

Analyse Fonctionnelle

Notes de Cours / Lecture Notes

Master — 2025–2026

Yaë Ulrich Gaba

*Des espaces de Banach aux algèbres d'opérateurs :
un voyage à travers l'analyse fonctionnelle moderne.*

Table des matières

1	Espaces de Banach — Fondements	7
1.1	Espaces vectoriels normés	8
1.1.1	Exemples fondamentaux	9
1.1.2	Inégalités fondamentales	10
1.2	Convergence et séries dans les espaces normés	11
1.3	Espaces de Banach : définition et complétude	13
1.4	Espaces de dimension finie	16
1.5	Applications linéaires continues et norme d'opérateur	18
1.6	Séries absolument convergentes et complétude	21
1.7	Espaces quotients et complétion	22
1.8	Exercices	24
2	Espaces de Hilbert	27
2.1	Produit scalaire et espaces préhilbertiens	28
2.2	Espaces de Hilbert : définition et exemples	30
2.3	Projection sur un convexe fermé	33
2.4	Théorème de représentation de Riesz	35
2.5	Bases hilbertiennes	37
2.6	Critères de complétude d'un système orthonormal	39
2.7	Espaces séparables et bases dénombrables	40
2.8	Théorème de Fischer-Riesz	41
2.9	Somme directe hilbertienne	43
2.10	Opérateurs dans les espaces de Hilbert : introduction	44
2.11	Exercices	47
3	Opérateurs Linéaires Bornés	53
3.1	L'espace $\mathcal{L}(E, F)$	53
3.2	Opérateurs compacts	55
3.3	Série de Neumann et inversibilité	57
3.4	Spectre et résolvante	58
3.5	Adjoint sur les espaces de Hilbert	60

3.6	Opérateurs normaux, auto-adjoints et unitaires	62
3.7	Exercices	64
4	Théorème de Hahn-Banach	67
4.1	Forme analytique réelle	67
4.2	Forme analytique complexe	69
4.3	Formes géométriques : séparation de convexes	70
4.4	Dual des espaces ℓ^p et bidual	73
4.4.1	Bidual et injection canonique	74
4.5	Espaces réflexifs et théorème de Banach-Alaoglu	74
4.6	Exercices	76
5	Théorème de Banach-Steinhaus et Applications	79
5.1	Le théorème de Baire	80
5.2	Le théorème de Banach-Steinhaus	82
5.3	Applications aux suites de fonctionnelles	84
5.4	Convergence forte versus convergence uniforme d'opérateurs	84
5.5	Application aux séries de Fourier : théorème de du Bois-Reymond	86
5.5.1	Noyau de Dirichlet et sommes partielles de Fourier	86
5.6	Théorème de condensation de Banach-Steinhaus	88
5.7	Principe de borne uniforme pour les familles d'opérateurs	89
5.8	Le phénomène de Gibbs et le noyau de Dirichlet	91
5.9	Exercices	92
6	Théorème de l'Application Ouverte et du Graphe Fermé	95
6.1	Le théorème de l'application ouverte	96
6.2	Corollaire : isomorphisme de Banach	98
6.3	Le théorème du graphe fermé	99
6.4	Applications : opérateurs non bornés	101
6.5	Théorème de l'image fermée	103
6.6	Principe de factorisation	104
6.7	Espaces de Fréchet et théorème du graphe fermé généralisé	105
6.8	Exercices	106
7	Espaces Duaux et Réflexivité	109
7.1	Le dual topologique	110
7.1.1	Rappels : le théorème de Hahn-Banach	110
7.2	Dual de ℓ^p pour $1 \leq p < \infty$	111
7.3	Dual de c_0	112
7.4	Dual de L^p	113
7.5	L'injection canonique et le bidual	114

7.6	Espaces réflexifs	115
7.7	Théorèmes fondamentaux de réflexivité	116
7.7.1	Le théorème de James	116
7.7.2	Le théorème d'Eberlein-Šmulian	117
7.7.3	Sous-espaces, quotients, et réflexivité	117
7.7.4	Le théorème de Milman-Pettis	119
7.8	Exercices	120
8	Topologies Faibles	123
8.1	La topologie faible $\sigma(E, E')$	123
8.2	Convergence faible	125
8.3	La topologie faible- $\ast$ $\sigma(E', E)$	126
8.4	Le théorème de Banach-Alaoglu	127
8.5	Le théorème de Goldstine	129
8.6	Le théorème de Kakutani	130
8.7	Le théorème de Mazur	130
8.8	Application : minimiseurs en calcul des variations	132
8.9	Compléments sur les topologies faibles	134
8.10	Exercices	135
9	Théorie Spectrale des Opérateurs Compacts	139
9.1	Opérateurs compacts : rappels et exemples	139
9.2	Fermeture de l'espace des opérateurs compacts	141
9.3	Alternative de Fredholm	142
9.4	Théorie de Riesz-Schauder	143
9.5	Opérateurs compacts auto-adjoints : théorème spectral	145
9.6	Théorème de Hilbert-Schmidt	148
9.7	Application : équations intégrales de Fredholm	149
9.8	Exercices	150
10	Théorème Spectral pour les Opérateurs Auto-Adjoints	153
10.1	Calcul fonctionnel continu	153
10.2	Mesures spectrales et résolution de l'identité	155
10.3	Théorème spectral : version mesure spectrale	155
10.4	Calcul fonctionnel borélien	157
10.5	Opérateurs positifs et racine carrée	157
10.6	Décomposition polaire	158
10.7	Opérateurs non bornés	159
10.8	Opérateurs auto-adjoints non bornés	160
10.9	Théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints non bornés	161
10.10	Application : mécanique quantique	162

10.11 Exercices	163
11 Espaces L^p et Dualité	165
11.1 Inégalités fondamentales	165
11.2 Complétude de L^p : théorème de Riesz–Fischer	167
11.3 Densité de C_c^∞ dans L^p	168
11.4 Convolution et approximation de l’identité	169
11.5 Dual de L^p	170
11.6 L^2 comme espace de Hilbert	171
11.7 Théorème de Radon–Nikodym	172
11.8 Interpolation : théorème de Riesz–Thorin	172
11.9 Application : transformée de Fourier	173
11.10 Exercices	174
12 Algèbres de Banach et C^*-Algèbres : Introduction	177
12.1 Algèbres de Banach : définition et exemples	177
12.2 Spectre et rayon spectral	178
12.3 Algèbres de Banach commutatives : théorie de Gelfand	179
12.4 C^* -algèbres	181
12.5 Théorème de Gelfand–Naimark commutatif	181
12.6 Calcul fonctionnel continu dans les C^* -algèbres	182
12.7 États et formes positives	183
12.8 Construction GNS	183
12.9 Application : mécanique quantique et théorie des représentations	185
12.10 Exercices	185
A Rappels d’Analyse et de Topologie	187
A.1 Théorème de Baire	187
A.2 Lemme de Zorn	188
A.3 Théorème de Tychonoff	188
A.4 Mesure de Lebesgue : rappels	188
A.5 Convergence dominée	189
A.6 Théorème de Fubini	189
A.7 Autres rappels utiles	189

Chapitre 1

Espaces de Banach — Fondements

Contents

1.1	Espaces vectoriels normés	8
1.1.1	Exemples fondamentaux	9
1.1.2	Inégalités fondamentales	10
1.2	Convergence et séries dans les espaces normés . .	11
1.3	Espaces de Banach : définition et complétude . .	13
1.4	Espaces de dimension finie	16
1.5	Applications linéaires continues et norme d'opé- rateur	18
1.6	Séries absolument convergentes et complétude . .	21
1.7	Espaces quotients et complétion	22
1.8	Exercices	24

L'analyse fonctionnelle est l'étude des espaces vectoriels de dimension infinie munis de structures topologiques compatibles avec les opérations algébriques. Ce premier chapitre établit les fondations de la théorie en introduisant les espaces vectoriels normés et les espaces de Banach, qui constituent le cadre naturel pour l'étude des équations fonctionnelles, des équations aux dérivées partielles et de la théorie spectrale.

Historiquement, la notion d'espace de Banach a été introduite par Stefan Banach dans sa thèse de 1920, publiée en 1922. Son ouvrage fondateur *Théorie des opérations linéaires* (1932) a posé les bases de l'analyse fonctionnelle moderne. Les contributions de Banach, Hahn, Schauder et leurs contempo-

rains de l'école polonaise de Lwów ont profondément transformé l'analyse mathématique du XXe siècle.

Dans ce chapitre, le corps de base $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sauf mention explicite du contraire.

1.1 Espaces vectoriels normés

Définition 1.1 (Norme). Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Une **norme** sur E est une application $\|\cdot\| : E \rightarrow [0, +\infty[$ vérifiant :

- (i) **Séparation** : $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
- (ii) **Homogénéité** : $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $x \in E$;
- (iii) **Inégalité triangulaire** : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tous $x, y \in E$.

Le couple $(E, \|\cdot\|)$ est appelé **espace vectoriel normé** (e.v.n.).

Remarque 1.2. Toute norme $\|\cdot\|$ sur E induit une distance $d(x, y) = \|x - y\|$, qui est *invariante par translation* : $d(x + a, y + a) = d(x, y)$ pour tout $a \in E$. Cette distance munit E d'une structure d'espace métrique.

Notation 1.3. On note $B(x, r) = \{y \in E : \|y - x\| < r\}$ la boule ouverte de centre x et de rayon $r > 0$, et $\overline{B}(x, r) = \{y \in E : \|y - x\| \leq r\}$ la boule fermée. La sphère unité est $S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}$. On écrit $B_E = \overline{B}(0, 1)$ pour la boule unité fermée.

Définition 1.4 (Semi-norme). Une **semi-norme** sur E est une application $p : E \rightarrow [0, +\infty[$ vérifiant les conditions (ii) et (iii) de la définition : norme, mais pas nécessairement (i). Autrement dit, on peut avoir $p(x) = 0$ pour $x \neq 0$.

1.1.1 Exemples fondamentaux

Exemple 1.5 (Les espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$). Sur $\mathbb{K}^n$, on dispose de la famille de normes suivante. Pour $1 \leq p < \infty$ et $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p},$$

et pour $p = \infty$:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

Les trois cas les plus courants sont :

- $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$ (norme ℓ^1) ;
- $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$ (norme euclidienne) ;
- $\|x\|_\infty = \max_k |x_k|$ (norme sup).

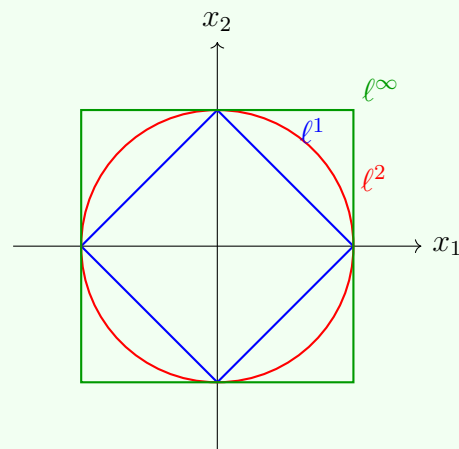


FIGURE 1.1 – Boules unités dans $\mathbb{R}^2$ pour les normes ℓ^1 , ℓ^2 et ℓ^∞ .

Exemple 1.6 (Les espaces ℓ^p). Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace ℓ^p est défini par :

$$\ell^p = \left\{ x = (x_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{K} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\},$$

muni de la norme $\|x\|_{\ell^p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$. Pour $p = \infty$:

$$\ell^\infty = \left\{ x = (x_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{K} : \sup_{n \geq 1} |x_n| < \infty \right\}, \quad \|x\|_{\ell^\infty} = \sup_{n \geq 1} |x_n|.$$

L'espace c_0 des suites convergeant vers 0 est un sous-espace fermé de ℓ^∞ .

Exemple 1.7 (L'espace $C(K)$). Soit K un espace topologique compact. L'espace $C(K)$ des fonctions continues $f : K \rightarrow \mathbb{K}$ est un espace vectoriel normé pour la norme uniforme :

$$\|f\|_\infty = \max_{t \in K} |f(t)|.$$

Exemple 1.8 (Aperçu des espaces L^p). Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Pour $1 \leq p < \infty$:

$$L^p(\Omega, \mu) = \left\{ f \text{ mesurable} : \int_\Omega |f|^p \, d\mu < \infty \right\} / \sim,$$

où $f \sim g$ si $f = g$ μ -presque partout, muni de $\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$.

1.1.2 Inégalités fondamentales

Proposition 1.9 (Inégalité de Hölder discrète). Soient $p, q \in [1, +\infty]$ des exposants conjugués, c'est-à-dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour tous $x \in \ell^p$ et $y \in \ell^q$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \|x\|_{\ell^p} \|y\|_{\ell^q}.$$

Démonstration. On utilise l'**inégalité de Young** : pour $a, b \geq 0$, $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. Si $\|x\|_{\ell^p} = 0$ ou $\|y\|_{\ell^q} = 0$, le résultat est trivial. Sinon, posons $\tilde{x}_n = |x_n| / \|x\|_{\ell^p}$ et $\tilde{y}_n = |y_n| / \|y\|_{\ell^q}$. L'inégalité de Young donne $\tilde{x}_n \tilde{y}_n \leq \frac{\tilde{x}_n^p}{p} + \frac{\tilde{y}_n^q}{q}$. En sommant :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{x}_n \tilde{y}_n \leq \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{x}_n^p + \frac{1}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{y}_n^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

En multipliant par $\|x\|_{\ell^p} \|y\|_{\ell^q}$, on obtient le résultat. $\square$

Proposition 1.10 (Inégalité de Minkowski discrète). *Pour $1 \leq p \leq \infty$ et $x, y \in \ell^p$: $\|x + y\|_{\ell^p} \leq \|x\|_{\ell^p} + \|y\|_{\ell^p}$.*

Démonstration. Les cas $p = 1$ et $p = \infty$ sont immédiats. Pour $1 < p < \infty$, on écrit $|x_n + y_n|^p \leq |x_n + y_n|^{p-1} (|x_n| + |y_n|)$. En sommant et en appliquant Hölder avec $q = p/(p-1)$:

$$\begin{aligned} \sum_n |x_n + y_n|^p &\leq \left(\sum_n |x_n + y_n|^{(p-1)q} \right)^{1/q} \|x\|_p + \left(\sum_n |x_n + y_n|^{(p-1)q} \right)^{1/q} \|y\|_p \\ &= \left(\sum_n |x_n + y_n|^p \right)^{1/q} (\|x\|_p + \|y\|_p). \end{aligned}$$

On divise par $(\sum_n |x_n + y_n|^p)^{1/q}$ pour conclure, puisque $1 - 1/q = 1/p$. $\square$

1.2 Convergence et séries dans les espaces normés

Définition 1.11 (Convergence). Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. Une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ dans E **converge** vers $x \in E$ si $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. On écrit $x_n \rightarrow x$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Définition 1.12 (Suite de Cauchy). Une suite (x_n) dans $(E, \|\cdot\|)$ est une **suite de Cauchy** si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall m, n \geq N, \quad \|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Proposition 1.13. *Toute suite convergente est de Cauchy. La réciproque est fausse en général.*

Démonstration. Si $x_n \rightarrow x$, alors $\|x_m - x_n\| \leq \|x_m - x\| + \|x - x_n\| \rightarrow 0$. Pour la réciproque, considérer $E = \mathbb{Q}$ muni de la valeur absolue : la suite des approximations décimales de $\sqrt{2}$ est de Cauchy mais ne converge pas dans $\mathbb{Q}$. $\square$

Définition 1.14 (Séries dans un e.v.n.). Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite dans E . La **série** $\sum x_n$ est dite **convergente** si la suite des sommes partielles $S_N = \sum_{n=0}^N x_n$ converge dans E . La série est **absolument convergente** si $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.

Remarque 1.15. En dimension finie, toute série absolument convergente est convergente. En dimension infinie, c'est une propriété caractéristique de la complétude (voir le efmh :abs-cv-complétude).

Proposition 1.16 (Continuité des opérations). Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. Les applications suivantes sont continues :

- (a) L'addition $(x, y) \mapsto x + y$ de $E \times E$ dans E ;
- (b) La multiplication par un scalaire $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ de $\mathbb{K} \times E$ dans E ;
- (c) La norme $x \mapsto \|x\|$ de E dans $\mathbb{R}$.

Autrement dit, un e.v.n. est un **espace vectoriel topologique**.

Démonstration. (a) $\|(x + y) - (x_0 + y_0)\| \leq \|x - x_0\| + \|y - y_0\|$.
 (b) $\|\lambda x - \lambda_0 x_0\| = \|(\lambda - \lambda_0)x + \lambda_0(x - x_0)\| \leq |\lambda - \lambda_0| \|x\| + |\lambda_0| \|x - x_0\|$.
 (c) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ par l'inégalité triangulaire inversée. $\square$

Définition 1.17 (Normes équivalentes). Deux normes $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ sur un espace vectoriel E sont **équivalentes** s'il existe des constantes $c, C > 0$ telles que

$$c \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq C \|x\|_a \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Des normes équivalentes définissent les mêmes notions de convergence, de suites de Cauchy, d'ouverts, de fermés et de complets.

Exemple 1.18 (Comparaison des normes ℓ^p sur $\mathbb{K}^n$). Sur $\mathbb{K}^n$, on a les inégalités :

$$\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_{\infty}, \quad \|x\|_{\infty} \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_{\infty}.$$

Ces inégalités sont optimales : l'égalité dans $\|x\|_1 \leq n \|x\|_{\infty}$ est atteinte pour $x = (1, 1, \dots, 1)$ et l'égalité dans $\|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_{\infty}$ est aussi atteinte pour ce vecteur.

Définition 1.19 (Parties bornées, fermées, denses). Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n.

- Une partie $A \subset E$ est **bornée** si $\sup_{x \in A} \|x\| < \infty$.
- Une partie $D \subset E$ est **dense** dans E si $\overline{D} = E$, c'est-à-dire si pour tout $x \in E$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $d \in D$ tel que $\|x - d\| < \varepsilon$.
- Un e.v.n. est **séparable** s'il contient un sous-ensemble dénombrable dense.

Exemple 1.20 (Séparabilité de ℓ^p). Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace ℓ^p est séparable. En effet, l'ensemble des suites à support fini et à coefficients dans $\mathbb{Q}$ (ou $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) est dénombrable et dense. En revanche, ℓ^∞ n'est *pas* séparable : l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0, 1\}$ est non dénombrable et les éléments sont à distance 1 les uns des autres.

1.3 Espaces de Banach : définition et complétude

Définition 1.21 (Espace de Banach). Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est un **espace de Banach** s'il est **complet**, c'est-à-dire si toute suite de Cauchy dans E converge dans E .

Théorème 1.22 (Complétude de ℓ^p). Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, l'espace ℓ^p est un espace de Banach.

Démonstration. **Cas** $1 \leq p < \infty$. Soit $(x^{(k)})_{k \geq 1}$ une suite de Cauchy dans ℓ^p , où $x^{(k)} = (x_n^{(k)})_{n \geq 1}$. Pour chaque n fixé :

$$|x_n^{(k)} - x_n^{(j)}| \leq \|x^{(k)} - x^{(j)}\|_{\ell^p} \rightarrow 0 \quad \text{quand } k, j \rightarrow \infty.$$

Donc $(x_n^{(k)})_{k \geq 1}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$, qui est complet. Posons $x_n = \lim_{k \rightarrow \infty} x_n^{(k)}$.

Étape 1 : $x = (x_n) \in \ell^p$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe K tel que pour $k, j \geq K$: $\|x^{(k)} - x^{(j)}\|_p < \varepsilon$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^N |x_n^{(k)} - x_n^{(j)}|^p < \varepsilon^p.$$

En faisant $j \rightarrow \infty$ (à N et k fixés) :

$$\sum_{n=1}^N |x_n^{(k)} - x_n|^p \leq \varepsilon^p.$$

Puis en faisant $N \rightarrow \infty$: $\|x^{(k)} - x\|_p \leq \varepsilon$. Par l'inégalité triangulaire :

$$\|x\|_p \leq \|x - x^{(k)}\|_p + \|x^{(k)}\|_p \leq \varepsilon + \|x^{(K)}\|_p < \infty.$$

Donc $x \in \ell^p$.

Étape 2 : $x^{(k)} \rightarrow x$ dans ℓ^p . On a montré que $\|x^{(k)} - x\|_p \leq \varepsilon$ pour tout $k \geq K$, ce qui donne $x^{(k)} \rightarrow x$.

Cas $p = \infty$. Soit $(x^{(k)})$ de Cauchy dans ℓ^∞ . Pour chaque n , $(x_n^{(k)})_k$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$, donc converge vers x_n . Soit $\varepsilon > 0$ et K tel que $\|x^{(k)} - x^{(j)}\|_\infty < \varepsilon$ pour $k, j \geq K$. Pour tout n : $|x_n^{(k)} - x_n^{(j)}| < \varepsilon$. En faisant $j \rightarrow \infty$: $|x_n^{(k)} - x_n| \leq \varepsilon$ pour tout n , donc $\|x^{(k)} - x\|_\infty \leq \varepsilon$. Comme $\|x\|_\infty \leq \|x - x^{(K)}\|_\infty + \|x^{(K)}\|_\infty < \infty$, on a $x \in \ell^\infty$ et $x^{(k)} \rightarrow x$. $\square$

Théorème 1.23 (Complétude de $C(K)$). *Soit K un espace topologique compact. L'espace $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Soit $(f_k)_{k \geq 1}$ une suite de Cauchy dans $C(K)$. Pour chaque $t \in K$:

$$|f_k(t) - f_j(t)| \leq \|f_k - f_j\|_\infty \rightarrow 0,$$

donc $(f_k(t))_k$ converge dans $\mathbb{K}$. Posons $f(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(t)$.

Convergence uniforme. Soit $\varepsilon > 0$ et K_0 tel que $\|f_k - f_j\|_\infty < \varepsilon$ pour $k, j \geq K_0$. Pour tout $t \in K$ et $k \geq K_0$, en faisant $j \rightarrow \infty$ dans $|f_k(t) - f_j(t)| < \varepsilon$, on obtient $|f_k(t) - f(t)| \leq \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout t , on a $\|f_k - f\|_\infty \leq \varepsilon$.

Continuité de f . Comme limite uniforme de fonctions continues, f est continue. En effet, pour $t_0 \in K$ et $\varepsilon > 0$, on choisit k tel que $\|f_k - f\|_\infty < \varepsilon/3$, puis un voisinage V de t_0 tel que $|f_k(t) - f_k(t_0)| < \varepsilon/3$ pour $t \in V$. Alors pour $t \in V$:

$$|f(t) - f(t_0)| \leq |f(t) - f_k(t)| + |f_k(t) - f_k(t_0)| + |f_k(t_0) - f(t_0)| < \varepsilon.$$

Donc $f \in C(K)$ et $f_k \rightarrow f$ dans $C(K)$. $\square$

Remarque 1.24. Les espaces c_0 et c (suites convergentes) sont des sous-espaces fermés de ℓ^∞ , donc sont des espaces de Banach.

Proposition 1.25 (Sous-espaces fermés et complétude). *Soit E un espace de Banach et F un sous-espace vectoriel de E . Alors F est un espace de Banach (pour la norme induite) si et seulement si F est fermé dans E .*

Démonstration. ($\Rightarrow$) Si F est complet et $(x_n) \subset F$ converge vers $x \in E$, alors (x_n) est de Cauchy dans F , donc converge dans F : $x \in F$.

($\Leftarrow$) Si F est fermé et $(x_n) \subset F$ est de Cauchy, alors (x_n) converge vers un $x \in E$ (car E est complet). Comme F est fermé, $x \in F$. $\square$

Exemple 1.26 (L'espace $C^k([a, b])$). L'espace $C^k([a, b])$ des fonctions k fois continûment dérivables sur $[a, b]$, muni de la norme

$$\|f\|_{C^k} = \sum_{j=0}^k \|f^{(j)}\|_\infty = \sum_{j=0}^k \max_{t \in [a, b]} |f^{(j)}(t)|,$$

est un espace de Banach. En effet, si (f_n) est de Cauchy dans C^k , alors pour chaque $0 \leq j \leq k$, $(f_n^{(j)})$ est de Cauchy dans $C([a, b])$, donc converge uniformément vers une fonction continue g_j . On vérifie que $g_0^{(j)} = g_j$ par le théorème de dérivation des limites uniformes.

