

Analyse Réelle I

Notes de Cours

Des suites aux dérivées

Licence L1 — Premier semestre

Mathématiques

Année universitaire 2025–2026

Ce document est un support de cours. Il ne remplace
ni la présence en cours, ni le travail personnel.

Table des matières

Préface	5
Notations et conventions	7
1 Logique, ensembles et raisonnement mathématique	9
1.1 Propositions logiques et connecteurs	9
1.1.1 Les connecteurs logiques	9
1.1.2 Tables de vérité	10
1.2 Quantificateurs	10
1.2.1 Négation de propositions quantifiées	11
1.3 Méthodes de démonstration	12
1.3.1 Preuve directe	12
1.3.2 Preuve par contraposée	13
1.3.3 Preuve par l'absurde	13
1.3.4 Raisonnement par récurrence	14
1.4 Ensembles	16
1.4.1 Opérations sur les ensembles	16
1.5 Applications	17
1.6 Relations d'équivalence et relations d'ordre	18
Erreurs fréquentes du chapitre	19
Exercices	19
Résumé du chapitre	20
2 Le corps des réels — Axiomes et complétude	22
2.1 Rappels sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$: pourquoi $\mathbb{Q}$ ne suffit pas	22
2.2 Axiomes de corps ordonné	23
2.3 Valeur absolue	23
2.4 Parties bornées, borne supérieure, borne inférieure	24
2.5 Axiome de la borne supérieure	26
2.6 Conséquences fondamentales de la complétude	27
2.6.1 Propriété d'Archimède	27
2.6.2 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$	27
2.6.3 Densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$	28
2.6.4 Partie entière	28
2.7 Théorème des intervalles emboîtés	28
Remarque historique	29
Erreurs fréquentes du chapitre	30

Exercices	30
Résumé du chapitre	32
3 Suites numériques	33
3.1 Définitions fondamentales	33
3.2 Convergence d'une suite	34
3.3 Premiers exemples de preuves ε - N	35
3.3.1 Exemple 1 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$	35
3.3.2 Exemple 2 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$	35
3.3.3 Exemple 3 : $((-1)^n)$ diverge	36
3.4 Propriétés fondamentales	36
3.4.1 Unicité de la limite	36
3.4.2 Suites bornées	37
3.5 Théorème des gendarmes	37
3.6 Opérations sur les limites	38
3.7 Suites monotones	38
3.8 Suites extraites et Bolzano-Weierstrass	40
3.9 Suites de Cauchy	41
3.10 Suites adjacentes	42
3.11 Suites récurrentes	42
3.12 Erreurs courantes	43
3.13 Résumé du chapitre	44
3.14 Exercices	44
4 Séries numériques	46
4.1 Définitions fondamentales	46
4.2 Condition nécessaire de convergence	47
4.3 Séries géométriques	48
4.4 Séries télescopiques	48
4.5 Séries à termes positifs : critères de convergence	49
4.5.1 Critère de comparaison	49
4.5.2 Critère de d'Alembert (rapport)	49
4.5.3 Critère de Cauchy (racine)	50
4.5.4 Comparaison intégrale et séries de Riemann	50
4.6 Convergence absolue	51
4.7 Séries alternées et critère de Leibniz	51
4.8 Séries entières	52
4.8.1 Exemples fondamentaux	53
4.9 Produit de Cauchy de séries	54
4.10 Erreurs courantes	55
4.11 Résumé du chapitre	55
4.12 Exercices	55
5 Limites et Continuité des Fonctions	58
5.1 Limite d'une fonction en un point	58
5.2 Limites à gauche, à droite, limites infinies	60
5.3 Opérations sur les limites	61

5.4	Continuité en un point	62
5.5	Continuité sur un intervalle Théorème des valeurs intermédiaires	63
5.6	Continuité sur un compact	64
5.7	Continuité uniforme	66
5.8	Fonctions lipschitziennes	67
5.9	Erreurs fréquentes	67
5.10	Exercices	67
	Résumé du chapitre 5	69
6	Dérivation — Définition, Règles, Théorème des Accroissements Finis, Formule de Taylor	70
6.1	Dérivée en un point	70
6.2	Règles de dérivation	72
6.3	Extrema locaux	74
6.4	Théorème des accroissements finis	75
6.5	Théorème de L'Hôpital	76
6.6	Formule de Taylor	77
	6.6.1 Polynôme de Taylor	77
	6.6.2 Formule de Taylor-Lagrange	77
	6.6.3 Formule de Taylor-Young	78
	6.6.4 Applications : développements de Taylor usuels	78
6.7	Développements limités	80
	6.7.1 Opérations sur les DL	80
	6.7.2 Applications des DL au calcul de limites	80
6.8	Erreurs fréquentes	81
6.9	Exercices	81
	Résumé du chapitre 6	83

Préface

Vous tenez entre vos mains un cours d'*analyse réelle*. Si vous arrivez du lycée, vous avez déjà manipulé des limites, des dérivées, des intégrales ; vous avez peut-être même l'impression de « savoir » ce que ces notions signifient. Ce cours va vous montrer que la réalité est plus subtile — et plus belle — que ce que vous imaginez.

Qu'est-ce que l'analyse ? L'analyse mathématique est la branche des mathématiques qui étudie les processus de *passage à la limite*. Quand on écrit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$, qu'est-ce que cela signifie *exactement* ? Quand on dit qu'une fonction est « continue », quelle est la définition *précise* ? Pourquoi certaines fonctions sont-elles dérivables et d'autres non ? L'analyse répond à toutes ces questions avec une rigueur absolue.

Pourquoi des démonstrations ? Au lycée, on vous a souvent présenté des résultats sans justification, ou avec des arguments intuitifs. À l'université, la règle change : *tout résultat doit être démontré*. Cela peut sembler difficile, voire décourageant au début. Mais la démonstration n'est pas un exercice de style : c'est le seul moyen de s'assurer qu'un énoncé est *vrai*. L'intuition est un guide précieux, mais elle peut tromper. L'histoire des mathématiques est remplie de conjectures « évidentes » qui se sont révélées fausses.

Ce que vous allez apprendre. Au fil de ce cours, vous découvrirez :

- les techniques fondamentales de démonstration : preuve directe, contraposée, raisonnement par l'absurde, récurrence ;
- la construction rigoureuse du corps des nombres réels $\mathbb{R}$ et l'axiome de la borne supérieure ;
- la théorie des suites réelles : convergence, suites monotones, suites de Cauchy ;
- la continuité et ses conséquences profondes : théorème des valeurs intermédiaires, théorème de Heine ;
- la dérivabilité et ses applications.

Conseils pour réussir. L'analyse se travaille *chaque jour*. Ne laissez pas s'accumuler les incompréhensions : une notion non comprise au chapitre 2 rendra le chapitre 3 incompréhensible. Refaites les démonstrations du cours *sans regarder vos notes*. Faites les exercices — tous les exercices. Discutez avec vos camarades. Posez des questions. N'ayez pas peur de ne pas comprendre tout de suite : l'analyse est une discipline qui demande du temps et de la maturation.

Un mot d'encouragement. Si vous ressentez de l'anxiété face à l'abstraction et à la rigueur, sachez que c'est parfaitement normal. Tous les mathématiciens sont passés par cette étape. La difficulté que vous ressentez n'est pas un signe d'incompétence : c'est le

signe que vous êtes en train d'apprendre quelque chose de profondément nouveau. Faites-vous confiance, travaillez régulièrement, et vous verrez que la rigueur mathématique, loin d'être un obstacle, est une source de clarté et de satisfaction intellectuelle.

Bon courage et bonne lecture.

Notations et conventions

Nous rassemblons ici les notations utilisées tout au long de ce cours.

Notation	Signification
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Dans ce cours, $0 \in \mathbb{N}$.
$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
$\mathbb{Z}$	Ensemble des entiers relatifs $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
$\mathbb{Q}$	Ensemble des nombres rationnels $\left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\right\}$.
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes.
$\forall$	« Pour tout » (quantificateur universel).
$\exists$	« Il existe » (quantificateur existentiel).
$\exists!$	« Il existe un unique ».
$\in, \notin$	« appartient à », « n'appartient pas à ».
$\subset, \supset$	Inclusion (large) : $A \subset B$ signifie $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$.
$\cup, \cap$	Réunion, intersection.
$A \setminus B$	Différence : $\{x \in A : x \notin B\}$.
A^c	Complémentaire de A (dans un ensemble ambiant fixé).
$\emptyset$	Ensemble vide.
$[a, b]$	Intervalle fermé $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.
$]a, b[$	Intervalle ouvert $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.
$[a, b[,]a, b]$	Intervalle semi-ouverts.
$ x $	Valeur absolue de $x \in \mathbb{R}$.
$\sup A, \inf A$	Borne supérieure, borne inférieure de $A \subset \mathbb{R}$.
$\max A, \min A$	Maximum, minimum de A (quand ils existent).
$\Rightarrow$	Implication.
$\Leftrightarrow$	Équivalence.
$\neg P$	Négation de la proposition P .

Convention sur les quantificateurs. Quand on écrit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |a_n - \ell| < \varepsilon,$$

cela signifie : « pour tout nombre réel ε strictement positif, il existe un entier naturel N tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à N , on a $|a_n - \ell| < \varepsilon$ ». L'ordre des quantificateurs est *crucial* : le changer modifie le sens de l'énoncé.

Chapitre 1

Logique, ensembles et raisonnement mathématique

« Les mathématiques sont un exercice de la pensée, et la logique en est la grammaire. »

Ce premier chapitre pose les fondations de tout le cours. Avant de parler de limites, de continuité ou de dérivées, nous devons apprendre à *raisonner rigoureusement*. Nous allons donc étudier la logique mathématique, les ensembles et les principales méthodes de démonstration. Chacune de ces notions sera illustrée par de nombreux exemples.

1.1 Propositions logiques et connecteurs

Définition 1.1 (Proposition). Une **proposition** (ou **assertion**) est un énoncé mathématique qui est soit *vrai*, soit *faux*. On dit que la proposition a une **valeur de vérité**.

Exemple 1.1. (a) « $2 + 3 = 5$ » est une proposition vraie.
(b) « 7 est un nombre pair » est une proposition fausse.
(c) « $\sqrt{2}$ est irrationnel » est une proposition vraie (nous le démontrerons dans ce chapitre).
(d) « $x^2 \geq 0$ » n'est *pas* une proposition tant que x n'est pas précisé : c'est un **prédicat** (une proposition dépendant d'une variable).

1.1.1 Les connecteurs logiques

À partir de propositions simples, on construit des propositions composées à l'aide de **connecteurs logiques**.

Définition 1.2 (Connecteurs logiques). Soient P et Q deux propositions. On définit :

- (i) **Négation** : $\neg P$ (lue « non P ») est vraie si et seulement si P est fausse.
- (ii) **Conjonction** : $P \wedge Q$ (lue « P et Q ») est vraie si et seulement si P et Q sont

toutes deux vraies.

- (iii) **Disjonction** : $P \vee Q$ (lue « P ou Q ») est vraie si et seulement si au moins l'une des deux propositions est vraie.
- (iv) **Implication** : $P \Rightarrow Q$ (lue « P implique Q » ou « si P alors Q ») est fausse uniquement lorsque P est vraie et Q est fausse.
- (v) **Équivalence** : $P \Leftrightarrow Q$ (lue « P si et seulement si Q ») est vraie lorsque P et Q ont la même valeur de vérité.

1.1.2 Tables de vérité

Les **tables de vérité** donnent la valeur de vérité d'une proposition composée en fonction des valeurs de vérité de ses composantes. On note V pour « vrai » et F pour « faux ».

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Remarque 1.1 (L'implication et le sens commun). Le fait que $P \Rightarrow Q$ soit *vraie* quand P est fausse surprend souvent. En mathématiques, l'implication « si P alors Q » ne dit rien sur le cas où l'hypothèse P n'est pas satisfaite. Par exemple, « si $2 + 2 = 5$, alors la Lune est un fromage » est une implication *vraie* au sens logique, car l'hypothèse est fausse.

Remarque 1.2 (Implication et équivalence). On a : $P \Leftrightarrow Q$ est logiquement équivalent à $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$. Autrement dit, pour montrer une équivalence, il faut démontrer les deux implications.

1.2 Quantificateurs

Les quantificateurs permettent de transformer un prédicat (qui dépend d'une variable) en une proposition.

Définition 1.3 (Quantificateur universel). Soit $P(x)$ un prédicat portant sur un élément x d'un ensemble E . La proposition

$$\forall x \in E, P(x)$$

(lue « pour tout x dans E , $P(x)$ ») est *vraie* si et seulement si $P(x)$ est vraie pour *chaque* élément x de E .

Définition 1.4 (Quantificateur existentiel). La proposition

$$\exists x \in E, P(x)$$

(lue « il existe x dans E tel que $P(x)$ ») est *vraie* si et seulement si $P(x)$ est vraie pour *au moins un* élément x de E .

Exemple 1.2. (a) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \geq 0$ est **vraie**.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 > 0$ est **fausse** (car $0^2 = 0$, qui n'est pas > 0).

(c) $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 = 9$ est **vraie** (prendre $n = 3$).

(d) $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 = 7$ est **fausse**.

1.2.1 Négation de propositions quantifiées

La négation des quantificateurs est un point *fondamental* que beaucoup d'étudiants maîtrisent mal. Retenez les deux règles suivantes :

Théorème 1.1 (Négation des quantificateurs). (i) $\neg(\forall x \in E, P(x)) \Leftrightarrow \exists x \in E, \neg P(x)$.

(ii) $\neg(\exists x \in E, P(x)) \Leftrightarrow \forall x \in E, \neg P(x)$.

Autrement dit : pour nier un « pour tout », on le remplace par un « il existe » et on nie la propriété ; pour nier un « il existe », on le remplace par un « pour tout » et on nie la propriété.

Remarque 1.3 (Règle mnémotechnique). Quand on nie, chaque quantificateur « bascule » : $\forall$ devient $\exists$ et $\exists$ devient $\forall$. Puis on nie la propriété finale. On procède de gauche à droite, un quantificateur à la fois.

Exemple 1.3 (Négation de la convergence d'une suite). La définition de « la suite (a_n) converge vers ℓ » s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |a_n - \ell| < \varepsilon.$$

Nions cette proposition *étape par étape* :

Étape 1 : On nie le premier quantificateur. $\forall \varepsilon > 0$ devient $\exists \varepsilon > 0$, et on nie le reste :

$$\exists \varepsilon > 0, \neg(\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |a_n - \ell| < \varepsilon).$$

Étape 2 : On nie le deuxième quantificateur. $\exists N \in \mathbb{N}$ devient $\forall N \in \mathbb{N}$, et on nie le reste :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \neg(\forall n \geq N, |a_n - \ell| < \varepsilon).$$

Étape 3 : On nie le troisième quantificateur. $\forall n \geq N$ devient $\exists n \geq N$, et on nie la propriété :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, \neg(|a_n - \ell| < \varepsilon).$$

Étape 4 : On nie l'inégalité : $\neg(|a_n - \ell| < \varepsilon)$ est $|a_n - \ell| \geq \varepsilon$.

Résultat final. La suite (a_n) ne converge pas vers ℓ si et seulement si :

$$\boxed{\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |a_n - \ell| \geq \varepsilon.}$$

En français : « il existe un $\varepsilon > 0$ tel que, quel que soit le rang N , on peut toujours trouver un terme a_n (avec $n \geq N$) qui reste à distance au moins ε de ℓ ».

Erreurs fréquentes

- **Erreur :** écrire $\neg(\forall x, P(x))$ comme $\forall x, \neg P(x)$. La négation du « pour tout » est « il existe », pas « pour tout ».
- **Erreur :** oublier de nier la propriété finale après avoir basculé tous les quantificateurs.
- **Erreur :** nier $<$ en $>$ au lieu de $\geq$. La négation de $a < b$ est $a \geq b$, pas $a > b$.

1.3 Méthodes de démonstration

Nous présentons maintenant les principales méthodes de démonstration que vous utiliserez tout au long de vos études.

1.3.1 Preuve directe

Pour montrer $P \Rightarrow Q$, on *suppose* que P est vraie et on en *déduit* que Q est vraie par une chaîne de déductions logiques.

Exemple 1.4 (La somme de deux entiers pairs est paire). **Énoncé.** Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Si a et b sont pairs, alors $a + b$ est pair.

Démonstration. Supposons que a et b sont pairs. Par définition, il existe $k, l \in \mathbb{Z}$ tels que $a = 2k$ et $b = 2l$. Alors :

$$a + b = 2k + 2l = 2(k + l).$$

Comme $k + l \in \mathbb{Z}$, le nombre $a + b$ est bien pair. □

Exemple 1.5 (Le carré d'un entier impair est impair). **Énoncé.** Soit $n \in \mathbb{Z}$. Si n est impair, alors n^2 est impair.

Démonstration. Supposons que n est impair. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$. Alors :

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

En posant $m = 2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$, on obtient $n^2 = 2m + 1$, ce qui montre que n^2 est impair. $\square$

1.3.2 Preuve par contraposée

Pour montrer $P \Rightarrow Q$, on peut montrer sa **contraposée** : $\neg Q \Rightarrow \neg P$. Ces deux implications sont logiquement équivalentes.

Proposition 1.1 (Équivalence avec la contraposée). Pour toutes propositions P et Q :

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P).$$

Démonstration. On vérifie par table de vérité. $P \Rightarrow Q$ est fausse uniquement quand P est V et Q est F. Dans ce cas, $\neg Q$ est V et $\neg P$ est F, donc $\neg Q \Rightarrow \neg P$ est aussi fausse. Dans tous les autres cas, les deux implications sont vraies. $\square$

Exemple 1.6 (Si n^2 est pair, alors n est pair). **Énoncé.** Soit $n \in \mathbb{Z}$. Si n^2 est pair, alors n est pair.

Démonstration. Montrons la contraposée : « si n est impair, alors n^2 est impair ». C'est exactement l'Exemple 1.5. Donc la contraposée est vraie, et par conséquent l'implication originale l'est aussi. $\square$

Exemple 1.7. Énoncé. Soient $a, b \in \mathbb{N}$. Si ab est impair, alors a est impair et b est impair.

Démonstration. Montrons la contraposée : « si a est pair ou b est pair, alors ab est pair ».

Supposons que a est pair (le cas « b est pair » est analogue). Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k$. Alors $ab = 2kb = 2(kb)$, qui est pair. Donc la contraposée est établie. $\square$

1.3.3 Preuve par l'absurde

Pour montrer qu'une proposition P est vraie, on *suppose que P est fausse* (c'est-à-dire que $\neg P$ est vraie) et on en déduit une **contradiction** : on arrive à un énoncé de la forme $Q \wedge \neg Q$.

Exemple 1.8 (L'ensemble des nombres premiers est infini). **Énoncé.** Il existe une infinité de nombres premiers.

Démonstration. Supposons, par l'absurde, qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers. Notons-les $p_1, p_2, \dots, p_k$. Considérons le nombre :

$$N = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k + 1.$$

Le nombre N est supérieur à 1, donc il admet au moins un diviseur premier p . Ce nombre p doit être l'un des p_i (car, par hypothèse, la liste $p_1, \dots, p_k$ contient *tous* les nombres premiers). Donc $p = p_i$ pour un certain i , et p_i divise N .

Or, p_i divise aussi le produit $p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$. Donc p_i divise la différence :

$$N - p_1 \cdot p_2 \cdots p_k = 1.$$

Ainsi p_i divise 1, ce qui est impossible car $p_i \geq 2$.

Nous avons obtenu une contradiction. L'hypothèse de départ (nombre fini de premiers) est donc fausse. Il existe bien une infinité de nombres premiers. $\square$

Exemple 1.9 (Irrationalité de $\sqrt{2}$). **Énoncé.** $\sqrt{2}$ est irrationnel, c'est-à-dire $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Démonstration. Supposons, par l'absurde, que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

où la fraction $\frac{p}{q}$ est *irréductible*, c'est-à-dire que p et q n'ont aucun facteur commun autre que 1 (en particulier, p et q ne sont pas tous les deux pairs).

En élevant au carré, on obtient :

$$2 = \frac{p^2}{q^2}, \quad \text{donc} \quad p^2 = 2q^2.$$

Étape 1 : p est pair. L'égalité $p^2 = 2q^2$ montre que p^2 est pair. D'après l'Exemple 1.6, si p^2 est pair, alors p est pair. Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2k$.

Étape 2 : q est pair. En substituant $p = 2k$ dans $p^2 = 2q^2$:

$$(2k)^2 = 2q^2 \implies 4k^2 = 2q^2 \implies q^2 = 2k^2.$$

Donc q^2 est pair, et par le même argument, q est pair.

Contradiction. Nous avons montré que p et q sont tous les deux pairs, ce qui contredit l'hypothèse que la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible.

Conclusion : $\sqrt{2}$ est irrationnel. $\square$

1.3.4 Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence permet de démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$ (où $n_0 \in \mathbb{N}$ est un point de départ).

