 29

centre de masse, 53

cercle (paramétrisation), 56

champ conservatif, 59

champ de gradient, 59

changement de variable, 14

changement de variables, 46

intégrales multiples, 49

compact, 31

condition d'exactitude, 59

continuité, 32

dans $\mathbb{R}^n$, 32

contre-exemple

dérivées partielles sans continuité, 34

convergence

composante par composante, 31

convergence normale, 23

convergence simple, 19

sans convergence uniforme, 20

convergence uniforme, 19

définition, 20

et continuité, 21

coordonnées cylindriques, 51

coordonnées polaires, 49

coordonnées sphériques, 51

courbe

$\mathcal{C}^1$ par morceaux, 55

paramétrée, 55

rectifiable, 56

régulière, 55

courbe paramétrée, 55

critère d'intégrabilité, 8

critère de Cauchy uniforme, 20

critère de comparaison, 15

critère de Weierstrass, 23

critère du second ordre, 42

croissance de l'intégrale, 11

cycloïde, 56

Deschamps, 64

différentiabilité, 29, 34, 35

implique continuité, 35

différentielle, 35

et dérivées partielles, 35

domaine

de type I, 48

de type II, 48

droite tangente, 55

définie négative, 42

définie positive, 42

dérivation terme à terme, 24

dérivée partielle, 29, 33

ne suffit pas pour la continuité, 34

seconde, 39

dérivées partielles

d'ordre supérieur, 39

développement en série entière, 25

ellipse, 56

extrema

locaux, 41

fermé, 31

fonction Bêta, 16

- fonction continue
 - intégrabilité, 9
- fonction continue par morceaux, 9
- fonction de Weierstrass, 27
- fonction Gamma, 16
- fonction monotone
 - intégrabilité, 9
- fonctions intégrables, 8
- forme différentielle, 59
- forme fermée non exacte, 61
- formule de Newton–Leibniz, 13
- formule de Stirling, 17
- formule de Taylor
 - plusieurs variables, 40
- formule de Wallis, 17
- formule fondamentale
 - champs de gradient, 59
- Fubini (théorème de), 47, 50, 51

- Gauss (intégrale de), 50
- gradient, 38
 - direction de plus grande pente, 38
- Green (théorème de), 60
- géométrie différentielle, 63

- hélice, 56

- indice d’une courbe, 61
- intersion
 - limite-dérivée, 22
 - limite-intégrale, 21
- intégrabilité
 - des fonctions continues, 47
- intégrable au sens de Riemann, 7
- intégrale
 - inférieure, 7
 - propriétés, 10
 - supérieure, 7
- intégrale curviligne, 55
 - de première espèce, 57
 - de seconde espèce, 58
 - scalaire, 57
- intégrale de Gauss, 50
- intégrale de Riemann, 5, 8
 - impropre, 16
- intégrale double, 46
- intégrale généralisée, 15

- intégrale impropre, 15
- intégrale multiple, 46
- intégrale triple, 51
- intégrales de Wallis, 16
- intégration par parties, 13
- intégration terme à terme, 23
- inégalité de Cauchy–Schwarz, 12, 39
- inégalité de la valeur moyenne, 11
- inégalité de Poincaré, 18
- inégalité triangulaire, 30

- jacobien, 36, 49

- limite
 - fonction de plusieurs variables, 32
- limite double
 - non-existence, 32
- limites itérées, 32
- linéarité de l’intégrale, 10
- longueur d’arc, 56
 - formule, 56

- masse d’un fil, 58
- matrice hessienne, 41
- matrice jacobienne, 36
- moment d’inertie, 52
- méthode d’exhaustion, 5

- norme, 29
 - ℓ^1 , 30
 - euclidienne, 30
 - infinie, 30

- Odoux, 64
- ouvert, 31

- paramétrisation par longueur d’arc, 57
- partition
 - d’un rectangle, 46
- point critique, 41
- point selle, 42
- polynômes de Bernstein, 26
- Pompeïani, 64
- positivité de l’intégrale, 11
- potentiel, 59

- Queffélec, 64
- raffinement, 6

- Ramis, 64
- rayon de convergence, 24
- relation de Chasles, 11
- Rudin, 64
- règle de la chaîne, 37

- Schwarz (condition de), 59
- Schwarz (théorème de), 59
- simplement connexe, 59
- somme de Darboux
 - inférieure, 6
 - supérieure, 6
- somme de Riemann
 - double, 46
 - en dimension 2, 46
- sommes de Darboux, 5
- sommes de Riemann, 17
- Spivak, 64
- Stokes (théorème de), 63
- subdivision, 5
- série de fonctions, 23
- série entière, 24
 - convergence uniforme, 24
 - dérivation, 24
 - intégration, 25
 - unicité, 25

- Tao, 64
- Tarrago, 64
- techniques d'intégration, 13
- test M , 23
- théorie de la mesure, 63
- théorème d'Abel radial, 25
- théorème de Schwarz, 39
- théorème de Weierstrass
 - approximation, 26
- théorème des accroissements finis, 37, 40
- théorème des bornes atteintes
 - sur un compact, 32
- théorème fondamental
 - premier, 12
 - second, 13
- théorème fondamental de l'analyse, 12
- topologie
 - de $\mathbb{R}^n$, 29
- travail, 58
- travail d'une force, 58
- vecteur tangent, 55
- Zuily, 64
- équivalence des normes, 30