Exemple 1.27 (Espace des suites à décroissance rapide). L'espace

$$s = \left\{ x = (x_n)_{n \geq 1} : \sup_{n \geq 1} n^k |x_n| < \infty \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \right\}$$

est un sous-espace de ℓ^p pour tout $p \geq 1$, mais il n'est pas fermé (et donc pas un espace de Banach pour la norme ℓ^p). On peut le munir d'une topologie d'espace de Fréchet définie par la famille de semi-normes $p_k(x) = \sup_n n^k |x_n|$.

1.4 Espaces de dimension finie

Théorème 1.28 (Équivalence des normes en dimension finie). *Sur un espace vectoriel E de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration. Soit $\dim E = n$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Munissons E de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i|$. Il suffit de montrer que toute norme $\|\cdot\|$ sur E est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.

Majoration. Pour $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$:

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \|e_i\| \leq \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\| \right) \|x\|_\infty = C \|x\|_\infty,$$

où $C = \sum_{i=1}^n \|e_i\|$. Ceci montre que $\|\cdot\|$ est continue pour la topologie de $\|\cdot\|_\infty$.

Minoration. Considérons la sphère unité $S = \{x \in E : \|x\|_\infty = 1\}$. L'application $\varphi : (E, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \|x\|$ est continue (par la majoration ci-dessus) et S est compact (car S est identifié à un sous-ensemble fermé borné de $\mathbb{K}^n$, qui est compact par le théorème de Heine-Borel). Donc φ atteint son minimum m sur S . Comme $\|x\| > 0$ pour $x \in S$ (car $x \neq 0$), on a $m > 0$. Pour tout $x \neq 0$:

$$\|x\| = \|x\|_\infty \cdot \left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\| \geq m \|x\|_\infty.$$

Donc $m \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq C \|x\|_\infty$. □

Corollaire 1.29. *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.*

Démonstration. Soit E de dimension n . Fixons une base et identifions E à $\mathbb{K}^n$. Toute norme sur E est équivalente à $\|\cdot\|_2$, et $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ est complet. Comme la complétude est préservée par équivalence de normes, E est complet. □

Théorème 1.30 (Compacité de la boule unité fermée). *Soit E un espace vectoriel normé. La boule unité fermée B_E est compacte si et seulement si $\dim E < \infty$.*

Démonstration. ($\Leftarrow$) Si $\dim E < \infty$, alors B_E est un fermé borné de $E \simeq \mathbb{K}^n$, donc compact par Heine-Borel.

($\Rightarrow$) On montre la contraposée : si $\dim E = \infty$, alors B_E n'est pas compacte. On utilise le lemme de Riesz (cf. lemme de Riesz) pour construire une suite sans sous-suite convergente.

On construit par récurrence une suite (x_n) dans S_E telle que $\|x_m - x_n\| \geq 1/2$ pour $m \neq n$. Posons $F_1 = \text{span}\{x_1\}$ avec $x_1 \in S_E$ quelconque. Par le lemme de Riesz appliqué au sous-espace propre fermé F_1 , il existe $x_2 \in S_E$ tel que $\|x_2 - y\| \geq 1/2$ pour tout $y \in F_1$. On continue : $F_n = \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ est fermé (dimension finie), et le lemme de Riesz donne $x_{n+1} \in S_E$ tel que $d(x_{n+1}, F_n) \geq 1/2$. Comme $x_m \in F_n$ pour $m \leq n$, on a $\|x_{n+1} - x_m\| \geq 1/2$.

Cette suite n'admet aucune sous-suite de Cauchy, donc aucune sous-suite convergente, et B_E n'est pas séquentiellement compacte, donc pas compacte (dans un espace métrique, les deux notions coïncident). $\square$

Lemme 1.31 (Lemme de Riesz). *Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel fermé de E avec $F \neq E$. Pour tout $\theta \in]0, 1[$, il existe $x_\theta \in E$ tel que $\|x_\theta\| = 1$ et $d(x_\theta, F) \geq \theta$.*

Démonstration. Soit $y \in E \setminus F$. Comme F est fermé, $d = d(y, F) > 0$. Par définition de l'infimum, il existe $z \in F$ tel que $\|y - z\| \leq d/\theta$. Posons :

$$x_\theta = \frac{y - z}{\|y - z\|}.$$

Alors $\|x_\theta\| = 1$. Pour tout $f \in F$:

$$\|x_\theta - f\| = \frac{1}{\|y - z\|} \|y - z - \|y - z\| f\| = \frac{1}{\|y - z\|} \left\| y - \underbrace{(z + \|y - z\| f)}_{\in F} \right\| \geq \frac{d}{\|y - z\|} \geq \theta.$$

$\square$

Corollaire 1.32. *Si F est un sous-espace propre fermé d'un espace de Banach E , alors F est d'intérieur vide.*

Démonstration. Si F contenait une boule ouverte $B(x_0, r)$, alors pour tout $y \in E$ avec $\|y\| < r$, on aurait $x_0 + y \in F$, donc $y \in F$, et par homogénéité $F = E$: contradiction. $\square$

Théorème 1.33 (Sous-espace de dimension finie). *Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un e.v.n. est fermé.*

Démonstration. Soit F un sous-espace de dimension n de l'e.v.n. E , et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de F . L'application $\varphi : (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_1) \rightarrow (F, \|\cdot\|_E)$ définie par $\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ est un isomorphisme linéaire bicontinu (par le efthm :equiv-normes-dim-finie). En particulier, F est complet (car isomorphe à $\mathbb{K}^n$ complet), donc fermé dans E . $\square$

Remarque 1.34. En dimension infinie, un sous-espace vectoriel n'est pas nécessairement fermé. Par exemple, l'espace $C([0, 1])$ vu comme sous-espace de $L^2([0, 1])$ est dense mais pas fermé (car $L^2 \neq C$).

Proposition 1.35 (Critère de compacité dans $\mathbb{K}^n$). *Dans $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ (pour n'importe quelle norme), une partie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée (théorème de Heine-Borel).*

1.5 Applications linéaires continues et norme d'opérateur

Définition 1.36 (Application linéaire continue). Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n. Une application linéaire $T : E \rightarrow F$ est dite **continue** (ou **bornée**) si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

- (i) T est continue en 0 ;
- (ii) T est continue sur E ;
- (iii) T est lipschitzienne ;
- (iv) Il existe $C \geq 0$ tel que $\|T(x)\|_F \leq C \|x\|_E$ pour tout $x \in E$.

Proposition 1.37. *Les quatre conditions de la efdef :app-lin-continue sont équivalentes.*

Démonstration. (iv) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) sont immédiates. Montrons (i) $\Rightarrow$ (iv). Si T est continue en 0, pour $\varepsilon = 1$, il existe $\delta > 0$ tel que $\|x\|_E < \delta \Rightarrow$

$\|T(x)\|_F < 1$. Pour $x \neq 0$, posons $y = \frac{\delta x}{2\|x\|_E}$. Alors $\|y\|_E = \delta/2 < \delta$, donc $\|T(y)\|_F < 1$, c'est-à-dire $\frac{\delta}{2\|x\|_E} \|T(x)\|_F < 1$. D'où $\|T(x)\|_F \leq \frac{2}{\delta} \|x\|_E$. $\square$

Définition 1.38 (Norme d'opérateur). Soit $T : E \rightarrow F$ linéaire continue. La **norme d'opérateur** de T est :

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|T(x)\|_F.$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F , et $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$. Le **dual topologique** de E est $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Proposition 1.39. $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$.

Démonstration. La séparation : si $\|T\| = 0$, alors $T(x) = 0$ pour tout x , donc $T = 0$. L'homogénéité : $\|\lambda T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\lambda T(x)\| = |\lambda| \|T\|$. L'inégalité triangulaire : $\|(T + S)(x)\| \leq \|T(x)\| + \|S(x)\| \leq (\|T\| + \|S\|) \|x\|$. $\square$

Théorème 1.40 ($\mathcal{L}(E, F)$ est Banach si F est Banach). Si F est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach.

Démonstration. Soit $(T_k)_{k \geq 1}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E, F)$.

Étape 1 : définition de la limite. Pour chaque $x \in E$:

$$\|T_k(x) - T_j(x)\|_F \leq \|T_k - T_j\| \|x\|_E \rightarrow 0.$$

Donc $(T_k(x))_k$ est de Cauchy dans F (complet). On pose $T(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k(x)$.

Étape 2 : T est linéaire. Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$:

$$T(\alpha x + \beta y) = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k(\alpha x + \beta y) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha T_k(x) + \beta T_k(y)) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

Étape 3 : T est continue et $T_k \rightarrow T$ en norme. Soit $\varepsilon > 0$ et K tel que $\|T_k - T_j\| < \varepsilon$ pour $k, j \geq K$. Pour tout x avec $\|x\| \leq 1$ et $k \geq K$:

$$\|T_k(x) - T_j(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

En faisant $j \rightarrow \infty$: $\|T_k(x) - T(x)\|_F \leq \varepsilon$. Donc $\|T_k - T\| \leq \varepsilon$ pour $k \geq K$. De plus, $\|T\| \leq \|T - T_K\| + \|T_K\| \leq \varepsilon + \|T_K\| < \infty$, donc $T \in \mathcal{L}(E, F)$. $\square$

Corollaire 1.41. *Le dual topologique E' de tout espace vectoriel normé E est un espace de Banach.*

Démonstration. $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ et $\mathbb{K}$ est complet. □

Proposition 1.42 (Composition d'opérateurs). *Soient E, F, G des e.v.n., $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et $S \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors $S \circ T \in \mathcal{L}(E, G)$ et $\|S \circ T\| \leq \|S\| \|T\|$.*

Démonstration. $\|S(T(x))\|_G \leq \|S\| \|T(x)\|_F \leq \|S\| \|T\| \|x\|_E$. □

Remarque 1.43. En particulier, $\mathcal{L}(E)$ muni de la composition est une **algèbre de Banach** unitaire (avec Id_E comme unité) lorsque E est un espace de Banach.

Exemple 1.44 (Formes linéaires sur ℓ^p). Pour $1 \leq p < \infty$, soit $y = (y_n) \in \ell^q$ (avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). L'application $\varphi_y : \ell^p \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $\varphi_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ est une forme linéaire continue avec $\|\varphi_y\| = \|y\|_q$ (par l'inégalité de Hölder, et l'égalité se vérifie en choisissant $x_n = |y_n|^{q-2} \overline{y_n}$ convenablement normalisé). On montrera plus tard que $(\ell^p)' \simeq \ell^q$ isométriquement.

Exemple 1.45 (Opérateur de décalage). Sur ℓ^2 , le **décalage à droite** $R : (x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$ et le **décalage à gauche** $L : (x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots)$ sont des opérateurs bornés de norme 1. On a $LR = \text{Id}$ mais $RL \neq \text{Id}$ (car $RL(x_1, x_2, \dots) = (0, x_2, x_3, \dots)$). Cela montre que l'algèbre $\mathcal{L}(\ell^2)$ n'est pas commutative.

Proposition 1.46 (Série de Neumann). *Soit E un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$ avec $\|T\| < 1$. Alors $\text{Id} - T$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$ et :*

$$(\text{Id} - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n, \quad \|(\text{Id} - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

Démonstration. La série $\sum T^n$ est absolument convergente car $\sum \|T^n\| \leq \sum \|T\|^n = \frac{1}{1-\|T\|} < \infty$. Comme $\mathcal{L}(E)$ est un espace de Banach (cf thm : L-banach), la série converge vers un $S \in \mathcal{L}(E)$. On vérifie :

$$(\text{Id} - T)S_N = (\text{Id} - T) \sum_{n=0}^N T^n = \text{Id} - T^{N+1}.$$

En faisant $N \rightarrow \infty$: $(\text{Id} - T)S = \text{Id}$ (car $\|T^{N+1}\| \leq \|T\|^{N+1} \rightarrow 0$). De même $S(\text{Id} - T) = \text{Id}$. $\square$

Corollaire 1.47 (Stabilité des isomorphismes). *L'ensemble $GL(E) = \{T \in \mathcal{L}(E) : T \text{ inversible}\}$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$, et l'application $T \mapsto T^{-1}$ est continue.*

Démonstration. Soit $T_0 \in GL(E)$ et $T \in \mathcal{L}(E)$ avec $\|T - T_0\| < \|T_0^{-1}\|^{-1}$. Alors $T = T_0(\text{Id} - T_0^{-1}(T_0 - T))$ et $\|T_0^{-1}(T_0 - T)\| \leq \|T_0^{-1}\| \|T_0 - T\| < 1$, donc T est inversible par la série de Neumann. Pour la continuité de l'inversion, on utilise $T^{-1} - T_0^{-1} = T^{-1}(T_0 - T)T_0^{-1}$. $\square$

1.6 Séries absolument convergentes et complétude

Lemme 1.48 (Extraction de sous-suite de Cauchy). *Toute suite de Cauchy (x_n) dans un e.v.n. admet une sous-suite (x_{n_k}) telle que $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < 2^{-k}$ pour tout $k \geq 1$.*

Démonstration. Par récurrence. On construit (n_k) croissante : $n_1 = 1$, et pour $k \geq 1$, comme (x_n) est de Cauchy, il existe N_k tel que $\|x_m - x_n\| < 2^{-k}$ pour $m, n \geq N_k$. On pose $n_{k+1} = \max(n_k + 1, N_k)$. $\square$

Remarque 1.49. Une suite de Cauchy qui admet une sous-suite convergente est elle-même convergente. En effet, si $(x_{n_k}) \rightarrow x$ et (x_n) est de Cauchy, alors pour $\varepsilon > 0$, on choisit K tel que $\|x_{n_k} - x\| < \varepsilon/2$ pour $k \geq K$ et N tel que $\|x_m - x_n\| < \varepsilon/2$ pour $m, n \geq N$. Pour $n \geq \max(N, n_K)$, on choisit k tel que $n_k \geq n$ et $k \geq K$: $\|x_n - x\| \leq \|x_n - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x\| < \varepsilon$.

Théorème 1.50 (Caractérisation de la complétude). *Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach si et seulement si toute série absolument convergente dans E est convergente.*

Démonstration. $(\Rightarrow)$ Supposons E complet et soit $\sum x_n$ absolument convergente. La suite des sommes partielles est de Cauchy car pour $N > M$:

$$\|S_N - S_M\| = \left\| \sum_{n=M+1}^N x_n \right\| \leq \sum_{n=M+1}^N \|x_n\| \rightarrow 0$$

puisque la série $\sum \|x_n\|$ converge. Comme E est complet, (S_N) converge.

$(\Leftarrow)$ Supposons que toute série absolument convergente est convergente. Soit (y_k) une suite de Cauchy dans E . Extrayons une sous-suite (y_{k_j}) telle que $\|y_{k_{j+1}} - y_{k_j}\| < 2^{-j}$ pour tout j . Posons $x_1 = y_{k_1}$ et $x_j = y_{k_j} - y_{k_{j-1}}$ pour $j \geq 2$. Alors :

$$\sum_{j=2}^{\infty} \|x_j\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = 1 < \infty.$$

Donc $\sum x_j$ est absolument convergente, et par hypothèse, elle converge vers un $y \in E$. Or $\sum_{j=1}^N x_j = y_{k_N}$, donc $y_{k_N} \rightarrow y$. Comme (y_k) est de Cauchy et admet une sous-suite convergente, la suite entière converge vers y . $\square$

Exemple 1.51 (Application : ℓ^p est Banach, preuve alternative). On peut utiliser le efthm :abs-cv-complétude pour redémontrer la complétude de ℓ^p . Soit $\sum x^{(k)}$ absolument convergente dans ℓ^p . Alors pour chaque n , $\sum_k |x_n^{(k)}| \leq \sum_k \|x^{(k)}\|_p < \infty$ par monotonie. Donc $s_n = \sum_k x_n^{(k)}$ existe. On vérifie que $s = (s_n) \in \ell^p$ par convergence dominée (discrète).

1.7 Espaces quotients et complétion

Définition 1.52 (Espace quotient). Soit E un e.v.n. et F un sous-espace vectoriel fermé de E . L'**espace quotient** E/F est l'ensemble des classes $\dot{x} = x + F = \{x + f : f \in F\}$, muni de la norme quotient :

$$\|\dot{x}\|_{E/F} = \inf_{f \in F} \|x + f\|_E = d(x, F).$$

Proposition 1.53. *La norme quotient est bien une norme sur E/F (dès que F est fermé). De plus, si E est un espace de Banach, alors E/F est un espace de Banach.*

Démonstration. C'est une norme. L'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont immédiates. Pour la séparation : $\|\dot{x}\| = 0$ signifie $d(x, F) = 0$, donc $x \in \overline{F} = F$ (car F est fermé), donc $\dot{x} = \dot{0}$.

Complétude. Supposons E Banach. Par le efthm :abs-cv-complétude, il suffit de montrer que toute série absolument convergente dans E/F converge. Soit $\sum \dot{x}_n$ avec $\sum \|\dot{x}_n\|_{E/F} < \infty$. Pour chaque n , choisissons $y_n \in \dot{x}_n$ tel que $\|y_n\|_E \leq \|\dot{x}_n\|_{E/F} + 2^{-n}$. Alors $\sum \|y_n\|_E < \infty$, donc $\sum y_n$ converge vers un $y \in E$ (car E est Banach). On vérifie que $\sum_{n=1}^N \dot{x}_n = \dot{S}_N$ avec $S_N = \sum_{n=1}^N y_n$, et $\|\dot{S}_N - \dot{y}\|_{E/F} \leq \|S_N - y\|_E \rightarrow 0$. $\square$

Définition 1.54 (Complétion). Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. Une **complétion** de E est un couple $(\hat{E}, \iota)$ où $\hat{E}$ est un espace de Banach et $\iota : E \hookrightarrow \hat{E}$ est une isométrie linéaire d'image dense dans $\hat{E}$.

Théorème 1.55 (Existence et unicité de la complétion). *Tout espace vectoriel normé admet une complétion, unique à isométrie linéaire près.*

Esquisse de preuve. Existence. On considère l'espace $\mathcal{C}$ des suites de Cauchy dans E , muni des opérations terme à terme, et on quotiente par la relation $\sim$ définie par $(x_n) \sim (y_n) \iff \|x_n - y_n\| \rightarrow 0$. L'espace $\hat{E} = \mathcal{C}/\sim$ est muni de la norme $\|[(x_n)]\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$ (cette limite existe car $\| \|x_n\| - \|x_m\| \| \leq \|x_n - x_m\| \rightarrow 0$). L'application $\iota : x \mapsto [(x, x, x, \dots)]$ est une isométrie linéaire d'image dense.

Unicité. Si $(\hat{E}_1, \iota_1)$ et $(\hat{E}_2, \iota_2)$ sont deux complétions, l'application $\iota_2 \circ \iota_1^{-1} : \iota_1(E) \rightarrow \iota_2(E)$ est une isométrie linéaire entre sous-espaces denses, qui se prolonge de manière unique en une isométrie linéaire $\hat{E}_1 \rightarrow \hat{E}_2$. $\square$

Proposition 1.56 (Propriété universelle de la complétion). *Soit $(\hat{E}, \iota)$ une complétion de l'e.v.n. E et F un espace de Banach. Toute application linéaire continue $T : E \rightarrow F$ admet un unique prolongement linéaire continu $\hat{T} : \hat{E} \rightarrow F$ tel que $\hat{T} \circ \iota = T$. De plus $\|\hat{T}\| = \|T\|$.*

Démonstration. Pour $\hat{x} \in \hat{E}$, choisissons une suite $(x_n) \subset E$ telle que $\iota(x_n) \rightarrow \hat{x}$. Alors $(T(x_n))$ est de Cauchy dans F car $\|T(x_m) - T(x_n)\| \leq \|T\| \|x_m - x_n\|$. Comme F est complet, on pose $\hat{T}(\hat{x}) = \lim T(x_n)$. La limite ne dépend pas du choix de la suite (car si $\iota(x'_n), \iota(x_n)$ convergent vers $\hat{x}$, on peut les entrelacer). La linéarité et la continuité de $\hat{T}$ sont claires, et $\|\hat{T}\| = \|T\|$ car $\iota(E)$ est dense. $\square$

Le diagramme suivant illustre cette propriété universelle :

$$\begin{array}{ccc} E & \xhookrightarrow{\iota} & \hat{E} \\ & \searrow T & \downarrow \hat{T} \\ & & F \end{array}$$

FIGURE 1.2 – Propriété universelle de la complétion : toute application linéaire continue $T : E \rightarrow F$ (F Banach) se prolonge en $\hat{T} : \hat{E} \rightarrow F$ avec $\|\hat{T}\| = \|T\|$.

Exemple 1.57 (Complétion de $C([0, 1])$ pour différentes normes).

L'espace $C([0, 1])$ admet différentes complétions selon la norme choisie :

- Pour la norme $\|\cdot\|_\infty$: il est déjà complet, $\hat{E} = C([0, 1])$.
- Pour la norme $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$ ($1 \leq p < \infty$) : la complétion est $L^p([0, 1])$.
- Pour la norme $\|f\|_{H^1} = \left(\int_0^1 |f|^2 + |f'|^2 dt \right)^{1/2}$ (restreinte aux fonctions C^1) : la complétion est l'espace de Sobolev $H^1([0, 1])$.

Cet exemple illustre que la complétion dépend crucialement de la norme.

1.8 Exercices

Exercice 1.1 ($\star$). Montrer que les applications suivantes sont des normes sur l'espace indiqué :

- (a) $\|f\| = \int_0^1 |f(t)| dt$ sur $C([0, 1])$;
- (b) $\|(x, y)\| = |x| + 2|y|$ sur $\mathbb{R}^2$;
- (c) $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ sur $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1.2 (★). Montrer que $(C([0, 1]), \|\cdot\|_1)$ avec $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$ n'est pas un espace de Banach. *Indication : considérer la suite $f_n(t) = \min(1, \max(0, n(t - 1/2)))$.*

Exercice 1.3 (★★). Montrer que $c_0 = \{(x_n) \in \ell^\infty : x_n \rightarrow 0\}$ est un sous-espace fermé de ℓ^∞ . En déduire que c_0 est un espace de Banach.

Exercice 1.4 (★★). Soient $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ deux normes sur un espace vectoriel E . Montrer qu'elles sont équivalentes si et seulement si elles définissent les mêmes ouverts.

Exercice 1.5 (★★). Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie. En utilisant le lemme de Riesz, construire une suite (x_n) dans S_E telle que $\|x_m - x_n\| \geq 1/2$ pour $m \neq n$.

Exercice 1.6 (★★). Soit $T : \ell^1 \rightarrow \ell^1$ défini par $T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$ (décalage à droite). Montrer que $T \in \mathcal{L}(\ell^1)$ et calculer $\|T\|$.

Exercice 1.7 (★★). Soit E un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$ avec $\|T\| < 1$. Montrer que $\text{Id} - T$ est inversible et que $(\text{Id} - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$ (série de Neumann).

Exercice 1.8 (★★★). Soit $E = C([0, 1])$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$. Montrer que la complétion de E est (isométriquement isomorphe à) $L^1([0, 1])$.

Exercice 1.9 (★★★). Soit $E = \ell^\infty$ et $F = c_0$. Décrire l'espace quotient ℓ^∞/c_0 . Montrer que la norme quotient de la classe de la suite constante $(1, 1, 1, \dots)$ vaut 1.

Exercice 1.10 (★). Montrer que si $1 \leq p \leq q \leq \infty$, alors $\ell^p \subset \ell^q$ et $\|x\|_q \leq \|x\|_p$.

Exercice 1.11 (★★). Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ avec $\|A\|_{\text{op}} < 1$ (norme d'opérateur subordonnée à la norme euclidienne). Montrer que la matrice $I - A$ est inversible et que $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$. Appliquer au cas $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 1.12 (★★★). Montrer que le dual de c_0 est isométriquement isomorphe à ℓ^1 . *Indication : pour $\varphi \in c'_0$, considérer $y_n = \varphi(e_n)$ où e_n est le n -ième vecteur de la base canonique.*

Exercice 1.13 (★★). Soit E un espace métrique. On dit que E est **totalelement borné** si pour tout $\varepsilon > 0$, E peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε . Montrer qu'un espace métrique est compact si et seulement s'il est complet et totalelement borné.