Théorème 1.2 (Principe de récurrence). Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier $n \geq n_0$. Si :

- (i) **Initialisation** : $P(n_0)$ est vraie ;
 - (ii) **Hérédité** : pour tout $n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$;
- alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Remarque 1.4 (Analogie des dominos). Imaginez une file infinie de dominos numérotés $n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$. L'initialisation consiste à pousser le premier domino. L'hérédité assure que si le domino n tombe, le domino $n+1$ tombe aussi. Conclusion : tous les dominos tombent.

Exemple 1.10 (Somme des n premiers entiers). **Énoncé.** Pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration. Notons $P(n)$ la propriété « $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ ».

Initialisation : Pour $n = 1$, le membre de gauche vaut 1, et le membre de droite vaut $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$. Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 1$. Supposons que $P(n)$ est vraie (c'est l'**hypothèse de récurrence**). Montrons $P(n+1)$, c'est-à-dire : $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

On a :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^n k \right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

par hypothèse de récurrence. On factorise :

$$= (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = (n+1) \cdot \frac{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$. □

Exemple 1.11 (Inégalité de Bernoulli). **Énoncé.** Pour tout $x \geq -1$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Démonstration. Fixons $x \geq -1$. Soit $P(n)$ la propriété « $(1+x)^n \geq 1+nx$ ».

Initialisation : Pour $n = 0$: $(1+x)^0 = 1$ et $1+0 \cdot x = 1$. On a bien $1 \geq 1$. $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. Supposons $P(n)$ vraie : $(1+x)^n \geq 1+nx$. Alors :

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx)(1+x)$$

car $(1+x) \geq 0$ (puisque $x \geq -1$). En développant :

$$(1+nx)(1+x) = 1+x+nx+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$$

car $nx^2 \geq 0$. Donc $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$, c'est-à-dire $P(n+1)$.

Par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Théorème 1.3 (Récurrence forte). Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier $n \geq n_0$. Si :

(i) $P(n_0)$ est vraie ;

(ii) pour tout $n \geq n_0$, $(P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge \dots \wedge P(n)) \Rightarrow P(n+1)$;

alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exemple 1.12 (Tout entier $n \geq 2$ admet un diviseur premier). *Démonstration.*

Soit $P(n)$ la propriété « n admet un diviseur premier » pour $n \geq 2$.

Initialisation : $P(2)$ est vraie car 2 est lui-même premier et se divise lui-même.

Hérédité (récurrence forte) : Soit $n \geq 2$. Supposons que $P(k)$ est vraie pour tout $2 \leq k \leq n$. Montrons $P(n+1)$.

Cas 1 : Si $n+1$ est premier, alors $n+1$ est son propre diviseur premier. $P(n+1)$ est vraie.

Cas 2 : Si $n+1$ n'est pas premier, alors $n+1 = ab$ avec $2 \leq a, b \leq n$. Par hypothèse de récurrence (forte), a admet un diviseur premier p . Comme p divise a et a divise $n+1$, le nombre p divise $n+1$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

Par récurrence forte, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 2$. □

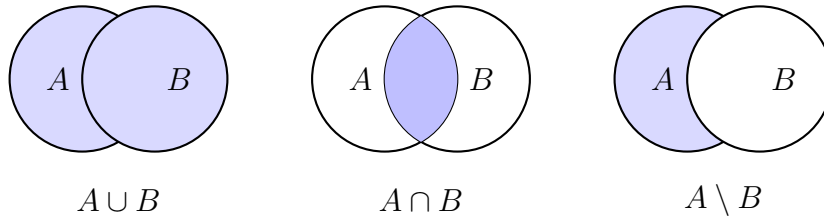
1.4 Ensembles

Définition 1.5 (Ensemble). Un **ensemble** est une collection d'objets appelés **éléments**. On note $x \in E$ pour dire que x est un élément de E , et $x \notin E$ dans le cas contraire.

1.4.1 Opérations sur les ensembles

Définition 1.6 (Opérations ensemblistes). Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E .

- (i) **Réunion** : $A \cup B = \{x \in E : x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
- (ii) **Intersection** : $A \cap B = \{x \in E : x \in A \text{ et } x \in B\}$.
- (iii) **Différence** : $A \setminus B = \{x \in E : x \in A \text{ et } x \notin B\}$.
- (iv) **Complémentaire** : $A^c = E \setminus A = \{x \in E : x \notin A\}$.
- (v) **Produit cartésien** : $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$.



Théorème 1.4 (Lois de De Morgan). Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E . Alors :

- (i) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,
- (ii) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Démonstration. Démontrons (i). On va montrer la double inclusion.

Sens $\subset$: Soit $x \in (A \cup B)^c$. Par définition du complémentaire, $x \notin A \cup B$. Cela signifie que $x \notin A$ et $x \notin B$ (car si x appartenait à l'un des deux, il serait dans la réunion). Donc $x \in A^c$ et $x \in B^c$, c'est-à-dire $x \in A^c \cap B^c$.

Sens $\supset$: Soit $x \in A^c \cap B^c$. Alors $x \in A^c$ (donc $x \notin A$) et $x \in B^c$ (donc $x \notin B$). Comme x n'est ni dans A ni dans B , on a $x \notin A \cup B$, donc $x \in (A \cup B)^c$.

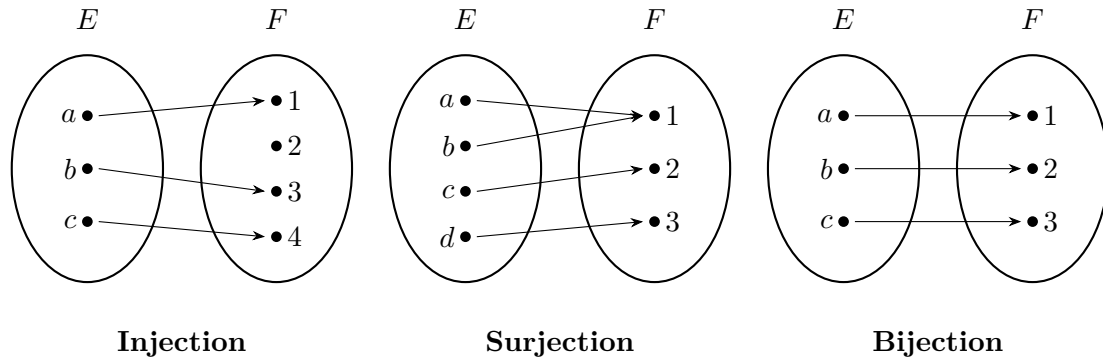
La preuve de (ii) est analogue (ou bien on applique (i) à A^c et B^c puis on prend le complémentaire). $\square$

1.5 Applications

Définition 1.7 (Application). Soient E et F deux ensembles. Une **application** (ou **fonction**) de E dans F est une relation qui, à chaque élément $x \in E$, associe un *unique* élément $f(x) \in F$. On écrit $f : E \rightarrow F, x \mapsto f(x)$.

Définition 1.8 (Injection, surjection, bijection). Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

- (i) f est **injective** si : $\forall x_1, x_2 \in E, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- (ii) f est **surjective** si : $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$.
- (iii) f est **bijjective** si elle est à la fois injective et surjective.



Exemple 1.13. (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ n'est ni injective (car $f(1) = f(-1) = 1$) ni surjective (car -1 n'a pas d'antécédent).
 (b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto x^2$ est surjective mais pas injective.
 (c) $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto x^2$ est bijective.
 (d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 1$ est bijective (sa réciproque est $g(y) = \frac{y-1}{2}$).

1.6 Relations d'équivalence et relations d'ordre

Définition 1.9 (Relation d'équivalence). Une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une **relation d'équivalence** si elle est :

- (i) **réflexive** : $\forall x \in E, x \mathcal{R} x$;
- (ii) **symétrique** : $\forall x, y \in E, x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$;
- (iii) **transitive** : $\forall x, y, z \in E, (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z$.

Exemple 1.14. Sur $\mathbb{Z}$, la relation « $a \equiv b \pmod{n}$ » (c'est-à-dire $n \mid (a - b)$) est une relation d'équivalence pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 1.10 (Relation d'ordre). Une relation $\leq$ sur un ensemble E est une **relation d'ordre** si elle est :

- (i) **réflexive** : $\forall x \in E, x \leq x$;
- (ii) **antisymétrique** : $\forall x, y \in E, (x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y$;
- (iii) **transitive** : $\forall x, y, z \in E, (x \leq y \text{ et } y \leq z) \Rightarrow x \leq z$.

L'ordre est **total** si : $\forall x, y \in E, x \leq y \text{ ou } y \leq x$.

Exemple 1.15. (a) L'ordre usuel $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est un ordre total.

(b) L'inclusion $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$ est un ordre partiel (non total en général).

(c) La divisibilité $\mid$ sur $\mathbb{N}^*$ est un ordre partiel.

Erreurs fréquentes du chapitre

Erreurs fréquentes

1. **Confondre $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$.** Écrire $\Leftrightarrow$ quand on ne prouve qu'un seul sens est une faute grave. Vérifiez toujours si vos implications sont réversibles.
2. **Mauvaise négation des quantificateurs.** La négation de « $\forall x, P(x)$ » n'est pas « $\forall x, \neg P(x)$ » mais « $\exists x, \neg P(x)$ ». Revoyez la section 1.2.1.
3. **Oublier l'initialisation dans une récurrence.** Sans initialisation, la récurrence ne prouve rien.
4. **Confondre « supposons $P(n)$ » et « montrons $P(n)$ » dans l'hérédité.** On *suppose* $P(n)$ (hypothèse de récurrence) et on *montre* $P(n+1)$.
5. **Confondre $\in$ et $\subset$.** Un élément *appartient* à un ensemble ; un ensemble est *inclus* dans un autre.

Exercices

Exercice 1.1 (Connecteurs logiques). Construire la table de vérité de la proposition $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$. Qu'observe-t-on ?

Exercice 1.2 (Négation). Écrire la négation de chacune des propositions suivantes :

- (a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.
- (b) $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 = n$.
- (c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 0$.
- (d) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Exercice 1.3 (Preuve directe). Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $n^2 + n$ est pair.

Exercice 1.4 (Contraposée). Montrer par contraposée : si n^2 est divisible par 3, alors n est divisible par 3.

Exercice 1.5 (Absurde). Montrer par l'absurde que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Exercice 1.6 (Récurrence (facile)). Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 1.7 (Récurrence (moyen)). Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $7^n - 1$ est divisible par 6.

Exercice 1.8 (Récurrence forte). Montrer par récurrence forte que tout entier $n \geq 2$ peut s'écrire comme produit de nombres premiers. (C'est une partie du théorème fondamental de l'arithmétique.)

Exercice 1.9 (Ensembles). Soient A, B, C trois sous-ensembles d'un ensemble E .

- (a) Montrer que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- (b) Montrer que $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Exercice 1.10 (Injection et surjection). Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

- (a) Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
- (b) Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
- (c) Donner un exemple montrant que $g \circ f$ injective n'implique pas g injective.

Exercice 1.11 (Relation d'équivalence). Sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, on définit la relation $(a, b) \mathcal{R} (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Interpréter les classes d'équivalence.

Exercice 1.12 (Défi). Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Indications : on peut utiliser la récurrence, ou bien la décomposition en éléments simples.

Résumé du chapitre

Résumé du chapitre

- Une **proposition** est un énoncé vrai ou faux. On combine les propositions avec les connecteurs $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.
- Les **quantificateurs** $\forall$ et $\exists$ transforment des prédicats en propositions. La négation échange $\forall$ et $\exists$.
- **Méthodes de démonstration :**

- *Preuve directe* : on suppose P et on déduit Q .
- *Contraposée* : on montre $\neg Q \Rightarrow \neg P$.
- *Absurde* : on suppose $\neg P$ et on aboutit à une contradiction.
- *Récurrence* : initialisation + hérédité.
- **Ensembles** : opérations $\cup$, $\cap$, $\setminus$, complémentaire, lois de De Morgan.
- **Applications** : injection (éléments distincts ont des images distinctes), surjection (tout élément de l'arrivée est atteint), bijection (les deux à la fois).
- **Relations** : relation d'équivalence (réflexive, symétrique, transitive) et relation d'ordre (réflexive, antisymétrique, transitive).

Chapitre 2

Le corps des réels — Axiomes et complétude

« Dieu a créé les entiers ; tout le reste est l'œuvre de l'homme. » — Leopold Kronecker

Ce chapitre est le cœur fondateur de l'analyse réelle. Nous allons construire le cadre dans lequel tout le reste du cours se déploie : le corps des nombres réels $\mathbb{R}$, muni de son axiome de complétude. C'est cet axiome qui distingue $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$ et qui rend possible la théorie des limites.

2.1 Rappels sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$: pourquoi $\mathbb{Q}$ ne suffit pas

Les nombres rationnels $\mathbb{Q}$ forment un corps ordonné : on peut y additionner, multiplier, diviser (sauf par zéro), et comparer. Pourtant, $\mathbb{Q}$ présente un *défaut fondamental* : il a des « trous ».

Proposition 2.1 ($\sqrt{2}$ n'est pas rationnel). Il n'existe aucun nombre rationnel r tel que $r^2 = 2$.

Démonstration. C'est exactement la preuve de l'Exemple 1.9 du Chapitre 1. □

Ce résultat montre que l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$. Géométriquement, si l'on place les rationnels sur la droite numérique, il y a un « trou » à l'endroit où devrait se trouver $\sqrt{2}$. Les nombres réels comblent ces trous.

Remarque 2.1 (Insuffisance de $\mathbb{Q}$ pour l'analyse). Le problème va plus loin que l'absence de $\sqrt{2}$. De nombreux résultats fondamentaux de l'analyse — comme le théorème des valeurs intermédiaires — sont *faux* dans $\mathbb{Q}$. Par exemple, la fonction $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ définie par $f(x) = x^2 - 2$ change de signe entre 1 et 2 (car $f(1) = -1 < 0$ et $f(2) = 2 > 0$), mais elle ne s'annule en aucun point de $\mathbb{Q}$.

2.2 Axiomes de corps ordonné

Les nombres réels $\mathbb{R}$ sont définis axiomatiquement comme un **corps commutatif totalement ordonné** vérifiant l'**axiome de la borne supérieure**.

Définition 2.1 (Corps commutatif). Un **corps commutatif** est un ensemble K muni de deux opérations $+$ (addition) et $\cdot$ (multiplication) vérifiant :

Axiomes de l'addition :

(A1) **Associativité** : $\forall a, b, c \in K, (a + b) + c = a + (b + c)$.

(A2) **Commutativité** : $\forall a, b \in K, a + b = b + a$.

(A3) **Élément neutre** : $\exists 0 \in K, \forall a \in K, a + 0 = a$.

(A4) **Opposé** : $\forall a \in K, \exists (-a) \in K, a + (-a) = 0$.

Axiomes de la multiplication :

(M1) **Associativité** : $\forall a, b, c \in K, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

(M2) **Commutativité** : $\forall a, b \in K, a \cdot b = b \cdot a$.

(M3) **Élément neutre** : $\exists 1 \in K, 1 \neq 0, \forall a \in K, a \cdot 1 = a$.

(M4) **Inverse** : $\forall a \in K \setminus \{0\}, \exists a^{-1} \in K, a \cdot a^{-1} = 1$.

Distributivité :

(D) $\forall a, b, c \in K, a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Définition 2.2 (Corps ordonné). Un **corps ordonné** est un corps commutatif $(K, +, \cdot)$ muni d'une relation d'ordre total $\leq$ compatible avec les opérations :

(O1) **Compatibilité avec l'addition** : $\forall a, b, c \in K, a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$.

(O2) **Compatibilité avec la multiplication** : $\forall a, b \in K, (0 \leq a \text{ et } 0 \leq b) \Rightarrow 0 \leq a \cdot b$.

Remarque 2.2. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont tous deux des corps ordonnés. Ce qui distingue $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$, c'est l'axiome de la borne supérieure, que nous énoncerons dans la section 2.5.

2.3 Valeur absolue

Définition 2.3 (Valeur absolue). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la **valeur absolue** de x est :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Géométriquement, $|x|$ est la distance de x à l'origine sur la droite réelle, et $|x - y|$ est la distance entre x et y .

Proposition 2.2 (Propriétés de la valeur absolue). Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et tout $r \geq 0$:

- (i) $|x| \geq 0$, et $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- (ii) $|-x| = |x|$.
- (iii) $|xy| = |x| |y|$.
- (iv) $|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$.
- (v) $-|x| \leq x \leq |x|$.

Théorème 2.1 (Inégalité triangulaire). Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Démonstration. On sait que $-|x| \leq x \leq |x|$ et $-|y| \leq y \leq |y|$ (propriété (v) ci-dessus). En additionnant ces deux encadrements :

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|.$$

Posons $r = |x| + |y| \geq 0$. On a $-r \leq x + y \leq r$, ce qui, par la propriété (iv), équivaut à $|x + y| \leq r = |x| + |y|$. $\square$

Corollaire 2.1 (Inégalité triangulaire inversée). Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Démonstration. Par l'inégalité triangulaire appliquée à $x = (x - y) + y$:

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|,$$

donc $|x| - |y| \leq |x - y|$. En échangeant les rôles de x et y :

$$|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|.$$

Les deux inégalités $|x| - |y| \leq |x - y|$ et $-(|x| - |y|) \leq |x - y|$ donnent, par la propriété (iv), $||x| - |y|| \leq |x - y|$. $\square$

2.4 Parties bornées, borne supérieure, borne inférieure

Définition 2.4 (Majorant, minorant, partie bornée). Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide.

- (i) Un réel M est un **majorant** de A si : $\forall a \in A, a \leq M$.
- (ii) Un réel m est un **minorant** de A si : $\forall a \in A, a \geq m$.
- (iii) A est **majorée** si elle admet au moins un majorant. A est **minorée** si elle

admet au moins un minorant. A est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Définition 2.5 (Maximum et minimum). Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide.

- (i) Si A admet un majorant M qui appartient à A , on dit que M est le **maximum** de A : $M = \max A$.
- (ii) Si A admet un minorant m qui appartient à A , on dit que m est le **minimum** de A : $m = \min A$.

Définition 2.6 (Borne supérieure). Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et majorée. La **borne supérieure** de A , notée $\sup A$, est le *plus petit des majorants* de A . Autrement dit, $s = \sup A$ si et seulement si :

- (i) s est un majorant de A : $\forall a \in A, a \leq s$;
- (ii) s est le plus petit majorant : $\forall M \in \mathbb{R}, (\forall a \in A, a \leq M) \Rightarrow s \leq M$.

De manière équivalente, la condition (ii) peut être remplacée par :

- (ii') tout réel strictement inférieur à s n'est pas un majorant : $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, a > s - \varepsilon$.

Remarque 2.3 (Distinction cruciale entre $\sup$ et $\max$). Le maximum d'un ensemble, s'il existe, est un élément de l'ensemble. La borne supérieure, elle, peut ne pas appartenir à l'ensemble. Par exemple :

- $A = \{1, 2, 3\}$: $\max A = \sup A = 3 \in A$.
- $A =]0, 1[$: $\sup A = 1$, mais $1 \notin A$, donc A n'a pas de maximum.

En revanche, quand le maximum existe, il coïncide avec le $\sup$.

Définition 2.7 (Borne inférieure). Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et minorée. La **borne inférieure** de A , notée $\inf A$, est le *plus grand des minorants* de A .

Théorème 2.2 (Caractérisation séquentielle de la borne supérieure). Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide et majorée, et soit $s \in \mathbb{R}$. Alors :

$$s = \sup A \iff \begin{cases} (1) \forall a \in A, a \leq s, \\ (2) \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, a > s - \varepsilon. \end{cases}$$

Démonstration. **Sens $\Rightarrow$** : Supposons $s = \sup A$.

Condition (1) : Par définition, s est un majorant de A , donc $\forall a \in A, a \leq s$.

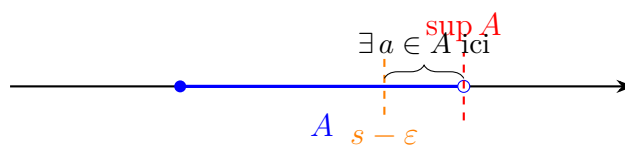
Condition (2) : Soit $\varepsilon > 0$. Le réel $s - \varepsilon$ est strictement inférieur à s . Or, s est le *plus petit* majorant de A , donc $s - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A . Cela signifie qu'il existe $a \in A$ tel que $a > s - \varepsilon$.

Sens $\Leftarrow$: Supposons que s vérifie (1) et (2). Montrons que $s = \sup A$.

La condition (1) dit que s est un majorant de A . Il reste à montrer que s est le plus petit majorant.