Exercice 1.14 (★★). Soit $f \in C([0, 1])$ et $\varepsilon > 0$. En admettant le théorème d'approximation de Weierstrass, montrer qu'il existe un polynôme P tel que $\|f - P\|_{\infty} < \varepsilon$. En déduire que $C([0, 1])$ est séparable pour la norme uniforme.

Exercice 1.15 (★★). Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer les caractérisations suivantes de $\|T\|$:

- (a) $\|T\| = \inf\{C \geq 0 : \|Tx\| \leq C\|x\| \text{ pour tout } x \in E\}$;
- (b) $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in E, \|x\| \leq 1\}$;
- (c) $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in E, \|x\| = 1\}$ (si $E \neq \{0\}$) ;
- (d) $\|T\| = \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in E, x \neq 0\right\}$.

Montrer que le supremum dans (b) n'est pas nécessairement atteint si $\dim E = \infty$.

Chapitre 2

Espaces de Hilbert

Contents

2.1	Produit scalaire et espaces préhilbertiens	28
2.2	Espaces de Hilbert : définition et exemples	30
2.3	Projection sur un convexe fermé	33
2.4	Théorème de représentation de Riesz	35
2.5	Bases hilbertiennes	37
2.6	Critères de complétude d'un système orthonormal	39
2.7	Espaces séparables et bases dénombrables	40
2.8	Théorème de Fischer-Riesz	41
2.9	Somme directe hilbertienne	43
2.10	Opérateurs dans les espaces de Hilbert : intro- duction	44
2.11	Exercices	47

Les espaces de Hilbert constituent une classe privilégiée d'espaces de Banach, dans laquelle la norme provient d'un produit scalaire. Cette structure supplémentaire permet de développer une théorie géométrique riche — projection orthogonale, bases hilbertiennes, théorème de représentation de Riesz — qui généralise la géométrie euclidienne à la dimension infinie. Les espaces de Hilbert interviennent de manière cruciale en mécanique quantique, en traitement du signal et dans l'étude des équations aux dérivées partielles.

La théorie des espaces de Hilbert a été développée par David Hilbert au début du XXe siècle dans le contexte des équations intégrales. La formalisation abstraite est due à von Neumann (1929), qui a défini la notion d'espace de Hilbert abstrait et établi les fondements de la théorie spectrale. L'ouvrage

de référence moderne est celui de Brezis *Analyse fonctionnelle*, dont nous suivons l'esprit dans ce chapitre.

Dans tout ce chapitre, H désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ muni d'un produit scalaire, sauf mention contraire.

2.1 Produit scalaire et espaces préhilbertiens

Définition 2.1 (Produit scalaire). Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Un **produit scalaire** (ou **forme hermitienne définie positive**) sur H est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ vérifiant :

(i) **Linéarité à droite** : pour tous $x, y, z \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\langle x, \lambda y + z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle ;$$

(ii) **Symétrie hermitienne** : $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ pour tous $x, y \in H$;

(iii) **Positivité** : $\langle x, x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in H$;

(iv) **Définie** : $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.

L'espace $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un **espace préhilbertien**.

Remarque 2.2. Notre convention est la linéarité à droite et l'antilinearité à gauche (convention des physiciens). Dans le cas réel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), la symétrie hermitienne se réduit à $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ et le produit scalaire est bilinéaire. Certains auteurs (dont Brezis) adoptent la convention inverse (linéarité à gauche).

Théorème 2.3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien. Pour tous $x, y \in H$:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

L'égalité a lieu si et seulement si x et y sont linéairement dépendants.

Démonstration. Si $y = 0$, les deux membres valent 0 et le résultat est trivial. Supposons $y \neq 0$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$0 \leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle - \lambda \langle x, y \rangle - \bar{\lambda} \langle y, x \rangle + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle .$$

Choisissons $\lambda = \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle}$ (qui minimise l'expression). On obtient :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x, x \rangle - \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle x, y \rangle - \frac{\overline{\langle y, x \rangle}}{\langle y, y \rangle} \langle y, x \rangle + \frac{|\langle y, x \rangle|^2}{\langle y, y \rangle^2} \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} \\ &= \langle x, x \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle}. \end{aligned}$$

Donc $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$, d'où le résultat en prenant la racine carrée.

Cas d'égalité. L'égalité a lieu si et seulement si $\langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle = 0$, c'est-à-dire $x = \lambda y$. $\square$

Corollaire 2.4. L'application $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme sur H .

Démonstration. La séparation et l'homogénéité sont claires. Pour l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2 |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2 \|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

$\square$

Proposition 2.5 (Identité de polarisation). Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien. Le produit scalaire se retrouve à partir de la norme :

— Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) ;$$

— Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \|x + i^k y\|^2.$$

Démonstration. Cas réel : $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2$ et $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2$. La différence donne $4 \langle x, y \rangle$.

Cas complexe : on développe $\|x + i^k y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re}(i^k \langle x, y \rangle) + \|y\|^2$ et on somme pour $k = 0, 1, 2, 3$. Les termes $\|x\|^2 + \|y\|^2$ donnent $4(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Pour la partie croisée : $\sum_{k=0}^3 i^k \cdot 2 \operatorname{Re}(\overline{i^k} \langle x, y \rangle)$. En écrivant $\langle x, y \rangle = a + ib$, un calcul direct montre que la somme vaut $4(a + ib) = 4 \langle x, y \rangle$. $\square$

Proposition 2.6 (Identité du parallélogramme). *Dans un espace préhilbertien :*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Réciproquement, toute norme vérifiant cette identité provient d'un produit scalaire (via l'identité de polarisation).

Démonstration. Le sens direct résulte du développement :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle + 2\|y\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

La réciproque (théorème de Jordan-von Neumann) nécessite de vérifier que la forme définie par l'identité de polarisation est bien un produit scalaire, ce qui est technique mais classique. $\square$

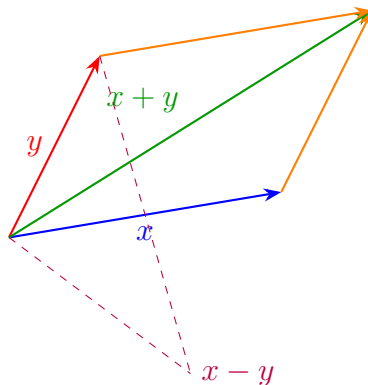


FIGURE 2.1 – Identité du parallélogramme : la somme des carrés des diagonales égale la somme des carrés des côtés.

2.2 Espaces de Hilbert : définition et exemples

Définition 2.7 (Espace de Hilbert). Un **espace de Hilbert** est un espace préhilbertien complet, c'est-à-dire un espace de Banach dont la norme provient d'un produit scalaire.

Exemple 2.8 (L'espace ℓ^2). L'espace ℓ^2 muni du produit scalaire

$$\langle x, y \rangle_{\ell^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} y_n$$

est un espace de Hilbert. La convergence de la série est assurée par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exemple 2.9 (L'espace $L^2(\Omega, \mu)$). Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. L'espace $L^2(\Omega, \mu)$ muni de

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{\Omega} \overline{f} g \, d\mu$$

est un espace de Hilbert (le théorème de Fischer-Riesz, cfthm :fischer-riesz).

Exemple 2.10 (L'espace $\mathbb{C}^n$). L'espace $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n \overline{x_k} y_k$ est un espace de Hilbert de dimension finie.

Exemple 2.11 (Aperçu des espaces de Sobolev). L'espace de Sobolev $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ est l'espace des fonctions $u \in L^2(\Omega)$ dont les dérivées partielles au sens des distributions appartiennent à $L^2(\Omega)$, muni du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \int_{\Omega} \overline{u} v \, dx + \int_{\Omega} \nabla \overline{u} \cdot \nabla v \, dx.$$

C'est un espace de Hilbert, fondamental pour l'étude variationnelle des EDP elliptiques.

Remarque 2.12. Pour $p \neq 2$, l'espace L^p n'est pas un espace de Hilbert : sa norme ne satisfait pas l'identité du parallélogramme. On peut le vérifier explicitement dans ℓ^p avec $x = e_1$ et $y = e_2$: $\|x + y\|_p^2 + \|x - y\|_p^2 = 2 \cdot 2^{2/p}$ tandis que $2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4$, et ces quantités ne sont égales que si $p = 2$.

Exemple 2.13 (L'espace L^2 des séries de Fourier). L'espace $L^2([0, 2\pi])$ est fondamental en analyse harmonique. Toute fonction $f \in L^2([0, 2\pi])$ admet un développement en série de Fourier :

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{int}, \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt,$$

où la convergence est en norme L^2 . L'identité de Parseval s'écrit :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

Exemple 2.14 (Espace de Hardy). L'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ est l'espace des fonctions holomorphes f sur le disque unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ telles que

$$\|f\|_{H^2}^2 = \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta < \infty.$$

C'est un espace de Hilbert, isomorphe à $\ell^2(\mathbb{N})$ via les coefficients de Taylor : si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, alors $\|f\|_{H^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$.

Définition 2.15 (Orthogonalité). Deux vecteurs $x, y \in H$ sont **orthogonaux**, noté $x \perp y$, si $\langle x, y \rangle = 0$. L'**orthogonal** d'une partie $A \subset H$ est

$$A^\perp = \{x \in H : \langle x, a \rangle = 0 \text{ pour tout } a \in A\}.$$

Proposition 2.16. Pour toute partie $A \subset H$, $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H .

Démonstration. La linéarité est claire. Pour la fermeture : si $(x_n) \subset A^\perp$ et $x_n \rightarrow x$, alors pour tout $a \in A$, $\langle x, a \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, a \rangle = 0$ par continuité du produit scalaire. $\square$

Proposition 2.17 (Théorème de Pythagore). Si $x_1, \dots, x_n$ sont deux à deux orthogonaux dans H :

$$\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2.$$

Démonstration. Par récurrence. Pour $n = 2$: $\|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x_1, x_2 \rangle + \|x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$ car $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$. $\square$

2.3 Projection sur un convexe fermé

Théorème 2.18 (Projection sur un convexe fermé). *Soit H un espace de Hilbert, $C \subset H$ un sous-ensemble convexe fermé non vide, et $x \in H$. Il existe un unique $p \in C$ tel que*

$$\|x - p\| = d(x, C) = \inf_{y \in C} \|x - y\|.$$

*Le point p est appelé la **projection** de x sur C , noté $p = P_C(x)$.*

Démonstration. Posons $d = d(x, C)$.

Existence. Soit $(y_n) \subset C$ une suite minimisante : $\|x - y_n\| \rightarrow d$. L'identité du parallélogramme appliquée à $x - y_m$ et $x - y_n$ donne :

$$\|(x - y_m) + (x - y_n)\|^2 + \|y_m - y_n\|^2 = 2\|x - y_m\|^2 + 2\|x - y_n\|^2.$$

Or $\frac{y_m + y_n}{2} \in C$ (par convexité), donc $\|x - \frac{y_m + y_n}{2}\| \geq d$, c'est-à-dire $\|(x - y_m) + (x - y_n)\| \geq 2d$. En fait, on a :

$$\begin{aligned} \|y_m - y_n\|^2 &= 2\|x - y_m\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 - \|2x - y_m - y_n\|^2 \\ &= 2\|x - y_m\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 - 4\|x - \frac{y_m + y_n}{2}\|^2 \leq 2\|x - y_m\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 - 4d^2. \end{aligned}$$

Comme $\|x - y_m\|^2 \rightarrow d^2$ et $\|x - y_n\|^2 \rightarrow d^2$, on obtient $\|y_m - y_n\|^2 \rightarrow 0$. Donc (y_n) est de Cauchy dans H (complet), et converge vers un $p \in C$ (C est fermé) avec $\|x - p\| = d$.

Unicité. Si $p_1, p_2 \in C$ réalisent le minimum, on applique le même argument du parallélogramme à $y_m = p_1$ et $y_n = p_2$:

$$\|p_1 - p_2\|^2 \leq 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0,$$

donc $p_1 = p_2$. $\square$

Proposition 2.19 (Caractérisation de la projection). *Avec les notations du théorème précédent, $p = P_C(x)$ si et seulement si :*

$$p \in C \quad \text{et} \quad \operatorname{Re} \langle x - p, y - p \rangle \leq 0 \quad \text{pour tout } y \in C.$$

Démonstration. ($\Rightarrow$) Soit $p = P_C(x)$ et $y \in C$. Pour $t \in [0, 1]$, $p + t(y - p) = (1 - t)p + ty \in C$, donc :

$$\|x - p\|^2 \leq \|x - p - t(y - p)\|^2 = \|x - p\|^2 - 2t \operatorname{Re} \langle x - p, y - p \rangle + t^2 \|y - p\|^2.$$

D'où $2t \operatorname{Re} \langle x - p, y - p \rangle \leq t^2 \|y - p\|^2$. En divisant par $t > 0$ et en faisant $t \rightarrow 0^+$: $\operatorname{Re} \langle x - p, y - p \rangle \leq 0$.

($\Leftarrow$) Si la condition est vérifiée, pour tout $y \in C$:

$$\|x - y\|^2 = \|(x - p) - (y - p)\|^2 = \|x - p\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle x - p, y - p \rangle + \|y - p\|^2 \geq \|x - p\|^2.$$

Donc p réalise le minimum. $\square$

Théorème 2.20 (Projection sur un sous-espace fermé). *Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H et $x \in H$. Alors $p = P_F(x)$ est l'unique élément de F tel que $x - p \perp F$, c'est-à-dire :*

$$p \in F \quad \text{et} \quad \langle x - p, f \rangle = 0 \quad \text{pour tout } f \in F.$$

De plus, $H = F \oplus F^\perp$ (somme directe orthogonale).

Démonstration. Caractérisation. La condition de la eprop : caract-projection pour un sous-espace F s'écrit : $\operatorname{Re} \langle x - p, y - p \rangle \leq 0$ pour tout $y \in F$. Comme F est un sous-espace, on peut remplacer y par $p + \lambda f$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in F$ quelconques. On obtient $\operatorname{Re}(\lambda \langle x - p, f \rangle) \leq 0$ pour tout λ , ce qui force $\langle x - p, f \rangle = 0$.

Décomposition. Pour tout $x \in H$, écrivons $x = P_F(x) + (x - P_F(x))$. Le premier terme est dans F et le second dans $F^\perp$. Si $x \in F \cap F^\perp$, alors $\langle x, x \rangle = 0$, donc $x = 0$. D'où $H = F \oplus F^\perp$. $\square$

Proposition 2.21 (Propriétés de la projection orthogonale). *Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H et $P = P_F$ la projection orthogonale sur F . Alors :*

- (i) P est linéaire et continue avec $\|P\| = 1$ (si $F \neq \{0\}$);
- (ii) $P^2 = P$ (idempotence);
- (iii) $\langle Px, y \rangle = \langle x, Py \rangle$ pour tous $x, y \in H$ (auto-adjoint);
- (iv) $\operatorname{Ker} P = F^\perp$ et $\operatorname{ran} P = F$.

Réciproquement, tout opérateur $P \in \mathcal{L}(H)$ vérifiant $P^2 = P$ et $P^ = P$ est la projection orthogonale sur $\operatorname{ran} P$.*

Démonstration. (i) La linéarité : pour $x, y \in H$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on vérifie que $\alpha Px + \beta Py \in F$ et que $(\alpha x + \beta y) - (\alpha Px + \beta Py) = \alpha(x - Px) + \beta(y - Py) \in F^\perp$. Par unicité de la décomposition, $P(\alpha x + \beta y) = \alpha Px + \beta Py$. La continuité : $\|Px\|^2 + \|x - Px\|^2 = \|x\|^2$ (Pythagore), donc $\|Px\| \leq \|x\|$.

(ii) Si $x \in F$, alors $Px = x$, donc $P(Px) = Px$.

(iii) $\langle Px, y \rangle = \langle Px, Py + (y - Py) \rangle = \langle Px, Py \rangle$ (car $Px \in F$ et $y - Py \in F^\perp$). De même $\langle x, Py \rangle = \langle Px, Py \rangle$.

(iv) Clair par construction. $\square$

Corollaire 2.22. *Pour tout sous-espace vectoriel F de H : $(F^\perp)^\perp = \overline{F}$.*

Démonstration. L'inclusion $\overline{F} \subset (F^\perp)^\perp$ est claire. Pour la réciproque, $G = \overline{F}$ est un sous-espace fermé et $H = G \oplus G^\perp$. Or $G^\perp = F^\perp$. Si $x \in (F^\perp)^\perp$, on écrit $x = g + h$ avec $g \in G$ et $h \in G^\perp = F^\perp$. Alors $\langle x, h \rangle = 0$ (car $x \in (F^\perp)^\perp$ et $h \in F^\perp$), et $\langle g, h \rangle = 0$ (car $h \in G^\perp$), donc $\|h\|^2 = \langle h, h \rangle = \langle x - g, h \rangle = 0$, d'où $h = 0$ et $x = g \in G$. $\square$

2.4 Théorème de représentation de Riesz

Théorème 2.23 (Représentation de Riesz). *Soit H un espace de Hilbert. Pour toute forme linéaire continue $\varphi \in H'$, il existe un unique $u \in H$ tel que*

$$\varphi(x) = \langle u, x \rangle \quad \text{pour tout } x \in H.$$

De plus, $\|\varphi\|_{H'} = \|u\|_H$. L'application $J : H' \rightarrow H$ définie par $J(\varphi) = u$ est un isomorphisme isométrique antilinéaire (linéaire dans le cas réel).

Démonstration. Unicité. Si $\langle u_1, x \rangle = \langle u_2, x \rangle$ pour tout x , alors $\langle u_1 - u_2, x \rangle = 0$ pour tout x . En prenant $x = u_1 - u_2$: $\|u_1 - u_2\|^2 = 0$, donc $u_1 = u_2$.

Existence. Si $\varphi = 0$, on prend $u = 0$. Sinon, $F = \text{Ker } \varphi$ est un sous-espace fermé (car φ est continue) et $F \neq H$. Par le efthm : proj-sous-espace, $F^\perp \neq \{0\}$, donc il existe $z \in F^\perp$ avec $z \neq 0$.

Pour tout $x \in H$, l'élément $w = \varphi(x)z - \varphi(z)x$ vérifie $\varphi(w) = \varphi(x)\varphi(z) - \varphi(z)\varphi(x) = 0$, donc $w \in F$. Puisque $z \perp F$:

$$0 = \langle z, w \rangle = \langle z, \varphi(x)z - \varphi(z)x \rangle = \varphi(x) \|z\|^2 - \varphi(z) \langle z, x \rangle.$$

D'où

$$\varphi(x) = \frac{\overline{\varphi(z)}}{\|z\|^2} \left\langle *, \frac{\varphi(z)}{\varphi(z)} \cdot z \right\rangle x \cdot \frac{\overline{\varphi(z)}}{\varphi(z)}.$$

Simplifions. On a $\varphi(x) = \frac{\varphi(z)}{\|z\|^2} \langle z, x \rangle$. Posons $u = \frac{\overline{\varphi(z)}}{\|z\|^2} z$. Alors :

$$\langle u, x \rangle = \frac{\varphi(z)}{\|z\|^2} \langle z, x \rangle = \varphi(x).$$

Isométrie. D'une part, $|\varphi(x)| = |\langle u, x \rangle| \leq \|u\| \|x\|$, donc $\|\varphi\| \leq \|u\|$. D'autre part, $\varphi(u/\|u\|) = \langle u, u/\|u\| \rangle = \|u\|$, donc $\|\varphi\| \geq \|u\|$. $\square$

Remarque 2.24. Le théorème de Riesz permet d'identifier H et H' via l'application antilinéaire $x \mapsto \langle x, \cdot \rangle$. On écrit souvent $H \simeq H'$, mais il faut être prudent avec cette identification dans le contexte des espaces de Sobolev et des triplets de Gelfand $V \hookrightarrow H \simeq H' \hookrightarrow V'$.

Le théorème de Riesz fournit un diagramme commutatif fondamental :

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow[\sim]{J} & H' \\ & \searrow \text{Id} & \downarrow \text{éval} \\ & & H^{**} \end{array}$$

FIGURE 2.2 – L'identification canonique $J : H \xrightarrow{\sim} H'$ et l'injection canonique dans le bidual. Tout espace de Hilbert est réflexif.

Corollaire 2.25 (Réflexivité des espaces de Hilbert). *Tout espace de Hilbert est réflexif, c'est-à-dire que l'injection canonique $J : H \rightarrow H''$ est surjective.*

Démonstration. L'application $J : H \rightarrow H''$ définie par $J(x)(\varphi) = \varphi(x)$ pour $\varphi \in H'$ est une isométrie (Hahn-Banach). Par Riesz appliqué deux fois, $H \simeq H' \simeq H''$, et on vérifie que la composition coïncide avec J . $\square$

Exemple 2.26 (Application du théorème de Riesz). Soit $H = L^2([0, 1])$ et $\varphi : H \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $\varphi(f) = \int_0^1 e^t f(t) dt$. Cette forme est linéaire continue car $|\varphi(f)| \leq \|e^t\|_{L^2} \|f\|_{L^2}$ par Cauchy-Schwarz. Par Riesz, $\varphi(f) = \langle u, f \rangle$ avec $u(t) = e^t$. On a $\|\varphi\| = \|u\|_{L^2} = \left(\int_0^1 e^{2t} dt \right)^{1/2} = \sqrt{(e^2 - 1)/2}$.

Corollaire 2.27 (Théorème de Lax-Milgram). *Soit H un espace de Hilbert et $a : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ une forme sesquilinéaire vérifiant :*

(i) **Continuité** : $|a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\|$ pour une constante $M > 0$;

(ii) **Coercivité** : $\operatorname{Re}(a(u, u)) \geq \alpha \|u\|^2$ pour une constante $\alpha > 0$.

Alors pour tout $\varphi \in H'$, il existe un unique $u \in H$ tel que $a(u, v) = \varphi(v)$ pour tout $v \in H$.

Démonstration. Par Riesz, $\varphi(v) = \langle f, v \rangle$ pour un unique $f \in H$. Pour u fixé, $v \mapsto a(u, v)$ est continue, donc par Riesz il existe un unique $Au \in H$ tel que $a(u, v) = \langle Au, v \rangle$. L'application $A : H \rightarrow H$ est linéaire avec $\|Au\| \leq M \|u\|$ (par (i)) et $\alpha \|u\|^2 \leq \operatorname{Re} \langle Au, u \rangle \leq \|Au\| \|u\|$, d'où $\|Au\| \geq \alpha \|u\|$ (par (ii)).

Ainsi A est injectif et $\operatorname{ran}(A)$ est fermé (car si $Au_n \rightarrow y$, alors (u_n) est de Cauchy par $\|u_n - u_m\| \leq \alpha^{-1} \|Au_n - Au_m\|$). De plus, $\operatorname{ran}(A)^\perp = \{0\}$: si $\langle Au, w \rangle = 0$ pour tout u , en prenant $u = w$ on obtient $\alpha \|w\|^2 \leq \operatorname{Re} \langle Aw, w \rangle = 0$, donc $w = 0$. Par le efcor : biorthogonal, $\operatorname{ran}(A) = H$. Donc A est bijectif et $u = A^{-1}f$ est l'unique solution. $\square$

2.5 Bases hilbertiennes

Définition 2.28 (Système orthonormal). Une famille $(e_i)_{i \in I}$ dans H est un **système orthonormal** (ou **famille orthonormale**) si :

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Définition 2.29 (Base hilbertienne). Un système orthonormal $(e_i)_{i \in I}$ est une **base hilbertienne** (ou **base orthonormale complète**) de H si $\overline{\operatorname{span}\{e_i : i \in I\}} = H$, c'est-à-dire si l'adhérence de l'espace engendré par les e_i est H tout entier.

Proposition 2.30 (Coefficients de Fourier). *Soit $(e_i)_{i \in I}$ un système orthonormal dans H et $x \in H$. Les **coefficients de Fourier** de x sont $\hat{x}_i = \langle e_i, x \rangle$ pour $i \in I$. Pour tout sous-ensemble fini $J \subset I$, la*

meilleure approximation de x dans $\text{span}\{e_j : j \in J\}$ est :

$$P_J(x) = \sum_{j \in J} \hat{x}_j e_j,$$

$$\text{et } \|x - P_J(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j \in J} |\hat{x}_j|^2.$$

Démonstration. Pour $y = \sum_{j \in J} \alpha_j e_j$:

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \|x\|^2 - \sum_{j \in J} \overline{\alpha_j} \langle e_j, x \rangle - \sum_{j \in J} \alpha_j \langle x, e_j \rangle + \sum_{j \in J} |\alpha_j|^2 \\ &= \|x\|^2 - \sum_{j \in J} |\hat{x}_j|^2 + \sum_{j \in J} |\alpha_j - \hat{x}_j|^2. \end{aligned}$$

Ce minimum est atteint pour $\alpha_j = \hat{x}_j$, et vaut $\|x\|^2 - \sum_{j \in J} |\hat{x}_j|^2$. $\square$

Théorème 2.31 (Inégalité de Bessel). *Soit $(e_i)_{i \in I}$ un système orthonormal dans H . Pour tout $x \in H$:*

$$\sum_{i \in I} |\langle e_i, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

En particulier, l'ensemble $\{i \in I : \langle e_i, x \rangle \neq 0\}$ est au plus dénombrable.

Démonstration. Pour tout sous-ensemble fini $J \subset I$, la efp :coeff-fourier donne $\sum_{j \in J} |\langle e_j, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2$. En prenant le supremum sur tous les J finis, on obtient $\sum_{i \in I} |\langle e_i, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

Pour la dénombrabilité : pour $n \geq 1$, l'ensemble $I_n = \{i \in I : |\langle e_i, x \rangle| > 1/n\}$ est fini (car $\sum_{i \in I_n} 1/n^2 \leq \|x\|^2$, donc $|I_n| \leq n^2 \|x\|^2$). L'ensemble $\{i : \langle e_i, x \rangle \neq 0\} = \bigcup_{n \geq 1} I_n$ est dénombrable. $\square$

Théorème 2.32 (Théorème de Parseval). *Soit $(e_n)_{n \geq 1}$ une base hilbertienne dénombrable de H . Pour tout $x \in H$:*

- (i) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, x \rangle e_n$ (convergence dans H);
- (ii) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, x \rangle|^2$ (**identité de Parseval**).

Démonstration. (i) Soit $S_N = \sum_{n=1}^N \langle e_n, x \rangle e_n = P_N(x)$ la projection sur $\text{span}\{e_1, \dots, e_N\}$. Par Bessel, la série $\sum |\langle e_n, x \rangle|^2$ converge, donc pour $N >$

M :

$$\|S_N - S_M\|^2 = \sum_{n=M+1}^N |\langle e_n, x \rangle|^2 \rightarrow 0.$$

Donc (S_N) est de Cauchy dans H (complet), et converge vers un $y \in H$. Pour tout m : $\langle e_m, y \rangle = \lim_N \langle e_m, S_N \rangle = \langle e_m, x \rangle$. Donc $\langle e_m, x - y \rangle = 0$ pour tout m , et $x - y \in \{e_n\}^\perp$. Comme (e_n) est une base, $\{e_n\}^\perp = \{0\}$, donc $x = y$.

(ii) Par la eprop :coeff-fourier, $\|x - S_N\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^N |\langle e_n, x \rangle|^2$. Comme $S_N \rightarrow x$, on fait $N \rightarrow \infty$. $\square$

Remarque 2.33. Le théorème de Parseval se généralise aux systèmes orthonormaux indexés par un ensemble I quelconque (non nécessairement dénombrable). Pour $x \in H$, on a $x = \sum_{i \in I} \langle e_i, x \rangle e_i$ où la somme est définie comme limite des sommes partielles finies (elle n'a qu'un nombre dénombrable de termes non nuls, par l'inégalité de Bessel). L'identité de Parseval reste valable : $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle e_i, x \rangle|^2$.

Corollaire 2.34 (Isomorphisme avec ℓ^2). *Si H admet une base hilbertienne dénombrable $(e_n)_{n \geq 1}$, alors l'application $U : H \rightarrow \ell^2$ définie par $U(x) = (\langle e_n, x \rangle)_{n \geq 1}$ est un isomorphisme isométrique. En particulier, tous les espaces de Hilbert séparables de dimension infinie sont isomorphes.*

Démonstration. U est linéaire (antilinéarité de la première variable, mais ici on prend les coefficients). Par Parseval, $\|U(x)\|_{\ell^2} = \|x\|_H$: c'est une isométrie, donc injective. Surjectivité : pour $(\alpha_n) \in \ell^2$, posons $x = \sum_n \alpha_n e_n$ (converge car $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$). Alors $U(x) = (\alpha_n)$. $\square$

2.6 Critères de complétude d'un système orthonormal

Théorème 2.35 (Critères de complétude). *Soit $(e_i)_{i \in I}$ un système orthonormal dans un espace de Hilbert H . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $(e_i)_{i \in I}$ est une base hilbertienne (c'est-à-dire $\overline{\text{span}\{e_i\}} = H$) ;
- (ii) $\{e_i\}^\perp = \{0\}$ (le système est **total**) ;
- (iii) Pour tout $x \in H$: $x = \sum_{i \in I} \langle e_i, x \rangle e_i$;

- (iv) Pour tout $x \in H : \|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle e_i, x \rangle|^2$ (Parseval) ;
 (v) Pour tous $x, y \in H : \langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \overline{\langle e_i, x \rangle} \langle e_i, y \rangle$ (Parseval généralisée).

Démonstration. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) : $\overline{\text{span}\{e_i\}} = H$ si et seulement si $(\text{span}\{e_i\})^\perp = \{0\}$ par le lemme : biorthogonal, et $(\text{span}\{e_i\})^\perp = \{e_i\}^\perp$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : C'est la preuve du lemme : parseval(i).

(iii) $\Rightarrow$ (iv) : On prend la norme des deux côtés et on utilise Pythagore.

(iv) $\Rightarrow$ (v) : Par l'identité de polarisation appliquée dans ℓ^2 via l'application $x \mapsto (\langle e_i, x \rangle)_{i \in I}$.

(v) $\Rightarrow$ (ii) : Si $\langle e_i, x \rangle = 0$ pour tout i , alors par (v) avec $y = x : \|x\|^2 = 0$, donc $x = 0$. $\square$

2.7 Espaces séparables et bases dénombrables

Définition 2.36 (Espace séparable). Un espace topologique est **séparable** s'il contient un sous-ensemble dénombrable dense.

Théorème 2.37. *Un espace de Hilbert H est séparable si et seulement s'il admet une base hilbertienne dénombrable.*

Démonstration. ($\Leftarrow$) Si $(e_n)_{n \geq 1}$ est une base hilbertienne, alors $D = \{\sum_{n=1}^N q_n e_n : N \in \mathbb{N}, q_n \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}\}$ est dénombrable et dense dans H .

($\Rightarrow$) Soit $\{d_n\}$ un sous-ensemble dénombrable dense. Par le procédé de Gram-Schmidt, on peut en extraire un système orthonormal (e_n) . Montrons qu'il est total. Si $x \perp e_n$ pour tout n , alors $x \perp \text{span}\{d_n\}$ (car chaque e_n est combinaison linéaire des d_k , et réciproquement chaque d_k est combinaison linéaire des e_n). Mais $\text{span}\{d_n\}$ est dense dans H , donc $x = 0$. $\square$

Exemple 2.38 (Base de Fourier de $L^2([0, 2\pi])$). Le système $\left(\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}\right)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2([0, 2\pi])$. L'orthonormalité se vérifie par calcul direct :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-imt} e^{int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} dt = \delta_{mn}.$$

La totalité résulte du théorème de Weierstrass trigonométrique.

Exemple 2.39 (Polynômes de Hermite). Dans $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2} dx)$, les polynômes de Hermite (convenablement normalisés) forment une base hilbertienne. Ceci est lié à l'oscillateur harmonique quantique.

Proposition 2.40 (Procédé de Gram-Schmidt). Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une famille libre dans un espace préhilbertien H . Il existe un unique système orthonormal $(e_n)_{n \geq 1}$ tel que pour tout $N \geq 1$:

$$\text{span}\{e_1, \dots, e_N\} = \text{span}\{x_1, \dots, x_N\}$$

et $\langle e_n, x_n \rangle > 0$ pour tout n . On le construit par la récurrence :

$$\tilde{e}_1 = x_1, \quad \tilde{e}_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle e_k, x_n \rangle e_k, \quad e_n = \frac{\tilde{e}_n}{\|\tilde{e}_n\|}.$$

Démonstration. Par récurrence. L'initialisation $e_1 = x_1 / \|x_1\|$ est claire. Si $e_1, \dots, e_{n-1}$ sont construits, l'élément $\tilde{e}_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle e_k, x_n \rangle e_k$ est la composante de x_n orthogonale à $\text{span}\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$. Comme $x_n \notin \text{span}\{x_1, \dots, x_{n-1}\} = \text{span}\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ (famille libre), on a $\tilde{e}_n \neq 0$. L'orthonormalité se vérifie : pour $k < n$, $\langle e_k, \tilde{e}_n \rangle = \langle e_k, x_n \rangle - \langle e_k, x_n \rangle = 0$. $\square$

Exemple 2.41 (Polynômes de Legendre). En appliquant Gram-Schmidt à $(1, t, t^2, \dots)$ dans $L^2([-1, 1])$, on obtient les polynômes de Legendre (à normalisation près). Les premiers sont :

$$P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = t, \quad P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1), \quad P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t).$$

Ils satisfont l'orthogonalité $\int_{-1}^1 P_m(t) P_n(t) dt = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}$ et forment une base hilbertienne de $L^2([-1, 1])$.

2.8 Théorème de Fischer-Riesz

Théorème 2.42 (Fischer-Riesz). Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. L'espace $L^2(\Omega, \mu)$ est un espace de Hilbert.

Démonstration. Le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} \overline{f} g \, d\mu$ est bien défini sur L^2 (par l'inégalité de Cauchy-Schwarz intégrale). Il reste à montrer la complétude.

Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^2 . Par le lemme :abs-cv-complétude, il suffit de montrer que toute série absolument convergente converge. Soit $\sum g_k$ avec $\sum \|g_k\|_{L^2} < \infty$.

Étape 1. Posons $G_N = \sum_{k=1}^N |g_k|$ et $G = \sum_{k=1}^{\infty} |g_k|$ (limite ponctuelle, éventuellement $+\infty$). Par l'inégalité de Minkowski :

$$\|G_N\|_{L^2} \leq \sum_{k=1}^N \|g_k\|_{L^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{L^2} = M < \infty.$$

Par le théorème de convergence monotone :

$$\int_{\Omega} G^2 \, d\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} G_N^2 \, d\mu \leq M^2.$$

Donc $G \in L^2$, et en particulier $G(x) < \infty$ pour μ -presque tout x .

Étape 2. Pour μ -presque tout x , la série $\sum g_k(x)$ est absolument convergente (car $\sum |g_k(x)| = G(x) < \infty$). Posons $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ (définie p.p.).

Étape 3. On a $\left| \sum_{k=1}^N g_k(x) \right| \leq G(x)$ avec $G \in L^2$. Par le théorème de convergence dominée :

$$\| \sum_{k=1}^N g_k - f \|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} \left| \sum_{k=1}^N g_k - f \right|^2 \, d\mu \rightarrow 0.$$

Donc $\sum g_k$ converge vers f dans L^2 . □

Remarque 2.43. Le théorème de Fischer-Riesz se généralise : pour $1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega, \mu)$ est un espace de Banach. La preuve suit la même stratégie, mais en utilisant la convergence monotone pour le cas $p = 1$ et l'inégalité de Minkowski pour le cas général. Nous renvoyons au cours de théorie de la mesure pour les détails.

Proposition 2.44 (Densité dans L^2). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Les espaces suivants sont denses dans $L^2(\Omega)$:*

- (i) *L'espace $C_c(\Omega)$ des fonctions continues à support compact ;*
- (ii) *L'espace $C_c^{\infty}(\Omega)$ des fonctions lisses à support compact ;*
- (iii) *L'espace des fonctions en escalier (si Ω est un intervalle borné).*

Esquisse. (i) Par approximation : pour $f \in L^2$, on approche d'abord f par des fonctions bornées à support compact (troncature), puis par des fonctions continues (régularisation ou théorème de Lusin).

(ii) Par convolution avec un noyau régularisant ρ_ε .

(iii) Par approximation des fonctions continues par des fonctions en escalier. $\square$

2.9 Somme directe hilbertienne

Définition 2.45 (Somme directe hilbertienne). Soit $(H_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces de Hilbert. La **somme directe hilbertienne** est :

$$\bigoplus_{i \in I} H_i = \left\{ (x_i)_{i \in I} : x_i \in H_i, \sum_{i \in I} \|x_i\|_{H_i}^2 < \infty \right\},$$

munie du produit scalaire $\langle (x_i), (y_i) \rangle = \sum_{i \in I} \langle x_i, y_i \rangle_{H_i}$.

Proposition 2.46. La somme directe hilbertienne $\bigoplus_{i \in I} H_i$ est un espace de Hilbert.

Démonstration. Le produit scalaire est bien défini par l'inégalité de Cauchy-Schwarz (la série converge absolument). La complétude se démontre comme pour ℓ^2 : une suite de Cauchy converge coordonnée par coordonnée, et la limite est dans l'espace. $\square$

Exemple 2.47 (Somme directe de copies de $\mathbb{C}$). La somme directe $\bigoplus_{n \geq 1} \mathbb{C}$ (chaque $H_n = \mathbb{C}$ muni du produit scalaire usuel) est isomorphe à ℓ^2 . Plus généralement, si $H_n = \mathbb{C}^{d_n}$, alors $\bigoplus_{n \geq 1} H_n = \{(x_n) : x_n \in \mathbb{C}^{d_n}, \sum_n \|x_n\|^2 < \infty\}$.

Théorème 2.48 (Décomposition en somme directe). Soit H un espace de Hilbert et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces fermés mutuellement orthogonaux ($F_i \perp F_j$ pour $i \neq j$) tels que $\overline{\bigoplus_{\text{alg}} F_i} = H$. Alors H est isomorphe (isométriquement) à la somme directe hilbertienne $\bigoplus_{i \in I} F_i$.

Démonstration. L'application $U : \bigoplus_{i \in I} F_i \rightarrow H$ définie par $U((x_i)) = \sum_{i \in I} x_i$ (la somme converge car $\sum \|x_i\|^2 < \infty$ et les termes sont orthogonaux) est

une isométrie par le théorème de Pythagore. Son image contient $\bigoplus_{\text{alg}} F_i$ qui est dense dans H , et l'image d'une isométrie depuis un espace complet est fermée. Donc U est surjective. $\square$

2.10 Opérateurs dans les espaces de Hilbert : introduction

La théorie des opérateurs dans les espaces de Hilbert est considérablement plus riche que dans les espaces de Banach généraux, grâce à l'existence du produit scalaire. En particulier, la notion d'adjoint joue un rôle central et permet de classer les opérateurs en familles aux propriétés remarquables : opérateurs auto-adjoints, normaux, unitaires et positifs.

Définition 2.49 (Opérateur adjoint). Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur borné sur un espace de Hilbert H . L'**opérateur adjoint** de T est l'unique opérateur $T^* \in \mathcal{L}(H)$ tel que

$$\langle T^*x, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \quad \text{pour tous } x, y \in H.$$

Justification de l'existence. Pour x fixé, l'application $y \mapsto \langle x, Ty \rangle$ est une forme linéaire continue sur H (de norme $\leq \|x\| \|T\|$). Par le théorème de Riesz (cf thm :riesz-representation), il existe un unique $z \in H$ tel que $\langle x, Ty \rangle = \langle z, y \rangle$ pour tout y . On pose $T^*x = z$. La linéarité de T^* résulte de l'unicité dans le théorème de Riesz. $\square$

Proposition 2.50 (Propriétés de l'adjoint). Soient $S, T \in \mathcal{L}(H)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

- (i) $(T^*)^* = T$;
- (ii) $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$;
- (iii) $(S + T)^* = S^* + T^*$;
- (iv) $(ST)^* = T^* S^*$;
- (v) $\|T^*\| = \|T\|$;
- (vi) $\|T^* T\| = \|T\|^2$.

Démonstration. Les points (i)–(iv) se vérifient directement à partir de la définition.

(v) On a $\|T^*x\|^2 = \langle T^*x, T^*x \rangle = \langle x, TT^*x \rangle \leq \|x\| \|TT^*x\| \leq \|x\| \|T\| \|T^*x\|$, d'où $\|T^*x\| \leq \|T\| \|x\|$ et $\|T^*\| \leq \|T\|$. Par symétrie (en appliquant le même argument à T^* et en utilisant (i)), $\|T\| = \|(T^*)^*\| \leq \|T^*\|$.

(vi) On a $\|T^*T\| \leq \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2$. D'autre part, $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle x, T^*Tx \rangle \leq \|x\| \|T^*Tx\| \leq \|x\| \|T^*T\| \|x\|$. Donc $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$. $\square$

Exemple 2.51 (Adjoint d'un opérateur de multiplication). Soit $\varphi \in L^\infty(\Omega, \mu)$ et $M_\varphi : L^2 \rightarrow L^2$ l'opérateur de multiplication défini par $(M_\varphi f)(x) = \varphi(x)f(x)$. Alors $M_\varphi \in \mathcal{L}(L^2)$ avec $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_{L^\infty}$, et $M_\varphi^* = M_{\bar{\varphi}}$. En effet :

$$\langle M_\varphi^* f, g \rangle = \langle f, M_\varphi g \rangle = \int \bar{f} \varphi g \, d\mu = \int \overline{\bar{\varphi} f} g \, d\mu = \langle M_{\bar{\varphi}} f, g \rangle.$$

L'opérateur M_φ est auto-adjoint si et seulement si φ est à valeurs réelles (p.p.), et unitaire si et seulement si $|\varphi| = 1$ p.p.

Exemple 2.52 (Opérateur intégral). Soit $K \in L^2([0, 1]^2)$ un noyau intégral. L'opérateur $T : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$ défini par

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x, t) f(t) \, dt$$

est borné avec $\|T\| \leq \|K\|_{L^2([0, 1]^2)}$ (opérateur de Hilbert-Schmidt). Son adjoint est $T^*g(x) = \int_0^1 \bar{K}(t, x) g(t) \, dt$.

Définition 2.53 (Opérateurs spéciaux). Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est dit :

- (i) **auto-adjoint** (ou hermitien) si $T^* = T$;
- (ii) **normal** si $T^*T = TT^*$;
- (iii) **unitaire** si $T^*T = TT^* = \text{Id}$;
- (iv) **positif** si $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in H$ (on écrit $T \geq 0$).

Proposition 2.54. Si $T \in \mathcal{L}(H)$ est auto-adjoint, alors $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in H$. De plus :

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle|.$$

Démonstration. $\overline{\langle Tx, x \rangle} = \langle x, Tx \rangle = \langle T^*x, x \rangle = \langle Tx, x \rangle$, donc $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$.

Posons $M = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle|$. Clairement $M \leq \|T\|$ (par Cauchy-Schwarz). Pour l'autre sens, on utilise l'identité de polarisation : pour x, y de norme 1,

$$4 \operatorname{Re} \langle Tx, y \rangle = \langle T(x+y), x+y \rangle - \langle T(x-y), x-y \rangle.$$

D'où $4 |\operatorname{Re} \langle Tx, y \rangle| \leq M(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = 2M(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4M$, et en optimisant sur le choix de phase de y : $|\langle Tx, y \rangle| \leq M$. En prenant $y = Tx / \|Tx\|$: $\|Tx\| \leq M$, donc $\|T\| \leq M$. $\square$

Remarque 2.55. Pour $T \in \mathcal{L}(H)$, on a les relations fondamentales :

$$\operatorname{Ker}(T^*) = (\operatorname{ran} T)^\perp, \quad \overline{\operatorname{ran}(T)} = (\operatorname{Ker} T^*)^\perp.$$

Ces relations sont immédiates : $x \in \operatorname{Ker}(T^*)$ ssi $T^*x = 0$ ssi $\langle T^*x, y \rangle = 0$ pour tout y ssi $\langle x, Ty \rangle = 0$ pour tout y ssi $x \perp \operatorname{ran} T$.

Le diagramme suivant résume les relations entre noyaux et images :

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{T} & H \\ \uparrow & & \uparrow \\ \operatorname{Ker} T & \perp & \overline{\operatorname{ran} T^*} \\ \parallel & & \parallel \\ (\operatorname{ran} T^*)^\perp & \oplus & \overline{\operatorname{ran} T^*} \end{array}$$

FIGURE 2.3 – Décomposition $H = \operatorname{Ker} T \oplus \overline{\operatorname{ran} T^*}$ pour un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$.

Proposition 2.56 (Spectre d'un opérateur auto-adjoint). *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Alors :*

- (i) *Toute valeur propre de T est réelle ;*
- (ii) *Les espaces propres correspondant à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux ;*
- (iii) $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle|$.

Démonstration. (i) Si $Tx = \lambda x$ avec $x \neq 0$: $\lambda \|x\|^2 = \langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$ (car $T = T^*$), donc $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) Si $Tx = \lambda x$ et $Ty = \mu y$ avec $\lambda \neq \mu$: $\lambda \langle x, y \rangle = \langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle = \mu \langle x, y \rangle$, donc $(\lambda - \mu) \langle x, y \rangle = 0$ et $\langle x, y \rangle = 0$.

(iii) C'est la efp : auto-adjoint-reel. $\square$

Remarque 2.57 (Vers la théorie spectrale). La théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints (ou normaux) dans les espaces de Hilbert est l'un des sujets majeurs de l'analyse fonctionnelle. Le théorème spectral affirme que tout opérateur auto-adjoint borné admet une représentation intégrale $T = \int_{\sigma(T)} \lambda dE(\lambda)$ où E est une mesure spectrale. Cette théorie sera développée dans un chapitre ultérieur.

2.11 Exercices

Exercice 2.1 (★). Montrer que $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt$ définit un produit scalaire sur $C([0, 1], \mathbb{C})$.

Exercice 2.2 (★). Montrer que la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $C([0, 1])$ ne provient pas d'un produit scalaire. *Indication : vérifier que l'identité du parallélogramme échoue.*

Exercice 2.3 (★). Soit $H = L^2([0, 1])$ et $F = \{f \in L^2 : \int_0^1 f(t) dt = 0\}$. Déterminer $F^\perp$.

Exercice 2.4 (★★). Dans $H = L^2([0, 1])$, soit $F = \text{span}\{1, t\}$. Calculer la projection orthogonale de $f(t) = t^2$ sur F .

Exercice 2.5 (★★). Soit H un espace de Hilbert et $x, y \in H$ avec $\|x\| = \|y\| = 1$. Montrer que $|\langle x, y \rangle| = 1$ si et seulement si $x = \lambda y$ pour un $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $|\lambda| = 1$.

Exercice 2.6 (★★). Montrer que la projection P_C sur un convexe fermé C d'un espace de Hilbert est une contraction : $\|P_C(x) - P_C(y)\| \leq \|x - y\|$.

Exercice 2.7 (★★). Appliquer le procédé de Gram-Schmidt aux polynômes $1, t, t^2, t^3$ dans $L^2([-1, 1])$ pour retrouver les premiers polynômes de Legendre (à normalisation près).

Exercice 2.8 (★★). Montrer que l'inégalité de Bessel peut être stricte si le système orthonormal n'est pas complet. Donner un exemple.

Exercice 2.9 (★★). Soit $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ défini par $T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$ (décalage à droite). Calculer T^* et vérifier que $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

Exercice 2.10 (***). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. En utilisant le théorème de Lax-Milgram, montrer l'existence et l'unicité de la solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ de $-\Delta u + u = f$ pour $f \in L^2(\Omega)$.

Exercice 2.11 (***). Montrer que $\ell^2(I)$ pour un ensemble I non dénombrable est un espace de Hilbert non séparable. *Indication : montrer que la base canonique $(e_i)_{i \in I}$ est un système orthonormal tel que $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$ pour $i \neq j$.*

Exercice 2.12 (***). Soit $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ défini par $T(x_n) = (x_n/n)$. Montrer que T est auto-adjoint, positif, injectif, et que T est compact (c'est-à-dire que $T(B_{\ell^2})$ est relativement compact).

Exercice 2.13 (★). Soit $(e_n)_{n \geq 1}$ un système orthonormal dans un espace de Hilbert H et $(\alpha_n) \in \ell^2$. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ converge dans H et que $\|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2$.