Soit M un majorant quelconque de A . Montrons que $s \leq M$. Raisonnons par l'absurde : supposons $s > M$. Posons $\varepsilon = s - M > 0$. Par la condition (2), il existe $a \in A$ tel que $a > s - \varepsilon = s - (s - M) = M$. Mais cela contredit le fait que M est un majorant de A (car on a trouvé $a \in A$ avec $a > M$).

Donc $s \leq M$. Comme c'est vrai pour tout majorant M , le réel s est le plus petit majorant, c'est-à-dire $s = \sup A$. $\square$



2.5 Axiome de la borne supérieure

Nous énonçons maintenant l'axiome qui distingue $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$ et qui est la pierre angulaire de toute l'analyse réelle.

Théorème 2.3 (Axiome de la borne supérieure (complétude de $\mathbb{R}$)). Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

Cet axiome affirme que la droite réelle n'a pas de « trous ». Contrairement à ce qui se passe dans $\mathbb{Q}$, toute partie bornée de $\mathbb{R}$ possède un sup *dans* $\mathbb{R}$.

Remarque 2.4 (Pourquoi $\mathbb{Q}$ ne vérifie pas cet axiome). Considérons l'ensemble

$$A = \{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0 \text{ et } q^2 < 2\}.$$

Cet ensemble est non vide (par exemple $1 \in A$) et majoré dans $\mathbb{Q}$ (par exemple par 2). Si la borne supérieure existait dans $\mathbb{Q}$, appelons-la s . On pourrait montrer que $s^2 = 2$ (car $s^2 < 2$ et $s^2 > 2$ mènent à des contradictions). Mais nous avons prouvé qu'aucun rationnel ne vérifie $s^2 = 2$. Donc A n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. En revanche, dans $\mathbb{R}$, la borne supérieure de A est $\sqrt{2}$.

Remarque 2.5 (Borne inférieure). On déduit de l'axiome de la borne supérieure que toute partie non vide et *minorée* de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$. En effet, si A est non vide et minorée, alors $-A = \{-a : a \in A\}$ est non vide et majorée, donc $\sup(-A)$ existe, et on a $\inf A = -\sup(-A)$.

2.6 Conséquences fondamentales de la complétude

L'axiome de la borne supérieure a des conséquences profondes. Nous en démontrons les plus importantes.

2.6.1 Propriété d'Archimède

Théorème 2.4 (Propriété d'Archimède). L'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas majoré dans $\mathbb{R}$. Autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n > x.$$

De manière équivalente : pour tous $a > 0$ et $b > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $na > b$.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Supposons que $\mathbb{N}$ est majoré dans $\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{N}$ est non vide, l'axiome de la borne supérieure garantit l'existence de $s = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$.

Considérons $s - 1$. Puisque $s - 1 < s$ et que s est le *plus petit* majorant de $\mathbb{N}$, le réel $s - 1$ n'est pas un majorant de $\mathbb{N}$. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 > s - 1$, c'est-à-dire $n_0 + 1 > s$.

Or, $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$ (car $\mathbb{N}$ est stable par successeur). Donc $n_0 + 1$ est un élément de $\mathbb{N}$ qui dépasse s , ce qui contredit le fait que s est un majorant de $\mathbb{N}$.

Cette contradiction montre que l'hypothèse est fausse : $\mathbb{N}$ n'est pas majoré. $\square$

Remarque 2.6. La propriété d'Archimède sera utilisée constamment : elle permet d'affirmer que $\frac{1}{n}$ peut être rendu aussi petit que l'on veut (en prenant n assez grand). C'est la base de tous les arguments en ε .

2.6.2 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème 2.5 (Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$). Entre deux réels distincts, il existe toujours un nombre rationnel. Autrement dit :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q}, x < r < y.$$

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$. On cherche $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tel que $x < \frac{p}{q} < y$, c'est-à-dire $qx < p < qy$.

Étape 1 : choix de q . Comme $y - x > 0$, par la propriété d'Archimède (Théorème 2.4), il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $q(y - x) > 1$, c'est-à-dire $qy - qx > 1$.

Étape 2 : choix de p . Nous avons $qy > qx + 1$. L'intervalle $]qx, qy[$ a une longueur strictement supérieure à 1, donc il contient un entier $p \in \mathbb{Z}$. Plus précisément, on peut prendre $p = \lfloor qx \rfloor + 1$ (le plus petit entier strictement supérieur à qx). Alors :

- $p > qx$ par construction (car $p = \lfloor qx \rfloor + 1 > qx$);
- $p = \lfloor qx \rfloor + 1 \leq qx + 1 < qy$ (car $qy > qx + 1$).

Étape 3 : conclusion. On a $qx < p < qy$. En divisant par $q > 0$: $x < \frac{p}{q} < y$. Le nombre $r = \frac{p}{q}$ est rationnel et vérifie $x < r < y$. $\square$

2.6.3 Densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème 2.6 (Densité des irrationnels). Entre deux réels distincts, il existe toujours un nombre irrationnel :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow \exists t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x < t < y.$$

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$. Considérons les réels $\frac{x}{\sqrt{2}}$ et $\frac{y}{\sqrt{2}}$. On a $\frac{x}{\sqrt{2}} < \frac{y}{\sqrt{2}}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (Théorème 2.5), il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que :

$$\frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}}.$$

Posons $t = r\sqrt{2}$. Alors $x < t < y$. Si $r = 0$, on a $t = 0 \in \mathbb{Q}$, ce qui ne convient pas ; dans ce cas, on recommence avec $r \neq 0$ (ce qui est possible car l'intervalle $]\frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}}[$ contient une infinité de rationnels).

Pour $r \neq 0$: si $t = r\sqrt{2}$ était rationnel, alors $\sqrt{2} = \frac{t}{r}$ serait rationnel (quotient de deux rationnels), ce qui est absurde. Donc t est irrationnel. $\square$

2.6.4 Partie entière

Théorème 2.7 (Existence et unicité de la partie entière). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n + 1$. Cet entier est appelé la **partie entière** de x et noté $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$.

Démonstration. **Existence.**

Cas $x \geq 0$: Par la propriété d'Archimède, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} : k > x\}$ est non vide. Par le bon ordre de $\mathbb{N}$, il admet un plus petit élément k_0 . Posons $n = k_0 - 1$. Alors $n \leq x$ (sinon $n > x$ et $n < k_0$, ce qui contredit la minimalité de k_0) et $k_0 = n + 1 > x$.

Cas $x < 0$: On applique le résultat précédent à $-x > 0$: il existe $m \in \mathbb{Z}$ avec $m \leq -x < m + 1$, d'où $-m - 1 < x \leq -m$. Si $x = -m$, alors $n = -m$ convient. Sinon $x < -m$ et on pose $n = -m - 1$, d'où $n < x < n + 1$.

Unicité. Si n et n' vérifient $n \leq x < n + 1$ et $n' \leq x < n' + 1$, alors $n < n' + 1$ et $n' < n + 1$, ce qui donne $|n - n'| < 1$. Comme n et n' sont entiers, on a $n = n'$. $\square$

2.7 Théorème des intervalles emboîtés

Théorème 2.8 (Théorème des intervalles emboîtés). Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'intervalles fermés bornés $I_n = [a_n, b_n]$ telle que :

- (i) $I_{n+1} \subset I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (les intervalles sont emboîtés) ;
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ (les longueurs tendent vers 0).

Alors l'intersection $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ contient exactement un point.

Démonstration. L'emboîtement $I_{n+1} \subset I_n$ signifie que $a_n \leq a_{n+1}$ et $b_{n+1} \leq b_n$ pour tout n . Autrement dit, la suite (a_n) est croissante et la suite (b_n) est décroissante. De plus, $a_n \leq b_n$ pour tout n , et même $a_n \leq b_0$ et $b_n \geq a_0$ pour tout n .

Existence. La suite (a_n) est croissante et majorée (par b_0). Par l'axiome de la borne supérieure, elle admet une borne supérieure : posons $\ell = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Montrons que $\ell \in I_n$ pour tout n . Fixons $n \in \mathbb{N}$. On a :

- $\ell \geq a_n$ car ℓ est un majorant de $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ et a_n est dans cet ensemble ;
- $\ell \leq b_n$ car b_n est un majorant de $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ (en effet, pour tout k , si $k \leq n$ alors $a_k \leq a_n \leq b_n$, et si $k > n$ alors $a_k \leq b_k \leq b_n$) ; comme ℓ est le *plus petit* majorant, $\ell \leq b_n$.

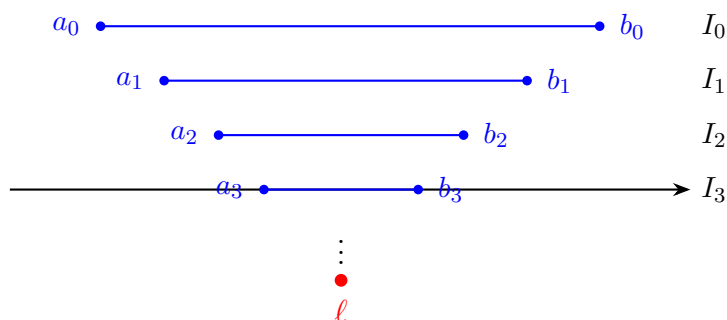
Donc $a_n \leq \ell \leq b_n$, c'est-à-dire $\ell \in [a_n, b_n] = I_n$. Ceci étant vrai pour tout n , on a $\ell \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$.

Unicité. Supposons qu'il existe $\ell' \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ avec $\ell' \neq \ell$. Pour tout n , on a $a_n \leq \ell \leq b_n$ et $a_n \leq \ell' \leq b_n$, donc :

$$|\ell - \ell'| \leq b_n - a_n.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, on obtient $|\ell - \ell'| \leq 0$, d'où $\ell = \ell'$. Contradiction.

L'intersection contient donc exactement un point. □



Remarque historique

La construction rigoureuse des nombres réels a été accomplie indépendamment par Richard **Dedekind** (1831–1916) et Georg **Cantor** (1845–1918) dans les années 1870.

Dedekind a défini les réels par des **coupures** : un nombre réel est une partition de $\mathbb{Q}$ en deux ensembles A et B tels que tout élément de A est inférieur à tout élément de B . Par exemple, le réel $\sqrt{2}$ correspond à la coupure $A = \{q \in \mathbb{Q} : q < 0 \text{ ou } q^2 < 2\}$, $B = \mathbb{Q} \setminus A$.

Cantor, quant à lui, a construit $\mathbb{R}$ comme l'ensemble des **classes d'équivalence de suites de Cauchy** de rationnels. Deux suites de Cauchy (a_n) et (b_n) sont équivalentes si $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$.

Ces deux constructions aboutissent au même objet : un corps ordonné complet, unique à isomorphisme près. Dans ce cours, nous adoptons l'approche axiomatique : nous *postulons* l'existence de $\mathbb{R}$ avec l'axiome de la borne supérieure, et nous en déduisons toutes les conséquences.

Erreurs fréquentes du chapitre

Erreurs fréquentes

1. **Confondre max et sup.** Le maximum d'un ensemble est un élément *de* l'ensemble qui majore tous les autres. La borne supérieure est le plus petit majorant, mais elle peut ne pas appartenir à l'ensemble. Par exemple, $\sup]0, 1[= 1$, mais $\max]0, 1[$ n'existe pas.
2. **Croire que la borne sup est toujours dans l'ensemble.** C'est faux : $\sup \left\{ 1 - \frac{1}{n} : n \geq 1 \right\} = 1$, mais 1 n'est pas de la forme $1 - \frac{1}{n}$.
3. **Confondre « majoré » et « admet un maximum ».** L'ensemble $]0, 1[$ est majoré (par 1, ou par 2, ou par 1000), mais n'a pas de maximum.
4. **Oublier les hypothèses de l'axiome.** L'axiome de la borne supérieure concerne les parties *non vides et majorées*. Il ne dit rien sur les parties non majorées (comme $\mathbb{N}$) ni sur l'ensemble vide.
5. **Appliquer l'axiome dans $\mathbb{Q}$.** L'axiome de la borne supérieure est *faux* dans $\mathbb{Q}$. C'est précisément ce qui distingue $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$.

Exercices

Exercice 2.1 (Valeur absolue). Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

- (a) $|x - y| \leq |x| + |y|$.
- (b) $||x| - |y|| \leq |x + y|$.
- (c) $|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2)$.

Exercice 2.2 (Inégalité triangulaire généralisée). Montrer par récurrence que pour tous $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$:

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|.$$

Exercice 2.3 (Borne supérieure (calculs)). Déterminer, si elles existent, les bornes supérieure et inférieure des ensembles suivants. Préciser si le max ou le min existe.

- (a) $A = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$.
- (b) $B = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$.
- (c) $C = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}^* \right\}$.
- (d) $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 3\}$.

Exercice 2.4 (Caractérisation du sup). Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide et majorée. Montrer que :

$$s = \sup A \iff s \text{ est un majorant de } A \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists a_n \in A, a_n > s - \frac{1}{n}.$$

Exercice 2.5 (Propriétés du sup). Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ non vides et majorées. On pose $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Exercice 2.6. Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ non vides avec $A, B \subset \mathbb{R}^+$ (éléments positifs). On pose $A \cdot B = \{ab : a \in A, b \in B\}$. Montrer que $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$.

Exercice 2.7 (Densité). Montrer qu'entre deux réels distincts, il existe une infinité de rationnels et une infinité d'irrationnels.

Exercice 2.8 (Partie entière). Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que :

- (a) $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
- (b) $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z}, \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 2.9 (Application de la propriété d'Archimède). Montrer que $\inf \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\} = 0$.

Exercice 2.10 (Intervalles emboîtés (application)). On pose $I_n = \left[\frac{n}{n+1}, \frac{n+1}{n} \right]$ pour $n \geq 1$.

- (a) Vérifier que $I_{n+1} \subset I_n$ pour tout $n \geq 1$.
- (b) Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n)$ où $a_n = \frac{n}{n+1}$ et $b_n = \frac{n+1}{n}$.
- (c) Déterminer $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

Exercice 2.11 (Existence de $\sqrt{2}$ via la complétude). On pose $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \text{ et } x^2 \leq 2\}$.

- (a) Montrer que A est non vide et majorée.
- (b) Poser $s = \sup A$. Montrer que $s^2 = 2$ en raisonnant par l'absurde sur les cas $s^2 < 2$ et $s^2 > 2$.

Indication pour (b) : si $s^2 < 2$, montrer qu'on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $(s + \varepsilon)^2 < 2$,

ce qui contredit le fait que s est un majorant de A .

Exercice 2.12 (Défi). Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right)$.

- (a) Montrer que $a_n > 0$ pour tout n .
- (b) Montrer que $a_n^2 \geq 2$ pour tout $n \geq 1$.
- (c) Montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.
- (d) En déduire que (a_n) converge, et déterminer sa limite.
(C'est la méthode de Héron pour calculer $\sqrt{2}$.)

Résumé du chapitre

Résumé du chapitre

- $\mathbb{Q}$ ne suffit pas pour l'analyse : il a des « trous » (par exemple, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).
- $\mathbb{R}$ est un **corps commutatif totalement ordonné complet**. Les axiomes de corps et d'ordre sont partagés avec $\mathbb{Q}$; ce qui distingue $\mathbb{R}$ est l'**axiome de la borne supérieure**.
- La **valeur absolue** vérifie l'inégalité triangulaire : $|x + y| \leq |x| + |y|$.
- La **borne supérieure** d'une partie A est le plus petit majorant. Caractérisation : $s = \sup A$ si et seulement si s est majorant et $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, a > s - \varepsilon$.
- **Axiome de la borne supérieure** : toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet un sup dans $\mathbb{R}$.
- **Conséquences** :
 - Propriété d'Archimède : $\mathbb{N}$ n'est pas majoré.
 - Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$: entre deux réels, il y a toujours un rationnel.
 - Densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: entre deux réels, il y a toujours un irrationnel.
 - Existence et unicité de la partie entière.
- **Intervalle emboîtés** : une suite décroissante d'intervalles fermés bornés dont les longueurs tendent vers 0 a une intersection réduite à un point.

Chapitre 3

Suites numériques

Introduction

Considérons les nombres décimaux successifs qui approchent $\sqrt{2}$:

$$1; \quad 1,4; \quad 1,41; \quad 1,414; \quad 1,4142; \quad \dots$$

Chaque terme est plus proche de $\sqrt{2}$ que le précédent. On *sent* que ces nombres « s'approchent » de $\sqrt{2}$, mais que signifie cette intuition de manière rigoureuse ? Comment quantifier le fait qu'une suite de nombres réels « tend » vers une valeur ? C'est précisément l'objet de ce chapitre : donner un sens mathématique précis à la notion de convergence d'une suite, et en déduire un arsenal de résultats qui constitue le socle de toute l'analyse.

L'outil fondamental est la définition dite « ε - N ». Elle transforme l'intuition vague de « s'approcher » en une assertion logique vérifiable. Maîtriser cette définition — et savoir l'utiliser dans des démonstrations — est l'objectif principal de ce chapitre.

3.1 Définitions fondamentales

Définition 3.1 (Suite réelle). On appelle **suite réelle** (ou **suite numérique**) toute application

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad n \longmapsto u(n) = u_n.$$

On note la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou simplement (u_n) . Le réel u_n s'appelle le **terme général** (ou **terme d'indice n**) de la suite.

Remarque 3.1. On peut aussi définir une suite à partir d'un rang $n_0 \in \mathbb{N} : (u_n)_{n \geq n_0}$. Cela ne change rien aux questions de convergence, car celle-ci ne dépend que du comportement « à partir d'un certain rang ».

Exemple 3.1. (i) $u_n = \frac{1}{n+1}$ pour $n \geq 0$. Les premiers termes sont $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$
(ii) $u_n = (-1)^n$ pour $n \geq 0$. Les premiers termes sont $1, -1, 1, -1, \dots$

(iii) $u_n = \frac{n}{n+1}$ pour $n \geq 0$. Les premiers termes sont $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$

(iv) Suite définie par récurrence : $u_0 = 1, u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2}$ pour $n \geq 0$.

3.2 Convergence d'une suite

Nous arrivons à la définition centrale de ce chapitre. Prenons le temps de bien la comprendre.

Définition 3.2 (Convergence d'une suite). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que la suite (u_n) **converge** vers ℓ , ou que ℓ est la **limite** de (u_n) , et l'on écrit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell,$$

si la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Une suite qui converge est dite **convergente**. Une suite qui ne converge pas est dite **divergente**.

Décortiquons cette définition quantificateur par quantificateur :

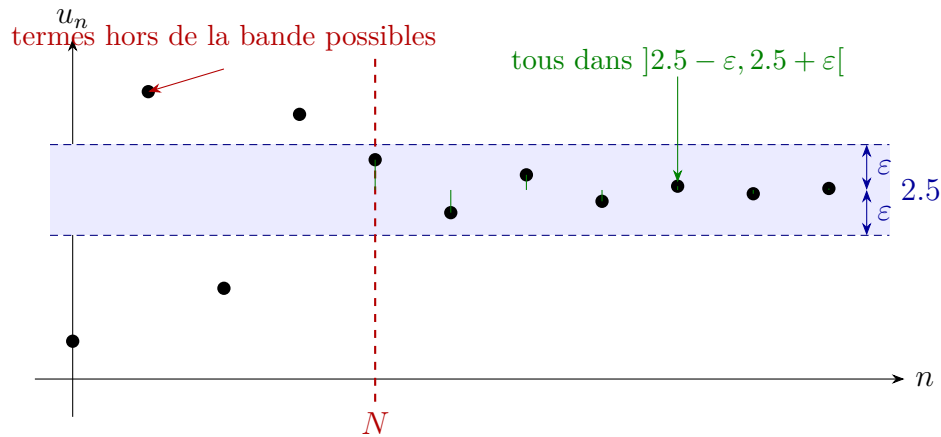
$\forall \varepsilon > 0$ « **Pour tout** $\varepsilon > 0$ » — c'est-à-dire *quel que soit* le niveau de précision qu'on nous impose, aussi petit soit-il. On peut penser à ε comme une « tolérance » : on nous demande que les termes de la suite soient à distance au plus ε de ℓ .

$\exists N \in \mathbb{N}$ « **il existe un rang** N » — à partir duquel la suite reste dans la bande de tolérance. Ce rang N *dépend* de ε : plus ε est petit, plus N sera grand en général. On écrit parfois $N(\varepsilon)$ pour souligner cette dépendance.

$\forall n \geq N$ « **pour tout entier** $n \geq N$ » — c'est-à-dire à partir du rang N et pour *tous* les termes suivants, sans exception.

$|u_n - \ell| < \varepsilon$ « u_n est à distance strictement inférieure à ε de ℓ » — autrement dit $u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.

En résumé : la suite converge vers ℓ si, quelle que soit la « fenêtre » $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ qu'on place autour de ℓ , tous les termes de la suite finissent par tomber dans cette fenêtre (à partir d'un certain rang).



Remarque 3.2. Quelques observations importantes :

- (a) On peut remplacer $|u_n - \ell| < \varepsilon$ par $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ sans changer la définition (exercice 3.1).
- (b) On peut remplacer « $\forall \varepsilon > 0$ » par « $\forall \varepsilon \in \{1/k : k \in \mathbb{N}^*\}$ » sans changer la définition.
- (c) Le rang N n'est pas unique : si N convient, tout $N' \geq N$ convient aussi.
- (d) Un nombre *fini* de termes de la suite peuvent être arbitrairement loin de ℓ : seul le comportement « à partir d'un certain rang » importe.

3.3 Premiers exemples de preuves ε - N

3.3.1 Exemple 1 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

C'est l'exemple fondateur. Détaillons la démarche en deux étapes : le **brouillon** (recherche de N) puis la **rédaction formelle**.

Brouillon (analyse). On veut $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$, c'est-à-dire $\frac{1}{n} < \varepsilon$ (pour $n \geq 1$). Or $\frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$. Donc il suffit de choisir N tel que $N > \frac{1}{\varepsilon}$, par exemple $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$ (partie entière plus un).

Rédaction formelle (synthèse).

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Par la propriété archimédienne de $\mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Alors, pour tout $n \geq N$, on a $n \geq N > \frac{1}{\varepsilon}$, d'où

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Ceci montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$. □

3.3.2 Exemple 2 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

Brouillon. On calcule :

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{n - (n+1)}{n+1} \right| = \left| \frac{-1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1}.$$

On veut $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, soit $n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$, soit $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. On choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > \frac{1}{\varepsilon} - 1$.

Rédaction formelle.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ (un tel N existe par la propriété archimédienne). Pour tout $n \geq N$, on a $n+1 > N+1 > \frac{1}{\varepsilon}$, donc

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. □

3.3.3 Exemple 3 : $((-1)^n)$ diverge

Proposition 3.1. La suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas.

Brouillon. Supposons par l'absurde qu'elle converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, à partir d'un rang N , tous les termes sont dans $]\ell - \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}[$. Mais $u_{2k} = 1$ et $u_{2k+1} = -1$ pour tout k . Si les deux valeurs sont dans un intervalle de longueur 1, alors $|1 - (-1)| = 2 \leq 1$, contradiction.

Démonstration. Supposons par l'absurde que $((-1)^n)$ converge vers un réel ℓ . Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|(-1)^n - \ell| < \frac{1}{2}$.

Choisissons $n_1 \geq N$ pair et $n_2 \geq N$ impair (par exemple $n_1 = 2\lceil N/2 \rceil$ et $n_2 = n_1 + 1$). Alors :

$$|1 - \ell| = |(-1)^{n_1} - \ell| < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad |-1 - \ell| = |(-1)^{n_2} - \ell| < \frac{1}{2}.$$

Par l'inégalité triangulaire :

$$2 = |1 - (-1)| = |(1 - \ell) + (\ell - (-1))| \leq |1 - \ell| + |-1 - \ell| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

On obtient $2 < 1$, ce qui est absurde. Donc $((-1)^n)$ diverge. □

3.4 Propriétés fondamentales

3.4.1 Unicité de la limite

Proposition 3.2 (Unicité de la limite). Si une suite (u_n) converge, alors sa limite est unique.

Démonstration. Supposons que (u_n) converge vers ℓ et vers ℓ' avec $\ell \neq \ell'$. Posons $\varepsilon = \frac{|\ell - \ell'|}{2} > 0$.

Par convergence vers ℓ , il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

Par convergence vers ℓ' , il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$, $|u_n - \ell'| < \varepsilon$.

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Pour tout $n \geq N$, par l'inégalité triangulaire :

$$|\ell - \ell'| = |(\ell - u_n) + (u_n - \ell')| \leq |u_n - \ell| + |u_n - \ell'| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |\ell - \ell'|.$$

On obtient $|\ell - \ell'| < |\ell - \ell'|$, ce qui est absurde. Donc $\ell = \ell'$. □

3.4.2 Suites bornées

Définition 3.3 (Suite bornée). Une suite (u_n) est dite **bornée** s'il existe $M \geq 0$ tel que $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 3.3. Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. Soit (u_n) une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. Appliquons la définition de convergence avec $\varepsilon = 1$: il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| < 1$, d'où $|u_n| \leq |u_n - \ell| + |\ell| < 1 + |\ell|$.

Pour les termes de rang $n < N$, ils sont en nombre fini. Posons

$$M = \max(|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N-1}|, 1 + |\ell|).$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$. □

Remarque 3.3. Attention ! La réciproque est fautive : la suite $((-1)^n)$ est bornée (par $M = 1$) mais ne converge pas (proposition 3.1). Ne confondez *jamais* « bornée » et « convergente ».

3.5 Théorème des gendarmes

Théorème 3.1 (Théorème des gendarmes). Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites réelles telles que :

(i) à partir d'un certain rang n_0 , on a $u_n \leq v_n \leq w_n$;

(ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$.

Alors (v_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $u_n \rightarrow \ell$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$: $|u_n - \ell| < \varepsilon$, c'est-à-dire $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$.

Puisque $w_n \rightarrow \ell$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$: $|w_n - \ell| < \varepsilon$, c'est-à-dire $\ell - \varepsilon < w_n < \ell + \varepsilon$.

Posons $N = \max(n_0, N_1, N_2)$. Pour tout $n \geq N$, on a :

$$\ell - \varepsilon < u_n \leq v_n \leq w_n < \ell + \varepsilon.$$

Donc $|v_n - \ell| < \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, la suite (v_n) converge vers ℓ . □

Exemple 3.2. Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$.

Pour tout $n \geq 1$, on a $-1 \leq \sin(n) \leq 1$, donc $\frac{-1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$.

3.6 Opérations sur les limites

Théorème 3.2 (Opérations sur les limites). Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes, de limites respectives ℓ et ℓ' . Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- (i) (λu_n) converge vers $\lambda \ell$;
- (ii) $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$;
- (iii) $(u_n \cdot v_n)$ converge vers $\ell \cdot \ell'$;
- (iv) si $\ell' \neq 0$, alors (u_n/v_n) converge vers ℓ/ℓ' (à partir d'un certain rang, $v_n \neq 0$).

Démonstration de (ii) : somme. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $u_n \rightarrow \ell$, il existe N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$, $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. Puisque $v_n \rightarrow \ell'$, il existe N_2 tel que pour tout $n \geq N_2$, $|v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Pour tout $n \geq N$:

$$|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| = |(u_n - \ell) + (v_n - \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Démonstration de (iii) : produit. On utilise l'identité :

$$u_n v_n - \ell \ell' = u_n(v_n - \ell') + \ell'(u_n - \ell).$$

Puisque (u_n) converge, elle est bornée (proposition 3.3) : il existe $M > 0$ tel que $|u_n| \leq M$ pour tout n .

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$, $|v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Il existe N_2 tel que pour tout $n \geq N_2$, $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2(|\ell'| + 1)}$.

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Pour tout $n \geq N$:

$$\begin{aligned} |u_n v_n - \ell \ell'| &\leq |u_n| |v_n - \ell'| + |\ell'| |u_n - \ell| \\ &\leq M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |\ell'| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|\ell'| + 1)} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|\ell'| \varepsilon}{2(|\ell'| + 1)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Remarque 3.4. La démonstration de (iv) est plus technique ; on commence par montrer que $\frac{1}{v_n} \rightarrow \frac{1}{\ell'}$ lorsque $\ell' \neq 0$, puis on applique (iii). Le point délicat est de montrer que $|v_n| \geq \frac{|\ell'|}{2}$ à partir d'un certain rang, ce qui assure que $v_n \neq 0$ et permet de borner $\frac{1}{|v_n|}$.

3.7 Suites monotones

Définition 3.4 (Suite monotone). Soit (u_n) une suite réelle.

- (u_n) est **croissante** si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (u_n) est **strictement croissante** si $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (u_n) est **décroissante** si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (u_n) est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Théorème 3.3 (Théorème de la limite monotone). Toute suite croissante et majorée converge vers la borne supérieure de son ensemble de valeurs. Plus précisément :
Si (u_n) est croissante et majorée, alors (u_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$.

De même, toute suite décroissante et minorée converge vers l'infimum de son ensemble de valeurs.

Démonstration. Supposons (u_n) croissante et majorée. L'ensemble $E = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Par la propriété de la borne supérieure (axiome fondamental de $\mathbb{R}$), $\ell = \sup E$ existe dans $\mathbb{R}$.

Montrons que $u_n \rightarrow \ell$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\ell - \varepsilon < \ell = \sup E$, le réel $\ell - \varepsilon$ n'est pas un majorant de E . Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > \ell - \varepsilon$.

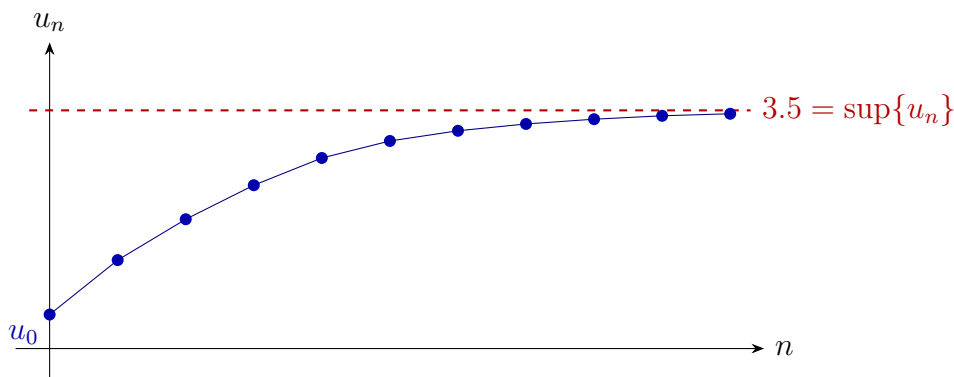
Puisque (u_n) est croissante, pour tout $n \geq N$:

$$\ell - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq \ell < \ell + \varepsilon.$$

Donc $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Le cas décroissant minoré se traite de manière analogue avec $\inf$ à la place de $\sup$. $\square$

Remarque 3.5. Ce théorème repose de manière essentielle sur la *complétude* de $\mathbb{R}$ (propriété de la borne supérieure). Il est faux dans $\mathbb{Q}$: la suite des approximations décimales de $\sqrt{2}$ est croissante et majorée dans $\mathbb{Q}$, mais n'a pas de limite dans $\mathbb{Q}$.



3.8 Suites extraites et Bolzano-Weierstrass

Définition 3.5 (Suite extraite). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante. La suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée **suite extraite** (ou **sous-suite**) de (u_n) .

Remarque 3.6. Puisque φ est strictement croissante, on a $\varphi(n) \geq n$ pour tout n (se démontre par récurrence). Intuitivement, une suite extraite « sélectionne » une infinité de termes de la suite initiale, en respectant l'ordre.

Proposition 3.4. Si (u_n) converge vers ℓ , alors toute suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ converge également vers ℓ .

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Puisque $\varphi(n) \geq n$ pour tout n , pour tout $n \geq N$ on a $\varphi(n) \geq N$, donc $|u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon$. $\square$

Définition 3.6 (Valeur d'adhérence). Un réel ℓ est une **valeur d'adhérence** de la suite (u_n) s'il est limite d'une suite extraite de (u_n) .

Exemple 3.3. La suite $u_n = (-1)^n$ possède deux valeurs d'adhérence : 1 (limite de (u_{2n})) et -1 (limite de (u_{2n+1})).

Théorème 3.4 (Bolzano-Weierstrass). De toute suite bornée de réels, on peut extraire une sous-suite convergente.
Autrement dit : toute suite bornée possède au moins une valeur d'adhérence.

Démonstration. Soit (u_n) une suite bornée : il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $u_n \in [a, b]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On construit par récurrence une suite d'intervalles emboîtés et une suite d'indices.

Initialisation. Posons $I_0 = [a_0, b_0] = [a, b]$.

Hérédité. Supposons construit un intervalle $I_k = [a_k, b_k]$ de longueur $\frac{b-a}{2^k}$ contenant u_n pour une infinité d'indices n . Coupons I_k en deux moitiés :

$$I_k^- = \left[a_k, \frac{a_k + b_k}{2} \right] \quad \text{et} \quad I_k^+ = \left[\frac{a_k + b_k}{2}, b_k \right].$$

Au moins l'une des deux contient u_n pour une infinité d'indices (car la réunion de deux ensembles finis est finie). Choisissons I_{k+1} comme étant cette moitié (en cas d'ambiguïté, prenons I_k^-). On a $|I_{k+1}| = \frac{b-a}{2^{k+1}}$.

Extraction. On choisit $\varphi(0)$ tel que $u_{\varphi(0)} \in I_0$. Puis, par récurrence, on choisit $\varphi(k+1) > \varphi(k)$ tel que $u_{\varphi(k+1)} \in I_{k+1}$ (possible car I_{k+1} contient une infinité de termes).

Convergence. Les suites (a_k) et (b_k) vérifient $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \rightarrow 0$. De plus (a_k) est croissante et majorée, (b_k) est décroissante et minorée. Par le théorème de la limite monotone, elles convergent vers une même limite ℓ .

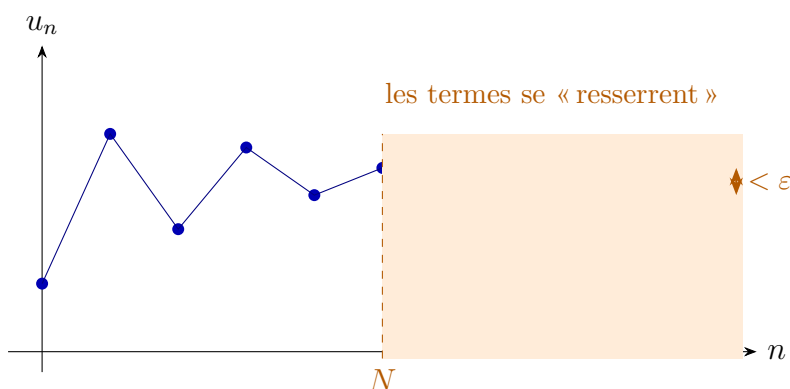
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $a_k \leq u_{\varphi(k)} \leq b_k$. Par le théorème des gendarmes, $u_{\varphi(k)} \rightarrow \ell$. $\square$

3.9 Suites de Cauchy

Définition 3.7 (Suite de Cauchy). Une suite (u_n) est une **suite de Cauchy** si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall p, q \geq N, \quad |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

L'intérêt de cette définition est qu'elle ne fait pas intervenir la limite : on exprime le fait que les termes se « rapprochent les uns des autres » sans avoir besoin de connaître la valeur vers laquelle ils tendent.



Proposition 3.5. Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Démonstration. Soit (u_n) convergent vers ℓ et soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour tous $p, q \geq N$:

$$|u_p - u_q| = |(u_p - \ell) + (\ell - u_q)| \leq |u_p - \ell| + |u_q - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

Lemme 3.1. Toute suite de Cauchy est bornée.

Démonstration. Soit (u_n) de Cauchy. Avec $\varepsilon = 1$, il existe N tel que pour tout $p, q \geq N$, $|u_p - u_q| < 1$. En particulier, pour tout $n \geq N$, $|u_n - u_N| < 1$, donc $|u_n| \leq |u_N| + 1$.

Posons $M = \max(|u_0|, \dots, |u_{N-1}|, |u_N| + 1)$. Alors $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Théorème 3.5 (Complétude de $\mathbb{R}$). Dans $\mathbb{R}$, une suite est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

Démonstration. $(\Rightarrow)$ C'est la proposition 3.5.

$(\Leftarrow)$ Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

Étape 1 : (u_n) est bornée (lemme 3.1).

Étape 2 : Par le théorème de Bolzano-Weierstrass (théorème 3.4), il existe une sous-suite $(u_{\varphi(k)})$ convergent vers un réel ℓ .

Étape 3 : Montrons que (u_n) tout entière converge vers ℓ . Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque (u_n) est de Cauchy, il existe N_1 tel que pour tous $p, q \geq N_1$: $|u_p - u_q| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Puisque $u_{\varphi(k)} \rightarrow \ell$, il existe K tel que pour tout $k \geq K$: $|u_{\varphi(k)} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Choisissons $k_0 \geq K$ tel que $\varphi(k_0) \geq N_1$ (possible car $\varphi(k) \rightarrow +\infty$). Posons $N = N_1$. Pour tout $n \geq N$:

$$|u_n - \ell| \leq |u_n - u_{\varphi(k_0)}| + |u_{\varphi(k_0)} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Donc $u_n \rightarrow \ell$. □

3.10 Suites adjacentes

Définition 3.8 (Suites adjacentes). Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** si :

- (i) (u_n) est croissante ;
- (ii) (v_n) est décroissante ;
- (iii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Théorème 3.6. Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles convergent vers une même limite ℓ et l'on a $u_n \leq \ell \leq v_n$ pour tout n .

Démonstration. Montrons d'abord que $u_n \leq v_n$ pour tout n . Posons $w_n = v_n - u_n$. La suite (w_n) tend vers 0. De plus, $w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n) \leq 0$, donc (w_n) est décroissante. Comme $w_n \rightarrow 0$, on a $w_n \geq 0$ pour tout n (si $w_{n_0} < 0$ pour un certain n_0 , alors $w_n \leq w_{n_0} < 0$ pour tout $n \geq n_0$, contredisant $w_n \rightarrow 0$). Donc $u_n \leq v_n$.

La suite (u_n) est croissante et majorée (par v_0 , car $u_n \leq v_n \leq v_0$). Par le théorème de la limite monotone, $u_n \rightarrow \ell_1$.

La suite (v_n) est décroissante et minorée (par u_0). Donc $v_n \rightarrow \ell_2$.

Enfin, $0 = \lim (v_n - u_n) = \ell_2 - \ell_1$, donc $\ell_1 = \ell_2 =: \ell$.

De $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout n , on tire à la limite $u_n \leq \ell$. De même $\ell \leq v_n$. □

3.11 Suites récurrentes

Une suite récurrente est une suite définie par une relation de la forme

$$u_0 \in \mathbb{R}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \geq 0,$$

où $f : I \rightarrow I$ est une fonction définie sur un intervalle I .

Proposition 3.6 (Point fixe et limite). Si (u_n) est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue sur un intervalle I , et si (u_n) converge vers $\ell \in I$, alors ℓ est un **point fixe** de f , c'est-à-dire $f(\ell) = \ell$.

Démonstration. Puisque $u_{n+1} = f(u_n)$ et que $u_n \rightarrow \ell$, on a d'une part $u_{n+1} \rightarrow \ell$ et d'autre part $f(u_n) \rightarrow f(\ell)$ par continuité de f . Par unicité de la limite, $\ell = f(\ell)$. □

Exemple 3.4. Suite $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$, $u_0 = 2$.

C'est la méthode de Héron (ou de Babylone) pour approcher $\sqrt{2}$.

Étape 1 : Points fixes. Si $\ell = \frac{1}{2}(\ell + \frac{2}{\ell})$, alors $2\ell = \ell + \frac{2}{\ell}$, soit $\ell = \frac{2}{\ell}$, d'où $\ell^2 = 2$ et $\ell = \sqrt{2}$ (car $u_n > 0$ pour tout n).

Étape 2 : Montrons que $u_n \geq \sqrt{2}$ *pour tout* $n \geq 1$. Par l'inégalité arithmético-géométrique : $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n}) \geq \sqrt{u_n \cdot \frac{2}{u_n}} = \sqrt{2}$.

Étape 3 : Montrons que (u_n) *est décroissante pour* $n \geq 1$. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(\frac{2}{u_n} - u_n) = \frac{2 - u_n^2}{2u_n} \leq 0$ car $u_n \geq \sqrt{2}$ donc $u_n^2 \geq 2$.

Conclusion : $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$. Elle converge, et sa limite est $\sqrt{2}$.

Exemple 3.5. Suite $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 1$, $u_0 = 0$.

Point fixe : $\ell = \frac{\ell}{3} + 1 \implies \frac{2\ell}{3} = 1 \implies \ell = \frac{3}{2}$.

Posons $v_n = u_n - \frac{3}{2}$. Alors $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}u_n + 1 - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}(u_n - \frac{3}{2}) = \frac{1}{3}v_n$.

Donc $v_n = \frac{1}{3^n}v_0 = \frac{1}{3^n}(-\frac{3}{2}) \rightarrow 0$. Ainsi $u_n \rightarrow \frac{3}{2}$.

3.12 Erreurs courantes

E1. Confondre « bornée » et « convergente ». La suite $((-1)^n)$ est bornée mais pas convergente. Une suite convergente est toujours bornée, mais la réciproque est fausse.

E2. Inverser les quantificateurs. La définition de la convergence est $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \dots$. L'écrire $\exists N, \forall \varepsilon > 0, \dots$ donne une propriété *différente* et beaucoup plus forte (et fausse en général).

E3. Oublier que N dépend de ε . Dans une preuve ε - N , on fixe d'abord ε , puis on exhibe N . Si N ne dépend pas de ε , c'est en général suspect.