Exercice 2.14 (★★). Soit $H = L^2([0, 1])$ et $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = \int_0^1 t f(t) dt$. Identifier le représentant de Riesz de φ et calculer $\|\varphi\|$.

Exercice 2.15 (★★). Soit $F = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ un sous-espace de dimension finie d'un espace de Hilbert H , où $(e_1, \dots, e_n)$ est un système orthonormal. Montrer que la projection orthogonale sur F est donnée par :

$$P_F(x) = \sum_{k=1}^n \langle e_k, x \rangle e_k.$$

Montrer que si $(f_1, \dots, f_n)$ est une base quelconque (non nécessairement orthonormale) de F , la projection s'exprime via la matrice de Gram $G = (\langle f_i, f_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$:

$$P_F(x) = \sum_{i,j=1}^n (G^{-1})_{ij} \langle f_i, x \rangle f_j.$$

Exercice 2.16 (★★★). Soit H un espace de Hilbert de fonctions sur un ensemble X tel que pour tout $x \in X$, l'évaluation $\delta_x : f \mapsto f(x)$ est une forme linéaire continue sur H . Par le théorème de Riesz, il existe $K_x \in H$ tel que $f(x) = \langle K_x, f \rangle$ pour tout $f \in H$.

- (a) Montrer que $K(x, y) = \langle K_x, K_y \rangle = K_y(x)$ est un noyau défini positif.
- (b) Montrer que K a la *propriété de reproduction* : $\langle K(\cdot, y), f \rangle = f(y)$.
- (c) Vérifier que l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert à noyau reproduisant avec $K(z, w) = \frac{1}{1-\bar{w}z}$ (noyau de Szegő).

Exercice 2.17 (★★). Soit $H = L^2([0, 2\pi])$. Posons $H_n = \text{span}\{e^{int}\}$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

- (a) Montrer que $H_n \perp H_m$ pour $n \neq m$.
- (b) Montrer que $H = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H_n$ (somme directe hilbertienne).
- (c) En déduire une preuve du théorème de Parseval pour les séries de Fourier.

Exercice 2.18 (★★). Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. On dit que T est **borné inférieurement** s'il existe $c > 0$ tel que $\|Tx\| \geq c\|x\|$ pour tout $x \in H$.

- (a) Montrer que si T est borné inférieurement, alors T est injectif et

$\text{ran } T$ est fermé.

- (b) Montrer que si T est auto-adjoint et borné inférieurement, alors T est bijectif.
- (c) Donner un exemple d'opérateur borné inférieurement non surjectif.

Exercice 2.19 (***). Soit C un convexe fermé non vide dans un espace de Hilbert H et $P_C : H \rightarrow C$ la projection sur C .

- (a) Montrer que P_C est une contraction : $\|P_C(x) - P_C(y)\| \leq \|x - y\|$ pour tous $x, y \in H$.
- (b) Montrer que P_C est un opérateur monotone : $\text{Re} \langle P_C(x) - P_C(y), x - y \rangle \geq 0$.
- (c) En déduire que P_C est *fermement non expansif* :

$$\|P_C(x) - P_C(y)\|^2 \leq \text{Re} \langle P_C(x) - P_C(y), x - y \rangle.$$

Exercice 2.20 (*). Montrer que le produit scalaire est une application continue de $H \times H$ dans $\mathbb{K}$. Plus précisément, si $x_n \rightarrow x$ et $y_n \rightarrow y$ dans H , alors $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$.

Exercice 2.21 (**). Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert H . Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) F est dense dans H ;
- (ii) $F^\perp = \{0\}$;
- (iii) Pour tout $x \in H$, si $\langle x, f \rangle = 0$ pour tout $f \in F$, alors $x = 0$.

Exercice 2.22 (**). Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ vue comme opérateur sur $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ (produit scalaire canonique). Montrer que la matrice de A^* dans la base canonique est $\overline{A}^T$ (transposée conjuguée). En déduire qu'un opérateur sur $\mathbb{C}^n$ est auto-adjoint si et seulement si sa matrice est hermitienne.

Exercice 2.23 (**). Soit $U \in \mathcal{L}(H)$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) U est unitaire ($U^*U = UU^* = \text{Id}$);
- (ii) U est surjectif et isométrique ($\|Ux\| = \|x\|$ pour tout x);
- (iii) U préserve le produit scalaire : $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$ pour tous x, y .

Exercice 2.24 ($\star \star \star$). En utilisant la base de Fourier de $L^2([0, 2\pi])$ et l'identité de Parseval, calculer les sommes suivantes :

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (en développant $f(t) = t$ sur $[0, 2\pi]$);
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ (en développant $f(t) = t^2$ sur $[0, 2\pi]$).

Indication pour (a) : les coefficients de Fourier de $f(t) = t$ sur $[0, 2\pi]$ sont $c_0 = \pi$ et $c_n = \frac{i}{n}$ pour $n \neq 0$ (à un facteur 2π près selon la convention). Appliquer Parseval et identifier.

Exercice 2.25 ($\star \star \star$). Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact auto-adjoint sur un espace de Hilbert H et $\lambda \neq 0$. Montrer que :

- (a) $\text{Ker}(T - \lambda \text{Id})$ est de dimension finie;
- (b) $\text{ran}(T - \lambda \text{Id})$ est fermé;
- (c) $\text{ran}(T - \lambda \text{Id}) = \text{Ker}(T - \lambda \text{Id})^\perp$;
- (d) En déduire l'**alternative de Fredholm** : soit $T - \lambda \text{Id}$ est bijectif, soit λ est valeur propre de T .

Cet exercice anticipe le chapitre sur la théorie spectrale des opérateurs compacts.

Chapitre 3

Opérateurs Linéaires Bornés

Contents

3.1	L'espace $\mathcal{L}(E, F)$	53
3.2	Opérateurs compacts	55
3.3	Série de Neumann et inversibilité	57
3.4	Spectre et résolvante	58
3.5	Adjoint sur les espaces de Hilbert	60
3.6	Opérateurs normaux, auto-adjoints et unitaires	62
3.7	Exercices	64

L'étude des *opérateurs linéaires continus* entre espaces de Banach constitue le cœur de l'analyse fonctionnelle. Ce chapitre développe la théorie de l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ des opérateurs bornés, introduit les opérateurs compacts, puis aborde la théorie spectrale élémentaire. Dans le cadre hilbertien, nous étudions l'opérateur adjoint et les classes d'opérateurs normaux, auto-adjoints et unitaires.

Dans tout ce chapitre, E , F et G désignent des espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), sauf mention contraire. Lorsque nous abordons la théorie spectrale, nous travaillons sur $\mathbb{C}$.

3.1 L'espace $\mathcal{L}(E, F)$

Définition 3.1 (Opérateur linéaire borné). Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Une application linéaire $T : E \rightarrow F$ est dite **bornée**

s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\|Tx\|_F \leq C \|x\|_E \quad \text{pour tout } x \in E.$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble de toutes les applications linéaires bornées de E dans F , et $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$.

Proposition 3.2 (Continuité et bornitude). *Soit $T : E \rightarrow F$ une application linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) T est continue sur E ;
- (ii) T est continue en 0 ;
- (iii) T est bornée ;
- (iv) T est lipschitzienne.

Démonstration. (iv) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (ii) est immédiat.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Supposons T continue en 0. Pour $\varepsilon = 1$, il existe $\delta > 0$ tel que $\|x\|_E \leq \delta \Rightarrow \|Tx\|_F \leq 1$. Pour $x \neq 0$, posons $y = \delta x / \|x\|_E$. Alors $\|y\|_E = \delta$, donc $\|Ty\|_F \leq 1$, c'est-à-dire $\|Tx\|_F \leq \|x\|_E / \delta$. On prend $C = 1/\delta$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) : Si $\|Tx\|_F \leq C \|x\|_E$ pour tout x , alors par linéarité $\|Tx - Ty\|_F = \|T(x - y)\|_F \leq C \|x - y\|_E$. $\square$

Définition 3.3 (Norme d'opérateur). Pour $T \in \mathcal{L}(E, F)$, on définit la **norme d'opérateur** par

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E, F)} := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|Tx\|_F.$$

Théorème 3.4 ($\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach). *Si F est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E, F)$ muni de la norme d'opérateur est un espace de Banach.*

Démonstration. Soit (T_n) une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E, F)$. Pour tout $x \in E$,

$$\|T_n x - T_m x\|_F \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\|_E \rightarrow 0 \quad \text{quand } n, m \rightarrow \infty.$$

Donc $(T_n x)$ est de Cauchy dans F , qui est complet. On pose $Tx := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$. Par passage à la limite, T est linéaire.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$ pour $n, m \geq N$. Pour $\|x\|_E \leq 1$ et $n, m \geq N$: $\|T_n x - T_m x\|_F \leq \varepsilon$. En faisant $m \rightarrow \infty$: $\|T_n x - Tx\|_F \leq \varepsilon$. Donc $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N$. En particulier $T = T_N + (T - T_N) \in \mathcal{L}(E, F)$ et $T_n \rightarrow T$ en norme. $\square$

Corollaire 3.5 (Dual est toujours complet). *Pour tout espace vectoriel normé E , le dual topologique $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est un espace de Banach.*

Proposition 3.6 (Composition d'opérateurs). *Soient $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et $S \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors $ST \in \mathcal{L}(E, G)$ et $\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$.*

Démonstration. Pour tout $x \in E$, $\|STx\|_G \leq \|S\| \cdot \|Tx\|_F \leq \|S\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|_E$. $\square$

Corollaire 3.7. *Si E est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E)$ est une algèbre de Banach unitaire (l'unité étant Id_E), c'est-à-dire $\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$ et $\|\text{Id}\| = 1$ (si $E \neq \{0\}$).*

Notation 3.8. On note $GL(E)$ l'ensemble des opérateurs inversibles de $\mathcal{L}(E)$, c'est-à-dire les $T \in \mathcal{L}(E)$ tels qu'il existe $T^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ avec $TT^{-1} = T^{-1}T = \text{Id}_E$.

3.2 Opérateurs compacts

Définition 3.9 (Opérateur compact). Un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est dit **compact** si l'image de la boule unité fermée $\overline{B}_E$ par T est relativement compacte dans F , c'est-à-dire si $T(\overline{B}_E)$ est compact dans F .

On note $\mathcal{K}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F , et $\mathcal{K}(E) := \mathcal{K}(E, E)$.

Remarque 3.10. De manière équivalente, T est compact si et seulement si pour toute suite bornée (x_n) de E , la suite (Tx_n) admet une sous-suite convergente dans F .

Proposition 3.11 (Premières propriétés des opérateurs compacts). (i)

Tout opérateur compact est borné : $\mathcal{K}(E, F) \subset \mathcal{L}(E, F)$.

(ii) Tout opérateur de rang fini est compact.

(iii) Si $T \in \mathcal{K}(E, F)$, $S \in \mathcal{L}(F, G)$ et $R \in \mathcal{L}(G, E)$, alors $ST \in \mathcal{K}(E, G)$ et $TR \in \mathcal{K}(G, F)$.

(iv) $\mathcal{K}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E, F)$ lorsque F est complet.

Démonstration. (i) L'image de la boule unité est relativement compacte, donc bornée.

(ii) Si $\dim(\text{ran } T) < \infty$, alors $T(\overline{B}_E)$ est bornée dans un espace de dimension finie, donc relativement compacte par le théorème de Bolzano-Weierstrass.

(iii) Soit (x_n) bornée dans E . Comme T est compact, il existe une sous-suite (x_{n_k}) telle que $Tx_{n_k} \rightarrow y$ dans F . Alors $STx_{n_k} \rightarrow Sy$ dans G par continuité de S . Pour TR , si (z_n) est bornée dans G , alors (Rz_n) est bornée dans E , donc (TRz_n) admet une sous-suite convergente.

(iv) Soient $T, S \in \mathcal{K}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour toute suite bornée (x_n) , on extrait d'abord une sous-suite telle que (Tx_{n_k}) converge, puis une sous-sous-suite telle que $(Sx_{n_{k_l}})$ converge. Alors $((T + \lambda S)x_{n_{k_l}})$ converge, donc $T + \lambda S$ est compact.

Pour la fermeture, soit (T_k) une suite dans $\mathcal{K}(E, F)$ avec $T_k \rightarrow T$ en norme. Soit (x_n) bornée dans E avec $\|x_n\| \leq M$. Par un procédé diagonal, on construit une sous-suite (x_{n_j}) telle que $(T_k x_{n_j})_j$ converge pour tout k . Pour $\varepsilon > 0$, choisissons k tel que $\|T - T_k\| < \varepsilon/(3M)$, puis J tel que $\|T_k x_{n_i} - T_k x_{n_j}\| < \varepsilon/3$ pour $i, j \geq J$. Alors

$$\|Tx_{n_i} - Tx_{n_j}\| \leq \|(T - T_k)x_{n_i}\| + \|T_k x_{n_i} - T_k x_{n_j}\| + \|(T_k - T)x_{n_j}\| < \varepsilon.$$

Donc (Tx_{n_j}) est de Cauchy dans F complet, d'où converge. $\square$

Corollaire 3.12. L'espace $\mathcal{K}(E)$ est un idéal bilatère fermé de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ lorsque E est un espace de Banach.

Exemple 3.13. Soit $k \in C([0, 1]^2)$. L'opérateur intégral $T : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ défini par

$$(Tf)(x) = \int_0^1 k(x, t)f(t) dt$$

est compact. En effet, on vérifie que $T(\overline{B})$ est équicontinue et uniformément bornée, puis on applique le théorème d'Ascoli.

Exemple 3.14. Sur ℓ^2 , soit T défini par $T(e_n) = \lambda_n e_n$ où (λ_n) est une suite de scalaires. Alors $T \in \mathcal{K}(\ell^2)$ si et seulement si $\lambda_n \rightarrow 0$.

3.3 Série de Neumann et inversibilité

Théorème 3.15 (Série de Neumann). *Soit E un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$ avec $\|T\| < 1$. Alors $\text{Id} - T$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$ et*

$$(\text{Id} - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n,$$

$$\text{avec } \|(\text{Id} - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

Démonstration. Posons $S_N = \sum_{n=0}^N T^n$. Comme $\|T^n\| \leq \|T\|^n$ et $\|T\| < 1$, la série $\sum \|T^n\|$ converge. Donc (S_N) est de Cauchy dans $\mathcal{L}(E)$ qui est complet (car E est de Banach). Soit $S = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$ sa limite.

On a $S_N(\text{Id} - T) = \text{Id} - T^{N+1}$ et $(\text{Id} - T)S_N = \text{Id} - T^{N+1}$. Comme $\|T^{N+1}\| \leq \|T\|^{N+1} \rightarrow 0$, on obtient en passant à la limite $S(\text{Id} - T) = (\text{Id} - T)S = \text{Id}$. Enfin,

$$\|S\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = \frac{1}{1 - \|T\|}. \quad \square$$

Corollaire 3.16 (Ouverture de $GL(E)$). *L'ensemble $GL(E)$ des opérateurs inversibles est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$, et l'application $T \mapsto T^{-1}$ est continue sur $GL(E)$.*

Démonstration. Soit $T_0 \in GL(E)$ et $T \in \mathcal{L}(E)$ avec $\|T - T_0\| < \|T_0^{-1}\|^{-1}$. Écrivons $T = T_0(\text{Id} - T_0^{-1}(T_0 - T))$. On a $\|T_0^{-1}(T_0 - T)\| \leq \|T_0^{-1}\| \cdot \|T_0 - T\| < 1$, donc $\text{Id} - T_0^{-1}(T_0 - T)$ est inversible par le théorème de Neumann. Par suite T est inversible, et

$$T^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (T_0^{-1}(T_0 - T))^n \right) T_0^{-1}.$$

La continuité de l'inversion découle de l'estimation $\|T^{-1} - T_0^{-1}\| \leq \|T_0^{-1}\|^2 \|T - T_0\| / (1 - \|T_0^{-1}\| \|T - T_0\|)$. $\square$

Corollaire 3.17 (Perturbation de l'identité). *Soit E un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$ avec $\|T\| < 1$. Alors $\text{Id} + T$ est inversible et*

$$(\text{Id} + T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n T^n.$$

3.4 Spectre et résolvante

Dans toute cette section, E est un espace de Banach complexe ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Définition 3.18 (Spectre, résolvante). Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. L'ensemble **résolvant** de T est

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{Id} - T \in GL(E)\}.$$

Le **spectre** de T est $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$.

Pour $\lambda \in \rho(T)$, l'opérateur $R(\lambda, T) := (\lambda \text{Id} - T)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ est appelé la **résolvante** de T en λ .

Définition 3.19 (Décomposition du spectre). Le spectre se décompose en :

- (i) le **spectre ponctuel** $\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{Id} - T \text{ n'est pas injectif}\}$ (ensemble des valeurs propres) ;
- (ii) le **spectre continu** $\sigma_c(T) := \{\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T) : \overline{\text{ran}(\lambda \text{Id} - T)} = E\}$;
- (iii) le **spectre résiduel** $\sigma_r(T) := \sigma(T) \setminus (\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T))$.

Proposition 3.20 (Propriétés de la résolvante). Soit $T \in \mathcal{L}(E)$.

(i) $\rho(T)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\sigma(T)$ est fermé.

(ii) **Identité de la résolvante** : pour $\lambda, \mu \in \rho(T)$,

$$R(\lambda, T) - R(\mu, T) = (\mu - \lambda)R(\lambda, T)R(\mu, T).$$

(iii) L'application $\lambda \mapsto R(\lambda, T)$ est analytique sur $\rho(T)$ (au sens de la

norme d'opérateur).

Démonstration. (i) Découle du corollaire 3.16 : pour $\lambda_0 \in \rho(T)$, l'opérateur $\lambda \text{Id} - T$ reste inversible pour λ proche de λ_0 .

(ii) On écrit $R(\lambda, T) - R(\mu, T) = R(\lambda, T)[(\mu \text{Id} - T) - (\lambda \text{Id} - T)]R(\mu, T) = (\mu - \lambda)R(\lambda, T)R(\mu, T)$.

(iii) L'identité de la résolvante donne $\frac{R(\lambda, T) - R(\mu, T)}{\lambda - \mu} = -R(\lambda, T)R(\mu, T) \rightarrow -R(\mu, T)^2$ quand $\lambda \rightarrow \mu$, ce qui montre la dérivabilité complexe. $\square$

Théorème 3.21 (Le spectre est compact et non vide). *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ avec $E \neq \{0\}$. Alors :*

- (i) $\sigma(T) \subset \overline{B}(0, \|T\|)$ (le spectre est borné) ;
- (ii) $\sigma(T) \neq \emptyset$.

Démonstration. (i) Si $|\lambda| > \|T\|$, alors $\lambda \text{Id} - T = \lambda(\text{Id} - T/\lambda)$. Comme $\|T/\lambda\| < 1$, la série de Neumann montre que $\text{Id} - T/\lambda$ est inversible, donc $\lambda \in \rho(T)$.

(ii) Supposons $\sigma(T) = \emptyset$. Alors $R(\cdot, T)$ est une fonction entière à valeurs dans $\mathcal{L}(E)$. Pour $|\lambda| > \|T\|$,

$$R(\lambda, T) = \frac{1}{\lambda} \left(\text{Id} - \frac{T}{\lambda} \right)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^n},$$

donc $\|R(\lambda, T)\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|} \rightarrow 0$ quand $|\lambda| \rightarrow \infty$. Par le théorème de Liouville vectoriel, $R(\cdot, T) = 0$, ce qui est absurde car $R(\lambda, T)$ est inversible. $\square$

Définition 3.22 (Rayon spectral). Le **rayon spectral** de $T \in \mathcal{L}(E)$ est

$$r(T) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Théorème 3.23 (Formule du rayon spectral (Gelfand)). *Soit E un espace de Banach complexe et $T \in \mathcal{L}(E)$. Alors*

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} = \inf_{n \geq 1} \|T^n\|^{1/n}.$$

Démonstration. Étape 1 : $r(T) \leq \inf_n \|T^n\|^{1/n}$. Soit $\lambda \in \sigma(T)$. On montre que $\lambda^n \in \sigma(T^n)$ pour tout $n \geq 1$, car $\lambda^n \text{Id} - T^n = (\lambda \text{Id} - T)(\lambda^{n-1} \text{Id} + \lambda^{n-2}T + \dots + \lambda \text{Id} + \text{Id})$.

$\dots + T^{n-1}$). Si $\lambda^n \notin \sigma(T^n)$, alors $\lambda^n \text{Id} - T^n$ serait inversible, et comme $\lambda \text{Id} - T$ est un facteur gauche, $\lambda \text{Id} - T$ aurait un inverse à gauche ; un argument similaire avec la factorisation à droite donne un inverse à droite, d'où $\lambda \notin \sigma(T)$, contradiction. Donc $|\lambda|^n \leq \|T^n\|$ par le théorème 3.21(i) appliqué à T^n , et $|\lambda| \leq \|T^n\|^{1/n}$ pour tout n .

Étape 2 : $\limsup_n \|T^n\|^{1/n} \leq r(T)$. Pour $|\lambda| > r(T)$, on a $\lambda \in \rho(T)$ et la série de Laurent de $R(\lambda, T)$ en ∞ s'écrit $R(\lambda, T) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n / \lambda^{n+1}$. Cette série converge pour $|\lambda| > r(T)$ (car $R(\cdot, T)$ est analytique sur $\rho(T)$ qui contient $\{|\lambda| > r(T)\}$).

Par le lemme de Hadamard pour les séries de Laurent, le rayon de convergence de $\sum T^n z^{n+1}$ est au moins $1/r(T)$. Rappelons que le rayon de convergence est $1/\limsup_n \|T^n\|^{1/n}$. Donc $\limsup_n \|T^n\|^{1/n} \leq r(T)$.

Conclusion. Des étapes 1 et 2, $r(T) \leq \inf_n \|T^n\|^{1/n} \leq \liminf_n \|T^n\|^{1/n} \leq \limsup_n \|T^n\|^{1/n} \leq r(T)$. Donc la limite existe et toutes les quantités sont égales. $\square$

Remarque 3.24. L'existence de la limite $\lim \|T^n\|^{1/n}$ peut aussi se déduire du lemme de Fekete : si (a_n) est sous-additive (i.e. $a_{n+m} \leq a_n + a_m$), alors $a_n/n \rightarrow \inf a_n/n$. On applique ceci à $a_n = \log \|T^n\|$.

Exemple 3.25. Considérons le shift à droite $S : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ défini par $S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$. On a $\|S\| = 1$, $\sigma_p(S) = \emptyset$ et $\sigma(S) = \overline{B}(0, 1)$. Le shift à gauche $S^*(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$ a $\sigma_p(S^*) = B(0, 1)$ (le disque ouvert) et $\sigma(S^*) = \overline{B}(0, 1)$.

3.5 Adjoint sur les espaces de Hilbert

Dans toute cette section, H et K désignent des espaces de Hilbert sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Théorème 3.26 (Existence de l'adjoint). *Soit $T \in \mathcal{L}(H, K)$. Il existe un unique opérateur $T^* \in \mathcal{L}(K, H)$ tel que*

$$\langle Tx, y \rangle_K = \langle x, T^*y \rangle_H \quad \text{pour tous } x \in H, y \in K.$$

De plus, $\|T^\| = \|T\|$.*

Démonstration. Pour $y \in K$ fixé, l'application $\varphi_y : x \mapsto \langle Tx, y \rangle_K$ est une forme linéaire continue sur H (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, elle est antilinéaire en y et linéaire en x ; on considère φ_y comme forme linéaire en x). On a $|\varphi_y(x)| \leq \|T\| \|x\| \|y\|$, donc $\varphi_y \in H'$ avec $\|\varphi_y\| \leq \|T\| \|y\|$.

Par le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $z_y \in H$ tel que $\varphi_y(x) = \langle x, z_y \rangle_H$ pour tout $x \in H$, avec $\|z_y\| = \|\varphi_y\| \leq \|T\| \|y\|$.

On pose $T^*y := z_y$. L'unicité dans le théorème de Riesz assure que T^* est bien défini. Vérifions la linéarité (dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) : pour $y_1, y_2 \in K$ et $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$\langle x, T^*(\alpha y_1 + y_2) \rangle_H = \langle Tx, \alpha y_1 + y_2 \rangle_K = \bar{\alpha} \langle Tx, y_1 \rangle_K + \langle Tx, y_2 \rangle_K = \langle x, \alpha T^*y_1 + T^*y_2 \rangle_H$$

pour tout x , donc $T^*(\alpha y_1 + y_2) = \alpha T^*y_1 + T^*y_2$. La bornitude est assurée par $\|T^*y\| \leq \|T\| \|y\|$, d'où $\|T^*\| \leq \|T\|$.