E4. Dédire la convergence de $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$. C'est faux ! Contre-exemple : $u_n = \ln(n)$ vérifie $u_{n+1} - u_n = \ln(1 + 1/n) \rightarrow 0$, mais (u_n) diverge.

E5. Confondre monotone bornée $\Rightarrow$ convergente avec la réciproque. Une suite convergente n'est pas nécessairement monotone : $u_n = (-1)^n/n$ converge vers 0 sans être monotone.

3.13 Résumé du chapitre

Points clés du chapitre 3

- **Convergence** : $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon$.
- La limite, si elle existe, est **unique**.
- Convergente $\Rightarrow$ bornée (la réciproque est **fausse**).
- **Théorème des gendarmes** : encadrement par deux suites de même limite.
- **Opérations** : somme, produit, quotient de limites.
- **Monotone bornée** $\Rightarrow$ **convergente** (utilise la complétude de $\mathbb{R}$).
- **Bolzano-Weierstrass** : toute suite bornée admet une sous-suite convergente.
- **Cauchy** $\Leftrightarrow$ **convergente** dans $\mathbb{R}$ (complétude).
- **Suites adjacentes** : convergent vers une même limite.
- **Suites récurrentes** : chercher les points fixes, montrer la monotonie et le caractère borné.

3.14 Exercices

Exercice 3.1 (★). Montrer que la définition de la convergence ne change pas si l'on remplace « $|u_n - \ell| < \varepsilon$ » par « $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ ».

Exercice 3.2 (★). Montrer, à l'aide de la définition ε - N , que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.
Indication : montrer que $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$ et utiliser l'exemple du cours, ou bien exhiber directement N .

Exercice 3.3 (★). Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{n+3} = 2$ par la définition ε - N . Détailler le brouillon et la rédaction.

Exercice 3.4 (★). Donner un exemple de suite bornée non convergente différent de $((-1)^n)$.

Exercice 3.5 (★★). Soit (u_n) une suite bornée et (v_n) une suite convergeant vers 0. Montrer que $(u_n v_n)$ converge vers 0.

Exercice 3.6 (★★). (**Lemme de Cesàro.**) Soit (u_n) une suite convergeant vers ℓ . On pose $w_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$. Montrer que (w_n) converge vers ℓ .
Indication : décomposer la somme en deux parties en utilisant le rang N fourni par la convergence de (u_n) .

Exercice 3.7 (**). Soit $u_0 \in [0, 1]$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_n^2)$ pour $n \geq 0$.

- (a) Montrer que $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout n .
- (b) Montrer que (u_n) est croissante.
- (c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 3.8 (**). Soit $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$, $a > 0$. Montrer que (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.

Exercice 3.9 (**). Soit (u_n) une suite bornée telle que toute sous-suite convergente a la même limite ℓ . Montrer que (u_n) converge vers ℓ .

Indication : raisonner par l'absurde et utiliser Bolzano-Weierstrass.

Exercice 3.10 (**). On pose $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes. (Leur limite commune est e .)

Exercice 3.11 (***). Donner un exemple de suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$. Que peut-on en conclure sur la complétude de $\mathbb{Q}$?

Exercice 3.12 (***). (**Stolz-Cesàro.**) Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles telles que (b_n) est strictement croissante, non bornée, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$.

Exercice 3.13 (***). Une suite (u_n) est dite **contractive** s'il existe $k \in [0, 1[$ tel que $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq k |u_{n+1} - u_n|$ pour tout n .

- (a) Montrer que toute suite contractive est de Cauchy.
 - (b) En déduire qu'elle converge.
 - (c) Application : montrer que la suite définie par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \cos(u_n)$ converge.
- Indication* : utiliser le théorème des accroissements finis.

Chapitre 4

Séries numériques

Introduction

Que signifie « additionner une infinité de nombres » ? L'addition ordinaire est une opération qui porte sur deux nombres, que l'on peut étendre par récurrence à un nombre fini quelconque de termes. Mais rien ne garantit *a priori* qu'une somme comportant une infinité de termes ait un sens.

Considérons l'exemple suivant :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

L'intuition suggère que cette somme vaut 1 : à chaque étape, on comble la moitié de l'écart restant. Les **sommes partielles** successives sont $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \dots$ et « tendent » vers 1. C'est précisément cette idée — la convergence des sommes partielles — qui fonde la théorie des séries.

Mais attention : des sommes infinies peuvent aussi « exploser ». La somme $1+1+1+\cdots$ diverge manifestement. Plus subtil : la **série harmonique** $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ diverge également, bien que ses termes tendent vers 0. Distinguer les séries convergentes des séries divergentes est l'objet principal de ce chapitre.

4.1 Définitions fondamentales

Définition 4.1 (Série et somme partielle). Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle. On appelle **série** de terme général a_n la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ des **sommes partielles** :

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n.$$

On note la série $\sum a_n$ ou $\sum_{n \geq 0} a_n$.

Définition 4.2 (Convergence d'une série). On dit que la série $\sum a_n$ **converge** si la suite (S_n) des sommes partielles converge. Dans ce cas, la limite $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ est

appelée **somme** de la série et l'on écrit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S.$$

Si (S_n) diverge, on dit que la série $\sum a_n$ **diverge**.

Définition 4.3 (Reste d'une série). Si $\sum a_n$ converge de somme S , le **reste d'ordre** n est

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

On a $R_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

4.2 Condition nécessaire de convergence

Théorème 4.1 (Condition nécessaire). Si la série $\sum a_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Démonstration. Si $\sum a_n$ converge, la suite (S_n) converge vers un réel S . Or, pour $n \geq 1$,

$$a_n = S_n - S_{n-1}.$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$. $\square$

Remarque 4.1. Attention ! La réciproque est **fausse**. C'est l'une des erreurs les plus fréquentes en analyse. La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ en est le contre-exemple classique.

Proposition 4.1 (Divergence de la série harmonique). La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Démonstration. Groupons les termes par paquets de tailles 1, 2, 4, 8, ... :

$$S_{2^k} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{1 \text{ terme}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{2 \text{ termes}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}}_{4 \text{ termes}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}}_{2^{k-1} \text{ termes}}.$$

Chaque paquet de 2^{j-1} termes (pour $j \geq 1$) vérifie

$$\frac{1}{2^{j-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^j} \geq 2^{j-1} \cdot \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2}.$$

Donc $S_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$, et comme $\frac{k}{2} \rightarrow +\infty$, la suite (S_{2^k}) diverge vers $+\infty$. Puisque (S_n) est croissante (les termes sont positifs), (S_n) diverge vers $+\infty$. $\square$

Corollaire 4.1. Si $a_n \not\rightarrow 0$, la série $\sum a_n$ diverge (« test de divergence grossier »).

4.3 Séries géométriques

Théorème 4.2 (Série géométrique). Soit $r \in \mathbb{R}$.

- (i) Si $|r| < 1$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$.
- (ii) Si $|r| \geq 1$, la série $\sum r^n$ diverge.

Démonstration. Calcul de la somme partielle. Pour $r \neq 1$:

$$S_n = \sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

On le vérifie en multipliant les deux membres par $(1 - r)$: $(1 - r) \sum_{k=0}^n r^k = \sum_{k=0}^n r^k - \sum_{k=0}^n r^{k+1} = 1 - r^{n+1}$ (somme télescopique).

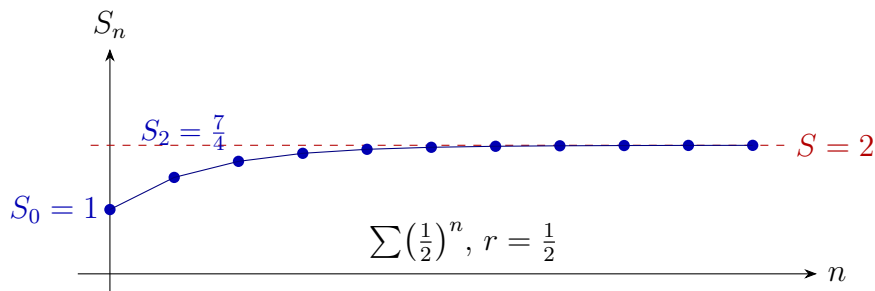
Cas $|r| < 1$. On a $|r^{n+1}| = |r|^{n+1} \rightarrow 0$, donc $S_n \rightarrow \frac{1-0}{1-r} = \frac{1}{1-r}$.

Cas $|r| > 1$. On a $|r^{n+1}| \rightarrow +\infty$, donc (S_n) diverge.

Cas $r = 1$. $S_n = n + 1 \rightarrow +\infty$.

Cas $r = -1$. S_n alterne entre 1 et 0, donc diverge. □

Exemple 4.1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - 1/2} = 2$. Cela confirme notre intuition initiale : $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$, à quoi s'ajoute le terme $n = 0$ qui vaut 1.



4.4 Séries télescopiques

Définition 4.4 (Série télescopique). Une série $\sum a_n$ est dite **télescopique** si $a_n = b_n - b_{n+1}$ pour une certaine suite (b_n) . Alors

$$S_n = \sum_{k=0}^n (b_k - b_{k+1}) = b_0 - b_{n+1}.$$

La série converge si et seulement si (b_n) converge, auquel cas $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = b_0 - \lim b_n$.

Exemple 4.2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

On décompose en éléments simples : $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. C'est une série télescopique avec $b_n = \frac{1}{n}$. Donc $S_N = 1 - \frac{1}{N+1} \rightarrow 1$, et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Exemple 4.3. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$.

On écrit $\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right)$. Donc $S_N = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2N+3} \right) \rightarrow \frac{1}{2}$.

4.5 Séries à termes positifs : critères de convergence

Lorsque $a_n \geq 0$ pour tout n , la suite des sommes partielles est croissante. Donc, par le théorème de la limite monotone (théorème 3.3), $\sum a_n$ converge si et seulement si (S_n) est majorée.

4.5.1 Critère de comparaison

Théorème 4.3 (Comparaison). Soient (a_n) et (b_n) deux suites telles que $0 \leq a_n \leq b_n$ à partir d'un certain rang.

- (i) Si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge.
- (ii) Si $\sum a_n$ diverge, alors $\sum b_n$ diverge.

Démonstration. (i) Notons $S_n^a = \sum_{k=0}^n a_k$ et $S_n^b = \sum_{k=0}^n b_k$. La suite (S_n^a) est croissante (car $a_n \geq 0$). De plus, pour n assez grand, $S_n^a \leq S_n^b \leq \sum_{k=0}^{+\infty} b_k < +\infty$. Donc (S_n^a) est croissante et majorée, donc convergente.

(ii) est la contraposée de (i). □

4.5.2 Critère de d'Alembert (rapport)

Théorème 4.4 (Critère de d'Alembert). Soit $\sum a_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose que la limite

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

existe (finie ou infinie).

- (i) Si $L < 1$, la série $\sum a_n$ converge.
- (ii) Si $L > 1$, la série $\sum a_n$ diverge.

(iii) Si $L = 1$, on ne peut pas conclure.

Démonstration. Cas $L < 1$. Choisissons r tel que $L < r < 1$. Posons $\varepsilon = r - L > 0$. Il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - L \right| < \varepsilon$, c'est-à-dire $\frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon = r$.

Donc, pour tout $n \geq N$: $a_{n+1} < r \cdot a_n$. Par récurrence, pour tout $n \geq N$:

$$a_n < r^{n-N} \cdot a_N = \frac{a_N}{r^N} \cdot r^n.$$

Puisque $0 < r < 1$, la série géométrique $\sum r^n$ converge. Par le critère de comparaison (théorème 4.3), $\sum a_n$ converge.

Cas $L > 1$. De même, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, donc $(a_n)_{n \geq N}$ est croissante. En particulier, $a_n \geq a_N > 0$ pour tout $n \geq N$, donc $a_n \not\rightarrow 0$ et la série diverge par le test de divergence (corollaire 4.1).

Cas $L = 1$. $\sum \frac{1}{n}$ diverge et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, mais les deux vérifient $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1$. Donc le critère est non concluant. $\square$

4.5.3 Critère de Cauchy (racine)

Théorème 4.5 (Critère de Cauchy). Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs. On suppose que la limite

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)^{1/n}$$

existe.

- (i) Si $L < 1$, la série $\sum a_n$ converge.
- (ii) Si $L > 1$, la série $\sum a_n$ diverge.
- (iii) Si $L = 1$, on ne peut pas conclure.

Démonstration. Cas $L < 1$. Choisissons r tel que $L < r < 1$. Il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $\sqrt[n]{a_n} < r$, c'est-à-dire $a_n < r^n$. Puisque $\sum r^n$ converge ($0 < r < 1$), la série $\sum a_n$ converge par comparaison.

Cas $L > 1$. Il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $\sqrt[n]{a_n} > 1$, donc $a_n > 1$. En particulier $a_n \not\rightarrow 0$ et la série diverge. $\square$

4.5.4 Comparaison intégrale et séries de Riemann

Théorème 4.6 (Comparaison intégrale). Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ une fonction décroissante. Alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ sont de même nature (toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes). Plus précisément :

$$\int_1^{N+1} f(t) dt \leq \sum_{n=1}^N f(n) \leq f(1) + \int_1^N f(t) dt.$$

Corollaire 4.2 (Séries de Riemann). La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration. On applique le théorème de comparaison intégrale avec $f(t) = t^{-\alpha}$.

Si $\alpha \neq 1$: $\int_1^N t^{-\alpha} dt = \frac{N^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$.

— Si $\alpha > 1$: $1 - \alpha < 0$, donc $N^{1-\alpha} \rightarrow 0$ et l'intégrale converge.

— Si $\alpha < 1$: $1 - \alpha > 0$, donc $N^{1-\alpha} \rightarrow +\infty$ et l'intégrale diverge.

Si $\alpha = 1$: $\int_1^N \frac{dt}{t} = \ln N \rightarrow +\infty$, donc divergence (c'est la série harmonique). $\square$

4.6 Convergence absolue

Définition 4.5 (Convergence absolue). La série $\sum a_n$ est dite **absolument convergente** si la série $\sum |a_n|$ converge.

Théorème 4.7. Toute série absolument convergente est convergente. Autrement dit :

$$\sum |a_n| \text{ converge} \implies \sum a_n \text{ converge.}$$

Démonstration. Posons $b_n = a_n + |a_n|$. On a $0 \leq b_n \leq 2|a_n|$ pour tout n .

Si $\sum |a_n|$ converge, alors $\sum 2|a_n|$ converge, et par comparaison $\sum b_n$ converge.

Or $a_n = b_n - |a_n|$, donc $\sum a_n = \sum b_n - \sum |a_n|$ (différence de deux séries convergentes).
Donc $\sum a_n$ converge. $\square$

Remarque 4.2. La réciproque est fausse. Une série peut converger sans converger absolument : on dit alors qu'elle est **semi-convergente** (ou conditionnellement convergente). L'exemple fondamental est la série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Définition 4.6 (Semi-convergence). Une série $\sum a_n$ est dite **semi-convergente** (ou **conditionnellement convergente**) si elle converge mais ne converge pas absolument.

4.7 Séries alternées et critère de Leibniz

Définition 4.7 (Série alternée). Une série $\sum a_n$ est dite **alternée** si ses termes sont alternativement positifs et négatifs, c'est-à-dire si $a_n = (-1)^n b_n$ avec $b_n \geq 0$ pour tout n .

Théorème 4.8 (Critère de Leibniz). Soit $(b_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels positifs telle que :

(i) (b_n) est décroissante ;

(ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$.

Alors la série alternée $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n b_n$ converge. De plus, si S désigne sa somme et S_n la somme partielle d'ordre n , on a :

$$|S - S_n| \leq b_{n+1} \quad \text{et} \quad S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n} \quad \text{pour tout } n.$$

Démonstration. Étudions les sous-suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) .

(S_{2n}) est décroissante. $S_{2(n+1)} - S_{2n} = a_{2n+1} + a_{2n+2} = -b_{2n+1} + b_{2n+2} = -(b_{2n+1} - b_{2n+2}) \leq 0$ car (b_n) est décroissante.

(S_{2n+1}) est croissante. $S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = a_{2n+2} + a_{2n+3} = b_{2n+2} - b_{2n+3} \geq 0$ car (b_n) est décroissante.

Encadrement. $S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1+1} \dots$ Non, plus directement : $S_{2n+1} = S_{2n} - b_{2n+1} \leq S_{2n}$. De plus, $S_{2n+1} \geq S_1 = b_0 - b_1 \geq 0$ (si $b_0 \geq b_1$, ce qui est le cas car (b_n) est décroissante). Et $S_{2n} \leq S_0 = b_0$.

Donc (S_{2n}) est décroissante et minorée (par S_1), et (S_{2n+1}) est croissante et majorée (par S_0). Par le théorème de la limite monotone, elles convergent :

$$S_{2n} \rightarrow \ell \quad \text{et} \quad S_{2n+1} \rightarrow \ell'.$$

Or $S_{2n} - S_{2n+1} = b_{2n+1} \rightarrow 0$, donc $\ell = \ell' =: S$.

Comme (S_{2n}) est décroissante de limite S et (S_{2n+1}) est croissante de limite S , on a $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$ pour tout n .

Enfin, pour la suite (S_n) tout entière, les deux sous-suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers la même limite S , donc $S_n \rightarrow S$.

Majoration du reste. Pour n pair ($n = 2m$) : $|S - S_{2m}| = S_{2m} - S \leq S_{2m} - S_{2m+1} = b_{2m+1} = b_{n+1}$. Pour n impair ($n = 2m+1$) : $|S - S_{2m+1}| = S - S_{2m+1} \leq S_{2(m+1)} - S_{2m+1} = b_{2m+2} = b_{n+1}$. Dans tous les cas, $|S - S_n| \leq b_{n+1}$. $\square$

Exemple 4.4. La série harmonique alternée $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

converge par le critère de Leibniz (avec $b_n = \frac{1}{n}$, décroissante et tendant vers 0). Sa somme est $\ln 2$.

Pourtant, $\sum \frac{1}{n}$ diverge. C'est un exemple de série *semi-convergente*.

4.8 Séries entières

Définition 4.8 (Série entière). Une **série entière** est une série de fonctions de la forme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

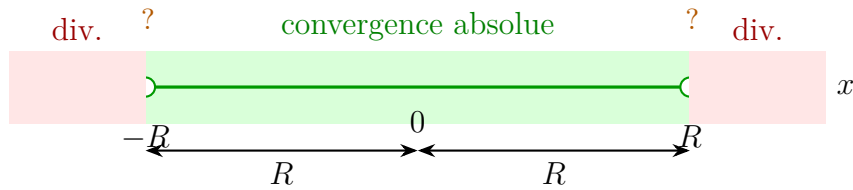
où $(a_n)_{n \geq 0}$ est une suite de réels (les **coefficients**) et $x \in \mathbb{R}$ est la variable.

Définition 4.9 (Rayon de convergence). Le **rayon de convergence** de la série entière $\sum a_n x^n$ est

$$R = \sup\{|x| \geq 0 : \text{la suite } (a_n x^n) \text{ est bornée}\} \in [0, +\infty].$$

On a :

- la série converge absolument pour $|x| < R$;
- la série diverge pour $|x| > R$;
- pour $|x| = R$, il faut étudier au cas par cas.



Théorème 4.9 (Formule de Hadamard). Le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est donné par

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n},$$

avec les conventions $1/0 = +\infty$ et $1/(+\infty) = 0$.

Remarque 4.3. En pratique, lorsque la limite $\lim |a_{n+1}/a_n|$ existe, on a aussi $R = \lim |a_n/a_{n+1}|$ (conséquence du critère de d'Alembert).

Proposition 4.2 (Convergence sur tout compact intérieur). Si $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$, alors la série converge uniformément sur tout segment $[-r, r]$ avec $0 < r < R$. En particulier, la somme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $] -R, R[$.

4.8.1 Exemples fondamentaux

Exemple 4.5. Exponentielle. $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, rayon de convergence $R = +\infty$.

En effet, $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 < 1$ par le critère de d'Alembert.

Exemple 4.6. Sinus et cosinus.

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n},$$

toutes deux de rayon de convergence $R = +\infty$.

Exemple 4.7. Logarithme. $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$, rayon de convergence $R = 1$, valable pour $x \in]-1, 1]$.
Le rayon se calcule par $|a_{n+1}/a_n| = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$, donc $R = 1$. En $x = 1$, la série converge (série harmonique alternée). En $x = -1$, c'est $-\sum \frac{1}{n}$ qui diverge.

Exemple 4.8. Série binomiale. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad |x| < 1,$$

où $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ est le coefficient binomial généralisé. Le rayon de convergence est $R = 1$.

4.9 Produit de Cauchy de séries

Définition 4.10 (Produit de Cauchy). Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries. Leur **produit de Cauchy** est la série $\sum c_n$ où

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0.$$

Théorème 4.10 (Mertens). Si $\sum a_n$ converge absolument (de somme A) et $\sum b_n$ converge (de somme B), alors le produit de Cauchy $\sum c_n$ converge et sa somme est AB .

Exemple 4.9. $\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x+y)$.

Les séries $\sum \frac{x^n}{n!}$ et $\sum \frac{y^n}{n!}$ sont absolument convergentes. Leur produit de Cauchy a pour terme général :

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Par le théorème de Mertens, $\exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y)$.

4.10 Erreurs courantes

- E1.** « $a_n \rightarrow 0$ donc $\sum a_n$ converge. » FAUX ! C'est la confusion entre condition nécessaire et condition suffisante. Contre-exemple : $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ mais $\sum \frac{1}{n}$ diverge.
- E2.** Appliquer le critère de d'Alembert ou de Cauchy lorsque $L = 1$. Ces critères sont **non concluants** pour $L = 1$. Il faut alors utiliser un autre outil (comparaison, Leibniz, séries de Riemann, etc.).
- E3.** Confondre convergence absolue et convergence. La convergence absolue est plus forte. « $\sum a_n$ converge » ne signifie *pas* que $\sum |a_n|$ converge.
- E4.** Oublier de vérifier les hypothèses de Leibniz. Le critère de Leibniz exige que (b_n) soit décroissante *et* tende vers 0. Si l'une de ces conditions manque, on ne peut pas conclure.
- E5.** Confondre le terme général a_n et la somme partielle S_n . La série $\sum a_n$ converge signifie que $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ a une limite finie, *pas* que a_n a une limite finie (même si c'est une conséquence).

4.11 Résumé du chapitre

Points clés du chapitre 4

- $\sum a_n$ converge $\iff$ la suite des sommes partielles S_n converge.
- **Condition nécessaire** : $\sum a_n$ cv $\Rightarrow a_n \rightarrow 0$ (réciproque **fausse**).
- **Série géométrique** : $\sum r^n = \frac{1}{1-r}$ si $|r| < 1$.
- **Termes positifs** : comparaison, d'Alembert ($L < 1$ cv, $L > 1$ div), Cauchy racine, comparaison intégrale.
- **Séries de Riemann** : $\sum 1/n^\alpha$ cv $\iff \alpha > 1$.
- **Convergence absolue** $\Rightarrow$ **convergence** (réciproque fausse).
- **Leibniz** : $\sum (-1)^n b_n$ cv si $b_n \searrow 0$, avec $|R_n| \leq b_{n+1}$.
- **Séries entières** : rayon de convergence R , cv absolue pour $|x| < R$.
- **Produit de Cauchy** : $(\sum a_n)(\sum b_n) = \sum c_n$ sous convergence absolue.

4.12 Exercices

Exercice 4.1 (★). Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{4^n}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$.

Exercice 4.2 (★). Montrer que les séries suivantes divergent : $\sum \frac{n}{n+1}$, $\sum \cos\left(\frac{1}{n}\right)$, $\sum (-1)^n$.

Exercice 4.3 (★). Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}$. *Indication* : décomposer en éléments simples.

Exercice 4.4 (★). Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ diverge.

Exercice 4.5 (★★). Étudier la convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ à l'aide du critère de d'Alembert.

Exercice 4.6 (★★). Étudier la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ à l'aide du critère de Cauchy (racine).

Exercice 4.7 (★★). En utilisant une comparaison avec une série de Riemann, montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + n + 1}$ converge.

Exercice 4.8 (★★). Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ converge. Est-elle absolument convergente ?

Exercice 4.9 (★★). Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ converge mais n'est pas absolument convergente.

Exercice 4.10 (★★). Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

(a) $\sum n! x^n$

(b) $\sum \frac{x^n}{n^2}$

(c) $\sum \frac{n^n}{n!} x^n$

$$(d) \sum \frac{x^{2n}}{4^n}$$

Exercice 4.11 (***). (**Séries de Bertrand.**) Étudier la convergence de $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ en fonction de α et β .
Indication : distinguer les cas $\alpha > 1$, $\alpha < 1$ et $\alpha = 1$.

Exercice 4.12 (***). Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ pour $x \in \mathbb{R}$. En utilisant le produit de Cauchy, montrer directement que $f(x)f(-x) = 1$ pour tout x . En déduire que $f(x) \neq 0$ pour tout x .

Exercice 4.13 (***). (**Transformation d'Abel.**) Soient (a_n) et (b_n) deux suites. On pose $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$. Montrer la formule de sommation par parties :

$$\sum_{k=0}^n a_k b_k = a_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) B_k.$$

En déduire le **critère d'Abel** : si (a_n) est monotone convergente vers 0 et si les sommes partielles B_n sont bornées, alors $\sum a_n b_n$ converge.

Exercice 4.14 (***). (**Théorème de Riemann sur les réarrangements.**) Soit $\sum a_n$ une série semi-convergente. On admet que pour tout $S \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\sum a_{\sigma(n)} = S$.

Vérifier ce résultat pour $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$: trouver un réarrangement dont la somme vaut $\frac{3}{2} \ln 2$.

Indication : prendre deux termes positifs, puis un terme négatif, et répéter.

Chapitre 5

Limites et Continuité des Fonctions

Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons étudié les suites réelles et leurs limites. Nous passons maintenant à l'étude des *fonctions* $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}$. La question centrale est la suivante : comment décrire le comportement de $f(x)$ lorsque x s'approche d'un point a ? La réponse repose sur le formalisme ε - δ dû à Weierstrass, qui fournit un cadre rigoureux pour définir les limites de fonctions et la continuité. Ce formalisme est le socle de toute l'analyse moderne ; il est *indispensable* de le maîtriser dès la première année.

5.1 Limite d'une fonction en un point

Définition 5.1 (Limite d'une fonction en un point). Soient $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ un point *adhérent* à $D \setminus \{a\}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet pour **limite** ℓ lorsque x tend vers a , et l'on écrit

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell,$$

si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in D, \quad 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Décryptage. Pour tout ε couloir ε de hauteur 2ε autour de ℓ sur l'axe des ordonnées, on peut trouver un δ couloir δ de largeur 2δ autour de a sur l'axe des abscisses tel que, dès que x est dans ce couloir (sans être égal à a), l'image $f(x)$ tombe dans le couloir vertical. L'ordre des quantificateurs est crucial : ε vient en premier (c'est l'adversaire qui choisit la précision), puis δ est notre réponse.

Remarque 5.1. La définition ne fait *aucune* hypothèse sur $f(a)$: le point a peut ne pas appartenir à D , ou $f(a)$ peut différer de ℓ . Seul le comportement de f au *voisinage* de a importe.

Théorème 5.1 (Caractérisation séquentielle de Heine). Soient $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, a adhérent à $D \setminus \{a\}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff \text{pour toute suite } (x_n) \subset D \setminus \{a\} \text{ telle que } x_n \rightarrow a, f(x_n) \rightarrow \ell.$$

Démonstration. $(\Rightarrow)$ Supposons $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$. Soit (x_n) une suite d'éléments de $D \setminus \{a\}$ telle que $x_n \rightarrow a$. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in D, \quad 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Puisque $x_n \rightarrow a$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|x_n - a| < \delta$. Comme $x_n \neq a$ pour tout n , on a $0 < |x_n - a| < \delta$ pour $n \geq N$, d'où $|f(x_n) - \ell| < \varepsilon$. Ceci montre que $f(x_n) \rightarrow \ell$.

$(\Leftarrow)$ Nous procédons par contraposée. Supposons que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq \ell$. Cela signifie :

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \quad \forall \delta > 0, \quad \exists x \in D, \quad 0 < |x - a| < \delta \text{ et } |f(x) - \ell| \geq \varepsilon_0.$$

Appliquons cette propriété avec $\delta = 1/n$ pour chaque $n \geq 1$: il existe $x_n \in D$ tel que $0 < |x_n - a| < 1/n$ et $|f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon_0$. On obtient ainsi une suite (x_n) d'éléments de $D \setminus \{a\}$ telle que $x_n \rightarrow a$ (car $|x_n - a| < 1/n \rightarrow 0$) mais $f(x_n) \not\rightarrow \ell$ (car $|f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon_0$ pour tout n). La contraposée est établie. $\square$

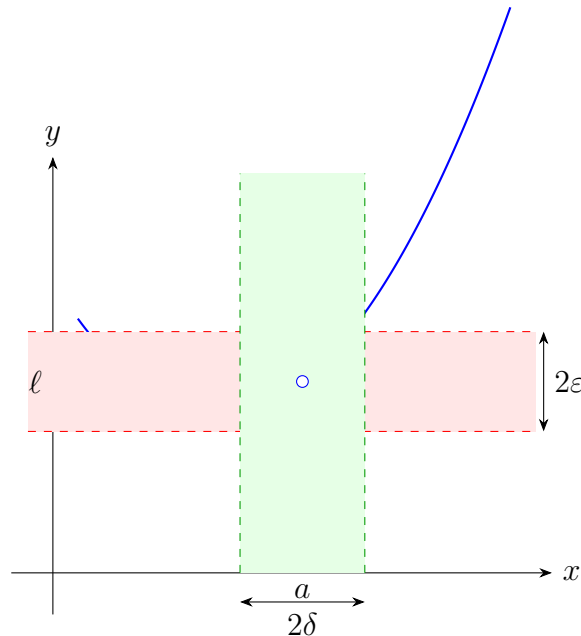


FIGURE 5.1 – Illustration de la définition ε - δ de la limite. La bande horizontale (rouge) correspond à $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$, la bande verticale (verte) à $]a - \delta, a + \delta[$.

Exemple 5.1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1) = 5$.

Brouillon (travail préparatoire). On veut $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, c'est-à-dire $|(3x - 1) - 5| < \varepsilon$, soit $|3x - 6| < \varepsilon$, soit $3|x - 2| < \varepsilon$, soit $|x - 2| < \varepsilon/3$. On prendra donc $\delta = \varepsilon/3$.

Rédaction. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\delta = \varepsilon/3 > 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 < |x - 2| < \delta$. Alors :

$$|f(x) - 5| = |(3x - 1) - 5| = |3x - 6| = 3|x - 2| < 3\delta = 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1) = 5$. □

Exemple 5.2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Méthode : théorème d'encadrement. Pour $x \in]0, \pi/2[$, on sait (par argument géométrique sur le cercle trigonométrique) que

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

Comme la fonction $x \mapsto \sin(x)/x$ est paire, cette encadrement vaut aussi pour $x \in]-\pi/2, 0[$. Or $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$. Par le théorème d'encadrement (des gendarmes) pour les fonctions :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad \square$$

5.2 Limites à gauche, à droite, limites infinies

Définition 5.2 (Limite à gauche et à droite). Soient $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ adhérent à $D \cap]-\infty, a[$.

On dit que f admet ℓ pour **limite à gauche** en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in D, \quad a - \delta < x < a \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On note $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$ ou $f(a^-) = \ell$.

La **limite à droite** est définie de manière analogue en remplaçant $a - \delta < x < a$ par $a < x < a + \delta$.

Proposition 5.1. On a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$.

Démonstration. ($\implies$) Immédiat : si la condition ε - δ vaut pour tout x avec $0 < |x - a| < \delta$, elle vaut a fortiori pour $x < a$ ou $x > a$.

($\Leftarrow$) Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse il existe $\delta_1, \delta_2 > 0$ tels que :

$$— a - \delta_1 < x < a \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

$$— a < x < a + \delta_2 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Posons $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$. Pour tout $x \in D$ avec $0 < |x - a| < \delta$, on a soit $a - \delta < x < a$, soit $a < x < a + \delta$. Dans les deux cas, $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. $\square$

Définition 5.3 (Limite infinie). On dit que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ si :

$$\forall M > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in D, \quad 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > M.$$

On définit de même $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ en remplaçant $f(x) > M$ par $f(x) < -M$.

Définition 5.4 (Limite en l'infini). Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ avec D non majoré. On dit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A > 0, \quad \forall x \in D, \quad x > A \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

5.3 Opérations sur les limites

Théorème 5.2 (Opérations algébriques sur les limites). Soient $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ et a adhérent à $D \setminus \{a\}$. Supposons $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$. Alors :

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \ell + m$;
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} (\lambda f(x)) = \lambda \ell$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$;
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) g(x) = \ell m$;
- (iv) si $m \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m}$.

Démonstration. Nous démontrons (i) et (iii) ; les autres sont similaires.

(i) Somme. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta_1 > 0$ tel que $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon/2$ et $\delta_2 > 0$ tel que $0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - m| < \varepsilon/2$. Posons $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Pour $0 < |x - a| < \delta$:

$$|(f(x) + g(x)) - (\ell + m)| \leq |f(x) - \ell| + |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(iii) Produit. Écrivons :

$$f(x) g(x) - \ell m = f(x)(g(x) - m) + m(f(x) - \ell).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f admet une limite en a , f est bornée au voisinage de a : il existe $\delta_0 > 0$ et $C > 0$ tels que $0 < |x - a| < \delta_0 \Rightarrow |f(x)| \leq C$. Posons $M = \max(C, |m|) + 1$ (pour éviter $M = 0$). Il existe $\delta_1 > 0$ tel que $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - m| < \varepsilon/(2M)$ et

$\delta_2 > 0$ tel que $0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon/(2M)$. Posons $\delta = \min(\delta_0, \delta_1, \delta_2)$. Pour $0 < |x - a| < \delta$:

$$|f(x)g(x) - \ell m| \leq |f(x)||g(x) - m| + |m||f(x) - \ell| < C \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |m| \cdot \frac{\varepsilon}{2M} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

5.4 Continuité en un point

Définition 5.5 (Continuité en un point). Soient $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in D$. On dit que f est **continue en** a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in D, \quad |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

De manière équivalente : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Remarque essentielle. La différence avec la définition de limite est double : (i) on exige $a \in D$, et (ii) la condition porte sur $|x - a| < \delta$ (et non $0 < |x - a| < \delta$), c'est-à-dire que $x = a$ est autorisé. Cela revient à imposer que la limite de f en a existe et vaut $f(a)$.

Proposition 5.2 (Caractérisation séquentielle de la continuité). La fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $a \in D$ si et seulement si, pour toute suite (x_n) d'éléments de D convergeant vers a , la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.

Démonstration. Conséquence immédiate du théorème 5.1, en notant que la continuité en a équivaut à $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. □

Exemple 5.3. Tout polynôme est continu sur $\mathbb{R}$. En effet, la fonction constante $x \mapsto c$ et la fonction identité $x \mapsto x$ sont continues (exercice immédiat). Par le théorème 5.2, les sommes et produits de fonctions continues sont continus. Tout polynôme étant combinaison linéaire de puissances de x , il est continu.

Exemple 5.4. La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ (preuve ε - δ).

Brouillon. On veut $||x| - |a|| < \varepsilon$. Par l'inégalité triangulaire inversée, $||x| - |a|| \leq |x - a|$. Il suffit donc de prendre $\delta = \varepsilon$.

Rédaction. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Posons $\delta = \varepsilon$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - a| < \delta$:

$$||x| - |a|| \leq |x - a| < \delta = \varepsilon.$$

Donc $x \mapsto |x|$ est continue en a . Comme a est arbitraire, elle est continue sur $\mathbb{R}$. □

Exemple 5.5 (Fonction de Dirichlet). Soit $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Affirmation : $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

Preuve. Soit $a \in \mathbb{R}$. Nous utilisons la caractérisation séquentielle.

Cas 1 : $a \in \mathbb{Q}$. Alors $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(a) = 1$. Par densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite (x_n) d'irrationnels convergeant vers a . On a $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x_n) = 0$ pour tout n , donc $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x_n) \rightarrow 0 \neq 1 = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(a)$.

Cas 2 : $a \notin \mathbb{Q}$. Alors $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(a) = 0$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite (r_n) de rationnels convergeant vers a . On a $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(r_n) = 1 \rightarrow 1 \neq 0 = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(a)$.

Dans les deux cas, la caractérisation séquentielle n'est pas satisfaite. Donc $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point.

5.5 Continuité sur un intervalle Théorème des valeurs intermédiaires

Définition 5.6 (Continuité sur un ensemble). On dit que $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ est **continue sur** D si f est continue en tout point de D .

Théorème 5.3 (Théorème des valeurs intermédiaires). Soient $a < b$ deux réels et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $f(a) \leq 0 \leq f(b)$ (ou $f(b) \leq 0 \leq f(a)$), alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Plus généralement, pour toute valeur γ comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \gamma$.

Démonstration. Traitons le cas $f(a) \leq 0 \leq f(b)$ (l'autre cas s'obtient en considérant $-f$). Si $f(a) = 0$, on prend $c = a$. Supposons donc $f(a) < 0 < f(b)$.

Considérons l'ensemble

$$E = \{x \in [a, b] : f(x) \leq 0\}.$$

Cet ensemble est non vide (car $a \in E$) et majoré par b . Posons $c = \sup E$. On a $c \in [a, b]$.

Étape 1 : $f(c) \leq 0$. Par définition du supremum, il existe une suite (x_n) d'éléments de E telle que $x_n \rightarrow c$. Pour tout n , $f(x_n) \leq 0$. Par continuité de f en c et caractérisation séquentielle, $f(x_n) \rightarrow f(c)$. Comme $f(x_n) \leq 0$ pour tout n , le passage à la limite donne $f(c) \leq 0$.

Étape 2 : $f(c) \geq 0$. Supposons par l'absurde que $f(c) < 0$. Par continuité de f en c , il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [a, b]$ avec $|x - c| < \delta$, on a $f(x) < 0$ (en prenant $\varepsilon = |f(c)|/2$ dans la définition). En particulier, si $c < b$, alors pour $x = \min(c + \delta/2, b)$, on aurait $x > c$, $x \in [a, b]$ et $f(x) < 0$, c'est-à-dire $x \in E$, ce qui contredit $c = \sup E$. Si $c = b$, alors $f(b) < 0$, ce qui contredit $f(b) > 0$.

Conclusion. On a $f(c) \leq 0$ et $f(c) \geq 0$, donc $f(c) = 0$.

Pour la forme générale, on applique ce résultat à la fonction $g(x) = f(x) - \gamma$. $\square$

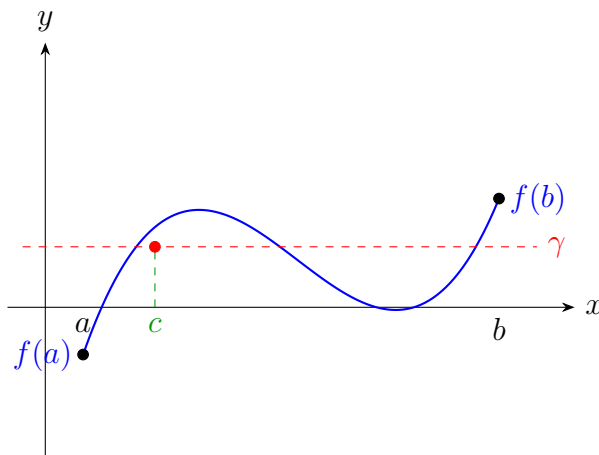


FIGURE 5.2 – Théorème des valeurs intermédiaires : toute valeur γ entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte.

Corollaire 5.1 (Existence des racines n -ièmes). Pour tout $y \geq 0$ et tout $n \geq 1$ entier, il existe un unique $x \geq 0$ tel que $x^n = y$.

Démonstration. Existence. Si $y = 0$, on prend $x = 0$. Si $y > 0$, considérons $f(x) = x^n - y$ sur $[0, M]$ où $M = \max(1, y)$. La fonction f est continue, $f(0) = -y < 0$ et $f(M) = M^n - y \geq M - y \geq 0$ (car $M \geq y$ et $M \geq 1$). Par le TVI, il existe $c \in [0, M]$ tel que $f(c) = 0$, i.e. $c^n = y$.

Unicité. La fonction $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc l'équation $x^n = y$ a au plus une solution. $\square$

Corollaire 5.2. Tout polynôme de degré impair à coefficients réels admet au moins une racine réelle.

Démonstration. Soit $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ avec n impair et $a_n \neq 0$. On a $P(x) = a_n x^n (1 + o(1))$ lorsque $|x| \rightarrow +\infty$. Puisque n est impair, $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty \cdot \text{signe}(a_n)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty \cdot \text{signe}(a_n)$. Ainsi P prend des valeurs de signes opposés pour $|x|$ assez grand. Par le TVI, P s'annule. $\square$

5.6 Continuité sur un compact

Dans $\mathbb{R}$, les compacts sont exactement les fermés bornés (théorème de Borel-Lebesgue, ou de Heine-Borel). En particulier, tout intervalle fermé borné $[a, b]$ est compact.