Réciproquement, pour tout $x \in H$, $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle x, T^*Tx \rangle \leq \|x\| \|T^*Tx\| \leq \|x\| \|T^*\| \|T\| \|x\|$, donc $\|T\|^2 \leq \|T^*\| \|T\|$, d'où $\|T\| \leq \|T^*\|$. $\square$

Proposition 3.27 (Propriétés de l'adjoint). *Soient $S, T \in \mathcal{L}(H, K)$, $R \in \mathcal{L}(K, G)$ (où G est un Hilbert) et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors :*

- (i) $(S + T)^* = S^* + T^*$ et $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$;
- (ii) $(T^*)^* = T$;
- (iii) $(RT)^* = T^* R^*$;
- (iv) $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$;
- (v) $\text{Ker } T^* = (\text{ran } T)^\perp$ et $\text{ran } T = (\text{Ker } T^*)^\perp$.

Démonstration. (i) et (ii) découlent directement de la définition.

(iii) Pour tous $x \in H$ et $z \in G$:

$$\langle RTx, z \rangle_G = \langle Tx, R^*z \rangle_K = \langle x, T^*R^*z \rangle_H,$$

donc $(RT)^* = T^*R^*$ par unicité de l'adjoint.

(iv) On a $\|T^*T\| \leq \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2$. Inversement, $\|Tx\|^2 = \langle T^*Tx, x \rangle \leq \|T^*Tx\| \|x\| \leq \|T^*T\| \|x\|^2$, donc $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$. L'identité $\|T^*T\| = \|T\|^2$ est appelée l'**identité C^*** . L'égalité $\|TT^*\| = \|T\|^2$ s'obtient en appliquant le résultat à T^* et en utilisant $(T^*)^* = T$.

(v) On a $y \in \text{Ker } T^*$ ssi $T^*y = 0$ ssi $\langle x, T^*y \rangle = 0$ pour tout x ssi $\langle Tx, y \rangle = 0$ pour tout x ssi $y \in (\text{ran } T)^\perp$. La seconde égalité en découle par passage à l'orthogonal. $\square$

3.6 Opérateurs normaux, auto-adjoints et unitaires

On travaille sur un espace de Hilbert H (sur $\mathbb{C}$ sauf mention contraire).

Définition 3.28 (Opérateurs normaux, auto-adjoints, unitaires). Soit $T \in \mathcal{L}(H)$.

- (i) T est **normal** si $T^*T = TT^*$.
- (ii) T est **auto-adjoint** (ou **hermitien**) si $T^* = T$.
- (iii) T est **unitaire** si $T^*T = TT^* = \text{Id}$.
- (iv) T est une **projection orthogonale** si $T^2 = T$ et $T^* = T$.

Remarque 3.29. On a les inclusions : auto-adjoint $\Rightarrow$ normal, et unitaire $\Rightarrow$ normal. Tout opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ s'écrit de manière unique $T = A + iB$ où $A = \frac{T+T^*}{2}$ et $B = \frac{T-T^*}{2i}$ sont auto-adjoints. T est normal si et seulement si $AB = BA$.

Proposition 3.30 (Caractérisation des opérateurs normaux). $T \in \mathcal{L}(H)$ est normal si et seulement si $\|Tx\| = \|T^*x\|$ pour tout $x \in H$.

Démonstration. On a $\|Tx\|^2 = \langle T^*Tx, x \rangle$ et $\|T^*x\|^2 = \langle TT^*x, x \rangle$. Si T est normal, ces quantités sont égales. Réciproquement, si $\langle T^*Tx, x \rangle = \langle TT^*x, x \rangle$ pour tout x , alors $\langle (T^*T - TT^*)x, x \rangle = 0$ pour tout x . Par l'identité de polarisation, l'opérateur auto-adjoint $T^*T - TT^*$ est nul. $\square$

Proposition 3.31 (Valeurs propres d'un opérateur auto-adjoint). Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjoint.

- (i) Les valeurs propres de T sont réelles.
- (ii) Les sous-espaces propres correspondant à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

Démonstration. (i) Soit $Tx = \lambda x$ avec $x \neq 0$. Alors $\lambda \|x\|^2 = \langle \lambda x, x \rangle = \langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle} = \bar{\lambda} \|x\|^2$, donc $\lambda = \bar{\lambda}$, i.e. $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) Soient $Tx = \lambda x$ et $Ty = \mu y$ avec $\lambda \neq \mu$. Alors $\lambda \langle x, y \rangle = \langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle = \mu \langle x, y \rangle$ (car $\bar{\mu} = \mu$ par (i)), donc $(\lambda - \mu) \langle x, y \rangle = 0$ et $\langle x, y \rangle = 0$. $\square$

Théorème 3.32 (Spectre d'un opérateur auto-adjoint). *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjoint. Alors $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Plus précisément, $\sigma(T) \subset [m, M]$ où $m = \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle$ et $M = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle$, et $\{m, M\} \subset \sigma(T)$.*

Démonstration. $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Soit $\lambda = \alpha + i\beta$ avec $\beta \neq 0$. Pour tout $x \in H$,

$$\begin{aligned} \|(\lambda \text{Id} - T)x\|^2 &= \|(\alpha \text{Id} - T)x + i\beta x\|^2 \\ &= \|(\alpha \text{Id} - T)x\|^2 + \beta^2 \|x\|^2 + 2\beta \operatorname{im} \langle (\alpha \text{Id} - T)x, x \rangle. \end{aligned}$$

Or $\langle (\alpha \text{Id} - T)x, x \rangle = \alpha \|x\|^2 - \langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$ car T est auto-adjoint. Donc $\operatorname{im} \langle (\alpha \text{Id} - T)x, x \rangle = 0$ et

$$\|(\lambda \text{Id} - T)x\|^2 \geq \beta^2 \|x\|^2.$$

Ceci montre que $\lambda \text{Id} - T$ est injectif et d'image fermée. De même, $\bar{\lambda} \text{Id} - T = (\lambda \text{Id} - T)^*$ est injectif, donc $\operatorname{ran}(\lambda \text{Id} - T)$ est dense (car $\operatorname{Ker}(\lambda \text{Id} - T)^* = (\operatorname{ran}(\lambda \text{Id} - T))^\perp = \{0\}$). Fermée et dense, l'image est H tout entier, donc $\lambda \in \rho(T)$.

$\sigma(T) \subset [m, M]$. Soit $\lambda > M$. Alors pour tout x avec $\|x\| = 1$, $\langle (\lambda \text{Id} - T)x, x \rangle = \lambda - \langle Tx, x \rangle \geq \lambda - M > 0$. L'opérateur $\lambda \text{Id} - T$ est auto-adjoint et vérifie $\langle (\lambda \text{Id} - T)x, x \rangle \geq (\lambda - M) \|x\|^2$, d'où il est inversible (par un argument analogue au cas $\beta \neq 0$, en utilisant la minoration directe). De même pour $\lambda < m$.

$M \in \sigma(T)$. Par définition du supremum, il existe une suite (x_n) avec $\|x_n\| = 1$ et $\langle Tx_n, x_n \rangle \rightarrow M$. On a $\|(T - M \text{Id})x_n\|^2 = \|Tx_n\|^2 - 2M \langle Tx_n, x_n \rangle + M^2 \leq \|T\|^2 - 2M \langle Tx_n, x_n \rangle + M^2$. Comme $\|T\| = \max(|m|, |M|)$ pour un opérateur auto-adjoint (on admet ce point), un calcul montre que $\|(T - M \text{Id})x_n\|^2 \rightarrow M^2 - M^2 = 0$ lorsqu'on raffine l'argument en utilisant $\|Tx_n\|^2 \leq \|T\| \langle Tx_n, x_n \rangle$ (qui découle de $\|Tx_n\|^2 = \langle T^2 x_n, x_n \rangle \leq \|T\| \langle Tx_n, x_n \rangle$ puisque $\langle T^2 x_n, x_n \rangle \leq \|T\| \langle Tx_n, x_n \rangle$ par l'inégalité $T^2 \leq \|T\| T$ au sens des formes, car $\langle Tx, x \rangle \leq M \leq \|T\|$). Donc $T - M \text{Id}$ n'est pas inversible par en dessous, ce qui donne $M \in \sigma(T)$. L'argument pour m est analogue en considérant $-T$. $\square$

Corollaire 3.33. *Si T est auto-adjoint, $\|T\| = r(T) = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle|$.*

Proposition 3.34 (Opérateur auto-adjoint positif). *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjoint. On dit que T est **positif** (noté $T \geq 0$) si $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in H$. Alors $\sigma(T) \subset [0, +\infty[$.*

Proposition 3.35 (Caractérisation des opérateurs unitaires). *Soit $U \in \mathcal{L}(H)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) U est unitaire ;
- (ii) U est surjectif et isométrique ($\|Ux\| = \|x\|$ pour tout x) ;
- (iii) U est surjectif et $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$ pour tous x, y .

De plus, $\sigma(U) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ (le cercle unité).

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (iii) : $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, U^*Uy \rangle = \langle x, y \rangle$, et U est inversible donc surjectif.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) : prendre $y = x$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : U isométrique donne $\langle U^*Ux, x \rangle = \|Ux\|^2 = \|x\|^2 = \langle x, x \rangle$, donc $U^*U = \text{Id}$ par polarisation. Comme U est surjectif et isométrique, U est bijectif, et $U^{-1} = U^*$, d'où $UU^* = \text{Id}$.

Pour le spectre : si $\lambda \in \sigma_p(U)$, alors $Ux = \lambda x$ avec $x \neq 0$, et $\|x\| = \|Ux\| = |\lambda| \|x\|$, donc $|\lambda| = 1$. L'inclusion $\sigma(U) \subset \{|z| = 1\}$ découle de $\|U\| = 1$ (d'où $\sigma(U) \subset \overline{B}(0, 1)$) et $\|U^{-1}\| = \|U^*\| = 1$ (d'où $\sigma(U^{-1}) \subset \overline{B}(0, 1)$, et comme $\sigma(U^{-1}) = \{1/\lambda : \lambda \in \sigma(U)\}$, on obtient $|\lambda| \geq 1$). $\square$

3.7 Exercices

Exercice 3.1 (Norme d'opérateur). Soit $T : \ell^1 \rightarrow \ell^1$ défini par $T(x_n) = (x_n/n)_{n \geq 1}$.

- (a) Montrer que $T \in \mathcal{L}(\ell^1)$ et calculer $\|T\|$.
- (b) T est-il compact ?

Exercice 3.2 (Opérateur de Volterra). Soit $V : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$ l'opérateur de Volterra défini par $(Vf)(x) = \int_0^x f(t) dt$.

- (a) Montrer que V est borné et calculer $\|V^n\|$ (on pourra montrer que $\|V^n\| \leq 1/n!$).
- (b) En déduire $r(V) = 0$, puis $\sigma(V) = \{0\}$.
- (c) V est-il compact ? normal ? auto-adjoint ?
- (d) Calculer V^* .

Exercice 3.3 (Spectre du shift pondéré). Soit $(w_n)_{n \geq 1}$ une suite bornée de scalaires non nuls. On définit le shift pondéré $T_w : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ par $T_w(x_1, x_2, \dots) = (0, w_1 x_1, w_2 x_2, \dots)$.

- (a) Montrer que $\|T_w\| = \sup_n |w_n|$.
- (b) Calculer $\sigma_p(T_w)$ et $\sigma_p(T_w^*)$.
- (c) Calculer $r(T_w)$ en fonction des poids (w_n) .

Exercice 3.4 (Inversibilité par perturbation). Soient E un espace de Banach, $T \in GL(E)$ et $S \in \mathcal{L}(E)$ avec $\|S\| < \|T^{-1}\|^{-1}$.

- (a) Montrer que $T + S \in GL(E)$.
- (b) Établir l'estimation $\|(T + S)^{-1} - T^{-1}\| \leq \frac{\|T^{-1}\|^2 \|S\|}{1 - \|T^{-1}\| \|S\|}$.

Exercice 3.5 (Opérateurs compacts sur ℓ^2). Soit $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$ défini par $T(e_n) = a_n e_{\sigma(n)}$ où σ est une permutation de $\mathbb{N}^*$ et (a_n) est bornée.

- (a) Montrer que T est borné et calculer $\|T\|$.
- (b) Montrer que T est compact si et seulement si $a_n \rightarrow 0$.

Exercice 3.6 (Opérateur normal). Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ normal.

- (a) Montrer que $\text{Ker } T = \text{Ker } T^*$.
- (b) Montrer que $\|T^n\| = \|T\|^n$ pour tout $n \geq 1$.
- (c) En déduire $r(T) = \|T\|$.
- (d) Montrer que si T est compact et normal, alors il existe une valeur propre λ de T avec $|\lambda| = \|T\|$ (si $T \neq 0$).

Exercice 3.7 (Spectre d'un opérateur de multiplication). Soit (X, μ) un espace mesuré σ -fini et $\varphi \in L^\infty(X, \mu)$. On définit $M_\varphi : L^2(X) \rightarrow L^2(X)$ par $M_\varphi f = \varphi f$.

- (a) Montrer que $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$.
- (b) Montrer que $M_\varphi^* = M_{\bar{\varphi}}$.
- (c) Déterminer quand M_φ est normal, auto-adjoint, unitaire, positif.
- (d) Montrer que $\sigma(M_\varphi) = \text{ess ran}(\varphi)$ (l'image essentielle de φ).

Exercice 3.8 (Identité C^*). Soit $T \in \mathcal{L}(H)$.

- (a) Montrer que $\|T^*T\| = \|T\|^2$ sans utiliser le théorème de l'adjoint, en prouvant directement l'inégalité $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$ via $\|Tx\|^2 = \langle T^*Tx, x \rangle$.
- (b) En déduire que $\|T^{2^n}\| = \|T\|^{2^n}$ pour les opérateurs normaux, puis retrouver $r(T) = \|T\|$ par la formule du rayon spectral.

Exercice 3.9 (Projection orthogonale et sous-espaces). Soient $P, Q \in \mathcal{L}(H)$ deux projections orthogonales.

- (a) Montrer que $\sigma(P) \subset \{0, 1\}$.
- (b) Montrer que PQ est une projection orthogonale si et seulement si $PQ = QP$.
- (c) Montrer que $P+Q$ est une projection orthogonale si et seulement si $PQ = 0$.
- (d) Montrer que $\|P - Q\| \leq 1$, avec égalité si et seulement si $\text{ran } P \not\subset \text{ran } Q$ ou $\text{ran } Q \not\subset \text{ran } P$.

Chapitre 4

Théorème de Hahn-Banach

Contents

4.1	Forme analytique réelle	67
4.2	Forme analytique complexe	69
4.3	Formes géométriques : séparation de convexes . .	70
4.4	Dual des espaces ℓ^p et bidual	73
4.4.1	Bidual et injection canonique	74
4.5	Espaces réflexifs et théorème de Banach-Alaoglu	74
4.6	Exercices	76

Le théorème de Hahn-Banach est l'un des piliers de l'analyse fonctionnelle. Sous sa forme analytique, il permet de prolonger des formes linéaires continues définies sur un sous-espace à l'espace tout entier, en préservant une majoration par une fonctionnelle sous-linéaire. Sous sa forme géométrique, il fournit des résultats de séparation de convexes par des hyperplans, qui jouent un rôle fondamental en optimisation et en théorie des distributions.

Ce chapitre développe les deux formes du théorème, en explore les conséquences pour la dualité des espaces normés, et introduit les espaces réflexifs. L'axiome de Zorn est utilisé de manière essentielle dans les preuves.

4.1 Forme analytique réelle

Définition 4.1 (Fonctionnelle sous-linéaire). Soit E un espace vectoriel réel. Une application $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **sous-linéaire** si :

- (i) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in E$ (homogénéité positive) ;

(ii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pour tous $x, y \in E$ (sous-additivité).

Remarque 4.2. Toute semi-norme est sous-linéaire. Réciproquement, une fonctionnelle sous-linéaire n'est pas nécessairement paire : on peut avoir $p(-x) \neq p(x)$.

Théorème 4.3 (Hahn-Banach analytique réel). *Soit E un espace vectoriel réel, $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle sous-linéaire, F un sous-espace vectoriel de E , et $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que $f(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in F$. Alors il existe une forme linéaire $\tilde{f} : E \rightarrow \mathbb{R}$ qui prolonge f (i.e. $\tilde{f}|_F = f$) et vérifie*

$$\tilde{f}(x) \leq p(x) \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Démonstration. La preuve procède en deux étapes.

Étape 1 : Extension d'une dimension. Supposons $F \subsetneq E$ et soit $x_0 \in E \setminus F$. Posons $G = F \oplus \mathbb{R}x_0 = \{x + tx_0 : x \in F, t \in \mathbb{R}\}$. On cherche $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ linéaire prolongeant f avec $g \leq p$ sur G . Nécessairement $g(x + tx_0) = f(x) + t\alpha$ où $\alpha = g(x_0)$ est à déterminer.

Pour $t > 0$, la condition $g(x + tx_0) \leq p(x + tx_0)$ s'écrit $f(x) + t\alpha \leq p(x + tx_0)$, soit $\alpha \leq \frac{p(x + tx_0) - f(x)}{t}$. En substituant $x/t \rightarrow x$, on obtient $\alpha \leq p(y + x_0) - f(y)$ pour tout $y \in F$.

Pour $t < 0$, la condition s'écrit (en posant $t = -s$, $s > 0$) $f(x) - s\alpha \leq p(x - sx_0)$, soit $\alpha \geq f(z) - p(z - x_0)$ pour tout $z \in F$.

Il faut donc trouver α tel que

$$\sup_{z \in F} [f(z) - p(z - x_0)] \leq \alpha \leq \inf_{y \in F} [p(y + x_0) - f(y)].$$

Ceci est possible car pour tous $y, z \in F$, $f(y) + f(z) = f(y + z) \leq p(y + z) = p((y + x_0) + (z - x_0)) \leq p(y + x_0) + p(z - x_0)$, d'où $f(z) - p(z - x_0) \leq p(y + x_0) - f(y)$.

Étape 2 : Application du lemme de Zorn. Considérons l'ensemble $\mathcal{E}$ des couples (G, g) où G est un sous-espace de E contenant F , et $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire, prolonge f , et vérifie $g \leq p$ sur G . On munit $\mathcal{E}$ de l'ordre $(G_1, g_1) \preceq (G_2, g_2)$ si $G_1 \subset G_2$ et $g_2|_{G_1} = g_1$.

$\mathcal{E}$ est non vide (car $(F, f) \in \mathcal{E}$). Si $\{(G_i, g_i)\}_{i \in I}$ est une chaîne totalement ordonnée, alors (G_∞, g_∞) avec $G_\infty = \bigcup_i G_i$ et $g_\infty|_{G_i} = g_i$ est un majorant. Par le lemme de Zorn, $\mathcal{E}$ admet un élément maximal $(\tilde{E}, \tilde{f})$.

Si $\tilde{E} \neq E$, l'étape 1 permettrait d'étendre $\tilde{f}$ à un sous-espace strictement plus grand, contredisant la maximalité. Donc $\tilde{E} = E$. $\square$

4.2 Forme analytique complexe

Lemme 4.4 (Lemme de passage réel-complexe). *Soit E un espace vectoriel complexe et $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ une forme $\mathbb{C}$ -linéaire. Posons $u = \operatorname{Re} f$. Alors u est $\mathbb{R}$ -linéaire et $f(x) = u(x) - i u(ix)$ pour tout $x \in E$. Réciproquement, si $u : E \rightarrow \mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$ -linéaire et vérifie $u(ix) = -u(x)$ (condition automatiquement satisfaite si $u = \operatorname{Re} f$ pour une forme $\mathbb{C}$ -linéaire f), alors $f(x) := u(x) - i u(ix)$ est $\mathbb{C}$ -linéaire.*

Démonstration. Si f est $\mathbb{C}$ -linéaire et $u = \operatorname{Re} f$, alors $f(x) = u(x) + i \operatorname{Im} f(x)$. Or $f(ix) = i f(x) = i u(x) - \operatorname{Im} f(x)$, donc $u(ix) = \operatorname{Re} f(ix) = -\operatorname{Im} f(x)$, d'où $f(x) = u(x) - i u(ix)$.

Réciproquement, soit $g(x) = u(x) - i u(ix)$. Alors g est $\mathbb{R}$ -linéaire. Vérifions la $\mathbb{C}$ -linéarité : $g(ix) = u(ix) - i u(i^2 x) = u(ix) + i u(x) = i(u(x) - i u(ix)) = i g(x)$. $\square$

Théorème 4.5 (Hahn-Banach analytique complexe). *Soit E un espace vectoriel complexe, $p : E \rightarrow [0, +\infty[$ une semi-norme, F un sous-espace vectoriel de E , et $f : F \rightarrow \mathbb{C}$ une forme $\mathbb{C}$ -linéaire telle que $|f(x)| \leq p(x)$ pour tout $x \in F$. Alors il existe une forme $\mathbb{C}$ -linéaire $\tilde{f} : E \rightarrow \mathbb{C}$ qui prolonge f et vérifie $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$ pour tout $x \in E$.*

Démonstration. Considérons E comme espace vectoriel réel et posons $u = \operatorname{Re} f : F \rightarrow \mathbb{R}$. Alors u est $\mathbb{R}$ -linéaire et $u(x) \leq |f(x)| \leq p(x)$ pour tout $x \in F$.

Par le théorème de Hahn-Banach réel (théorème 4.3), il existe $\tilde{u} : E \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ -linéaire, prolongeant u , avec $\tilde{u}(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$.

Posons $\tilde{f}(x) := \tilde{u}(x) - i \tilde{u}(ix)$. Par le lemme 4.4, $\tilde{f}$ est $\mathbb{C}$ -linéaire. Sur F , on retrouve $\tilde{f}|_F = u - i u(i \cdot) = f$ par le même lemme. Il reste à montrer la majoration.

Pour $x \in E$, écrivons $\tilde{f}(x) = |\tilde{f}(x)| e^{i\theta}$. Alors

$$|\tilde{f}(x)| = e^{-i\theta} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(e^{-i\theta} x) = \tilde{u}(e^{-i\theta} x) \leq p(e^{-i\theta} x) = p(x),$$

la dernière égalité utilisant $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ pour la semi-norme. $\square$

Corollaire 4.6 (Prolongement de formes linéaires continues). *Soit E un espace vectoriel normé, F un sous-espace de E , et $f \in F'$. Alors il existe $\tilde{f} \in E'$ tel que $\tilde{f}|_F = f$ et $\|\tilde{f}\|_{E'} = \|f\|_{F'}$.*

Démonstration. On applique le théorème 4.5 (ou 4.3 dans le cas réel) avec la semi-norme $p(x) = \|f\|_{F'} \cdot \|x\|_E$. On obtient $\tilde{f}$ avec $|\tilde{f}(x)| \leq \|f\|_{F'} \|x\|_E$, donc $\|\tilde{f}\|_{E'} \leq \|f\|_{F'}$. Comme $\tilde{f}$ prolonge f , $\|\tilde{f}\|_{E'} \geq \|f\|_{F'}$. $\square$

Corollaire 4.7 (Séparation des points par le dual). *Soit E un espace vectoriel normé et $x_0 \in E$ avec $x_0 \neq 0$. Alors il existe $f \in E'$ tel que $\|f\| = 1$ et $f(x_0) = \|x_0\|$.*

Démonstration. Sur $F = \mathbb{K}x_0$, définissons $g(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|$. Alors $\|g\|_{F'} = 1$ et $g(x_0) = \|x_0\|$. Le corollaire 4.6 fournit $f \in E'$ prolongeant g avec $\|f\| = 1$. $\square$

Corollaire 4.8. *Pour tout $x \in E$, $\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in E', \|f\| \leq 1\}$.*

4.3 Formes géométriques : séparation de convexes

Définition 4.9 (Hyperplan). Un **hyperplan** de E est un sous-espace affine de codimension 1, c'est-à-dire un ensemble de la forme $H = \{x \in E : f(x) = \alpha\}$ pour une forme linéaire $f \neq 0$ et un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$ (dans le cas réel). L'hyperplan est dit **fermé** si f est continue.