Théorème 5.4 (Théorème des bornes atteintes). Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes : il existe $c, d \in [a, b]$ tels que

$$f(c) = \inf_{[a,b]} f \quad \text{et} \quad f(d) = \sup_{[a,b]} f.$$

Démonstration. Étape 1 : f est majorée. Supposons par l'absurde que f n'est pas majorée. Alors pour tout $n \geq 1$, il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $f(x_n) > n$. La suite (x_n) est bornée (car $x_n \in [a, b]$). Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant vers un certain $c \in [a, b]$ (le segment $[a, b]$ est fermé, donc la limite y appartient). Par continuité de f en c , $f(x_{\varphi(n)}) \rightarrow f(c)$. Mais $f(x_{\varphi(n)}) > \varphi(n) \geq n \rightarrow +\infty$, contradiction avec la convergence.

Étape 2 : le supremum est atteint. Posons $M = \sup_{[a,b]} f$ (qui est fini d'après l'étape 1). Par définition du supremum, pour tout $n \geq 1$, il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $M - 1/n < f(x_n) \leq M$. Par Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant vers $d \in [a, b]$. Par continuité, $f(x_{\varphi(n)}) \rightarrow f(d)$. D'autre part, $f(x_{\varphi(n)}) \rightarrow M$ par encadrement. Par unicité de la limite, $f(d) = M$.

Le raisonnement pour l'infimum est analogue (ou appliquer le résultat à $-f$). $\square$

Théorème 5.5 (Théorème de Heine). Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors f est **uniformément continue** sur $[a, b]$.

Démonstration. Brouillon. La continuité dit : pour chaque point a , pour tout ε , il existe δ (dépendant de a et de ε). La continuité uniforme demande un δ qui marche pour *tous* les points à la fois. Sur un compact, on va extraire une sous-suite convergente pour obtenir une contradiction.

Procédons par l'absurde. Supposons que f ne soit pas uniformément continue. Alors :

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \quad \forall \delta > 0, \quad \exists x, y \in [a, b], \quad |x - y| < \delta \text{ et } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0.$$

Appliquons ceci avec $\delta = 1/n$ pour tout $n \geq 1$: il existe $x_n, y_n \in [a, b]$ tels que $|x_n - y_n| < 1/n$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$.

Les suites (x_n) et (y_n) sont bornées (dans $[a, b]$). Par Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant vers $c \in [a, b]$. Puisque $|y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}| < 1/\varphi(n) \rightarrow 0$, on a aussi $y_{\varphi(n)} \rightarrow c$.

Par continuité de f en c :

$$f(x_{\varphi(n)}) \rightarrow f(c) \quad \text{et} \quad f(y_{\varphi(n)}) \rightarrow f(c).$$

Donc $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \rightarrow 0$, ce qui contredit $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \geq \varepsilon_0 > 0$. $\square$

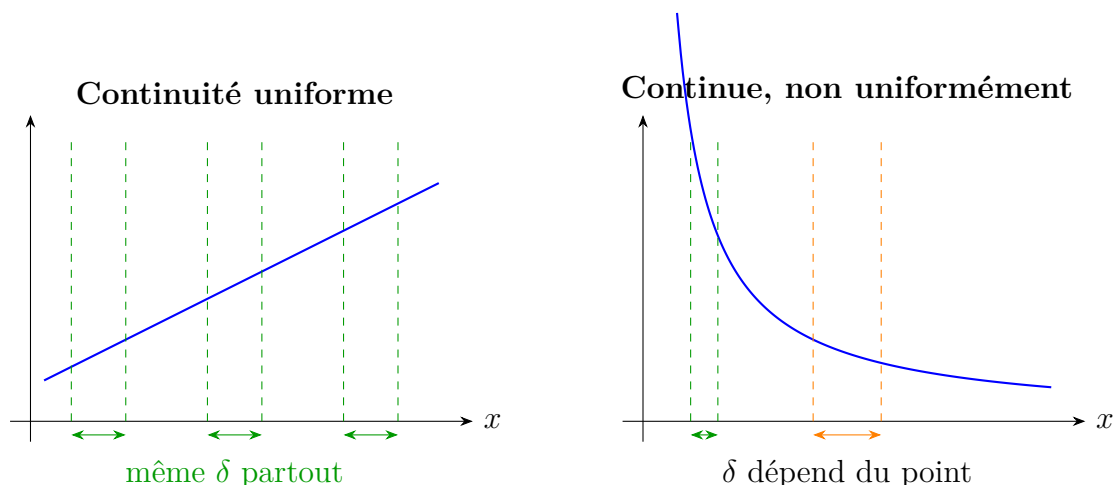


FIGURE 5.3 – Continuité uniforme (à gauche) : le même δ convient en tout point. À droite : $f(x) = 1/x$ sur $]0, +\infty[$, le δ nécessaire diminue près de 0.

5.7 Continuité uniforme

Définition 5.7 (Continuité uniforme). Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est **uniformément continue** sur D si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x, y \in D, \quad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Remarque 5.2. La différence avec la continuité (ponctuelle) est que δ ne dépend que de ε , et non du point considéré. Toute fonction uniformément continue est continue, mais la réciproque est fautive en général (elle est vraie sur les compacts, par le théorème de Heine).

Exemple 5.6. $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Brouillon. On a $|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y| |x - y|$. Même si $|x - y|$ est petit, le facteur $|x + y|$ peut être arbitrairement grand.

Preuve. Prenons $\varepsilon_0 = 1$. Soit $\delta > 0$ quelconque. Choisissons $x = 1/\delta$ et $y = 1/\delta + \delta/2$. Alors $|x - y| = \delta/2 < \delta$, mais

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y| |x + y| = \frac{\delta}{2} \left(\frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2} \right) = 1 + \frac{\delta^2}{4} \geq 1 = \varepsilon_0.$$

Donc la condition de continuité uniforme n'est pas satisfaite.

5.8 Fonctions lipschitziennes

Définition 5.8 (Fonction lipschitzienne). Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est K -lipschitzienne (ou lipschitzienne de constante K) s'il existe $K \geq 0$ tel que :

$$\forall x, y \in D, \quad |f(x) - f(y)| \leq K |x - y|.$$

Proposition 5.3. Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.

Démonstration. Soit f une fonction K -lipschitzienne sur D . Si $K = 0$, f est constante et le résultat est immédiat. Supposons $K > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\delta = \varepsilon/K > 0$. Pour tous $x, y \in D$ avec $|x - y| < \delta$:

$$|f(x) - f(y)| \leq K |x - y| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon. \quad \square$$

Exemple 5.7. La fonction $\sin$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|\sin x - \sin y| = \left| 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \right| \leq 2 \cdot 1 \cdot \frac{|x-y|}{2} = |x-y|.$$

(On a utilisé $|\sin u| \leq |u|$ pour tout u .) Donc $\sin$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

5.9 Erreurs fréquentes

1. **Confondre continuité et continuité uniforme.** La continuité est une propriété *locale* (en chaque point), la continuité uniforme est *globale*. La fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas uniformément continue.
2. **Mauvaise structure ε - δ .** L'ordre des quantificateurs est $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x$. On ne peut pas choisir δ après x .
3. **Oublier $0 < |x - a|$ dans la définition de limite.** La condition $|x - a| < \delta$ (sans $0 <$) définit la continuité, pas la limite.
4. **Confondre la caractérisation séquentielle dans le bon sens.** Pour montrer que f n'a pas de limite, il suffit de trouver *une* suite $(x_n) \rightarrow a$ telle que $(f(x_n))$ ne converge pas vers ℓ (ou deux suites donnant des limites différentes).

5.10 Exercices

Exercice 5.1. Montrer par un argument ε - δ que $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) = 2$. *Indication : écrire $|x^2 - 1| = |x - 1||x + 1|$ et borner $|x + 1|$ en se restreignant à $|x - 1| < 1$.*

Exercice 5.2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$. *Indication : $|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}| = \frac{|x-2|}{2|x|}$. Borner $|x|$ inférieurement en se restreignant à $|x - 2| < 1$.*

Exercice 5.3. Montrer que $f(x) = \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ par un argument ε - δ . *Indication : $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x-a|}{|\sqrt{x}+\sqrt{a}|}$. Distinguer les cas $a = 0$ et $a > 0$.*

Exercice 5.4. Montrer que $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, +\infty[$. *Indication : utiliser $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$.*

Exercice 5.5. Montrer qu'il existe $x \in [0, \pi/2]$ tel que $\cos x = x$.

Exercice 5.6. Montrer que le polynôme $P(x) = x^5 - 3x + 1$ admet au moins une racine réelle dans $[0, 1]$.

Exercice 5.7. Montrer que $f(x) = \sin(1/x)$ n'est pas uniformément continue sur $]0, 1]$.

Exercice 5.8. Soit $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(\sqrt{x})$. Montrer que f est uniformément continue sur $[0, +\infty[$. *Indication : montrer d'abord que f est lipschitzienne sur $[1, +\infty[$ et utiliser Heine sur $[0, 2]$.*

Exercice 5.9. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que $f([a, b])$ est un intervalle fermé borné. *Indication : combiner le TVI et le théorème des bornes atteintes.*

Exercice 5.10. Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/q$ si $x = p/q$ (fraction irréductible avec $q \geq 1$) et $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$. Montrer que f est continue en tout point irrationnel et discontinue en tout point rationnel.

Exercice 5.11. Soit $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$. *Indication : appliquer le TVI à $g(x) = f(x) - x$.*

Exercice 5.12. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $f(x) = f(1) \cdot x$ pour tout x . *Indication : montrer d'abord le résultat pour $x \in \mathbb{N}$, puis $x \in \mathbb{Z}$, puis $x \in \mathbb{Q}$, puis conclure par densité et continuité.*

Résumé du chapitre 5

- La **limite** $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ est définie par le critère ε - δ : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$.
- La **caractérisation séquentielle** (Heine) permet de ramener les limites de fonctions aux limites de suites.
- La **continuité** en a signifie $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- Le **TVI** affirme qu'une fonction continue sur $[a, b]$ prend toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$.
- Sur un compact $[a, b]$, une fonction continue est **bornée et atteint ses bornes** (théorème des bornes atteintes).
- Sur un compact, continuité $\Rightarrow$ **continuité uniforme** (théorème de Heine).
- Lipschitzienne $\Rightarrow$ uniformément continue $\Rightarrow$ continue.

Chapitre 6

Dérivation — Définition, Règles, Théorème des Accroissements Finis, Formule de Taylor

Introduction

La notion de dérivée est l'un des piliers du calcul différentiel. Géométriquement, la dérivée $f'(a)$ mesure la pente de la tangente au graphe de f au point $(a, f(a))$. Physiquement, elle représente un taux de variation instantané (vitesse, accélération, etc.). Nous allons définir rigoureusement cette notion, établir les règles de calcul, puis démontrer les théorèmes fondamentaux : Rolle, accroissements finis, et Taylor.

6.1 Dérivée en un point

Définition 6.1 (Dérivée en un point). Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f est **dérivable en** a si la limite

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe et est finie. Le nombre $f'(a) \in \mathbb{R}$ est appelé la **dérivée** de f en a .

De manière équivalente, f est dérivable en a de dérivée $f'(a)$ si et seulement si :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h) \quad (h \rightarrow 0),$$

c'est-à-dire qu'il existe une fonction $\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ telle que $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h)$.

Théorème 6.1 (Dérivable implique continue). Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

Démonstration. Supposons f dérivable en a . Alors, d'après la caractérisation ci-dessus :

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + h\varepsilon(h),$$

où $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$. Donc :

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a)) = \lim_{h \rightarrow 0} h(f'(a) + \varepsilon(h)) = 0 \cdot (f'(a) + 0) = 0.$$

Ainsi $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$, ce qui signifie que f est continue en a . $\square$

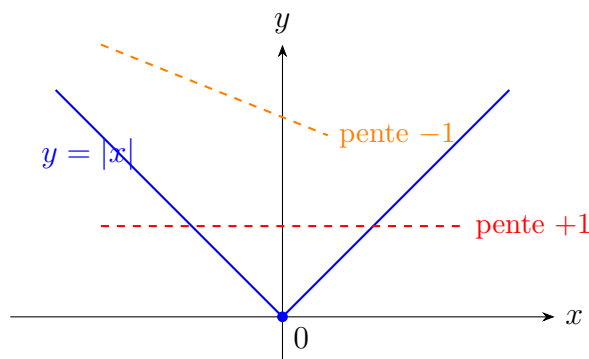
Remarque 6.1. La réciproque est fausse : une fonction peut être continue en un point sans y être dérivable. Voir l'exemple suivant.

Exemple 6.1. La fonction $f(x) = |x|$ est continue en 0 (cf. exemple 5.4) mais n'est pas dérivable en 0.

Preuve. Le taux d'accroissement en 0 vaut :

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{si } h > 0, \\ -1 & \text{si } h < 0. \end{cases}$$

Donc $\lim_{h \rightarrow 0^+} |h|/h = 1$ et $\lim_{h \rightarrow 0^-} |h|/h = -1$. Les limites à gauche et à droite étant distinctes, la limite n'existe pas. Donc f n'est pas dérivable en 0. $\square$



*Point anguleux en 0 :
pas de tangente unique*

FIGURE 6.1 – La fonction $x \mapsto |x|$: continue mais non dérivable en 0.

Exemple 6.2. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Alors :

- (a) f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
- (b) f' n'est pas continue en 0.

Preuve de (a). On calcule le taux d'accroissement :

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = h \sin(1/h).$$

Or $|h \sin(1/h)| \leq |h| \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$, donc $\lim_{h \rightarrow 0} h \sin(1/h) = 0$. Ainsi $f'(0) = 0$.

Preuve de (b). Pour $x \neq 0$, par les règles de dérivation :

$$f'(x) = 2x \sin(1/x) + x^2 \cdot \cos(1/x) \cdot (-1/x^2) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x).$$

Le terme $2x \sin(1/x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$, mais $\cos(1/x)$ n'a pas de limite en 0 (il oscille entre -1 et 1). Donc $f'(x)$ n'a pas de limite en 0, ce qui montre que f' n'est pas continue en 0.

6.2 Règles de dérivation

Théorème 6.2 (Opérations sur les dérivées). Soient I un intervalle ouvert et $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables en $a \in I$. Alors :

- (i) **Somme** : $f + g$ est dérivable en a et $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
- (ii) **Produit (Leibniz)** : fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
- (iii) **Quotient** : si $g(a) \neq 0$, f/g est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Démonstration. (i) **Somme.** C'est immédiat par linéarité de la limite :

$$\frac{(f + g)(a + h) - (f + g)(a)}{h} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} + \frac{g(a + h) - g(a)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(a) + g'(a).$$

(ii) **Produit.** On écrit :

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(a + h) - (fg)(a)}{h} &= \frac{f(a + h)g(a + h) - f(a)g(a)}{h} \\ &= \frac{f(a + h)g(a + h) - f(a + h)g(a) + f(a + h)g(a) - f(a)g(a)}{h} \\ &= f(a + h) \frac{g(a + h) - g(a)}{h} + g(a) \frac{f(a + h) - f(a)}{h}. \end{aligned}$$

Quand $h \rightarrow 0$: $f(a + h) \rightarrow f(a)$ (car f dérivable, donc continue en a), et les taux d'accroissement convergent vers $g'(a)$ et $f'(a)$ respectivement. Donc :

$$(fg)'(a) = f(a)g'(a) + g(a)f'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

(iii) **Quotient.** Il suffit de montrer que $1/g$ est dérivable et d'appliquer (ii). Puisque $g(a) \neq 0$ et g est continue en a , g ne s'annule pas au voisinage de a , et :

$$\frac{1/g(a + h) - 1/g(a)}{h} = \frac{g(a) - g(a + h)}{h g(a + h) g(a)} = \frac{-1}{g(a + h) g(a)} \cdot \frac{g(a + h) - g(a)}{h}.$$

Quand $h \rightarrow 0$, $g(a+h) \rightarrow g(a)$, donc :

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{g(a)^2}.$$

Puis $(f/g)'(a) = (f \cdot (1/g))'(a) = f'(a)/g(a) + f(a) \cdot (-g'(a)/g(a)^2) = (f'(a)g(a) - f(a)g'(a))/g(a)^2$. $\square$

Théorème 6.3 (Dérivée d'une composée — Règle de la chaîne). Soient I, J des intervalles ouverts, $g: I \rightarrow J$ dérivable en a et $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $g(a)$. Alors $f \circ g$ est dérivable en a et

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Démonstration. Puisque g est dérivable en a , on a $g(a+h) = g(a) + g'(a)h + h\varepsilon_1(h)$ avec $\varepsilon_1(h) \rightarrow 0$.

Posons $k(h) = g(a+h) - g(a) = g'(a)h + h\varepsilon_1(h)$. Alors $k(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.

Puisque f est dérivable en $b = g(a)$, on peut écrire : pour tout k ,

$$f(b+k) - f(b) = f'(b)k + k\eta(k),$$

où $\eta(k) \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow 0$, en posant $\eta(0) = 0$ par convention. La fonction η ainsi prolongée est continue en 0.

Alors :

$$\begin{aligned} f(g(a+h)) - f(g(a)) &= f(b+k(h)) - f(b) \\ &= f'(b)k(h) + k(h)\eta(k(h)) \\ &= (f'(b) + \eta(k(h)))k(h) \\ &= (f'(b) + \eta(k(h)))(g'(a)h + h\varepsilon_1(h)). \end{aligned}$$

En divisant par h (pour $h \neq 0$) :

$$\frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} = (f'(b) + \eta(k(h)))(g'(a) + \varepsilon_1(h)).$$

Quand $h \rightarrow 0$: $k(h) \rightarrow 0$, donc $\eta(k(h)) \rightarrow 0$, et $\varepsilon_1(h) \rightarrow 0$. Ainsi :

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a). \quad \square$$

Théorème 6.4 (Dérivée de la fonction réciproque). Soit $f: I \rightarrow J$ bijective et continue, avec I un intervalle. Si f est dérivable en $a \in I$ et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

CHAPITRE 6. DÉRIVATION — DÉFINITION, RÈGLES, THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS, FORMULE DE TAYLOR

Démonstration. Posons $g = f^{-1}$. Pour $k \neq 0$ avec $b + k \in J$, posons $h = g(b + k) - g(b)$. Comme g est continue (théorème admis : la réciproque d'une bijection continue monotone sur un intervalle est continue), $h \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow 0$. De plus, $h \neq 0$ car g est injective. Par définition, $f(g(b) + h) = f(g(b + k)) = b + k$, donc $k = f(a + h) - f(a)$, d'où :

$$\frac{g(b + k) - g(b)}{k} = \frac{h}{f(a + h) - f(a)} = \frac{1}{\frac{f(a + h) - f(a)}{h}}.$$

Quand $k \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$ et le dénominateur tend vers $f'(a) \neq 0$. Donc :

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

□

6.3 Extrema locaux

Théorème 6.5 (Condition nécessaire de Fermat). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle ouvert. Si f admet un extremum local en $a \in I$ et si f est dérivable en a , alors $f'(a) = 0$.

Démonstration. Supposons que f admet un maximum local en a (le cas du minimum est analogue). Il existe $\delta > 0$ tel que $]a - \delta, a + \delta[\subset I$ et $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in]a - \delta, a + \delta[$.

Pour $h \in]0, \delta[$, on a $f(a + h) \leq f(a)$, donc $\frac{f(a + h) - f(a)}{h} \leq 0$. En passant à la limite $h \rightarrow 0^+$:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \leq 0.$$

Pour $h \in]-\delta, 0[$, on a $f(a + h) \leq f(a)$ et $h < 0$, donc $\frac{f(a + h) - f(a)}{h} \geq 0$. En passant à la limite $h \rightarrow 0^-$:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \geq 0.$$

Des deux inégalités, on déduit $f'(a) = 0$.

□

Théorème 6.6 (Théorème de Rolle). Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- (i) f est continue sur $[a, b]$;
- (ii) f est dérivable sur $]a, b[$;
- (iii) $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. Par le théorème des bornes atteintes (théorème 5.4), f étant continue sur le compact $[a, b]$, elle atteint son maximum M et son minimum m sur $[a, b]$.

Cas 1 : $m = M$. Alors f est constante sur $[a, b]$, et $f'(c) = 0$ pour tout $c \in]a, b[$.

Cas 2 : $m < M$. Puisque $f(a) = f(b)$, au moins l'une des valeurs m ou M est atteinte en un point intérieur $c \in]a, b[$. (En effet, si m et M étaient tous deux atteints uniquement aux

extrémités, on aurait $f(a) = m$ et $f(b) = M$, ou l'inverse, ce qui contredirait $f(a) = f(b)$ puisque $m \neq M$.) Le point c est donc un extremum local en un point intérieur où f est dérivable. Par le théorème de Fermat (théorème 6.5), $f'(c) = 0$. $\square$

6.4 Théorème des accroissements finis

Théorème 6.7 (Théorème des accroissements finis (TAF)). Soient $a < b$ deux réels et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- (i) f est continue sur $[a, b]$;
- (ii) f est dérivable sur $]a, b[$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Démonstration. Posons

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

La fonction φ est continue sur $[a, b]$ (combinaison linéaire de fonctions continues), dérivable sur $]a, b[$, et :

$$\varphi(a) = f(a) - f(a) - 0 = 0, \quad \varphi(b) = f(b) - f(a) - (f(b) - f(a)) = 0.$$

Donc $\varphi(a) = \varphi(b)$. Par le théorème de Rolle (théorème 6.6), il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or :

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

donc $\varphi'(c) = 0$ donne $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. $\square$

Corollaire 6.1. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur un intervalle I . Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est constante sur I .