Définition 4.10 (Fonctionnelle de Minkowski). Soit C un sous-ensemble convexe de E avec $0 \in \text{int}(C)$ (intérieur non vide contenant l'origine). La **fonctionnelle de Minkowski** (ou **jauge**) de C est

$$p_C(x) := \inf\{t > 0 : x/t \in C\} = \inf\{t > 0 : x \in tC\}.$$

Proposition 4.11 (Propriétés de la jauge). *Soit C un convexe ouvert avec $0 \in C$ dans un e.v.n. réel E . Alors :*

- (i) p_C est sous-linéaire et continue ;
- (ii) $C = \{x \in E : p_C(x) < 1\}$;
- (iii) si C est de plus symétrique ($C = -C$) et borné, alors p_C est une norme équivalente à la norme de E .

Démonstration. (i) *Homogénéité positive* : pour $\lambda > 0$, $p_C(\lambda x) = \inf\{t > 0 : \lambda x \in tC\} = \lambda \inf\{s > 0 : x \in sC\} = \lambda p_C(x)$.

Sous-additivité : Soient $s > p_C(x)$ et $t > p_C(y)$. Alors $x \in sC$ et $y \in tC$. Par convexité, $\frac{x+y}{s+t} = \frac{s}{s+t} \cdot \frac{x}{s} + \frac{t}{s+t} \cdot \frac{y}{t} \in C$, donc $x+y \in (s+t)C$ et $p_C(x+y) \leq s+t$. En passant à la borne inférieure, $p_C(x+y) \leq p_C(x) + p_C(y)$.

Continuité : Comme $0 \in C$ ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset C$. Pour $x \in E$, $x \in (\|x\|/r)B(0, r) \subset (\|x\|/r)C$, donc $p_C(x) \leq \|x\|/r$. La sous-linéarité et cette majoration donnent la continuité.

(ii) Si $x \in C$ (ouvert), alors par continuité en 0 de $t \mapsto x/t$, il existe $t < 1$ avec $x \in tC$, i.e. $x/t \in C$, d'où $p_C(x) \leq t < 1$. Réciproquement, si $p_C(x) < 1$, il existe $t < 1$ avec $x \in tC$. Alors $x = t(x/t) + (1-t) \cdot 0 \in C$ par convexité. $\square$

Théorème 4.12 (Séparation d'un point et d'un convexe). *Soit E un espace vectoriel normé réel, $C \subset E$ un convexe ouvert non vide, et $x_0 \in E \setminus C$. Alors il existe $f \in E' \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que*

$$f(x) < \alpha \leq f(x_0) \quad \text{pour tout } x \in C.$$

Démonstration. Quitte à traduire, on peut supposer $0 \in C$ (remplacer C par $C - a$ pour un $a \in C$ et x_0 par $x_0 - a$). Soit $p = p_C$ la jauge de C . Comme $x_0 \notin C$, on a $p(x_0) \geq 1$ (par la proposition 4.11(ii)).

Sur $F = \mathbb{R}x_0$, définissons $g(tx_0) = tp(x_0)$ pour $t \in \mathbb{R}$. Pour $t \geq 0$, $g(tx_0) = tp(x_0) = p(tx_0)$, donc $g \leq p$ sur F (pour $t < 0$, $g(tx_0) = tp(x_0) < 0 \leq p(tx_0)$).

Par Hahn-Banach (théorème 4.3), il existe $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ linéaire avec $f|_F = g$ et $f \leq p$ sur E .

Comme p est continue et $f \leq p$, pour tout $x \in C$, $f(x) \leq p(x) < 1$. D'autre part, $f(x_0) = g(x_0) = p(x_0) \geq 1$. On prend $\alpha = 1$.

La continuité de f découle de $f(x) \leq p(x) \leq \|x\|/r$ et $f(-x) \leq p(-x) \leq \|x\|/r'$ (pour des constantes $r, r' > 0$), d'où $|f(x)| \leq C' \|x\|$. $\square$

Théorème 4.13 (Séparation stricte de deux convexes). *Soient E un espace vectoriel normé réel, $A \subset E$ un convexe compact non vide et $B \subset E$ un convexe fermé non vide, avec $A \cap B = \emptyset$. Alors il existe $f \in E' \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que*

$$f(a) < \alpha < f(b) \quad \text{pour tous } a \in A, b \in B.$$

Démonstration. Étape 1. Posons $C = B - A = \{b - a : b \in B, a \in A\}$. L'ensemble C est convexe. Montrons qu'il est fermé. Soit $(c_n) = (b_n - a_n)$ une suite dans C avec $c_n \rightarrow c$. Comme A est compact, on extrait (a_{n_k}) convergente : $a_{n_k} \rightarrow a \in A$. Alors $b_{n_k} = c_{n_k} + a_{n_k} \rightarrow c + a$. Comme B est fermé, $c + a \in B$, donc $c = (c + a) - a \in B - A = C$.

Comme $A \cap B = \emptyset$, on a $0 \notin C$. Comme A est compact et B fermé, $d(A, B) = \inf\{\|a - b\| : a \in A, b \in B\} > 0$, ce qui implique que 0 est à distance positive de C .

Étape 2. L'ensemble $U = C + B(0, \delta)$ (où $\delta = d(A, B)/2$) est un convexe ouvert ne contenant pas 0. Par le théorème 4.12, il existe $f \in E' \setminus \{0\}$ avec $f(x) < 1 \leq f(0) = 0$ pour tout $x \in U$... On ajuste l'argument : appliquons directement le théorème de séparation à U et $\{0\}$, on obtient $f \in E'$ non nulle et β tel que $f(x) < \beta \leq 0$ pour tout $x \in U$.

En particulier, pour $b \in B$ et $a \in A$: $f(b - a) \leq f(b - a + u)$ pour de petits u , et la borne donne $\sup_A f(a) + \delta' < \inf_B f(b)$ pour un certain $\delta' > 0$ (en exploitant la compacité de A et l'ouverture de U).

Plus précisément : comme $f \leq 0$ sur $U \supset C + B(0, \delta)$, pour tout $b - a \in C$ et $\|u\| < \delta$: $f(b - a + u) \leq 0$, donc $f(b) - f(a) \leq -f(u)$ pour tout $\|u\| < \delta$, d'où $f(b) - f(a) \leq -\sup_{\|u\| < \delta} f(u)$. Comme $f \neq 0$, $\sup_{\|u\| < \delta} f(u) = \delta \|f\| > 0$, donc $f(b) - f(a) \leq -\delta \|f\| < 0$... Cela donne $f(b) < f(a)$.

Reconsidérons en prenant f séparant 0 de U dans le sens $f(u) < 0 \leq f(0)$ pour $u \in U$. Alors pour tout $b \in B, a \in A$: $f(b - a) < 0$, i.e. $f(b) < f(a)$ pour tous b, a . Donc $\sup_B f \leq \inf_A f$.

En raffinant avec le terme $B(0, \delta)$: pour $\|v\| < \delta$, $f(b - a + v) < 0$, d'où $f(b) - f(a) < -f(v)$ pour tout tel v . En prenant v tel que $f(v)$ est proche de $\delta \|f\|$: $f(b) - f(a) < -\delta \|f\| + \varepsilon$. Donc $\sup_B f < \inf_A f - \delta \|f\|/2$, et on choisit α entre ces deux valeurs. On remplace f par $-f$ pour obtenir la conclusion dans la forme souhaitée $f(a) < \alpha < f(b)$. $\square$

Remarque 4.14. Les théorèmes de séparation s'étendent au cas complexe. Pour un espace vectoriel normé complexe E , un convexe ouvert C et $x_0 \notin C$, il existe $f \in E'$ (au sens complexe) et $\alpha \in \mathbb{R}$ avec

$\operatorname{Re} f(x) < \alpha \leq \operatorname{Re} f(x_0)$ pour tout $x \in C$.

4.4 Dual des espaces ℓ^p et bidual

Théorème 4.15 (Dual de ℓ^p). *Pour $1 \leq p < \infty$, le dual $(\ell^p)'$ est isométriquement isomorphe à ℓ^q où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (avec $q = \infty$ si $p = 1$). L'isomorphisme est donné par*

$$\Phi : \ell^q \rightarrow (\ell^p)', \quad \Phi(y)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \quad \text{pour } y = (y_n) \in \ell^q, x = (x_n) \in \ell^p.$$

Démonstration. Φ est bien défini et isométrique. Par l'inégalité de Hölder, $|\Phi(y)(x)| \leq \|x\|_p \|y\|_q$, donc $\Phi(y) \in (\ell^p)'$ avec $\|\Phi(y)\| \leq \|y\|_q$.

Pour l'égalité, si $1 < p < \infty$, on prend $x_n = |y_n|^{q-2} \bar{y}_n$ (avec $x_n = 0$ si $y_n = 0$). Alors $|x_n|^p = |y_n|^{p(q-1)} = |y_n|^q$, donc $\|x\|_p = \|y\|_q^{q/p}$ et $\Phi(y)(x) = \sum |y_n|^q = \|y\|_q^q$. Ainsi $\|\Phi(y)\| \geq \|y\|_q^q / \|y\|_q^{q/p} = \|y\|_q$. Le cas $p = 1$ est analogue en prenant $x = e_{n_0}$ où $|y_{n_0}|$ est proche de $\|y\|_\infty$.

Φ est surjectif. Soit $f \in (\ell^p)'$. Posons $y_n = f(e_n)$ où (e_n) est la base canonique. Pour tout N , considérons $x^{(N)} = \sum_{n=1}^N x_n e_n$ avec les x_n comme ci-dessus. Alors $f(x^{(N)}) = \sum_{n=1}^N x_n y_n$ et $|f(x^{(N)})| \leq \|f\| \|x^{(N)}\|_p$.

Pour $1 < p < \infty$, en prenant $x_n = |y_n|^{q-2} \bar{y}_n : \sum_{n=1}^N |y_n|^q \leq \|f\| \left(\sum_{n=1}^N |y_n|^q \right)^{1/p}$, d'où $\left(\sum_{n=1}^N |y_n|^q \right)^{1/q} \leq \|f\|$ pour tout N . Donc $y \in \ell^q$ avec $\|y\|_q \leq \|f\|$.

Par densité des suites à support fini dans ℓ^p , $f = \Phi(y)$. □

Remarque 4.16. Le dual de ℓ^∞ est strictement plus grand que ℓ^1 : il s'identifie à l'espace $\text{ba}(\mathbb{N})$ des mesures bornées finiment additives sur $\mathbb{N}$, qui contient des éléments non représentables par des suites sommables (comme les limites de Banach).

4.4.1 Bidual et injection canonique

Définition 4.17 (Bidual, injection canonique). Soit E un espace vectoriel normé. Le **bidual** de E est l'espace $E'' := (E')'$. L'**injection canonique** est l'application

$$J : E \rightarrow E'', \quad J(x)(f) = f(x) \quad \text{pour } x \in E, f \in E'.$$

Théorème 4.18 (L'injection canonique est isométrique). *L'application $J : E \rightarrow E''$ est une isométrie linéaire : $\|J(x)\|_{E''} = \|x\|_E$ pour tout $x \in E$.*

Démonstration. Pour tout $x \in E$,

$$\|J(x)\|_{E''} = \sup_{\|f\|_{E'} \leq 1} |J(x)(f)| = \sup_{\|f\| \leq 1} |f(x)|.$$

D'une part, $|f(x)| \leq \|f\| \|x\| \leq \|x\|$, donc $\|J(x)\| \leq \|x\|$.

D'autre part, par le corollaire 4.7, il existe $f_0 \in E'$ avec $\|f_0\| = 1$ et $f_0(x) = \|x\|$. Donc $\|J(x)\| \geq |f_0(x)| = \|x\|$. $\square$

Corollaire 4.19. *L'injection canonique J est injective. En particulier, E s'identifie isométriquement à un sous-espace de E'' .*

4.5 Espaces réflexifs et théorème de Banach-Alaoglu

Définition 4.20 (Espace réflexif). Un espace de Banach E est dit **réflexif** si l'injection canonique $J : E \rightarrow E''$ est surjective (et donc un isomorphisme isométrique).

Exemple 4.21. (i) Les espaces de Hilbert sont réflexifs (par le théorème de Riesz).

(ii) ℓ^p est réflexif pour $1 < p < \infty$, car $(\ell^p)'' \cong (\ell^q)' \cong \ell^p$.

(iii) ℓ^1 n'est pas réflexif : $(\ell^1)' = \ell^\infty$ et $(\ell^\infty)' \supsetneq \ell^1$.

(iv) $L^p(\mu)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$.

- (v) $c_0, \ell^1, \ell^\infty, L^1, L^\infty, C([0, 1])$ ne sont pas réflexifs.
- (vi) Tout espace de Banach de dimension finie est réflexif.

Proposition 4.22 (Propriétés des espaces réflexifs). *(i) Un espace de Banach réflexif est séparable si et seulement si son dual l'est.*
(ii) Un sous-espace fermé d'un espace réflexif est réflexif.
(iii) Un espace de Banach est réflexif si et seulement si son dual l'est.

Définition 4.23 (Topologie faible-*). Soit E un espace vectoriel normé. La **topologie faible-*** sur E' , notée $\sigma(E', E)$, est la topologie la moins fine rendant continues toutes les applications $f \mapsto f(x)$ pour $x \in E$. Une suite (f_n) dans E' converge faible-* vers f (noté $f_n \xrightarrow{*} f$) si et seulement si $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pour tout $x \in E$.

Remarque 4.24. La topologie faible-* est moins fine que la topologie faible $\sigma(E', E'')$, qui est elle-même moins fine que la topologie forte (normique) de E' . En dimension infinie, ces topologies sont toutes distinctes.

Théorème 4.25 (Banach-Alaoglu). *Soit E un espace vectoriel normé. La boule unité fermée $\overline{B}_{E'} = \{f \in E' : \|f\| \leq 1\}$ est compacte pour la topologie faible-**.

Idee de la preuve. Pour chaque $x \in E$, soit $D_x = \{\alpha \in \mathbb{K} : |\alpha| \leq \|x\|\}$. Chaque D_x est compact. L'application

$$\Phi : \overline{B}_{E'} \rightarrow \prod_{x \in E} D_x, \quad f \mapsto (f(x))_{x \in E}$$

est bien définie (car $|f(x)| \leq \|f\| \|x\| \leq \|x\|$), injective et continue pour la topologie faible-* sur $\overline{B}_{E'}$ et la topologie produit sur $\prod D_x$.

Par le théorème de Tychonov, $\prod_{x \in E} D_x$ est compact. Il suffit de montrer que $\Phi(\overline{B}_{E'})$ est fermé dans le produit. Si un réseau $\Phi(f_\alpha)$ converge vers $(\xi_x)_{x \in E}$ dans le produit, alors $f_\alpha(x) \rightarrow \xi_x$ pour tout x . On vérifie que $g : x \mapsto \xi_x$ est linéaire (par passage à la limite) et bornée ($|\xi_x| \leq \|x\|$), donc $g \in \overline{B}_{E'}$ et $\Phi(g) = (\xi_x)$. Ainsi $\Phi(\overline{B}_{E'})$ est fermé, donc compact, et $\overline{B}_{E'}$ est compacte pour la topologie faible-*. $\square$

Remarque 4.26. Si E est réflexif, la topologie faible-* sur $E' = E''$ coïncide avec la topologie faible $\sigma(E', E'')$ via l'identification J . Le théorème de Banach-Alaoglu montre alors que la boule unité de E est faiblement compacte. Réciproquement, un résultat profond (théorème d'Eberlein-Šmulian) affirme que la boule unité d'un espace de Banach est faiblement compacte si et seulement si l'espace est réflexif.

4.6 Exercices

Exercice 4.1 (Prolongement concret). Soit $F = \{(x_n) \in \ell^\infty : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ existe}\}$ et $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f((x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

- (a) Montrer que $f \in F'$ et calculer $\|f\|$.
- (b) Par Hahn-Banach, f se prolonge en $\tilde{f} \in (\ell^\infty)'$ avec $\|\tilde{f}\| = 1$. Un tel prolongement est-il unique ?
- (c) Montrer qu'un prolongement positif (i.e. $\tilde{f}(x) \geq 0$ si $x_n \geq 0$ pour tout n) est invariant par translation : $\tilde{f}(Sx) = \tilde{f}(x)$ où S est le shift.

Exercice 4.2 (Annihlateur). Soit E un espace vectoriel normé et $M \subset E$ un sous-espace. On définit l'annihlateur $M^\perp = \{f \in E' : f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in M\}$.

- (a) Montrer que $M^\perp$ est un sous-espace fermé de E' .
- (b) Montrer que $(\overline{M})^\perp = M^\perp$.
- (c) Montrer que $E'/M^\perp$ est isométriquement isomorphe à $\overline{M}'$.
- (d) Si M est fermé, montrer que $M' \cong E'/M^\perp$ (isométriquement).

Exercice 4.3 (Hahn-Banach et sous-espaces de codimension finie). Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie.

- (a) Montrer que tout sous-espace fermé de codimension finie est l'intersection de noyaux de formes linéaires continues.
- (b) Montrer que tout sous-espace de codimension 1 est soit fermé soit dense.

Exercice 4.4 (Séparation et enveloppe convexe fermée). Soit E un espace vectoriel normé et $A \subset E$.

- (a) Montrer que $\overline{\text{conv}(A)} = \bigcap \{C : C \text{ convexe fermé, } A \subset C\}$.
- (b) En déduire que $x \in \overline{\text{conv}(A)}$ si et seulement si $f(x) \leq \sup_{a \in A} f(a)$ pour toute $f \in E'$.

Exercice 4.5 (Non-réflexivité de c_0). (a) Montrer que $(c_0)' \cong \ell^1$.

- (b) En déduire $(c_0)'' \cong \ell^\infty$.
- (c) Montrer que l'injection canonique $J : c_0 \rightarrow \ell^\infty$ est l'inclusion naturelle, et conclure que c_0 n'est pas réflexif.

Exercice 4.6 (Jauge et convexes). Soit C un convexe ouvert d'un espace vectoriel normé réel E avec $0 \in C$.

- (a) Montrer que p_C est la plus grande fonctionnelle sous-linéaire q vérifiant $q \leq 1$ sur C .
- (b) Si C est de plus borné et symétrique, montrer que p_C est une norme et que $C = \{x : p_C(x) < 1\}$.
- (c) Calculer p_C lorsque $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$.

Exercice 4.7 (Topologie faible-* et métrisabilité). Soit E un espace de Banach séparable de dual E' .

- (a) Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite dense dans la boule unité de E . Montrer que

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f(x_n) - g(x_n)|$$

définit une distance sur $\overline{B}_{E'}$ dont la topologie coïncide avec la topologie faible-* restreinte à $\overline{B}_{E'}$.

- (b) En déduire que $\overline{B}_{E'}$ est faible-* séquentiellement compacte.
- (c) Ceci est-il vrai sans l'hypothèse de séparabilité de E ?

Exercice 4.8 (Dual de L^p). Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ -fini et $1 \leq p < \infty$.

- (a) Montrer que l'application $\Phi : L^q \rightarrow (L^p)'$ définie par $\Phi(g)(f) =$

$\int fg \, d\mu$ est une isométrie.

- (b) Montrer la surjectivité de Φ dans le cas $p = 2$ en utilisant le théorème de Riesz.
- (c) Admettre le cas général (théorème de Radon-Nikodym) et en déduire la réflexivité de L^p pour $1 < p < \infty$.

- Exercice 4.9** (Applications du théorème de séparation). (a) Soit E un e.v.n. réel et $C \subset E$ un convexe fermé non vide. Montrer que $C = \bigcap \{H^+ : H^+ \text{ demi-espace fermé contenant } C\}$.
- (b) Soit $C \subset E$ convexe fermé et $x_0 \notin C$. Montrer qu'il existe $f \in E'$ telle que $f(x_0) > \sup_{x \in C} f(x)$.
 - (c) (**Théorème de Mazur**) Montrer que la fermeture faible d'un convexe coïncide avec sa fermeture forte.

- Exercice 4.10** (Bidual et réflexivité). (a) Soit E un espace de Banach réflexif et F un sous-espace fermé. Montrer que F est réflexif. *Indication : utiliser l'exercice 4.2(d).*
- (b) Montrer qu'un espace de Banach E est réflexif si et seulement si E' est réflexif.
 - (c) Montrer que si E est réflexif, alors toute forme linéaire continue sur E atteint sa norme, c'est-à-dire : pour tout $f \in E'$, il existe $x_0 \in E$ avec $\|x_0\| = 1$ et $f(x_0) = \|f\|$. (**Théorème de James**, direction facile.)

Chapitre 5

Théorème de Banach-Steinhaus et Applications

Contents

5.1	Le théorème de Baire	80
5.2	Le théorème de Banach-Steinhaus	82
5.3	Applications aux suites de fonctionnelles	84
5.4	Convergence forte versus convergence uniforme d'opérateurs	84
5.5	Application aux séries de Fourier : théorème de du Bois-Reymond	86
5.5.1	Noyau de Dirichlet et sommes partielles de Fourier	86
5.6	Théorème de condensation de Banach-Steinhaus .	88
5.7	Principe de borne uniforme pour les familles d'opé- rateurs	89
5.8	Le phénomène de Gibbs et le noyau de Dirichlet .	91
5.9	Exercices	92

Ce chapitre est consacré au *principe de borne uniforme*, l'un des quatre grands théorèmes de l'analyse fonctionnelle. Ce résultat, dû à Stefan Banach et Hugo Steinhaus (1927), établit qu'une famille d'opérateurs linéaires continus qui est bornée ponctuellement est nécessairement bornée uniformément en norme. La preuve repose de manière essentielle sur le *théorème de Baire*, que nous démontrons en premier lieu.

5.1 Le théorème de Baire

Le théorème de Baire est un résultat fondamental de topologie générale qui fournit des informations sur la « taille » des intersections dénombrables d'ouverts denses. Il admet deux formulations équivalentes.

Définition 5.1 (Ensemble maigre et ensemble résiduel). Soit (X, d) un espace métrique.

- (i) Un sous-ensemble $A \subset X$ est dit *nulle part dense* (ou *rare*) si $\bar{A}^\circ = \emptyset$.
- (ii) Un sous-ensemble $A \subset X$ est dit *maigre* (ou *de première catégorie*) s'il est réunion dénombrable d'ensembles nulle part denses.
- (iii) Un sous-ensemble $A \subset X$ est dit *résiduel* (ou *de deuxième catégorie en lui-même*) si son complémentaire $X \setminus A$ est maigre.

Exemple 5.2. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est maigre dans $\mathbb{R}$: en effet, $\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$, et chaque singleton $\{q\}$ est fermé d'intérieur vide, donc nulle part dense.

Exemple 5.3. L'ensemble de Cantor $\mathcal{C} \subset [0, 1]$ est fermé d'intérieur vide (car il ne contient aucun intervalle ouvert), donc nulle part dense, et a fortiori maigre. Pourtant, $\mathcal{C}$ est non dénombrable.

Théorème 5.4 (Théorème de Baire). Soit (X, d) un espace métrique complet. Alors :

- (i) Toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense dans X .
- (ii) X n'est pas maigre en lui-même : X ne peut pas s'écrire comme réunion dénombrable d'ensembles nulle part denses.

Démonstration. Montrons d'abord (i). Soient $(U_n)_{n \geq 1}$ des ouverts denses de X . Nous devons montrer que $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ est dense dans X , c'est-à-dire que pour tout ouvert non vide $V \subset X$, on a $G \cap V \neq \emptyset$.

Soit $V \subset X$ un ouvert non vide. Comme U_1 est dense et ouvert, $V \cap U_1$ est un ouvert non vide. Il existe donc une boule ouverte $B(x_1, r_1) \subset V \cap U_1$ avec $0 < r_1 < 1$.

Par récurrence, supposons construite une boule $B(x_n, r_n)$ avec $0 < r_n < 1/n$ et $\overline{B(x_n, r_n)} \subset U_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1})$ (avec la convention $B(x_0, r_0) = V$). Comme U_{n+1} est dense et ouvert, $B(x_n, r_n) \cap U_{n+1}$ est un ouvert non vide. On peut donc choisir $x_{n+1} \in X$ et $0 < r_{n+1} < \frac{1}{n+1}$ tels que

$$\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset B(x_n, r_n) \cap U_{n+1}.$$

La suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est de Cauchy : pour $m > n$, on a $x_m \in B(x_n, r_n)$, donc $d(x_n, x_m) < r_n < 1/n \rightarrow 0$. Comme X est complet, (x_n) converge vers un point $x^* \in X$.