Démonstration. Soient $x, y \in I$ avec $x < y$. Par le TAF, il existe $c \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) = 0$. Donc $f(y) = f(x)$. $\square$

Corollaire 6.2. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur un intervalle I .

- (i) Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est croissante sur I .
- (ii) Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement croissante sur I .

Démonstration. Soient $x, y \in I$ avec $x < y$. Par le TAF, $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$ pour un certain $c \in]x, y[$.

- (i) Si $f' \geq 0$, alors $f'(c) \geq 0$ et $y - x > 0$, d'où $f(y) - f(x) \geq 0$, i.e. $f(y) \geq f(x)$.
- (ii) Si $f' > 0$, alors $f'(c) > 0$, d'où $f(y) - f(x) > 0$, i.e. $f(y) > f(x)$. $\square$

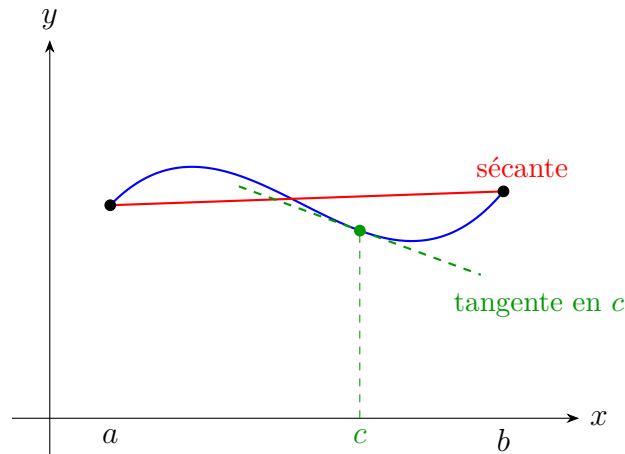


FIGURE 6.2 – Théorème des accroissements finis : il existe $c \in]a, b[$ où la tangente est parallèle à la sécante.

6.5 Théorème de L'Hôpital

Théorème 6.8 (Règle de L'Hôpital, cas $0/0$). Soient $f, g:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivables avec $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$. On suppose que :

- (i) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$;
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (où $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$).

Alors $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Démonstration. On prolonge f et g par continuité en a en posant $f(a) = g(a) = 0$. Ainsi f et g sont continues sur $[a, x]$ pour tout $x \in]a, b[$ et dérivables sur $]a, x[$. Pour $x \in]a, b[$, on a $g(x) \neq g(a) = 0$ (sinon, par Rolle, il existerait $c \in]a, x[$ avec $g'(c) = 0$, contradiction).

Par le *théorème des accroissements finis généralisé* (théorème de Cauchy), pour tout $x \in]a, b[$, il existe $c_x \in]a, x[$ tel que :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Quand $x \rightarrow a^+$, on a $c_x \rightarrow a^+$ (car $a < c_x < x$), donc $\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \rightarrow L$. D'où $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow L$. $\square$

Remarque 6.2. Attention : la réciproque est fausse. De plus, on ne peut appliquer L'Hôpital que si le quotient des dérivées admet une limite. Si $f'(x)/g'(x)$ n'a pas de limite, la règle ne permet pas de conclure (mais $f(x)/g(x)$ peut tout de même converger).

6.6 Formule de Taylor

6.6.1 Polynôme de Taylor

Définition 6.2 (Polynôme de Taylor). Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de $a \in I$. Le **polynôme de Taylor d'ordre n de f en a** est :

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

6.6.2 Formule de Taylor-Lagrange

Théorème 6.9 (Formule de Taylor-Lagrange). Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$, dérivable $n+1$ fois sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.$$

Démonstration. Posons $h = b - a$ et définissons le *reste* :

$$R = f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k.$$

Nous cherchons $c \in]a, b[$ tel que $R = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} h^{n+1}$. Considérons la fonction auxiliaire :

$$g(t) = f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (b-t)^k - \frac{R}{h^{n+1}} (b-t)^{n+1}.$$

Calculons $g(a)$ et $g(b)$:

$$\text{— } g(a) = f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k - R = 0 \text{ (par définition de } R).$$

$$\text{— } g(b) = f(b) - f(b) - 0 = 0.$$

La fonction g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, avec $g(a) = g(b) = 0$. Par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.

Calculons $g'(t)$. En dérivant terme à terme (et par télescopage) :

$$g'(t) = - \sum_{k=0}^n \left[\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (b-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} (b-t)^{k-1} \right] + (n+1) \frac{R}{h^{n+1}} (b-t)^n,$$

où le terme avec $(k-1)!$ n'apparaît que pour $k \geq 1$. En développant, les termes se simplifient par télescopage et il reste :

$$g'(t) = - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (b-t)^n + (n+1) \frac{R}{h^{n+1}} (b-t)^n.$$

L'égalité $g'(c) = 0$ donne (avec $(b - c)^n \neq 0$ car $c < b$) :

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} = (n+1) \frac{R}{h^{n+1}}, \quad \text{d'où} \quad R = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} h^{n+1}. \quad \square$$

6.6.3 Formule de Taylor-Young

Théorème 6.10 (Formule de Taylor-Young). Soit f de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de a . Alors :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n) \quad (h \rightarrow 0).$$

Démonstration. Posons $R_n(h) = f(a+h) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k$. Nous devons montrer que $R_n(h)/h^n \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.

Notons que $R_n(0) = 0$. De plus, $R'_n(h) = f'(a+h) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!} h^{k-1}$, qui est le reste d'ordre $n-1$ de la formule de Taylor de f' en a . Plus généralement, pour $0 \leq j \leq n$, $R_n^{(j)}(0) = 0$.

Appliquons la règle de L'Hôpital n fois successivement (ce qui est licite car numérateur et dénominateur tendent vers 0) :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_n(h)}{h^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R'_n(h)}{n h^{n-1}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R''_n(h)}{n(n-1) h^{n-2}} = \cdots = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_n^{(n)}(h)}{n!}.$$

Or $R_n^{(n)}(h) = f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a)$, qui tend vers 0 quand $h \rightarrow 0$ par continuité de $f^{(n)}$. Donc $R_n(h)/h^n \rightarrow 0/n! = 0$. $\square$

6.6.4 Applications : développements de Taylor usuels

En appliquant la formule de Taylor-Young en $a = 0$, on obtient les développements classiques (valables au voisinage de 0) :

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad (6.1)$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots + o(x^{2n+2}), \quad (6.2)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots + o(x^{2n+1}), \quad (6.3)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + o(x^n), \quad (6.4)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n), \quad \text{où } \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}. \quad (6.5)$$

Justification pour e^x . On a $f(x) = e^x$, $f^{(k)}(x) = e^x$ pour tout k , $f^{(k)}(0) = 1$. La formule de Taylor-Young donne directement (6.1). La formule de Taylor-Lagrange donne de plus, pour le reste :

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \text{pour un certain } c \text{ entre } 0 \text{ et } x.$$

Si $|x| \leq A$, alors $|R_n(x)| \leq \frac{e^A \cdot A^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, ce qui justifie l'identité $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k/k!$.

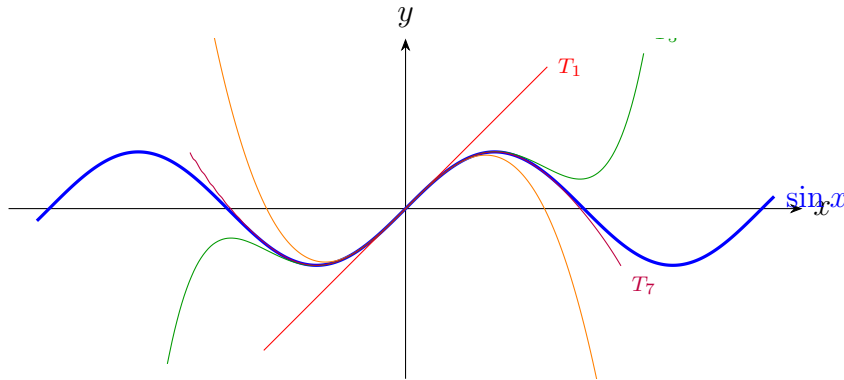


FIGURE 6.3 – Approximations de Taylor successives T_1, T_3, T_5, T_7 de $\sin x$ en 0.

6.7 Développements limités

Définition 6.3 (Développement limité). Soit f définie au voisinage de a . On dit que f admet un **développement limité** (DL) d'ordre n en a s'il existe des réels $c_0, c_1, \dots, c_n$ tels que :

$$f(a+h) = c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + \dots + c_n h^n + o(h^n) \quad (h \rightarrow 0).$$

Si f est $\mathcal{C}^n$ en a , alors $c_k = f^{(k)}(a)/k!$ et le DL coïncide avec la formule de Taylor-Young.

Proposition 6.1 (Unicité du DL). Le DL d'ordre n , s'il existe, est unique.

Démonstration. Supposons $f(a+h) = \sum_{k=0}^n c_k h^k + o(h^n) = \sum_{k=0}^n d_k h^k + o(h^n)$. Alors $\sum_{k=0}^n (c_k - d_k) h^k = o(h^n)$. Si tous les $c_k - d_k$ ne sont pas nuls, soit j le plus petit indice avec $c_j \neq d_j$. En divisant par h^j , on obtient $(c_j - d_j) + o(1) = o(h^{n-j})$, d'où $c_j - d_j = 0$ en passant à la limite, contradiction. $\square$

6.7.1 Opérations sur les DL

Proposition 6.2. Soient f et g admettant des DL d'ordre n en a . Alors :

- (i) $f + g$ admet un DL d'ordre n en a , obtenu en sommant les DL.
- (ii) $f \cdot g$ admet un DL d'ordre n en a , obtenu en multipliant les DL et en tronquant à l'ordre n .
- (iii) Si $g(a) \neq 0$, f/g admet un DL d'ordre n en a , obtenu par division selon les puissances croissantes.
- (iv) Si f admet un DL en a et g un DL en $f(a)$ avec $f(a)$ bien défini, alors $g \circ f$ admet un DL en a (par substitution et troncature).

6.7.2 Applications des DL au calcul de limites

Exemple 6.3. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

En 0 : $e^x = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$, donc $e^x - 1 - x = x^2/2 + o(x^2)$, d'où :

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{x^2/2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2} + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}.$$

Exemple 6.4. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + x^3/6}{x^5}$.

En 0 : $\sin x = x - x^3/6 + x^5/120 + o(x^5)$, donc $\sin x - x + x^3/6 = x^5/120 + o(x^5)$,

d'où :

$$\frac{\sin x - x + x^3/6}{x^5} = \frac{1}{120} + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{120}.$$

Exemple 6.5. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.

En 0 : $\ln(1+x) = x - x^2/2 + o(x^2)$, donc $\ln(1+x) - x = -x^2/2 + o(x^2)$, d'où :

$$\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2} + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}.$$

6.8 Erreurs fréquentes

1. **Appliquer L'Hôpital sans vérifier les hypothèses.** Avant d'appliquer la règle, on doit vérifier que l'on est bien dans une forme indéterminée $0/0$ ou ∞/∞ , et que le quotient des dérivées admet une limite.
2. **Oublier les hypothèses du TAF.** Le théorème des accroissements finis requiert la continuité sur le *fermé* $[a, b]$ et la dérivabilité sur l'*ouvert* $]a, b[$. Certains étudiants oublient la continuité aux bords.
3. **Confondre condition nécessaire et suffisante pour un extremum.** $f'(a) = 0$ est une condition *nécessaire* d'extremum local (si f est dérivable), pas suffisante. Exemple : $f(x) = x^3$ satisfait $f'(0) = 0$ mais 0 n'est pas un extremum.
4. **Tronquer un DL trop tard ou trop tôt.** Dans un produit de DL, il faut tronquer à l'ordre voulu *après* la multiplication, pas avant. Garder des termes d'ordre supérieur à n est inutile et source d'erreurs.
5. **Écrire $o(x^n) + o(x^n) = o(x^{2n})$.** C'est faux ! On a $o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$.

6.9 Exercices

Exercice 6.1. Calculer la dérivée de $f(x) = x^3$ en tout point par la définition (limite du taux d'accroissement).

Exercice 6.2. Montrer par la définition que $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$.

Exercice 6.3. Montrer par récurrence que $(x^n)' = n x^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6.4. Soit $P(x) = x^3 - 3x + 1$. Montrer que P a exactement trois racines réelles distinctes. *Indication : étudier les variations de P et utiliser le TVI.*

Exercice 6.5. En utilisant le TAF, montrer que pour tout $x > 0$:

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

Exercice 6.6. Montrer que $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, en utilisant le TAF.

Exercice 6.7. Calculer les limites suivantes en justifiant l'utilisation de la règle de L'Hôpital :

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$;
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$;
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$.

Exercice 6.8. Calculer les DL à l'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes :

- (a) $f(x) = e^{\sin x}$;
- (b) $f(x) = \sqrt{1+x}$;
- (c) $f(x) = \frac{1}{1-x+x^2}$.

Exercice 6.9. À l'aide de DL, calculer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}.$$

Exercice 6.10. Soit $f(x) = \cos x$. Écrire la formule de Taylor-Lagrange d'ordre $2n$ en 0 et en déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| \cos x - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Exercice 6.11. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ et $a \in I$ tel que $f''(a) = 0$ et $f'''(a) \neq 0$. Montrer que a est un point d'inflexion de f . *Indication : utiliser le DL d'ordre 3.*

Exercice 6.12. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ avec $f'' \geq 0$. Montrer que pour tous

$x, a \in I :$

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a).$$

Indication : formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1.

Résumé du chapitre 6

- La **dérivée** $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a))/h$ mesure le taux de variation instantané.
- Dérivable en $a \Rightarrow$ continue en a (réciproque fausse).
- **Règles** : $(f + g)' = f' + g'$, $(fg)' = f'g + fg'$, $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$, $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$.
- **Fermat** : si f dérivable a un extremum local intérieur, alors $f' = 0$.
- **Rolle** : $f(a) = f(b)$, f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[\Rightarrow \exists c, f'(c) = 0$.
- **TAF** : $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ pour un certain $c \in]a, b[$.
- **Conséquences** : $f' = 0 \Rightarrow f$ constante ; $f' > 0 \Rightarrow f$ strictement croissante.
- **L'Hôpital** : dans les formes indéterminées, f/g a la même limite que f'/g' (si celle-ci existe).
- **Taylor-Lagrange** : reste exact $f^{(n+1)}(c)/(n+1)! \cdot h^{n+1}$.
- **Taylor-Young** : reste en $o(h^n)$, fondement des développements limités.
- **DL usuels** : e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$.

Bibliographie

- [1] W. RUDIN, *Principles of Mathematical Analysis*, 3^e éd., McGraw-Hill, 1976.
- [2] C. ZUILY et H. QUEFFÉLEC, *Analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2013.
- [3] E. RAMIS, C. DESCHAMPS et J. ODOUX, *Cours de mathématiques spéciales*, tomes 1–4, Masson, 1991.
- [4] T. TAO, *Analysis I*, 3^e éd., Springer, Texts and Readings in Mathematics, 2016.
- [5] F. POMPEÏANI et P. TARRAGO, *Analyse*, Ellipses, 1998.

Index

- application, 17
- axiome de la borne supérieure, 26

- bijection, 17
- Bolzano-Weierstrass, 40
- borne inférieure, 25
- borne supérieure, 25
 - caractérisation, 25

- Cantor, 29
- Cauchy
 - critère de convergence, 41
 - critère de la racine, 50
 - produit de séries, 54
 - suite de, 41
 - théorème des accroissements finis, 76
- compact, 64
- comparaison (séries), 49
- comparaison intégrale, 50
- complémentaire, 17
- complétude, 26
- complétude de $\mathbb{R}$, 41
- conjonction, 9
- connecteur logique, 9
- continuité, 58
 - en un point, 62
 - sur un compact, 64
 - uniforme, 65, 66
- contraposée, 13
- convergence
 - d'une suite, 34
 - d'une série, 46
- convergence absolue, 51
 - implique convergence, 51
- convergence conditionnelle, 51
- convergence uniforme, 53
- corps commutatif, 23
- corps ordonné, 23
- cosinus (série), 53

- d'Alembert (critère), 49
- Dedekind, 29
- densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, 27
- densité des irrationnels, 28
- Deschamps, 84
- Dirichlet
 - fonction de, 63
- disjonction, 10
- démonstration, 12
- dérivabilité
 - implique continuité, 70
- dérivation, 70
 - composée, 73
 - règles, 72
- dérivée, 70
 - de la réciproque, 73
 - discontinue, 71
 - en un point, 70
- développement de Taylor, 78
- développement limité, 80

- encadrement, *voir* théorème des gendarmes
- ensemble, 16
- exp, 53
- exponentielle (série), 53
- extremum local, 74

- Fermat
 - condition nécessaire, 74

- Hadamard (formule de), 53
- Heine
 - caractérisation séquentielle, 59
 - théorème de, 65

- implication, 10
- injection, 17
- intersection, 17
- intervalles emboîtés, 28
- inégalité de Bernoulli, 15

- inégalité triangulaire, 24
- irrationalité de $\sqrt{2}$, 14
- L'Hôpital
 - théorème de, 76
- Leibniz
 - formule de, 72
- Leibniz (critère de), 51
- limite
 - d'une fonction en un point, 58
 - d'une suite, 34
 - de fonction, 58
 - en l'infini, 61
 - infinie, 60
 - opérations, 38, 61
 - unicité, 36
 - à droite, 60
 - à gauche, 60
- Lipschitz, 67
- logarithme (série), 54
- lois de De Morgan, 17
- majorant, 24
- maximum, 25
- minimum, 25
- minorant, 24
- négation, 9
 - de quantificateurs, 11
- Odoux, 84
- partie bornée, 24
- partie entière, 28
- point fixe, 42
- Pompeïani, 84
- preuve directe, 12
- produit cartésien, 17
- produit de Cauchy, 54
- proposition, 9
- propriété d'Archimède, 27
- quantificateur
 - existentiel, 11
 - universel, 10
- Queffélec, 84
- racine n -ième, 64
- raisonnement par l'absurde, 13
- Ramis, 84
- rayon de convergence, 53
 - formule de Hadamard, 53
- relation d'ordre, 18
- relation d'équivalence, 18
- reste d'une série, 47
- Riemann (série de), 51
- Rolle
 - théorème de, 74
- Rudin, 84
- règle de la chaîne, 73
- récurrence, 14
 - forte, 16
- réunion, 17
- semi-convergence, 51
- sinus (série), 53
- somme partielle, 46
- sous-suite, *voir* suite extraite
- suite
 - $(-1)^n$, 36
 - $1/n$, 35
 - bornée, 37
 - convergence, 34
 - convergente implique bornée, 37
 - de Cauchy, 41
 - définition, 33
 - extraite, 40
 - monotone, 38
 - monotone bornée, 39
 - $n/(n+1)$, 35
 - récurrente, 42
- suite numérique, 33
- suites adjacentes, 42
- surjection, 17
- série
 - alternée, 51
 - comparaison intégrale, 50
 - condition nécessaire, 47
 - convergence, 46
 - convergence absolue, 51
 - critère de Cauchy (racine), 50
 - critère de comparaison, 49
 - critère de d'Alembert, 49
 - de Riemann, 51
 - définition, 46
 - entière, 52

- géométrique, [48](#)
- harmonique, [47](#)
- télescopique, [48](#)
- série binomiale, [54](#)
- série entière, [52](#)
- série harmonique, [47](#)
- série numérique, [46](#)

- table de vérité, [10](#)
- TAF, *voir* théorème des accroissements finis
- Tao, [84](#)
- Tarrago, [84](#)
- Taylor
 - formule de, [77](#)
 - Lagrange, [77](#)
 - polynôme de, [77](#)
 - Young, [78](#)
- test de divergence, [48](#)
- Thomae
 - fonction de, [68](#)
- théorème
 - de Bolzano-Weierstrass, [40](#)
 - de la limite monotone, [39](#)
 - de Leibniz, [51](#)
 - de Mertens, [54](#)
 - des gendarmes, [37](#)
- théorème des accroissements finis, [75](#)
- théorème des bornes atteintes, [65](#)
- théorème des valeurs intermédiaires, [63](#)
- TVI, *voir* théorème des valeurs intermédiaires

- valeur absolue, [23](#)
 - non dérivable en 0, [71](#)
- valeur d'adhérence, [40](#)

- Zuily, [84](#)

- équivalence, [10](#)