Pour tout $n \geq 1$, et pour tout $m > n$, on a $x_m \in \overline{B(x_n, r_n)}$. Par passage à la limite, $x^* \in \overline{B(x_n, r_n)} \subset U_n$. De plus, $x^* \in \overline{B(x_1, r_1)} \subset V$. Donc $x^* \in V \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = V \cap G$.

Montrons l'équivalence avec (ii). Si $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ avec chaque F_n nulle part dense, alors $X \setminus \overline{F_n}$ est un ouvert dense pour tout n , et

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus \overline{F_n}) = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{F_n} \subset X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset,$$

ce qui contredit (i) puisqu'une intersection dénombrable d'ouverts denses devrait être dense, donc non vide (car $X \neq \emptyset$). $\square$

Remarque 5.5. Le théorème de Baire reste valable pour les espaces localement compacts de Hausdorff, même sans métrisabilité. La preuve est analogue, en utilisant la compacité locale pour extraire des boules fermées emboîtées.

Corollaire 5.6. *Dans un espace métrique complet, tout ouvert non vide est de deuxième catégorie en lui-même.*

Démonstration. Un ouvert d'un espace métrique complet est un espace de Baire (car il est homéomorphe à un espace métrique complet par le théorème d'Alexandrov). $\square$

Exercice 5.1 (*). Soit (X, d) un espace métrique complet et $A \subset X$ un sous-ensemble G_δ dense (i.e. intersection dénombrable d'ouverts denses). Montrer que A est de deuxième catégorie en lui-même.

Exercice 5.2 (★). Montrer que l'ensemble des irrationnels $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est résiduel dans $\mathbb{R}$. En déduire que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est non dénombrable.

Exercice 5.3 (★★). En utilisant le théorème de Baire, montrer que l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ qui sont dérivables en au moins un point est maigre dans $\mathcal{C}([0, 1])$. En déduire l'existence de fonctions continues nulle part dérivables.

5.2 Le théorème de Banach-Steinhaus

Nous arrivons maintenant au résultat principal de ce chapitre.

Théorème 5.7 (Banach-Steinhaus / Principe de borne uniforme). Soient X un espace de Banach, Y un espace vectoriel normé, et $(T_i)_{i \in I}$ une famille d'opérateurs linéaires continus $T_i : X \rightarrow Y$. Si cette famille est bornée ponctuellement, c'est-à-dire si

$$\forall x \in X, \quad \sup_{i \in I} \|T_i x\|_Y < +\infty,$$

alors elle est bornée uniformément :

$$\sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(X, Y)} < +\infty.$$

Démonstration. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, posons

$$F_n = \left\{ x \in X : \sup_{i \in I} \|T_i x\|_Y \leq n \right\} = \bigcap_{i \in I} \{x \in X : \|T_i x\|_Y \leq n\}.$$

Chaque F_n est une intersection de fermés (car $x \mapsto \|T_i x\|$ est continue pour chaque i), donc F_n est fermé.

Par hypothèse de bornitude ponctuelle, pour tout $x \in X$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sup_{i \in I} \|T_i x\| \leq n$, c'est-à-dire $x \in F_n$. Donc $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

Comme X est un espace de Banach (donc complet), le théorème de Baire (Théorème 5.4) implique qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que F_{n_0} est d'intérieur non vide : il existe $x_0 \in X$ et $r > 0$ tels que $B(x_0, r) \subset F_{n_0}$.

Soit $x \in X$ avec $\|x\| \leq 1$. Alors $x_0 + rx \in B(x_0, r) \subset F_{n_0}$ et $x_0 \in F_{n_0}$, donc pour tout $i \in I$:

$$\|T_i(rx)\|_Y = \|T_i(x_0 + rx) - T_i(x_0)\|_Y \leq \|T_i(x_0 + rx)\|_Y + \|T_i(x_0)\|_Y \leq n_0 + n_0 = 2n_0.$$

Par conséquent, pour tout $x \in X$ avec $\|x\| \leq 1$ et tout $i \in I$:

$$\|T_i x\|_Y \leq \frac{2n_0}{r}.$$

On en déduit $\sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \frac{2n_0}{r} < +\infty$. □

Remarque 5.8. L'hypothèse de complétude de X est **essentielle**. Considérons $X = c_{00}$ (suites à support fini) muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, et les fonctionnelles linéaires $f_n : X \rightarrow \mathbb{K}$ définies par $f_n(x) = n x_n$. Pour tout $x \in c_{00}$ fixé, $x_n = 0$ pour n assez grand, donc $\sup_n |f_n(x)| < +\infty$. Pourtant $\|f_n\| = n \rightarrow +\infty$.

Remarque 5.9. L'espace Y n'a pas besoin d'être complet. Seule la complétude du domaine X est requise.

Corollaire 5.10. Soient X un espace de Banach, Y un espace vectoriel normé, et $(T_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ une suite d'opérateurs. Si pour tout $x \in X$, la suite $(T_n x)_{n \geq 1}$ converge dans Y , alors :

- (i) $\sup_{n \geq 1} \|T_n\| < +\infty$;
- (ii) L'application $T : X \rightarrow Y$ définie par $Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$ est linéaire continue ;
- (iii) $\|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|$.

Démonstration. (i) est une conséquence immédiate du théorème de Banach-Steinhaus, car une suite convergente est bornée.

(ii) La linéarité de T est claire par passage à la limite. Pour la continuité, soit $M = \sup_n \|T_n\|$. Pour tout $x \in X$, $\|T_n x\| \leq M \|x\|$ pour tout n , donc par passage à la limite :

$$\|Tx\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\| \leq M \|x\|.$$

Ainsi $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $\|T\| \leq M$.

(iii) Pour tout $x \in X$ avec $\|x\| \leq 1$, $\|Tx\| = \lim_n \|T_n x\| \leq \liminf_n \|T_n\|$, d'où le résultat. □

5.3 Applications aux suites de fonctionnelles

Proposition 5.11 (Convergence faible-* dans le dual). *Soient X un espace de Banach et $(f_n)_{n \geq 1} \subset X^*$ une suite de fonctionnelles linéaires continues. Si (f_n) converge dans la topologie faible-*, c'est-à-dire si pour tout $x \in X$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ existe dans $\mathbb{K}$, alors :*

- (i) $\sup_n \|f_n\|_{X^*} < +\infty$;
- (ii) La limite $f(x) = \lim_n f_n(x)$ définit un élément $f \in X^*$;
- (iii) $\|f\|_{X^*} \leq \liminf_n \|f_n\|_{X^*}$.

Démonstration. C'est un cas particulier du Corollaire 5.10 avec $Y = \mathbb{K}$. $\square$

Exemple 5.12 (Suite faible-* convergente dans ℓ^∞). Considérons $X = \ell^1$ et $X^* = \ell^\infty$. Soit $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ le n -ième vecteur canonique de ℓ^∞ . Pour tout $x = (x_k) \in \ell^1$, on a $e_n(x) = x_n \rightarrow 0$ car $\sum |x_k| < \infty$. Donc $e_n \xrightarrow{*} 0$. Pourtant $\|e_n\|_{\ell^\infty} = 1$ pour tout n : la convergence faible-* n'entraîne pas la convergence en norme.

Proposition 5.13 (Principe de fonctionnelles bornées ponctuellement). *Soit X un espace de Banach et $A \subset X^*$ un sous-ensemble du dual. Si A est ponctuellement borné, c'est-à-dire si $\sup_{f \in A} |f(x)| < +\infty$ pour tout $x \in X$, alors A est borné en norme : $\sup_{f \in A} \|f\|_{X^*} < +\infty$.*

Démonstration. Application directe du Théorème 5.7 avec $Y = \mathbb{K}$ et la famille $(T_f)_{f \in A}$ où $T_f = f$. $\square$

5.4 Convergence forte versus convergence uniforme d'opérateurs

Définition 5.14 (Modes de convergence d'opérateurs). Soient X et Y des espaces vectoriels normés et $(T_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{L}(X, Y)$.

- (i) On dit que (T_n) converge en norme (ou uniformément) vers $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ si $\|T_n - T\| \rightarrow 0$.
- (ii) On dit que (T_n) converge fortement (ou ponctuellement) vers T

si $\|T_n x - T x\| \rightarrow 0$ pour tout $x \in X$.

Proposition 5.15. *La convergence en norme entraîne la convergence forte, mais la réciproque est fautive en général.*

Démonstration. Si $\|T_n - T\| \rightarrow 0$, alors pour tout $x \in X$: $\|T_n x - T x\| \leq \|T_n - T\| \|x\| \rightarrow 0$. La réciproque est fautive : considérer par exemple les projections $P_n : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ définies par $P_n(x_1, x_2, \dots) = (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$. On a $P_n x \rightarrow x$ pour tout $x \in \ell^2$, mais $\|P_n - \text{Id}\| = 1$ pour tout n . $\square$

Théorème 5.16 (Principe de Banach-Steinhaus pour les suites d'opérateurs). *Soient X un espace de Banach, Y un espace vectoriel normé et $(T_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) (T_n) converge fortement ;
- (ii) (T_n) est bornée en norme **et** converge sur un sous-ensemble dense de X .

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) : Si (T_n) converge fortement, le Corollaire 5.10 donne $\sup_n \|T_n\| < +\infty$, et $(T_n x)$ converge a fortiori sur tout sous-ensemble dense.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Soit $D \subset X$ un sous-ensemble dense sur lequel (T_n) converge, et soit $M = \sup_n \|T_n\| < +\infty$. Soit $x \in X$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $y \in D$ tel que $\|x - y\| < \varepsilon$. Comme $(T_n y)$ converge, il existe N tel que pour $m, n \geq N$, $\|T_n y - T_m y\| < \varepsilon$. Alors pour $m, n \geq N$:

$$\begin{aligned} \|T_n x - T_m x\| &\leq \|T_n(x - y)\| + \|T_n y - T_m y\| + \|T_m(y - x)\| \\ &\leq M \|x - y\| + \varepsilon + M \|x - y\| \\ &\leq (2M + 1)\varepsilon. \end{aligned}$$

Donc $(T_n x)$ est de Cauchy dans Y . Si Y est complet, $(T_n x)$ converge. Si Y n'est pas complet, on utilise le fait que la suite est de Cauchy et que la complétude de Y n'est pas nécessaire si on sait a priori que la limite existe (par exemple sur D , et on prolonge par continuité uniforme).

En fait, une formulation plus précise : on suppose que $(T_n y)$ converge pour tout $y \in D$, et si Y est un espace de Banach, alors $(T_n x)$ converge pour tout $x \in X$. Si Y n'est pas complet, la conclusion est que $(T_n x)$ est de Cauchy pour tout $x \in X$. $\square$

5.5 Application aux séries de Fourier : théorème de du Bois-Reymond

L'une des applications les plus frappantes du théorème de Banach-Steinhaus est la démonstration de l'existence de fonctions continues dont la série de Fourier diverge en un point.

5.5.1 Noyau de Dirichlet et sommes partielles de Fourier

Définition 5.17 (Coefficients et sommes partielles de Fourier). Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$, où $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ désigne le tore. Les *coefficients de Fourier* de f sont

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

La N -ième somme partielle de Fourier est

$$S_N f(x) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{inx}.$$

Définition 5.18 (Noyau de Dirichlet). Le *noyau de Dirichlet* d'ordre N est la fonction

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^N e^{int} = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)}, \quad t \neq 0.$$

On a alors la formule de convolution :

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt = (f * D_N)(x).$$

Lemme 5.19 (Norme L^1 du noyau de Dirichlet). On a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)| dt = \frac{4}{\pi^2} \ln N + O(1) \quad \text{quand } N \rightarrow \infty.$$

En particulier, $\|D_N\|_{L^1(\mathbb{T})} \rightarrow +\infty$.

5.5. APPLICATION AUX SÉRIES DE FOURIER : THÉORÈME DE DU BOIS-REYMOND 87

Démonstration. On utilise $|\sin(t/2)| \geq |t|/\pi$ pour $t \in [-\pi, \pi]$ et on majore/minore par des sommes harmoniques :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)| \, dt &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin((N + \frac{1}{2})t)|}{\sin(t/2)} \, dt \\
 &\geq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin((N + \frac{1}{2})t)|}{t/2} \, dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{(N+1/2)\pi} \frac{|\sin u|}{u} \, du \\
 &\geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin u|}{u} \, du \\
 &\geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin u| \, du \\
 &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{2}{k\pi} = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} = \frac{4}{\pi^2} \ln N + O(1).
 \end{aligned}$$

La majoration supérieure est analogue. □

Théorème 5.20 (du Bois-Reymond, 1876). *Il existe une fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ dont la série de Fourier diverge en un point. Plus précisément, l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ telles que $(S_N f(0))_{N \geq 0}$ est borné est maigre dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$.*

Démonstration. Considérons les fonctionnelles linéaires $\Lambda_N : \mathcal{C}(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{K}$ définies par

$$\Lambda_N(f) = S_N f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-t) D_N(t) \, dt.$$

Chaque Λ_N est linéaire continue sur $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$, et

$$\|\Lambda_N\| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)| \, dt.$$

En effet, l'inégalité $\leq$ est immédiate. Pour l'égalité, on approche $\text{sgn}(D_N)$ par des fonctions continues.

Par le Lemme 5.19, $\|\Lambda_N\| \rightarrow +\infty$.

Or $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ est un espace de Banach. Si pour toute $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, la suite $(S_N f(0))_N$ était bornée, le théorème de Banach-Steinhaus donnerait $\sup_N \|\Lambda_N\| < +\infty$, ce qui est une contradiction.

Donc il existe $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ telle que $\sup_N |S_N f(0)| = +\infty$.

Pour l'affirmation plus forte, notons $A = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}) : \sup_N |S_N f(0)| < +\infty\}$. Alors $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ avec $A_k = \{f : |S_N f(0)| \leq k \text{ pour tout } N\}$. Chaque A_k est fermé (par continuité des Λ_N) et d'intérieur vide (car sinon, en raisonnant comme dans la preuve du théorème de Banach-Steinhaus, on obtiendrait $\sup_N \|\Lambda_N\| < \infty$). Donc A est maigre. $\square$

Remarque 5.21. Le théorème de Carleson (1966) montre que pour $f \in L^2(\mathbb{T})$, la série de Fourier converge presque partout. Le théorème de du Bois-Reymond montre que la convergence *ponctuelle en tout point* ne peut pas être garantie, même pour les fonctions continues.

5.6 Théorème de condensation de Banach-Steinhaus

Le théorème de condensation est un renforcement du principe de borne uniforme qui décrit la structure de l'ensemble des points où la bornitude ponctuelle échoue.

Théorème 5.22 (Condensation de Banach-Steinhaus). *Soient X un espace de Banach, Y un espace vectoriel normé et $(T_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ une suite d'opérateurs telle que $\sup_n \|T_n\| = +\infty$. Alors l'ensemble*

$$\mathcal{R} = \left\{ x \in X : \sup_{n \geq 1} \|T_n x\|_Y = +\infty \right\}$$

est un G_δ dense dans X . En particulier, $\mathcal{R}$ est résiduel.

Démonstration. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, posons

$$U_k = \left\{ x \in X : \exists n \geq 1, \|T_n x\|_Y > k \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in X : \|T_n x\|_Y > k \right\}.$$

Chaque ensemble $\{x : \|T_n x\|_Y > k\}$ est ouvert (par continuité de T_n), donc U_k est ouvert. De plus,

$$\mathcal{R} = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k,$$

donc $\mathcal{R}$ est un G_δ .

Il reste à montrer que chaque U_k est dense. Supposons par l'absurde que U_k n'est pas dense pour un certain k . Alors il existe une boule ouverte $B(x_0, r)$

telle que $B(x_0, r) \cap U_k = \emptyset$, ce qui signifie que pour tout $x \in B(x_0, r)$ et tout n , $\|T_n x\| \leq k$.

Par le même argument que dans la preuve du Théorème 5.7, pour tout x avec $\|x\| \leq 1$:

$$\|T_n x\| \leq \frac{2k}{r} \quad \text{pour tout } n.$$

Donc $\sup_n \|T_n\| \leq 2k/r < +\infty$, ce qui contredit l'hypothèse $\sup_n \|T_n\| = +\infty$. Donc U_k est dense.

Par le théorème de Baire, $\mathcal{R} = \bigcap_k U_k$ est un G_δ dense. $\square$

Corollaire 5.23. *L'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ telles que $(S_N f(0))_N$ est non bornée est un G_δ dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. En d'autres termes, la divergence de la série de Fourier en 0 est générique.*

Démonstration. Les fonctionnelles Λ_N de la preuve du Théorème 5.20 satisfont $\sup_N \|\Lambda_N\| = +\infty$. Le résultat découle directement du Théorème 5.22. $\square$

5.7 Principe de borne uniforme pour les familles d'opérateurs

Théorème 5.24 (Principe de borne uniforme, version bilinéaire). *Soient X et Y des espaces de Banach et $B : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire séparément continue (i.e. $B(\cdot, y)$ est continue pour tout y fixé, et $B(x, \cdot)$ est continue pour tout x fixé). Alors B est continue (conjointement) :*

$$\exists C > 0, \quad \forall (x, y) \in X \times Y, \quad |B(x, y)| \leq C \|x\|_X \|y\|_Y.$$

Démonstration. Pour chaque $x \in X$, l'application $y \mapsto B(x, y)$ est une fonctionnelle linéaire continue sur Y . Notons-la $T_x \in Y^*$. La famille $(T_x)_{x \in B_X}$ (où B_X est la boule unité fermée de X) est ponctuellement bornée : pour tout $y \in Y$,

$$\sup_{\|x\| \leq 1} |T_x(y)| = \sup_{\|x\| \leq 1} |B(x, y)| \leq \|B(\cdot, y)\|_{X^*} \|x\| < +\infty,$$

car $B(\cdot, y)$ est continue donc bornée sur B_X .

Par le théorème de Banach-Steinhaus appliqué à la famille $(T_x)_{\|x\| \leq 1}$ dans $\mathcal{L}(Y, \mathbb{K})$ avec Y espace de Banach :

$$C := \sup_{\|x\| \leq 1} \|T_x\|_{Y^*} < +\infty.$$

Pour tout (x, y) avec $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| \leq 1$: $|B(x, y)| = |T_x(y)| \leq \|T_x\| \leq C$.
Le cas général suit par homogénéité. $\square$

Exemple 5.25 (Application à l'espace ℓ^2). Soit $A = (a_{ij})_{i,j \geq 1}$ une matrice infinie telle que pour tout $x \in \ell^2$ et tout $y \in \ell^2$, la série $\sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j$ converge. Alors il existe $C > 0$ tel que

$$\left| \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} x_i y_j \right| \leq C \|x\|_{\ell^2} \|y\|_{\ell^2}.$$

Proposition 5.26 (Principe de borne uniforme pour les opérateurs bornés). Soient X, Y, Z des espaces de Banach et $(T_i)_{i \in I} \subset \mathcal{L}(X, Y)$, $(S_j)_{j \in J} \subset \mathcal{L}(Y, Z)$ des familles d'opérateurs. Si

$$\forall (i, j) \in I \times J, \quad \|S_j T_i\|_{\mathcal{L}(X, Z)} \leq M$$

pour une constante $M > 0$, alors

$$\sup_{j \in J} \|S_j\| < +\infty \quad \text{ou} \quad \sup_{i \in I} \|T_i\| < +\infty.$$

Démonstration. Supposons $\sup_i \|T_i\| = +\infty$. Pour tout y dans l'image d'un T_i , on a un contrôle. Plus précisément, pour tout $x \in X$ et tout $j \in J$: $\|S_j T_i x\| \leq M \|x\|$. En prenant le sup sur $\|x\| \leq 1$: $\|S_j\| \cdot \|T_i\| \leq M / \|x\| \dots$

En fait, on raisonne directement : pour tout $x \in X$ fixé, $\sup_j \|S_j(T_i x)\| \leq M \|x\|$ pour tout i . Pour tout $y \in \overline{\bigcup_i T_i(B_X)}$, on a $\sup_j \|S_j y\| < +\infty$. Si $\overline{\text{span}(\bigcup_i \text{im } T_i)} = Y$, alors Banach-Steinhaus donne $\sup_j \|S_j\| < +\infty$. $\square$

5.8 Le phénomène de Gibbs et le noyau de Dirichlet

Définition 5.27 (Noyau de Fejér). Le *noyau de Fejér* d'ordre N est défini par

$$K_N(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N D_n(t) = \frac{1}{N+1} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{(N+1)t}{2}\right)}{\sin^2(t/2)}.$$

Proposition 5.28 (Propriétés du noyau de Fejér). *Le noyau de Fejér satisfait :*

- (i) $K_N(t) \geq 0$ pour tout t ;
- (ii) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) dt = 1$;
- (iii) Pour tout $\delta > 0$, $\sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} K_N(t) \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow \infty$.
Autrement dit, (K_N) est une approximation de l'identité.

Démonstration. (i) est immédiat par la formule explicite (carré au numérateur et au dénominateur).

(ii) Par linéarité et $\frac{1}{2\pi} \int D_n = 1$: $\frac{1}{2\pi} \int K_N = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N 1 = 1$.

(iii) Pour $|t| \geq \delta$, $\sin^2(t/2) \geq \sin^2(\delta/2) > 0$, donc $K_N(t) \leq \frac{1}{(N+1)\sin^2(\delta/2)} \rightarrow 0$. $\square$

Théorème 5.29 (Fejér). Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, alors les moyennes de Cesàro des sommes partielles de Fourier,

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N S_n f(x) = (f * K_N)(x),$$

convergent uniformément vers f .

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue sur $\mathbb{T}$ (compact), il existe $\delta > 0$ tel que $|t| < \delta \Rightarrow |f(x-t) - f(x)| < \varepsilon$ pour tout x .

Alors

$$\begin{aligned} |\sigma_N f(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) K_N(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < \delta} |f(x-t) - f(x)| K_N(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \geq \delta} |f(x-t) - f(x)| K_N(t) dt \\ &\leq \varepsilon \cdot 1 + 2 \|f\|_{\infty} \cdot \frac{\pi}{(N+1) \sin^2(\delta/2)}. \end{aligned}$$

Pour N assez grand, le second terme est $< \varepsilon$, d'où la convergence uniforme. $\square$

Le phénomène de Gibbs décrit le comportement des sommes partielles de Fourier près d'une discontinuité de saut.

Théorème 5.30 (Phénomène de Gibbs). *Considérons la fonction $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \operatorname{sgn}(t)$ pour $t \neq 0$ (et étendue par 2π -périodicité). Alors :*

- (i) $S_N f(0) = 0$ pour tout N ;
- (ii) $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f\left(\frac{\pi}{N}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \approx 1,1790$, ce qui représente un dépassement d'environ 9% par rapport à la valeur 1 de f en 0^+ .

Démonstration. (i) Par imparité de f et de $\sin(nt)$, on a $\hat{f}(n) = -\hat{f}(-n)$ pour $n > 0$, et $\hat{f}(0) = 0$. Donc $S_N f(0) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) = 0$.

(ii) On calcule explicitement :

$$S_N f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}.$$

En posant $x = \pi/N$ et en passant à la limite (somme de Riemann) :

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} S_N f\left(\frac{\pi}{N}\right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\pi}{N} - t\right) D_N(t) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt, \end{aligned}$$

par un changement de variables et un passage à la limite dominé. L'intégrale $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \approx 1,8519$ donne le résultat $\frac{2}{\pi} \cdot 1,8519 \approx 1,1790$. $\square$

5.9 Exercices

Exercice 5.4 (★). Soit (X, d) un espace métrique complet et $(F_n)_{n \geq 1}$ une suite de fermés telle que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Montrer qu'au moins un F_n est d'intérieur non vide.

Exercice 5.5 (★). Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction sur un espace métrique complet, qui est à la fois semi-continue inférieurement et semi-continue supérieurement. Montrer que f est continue (cet exercice est trivial, c'est un rappel). Montrer ensuite que si f est limite simple d'une suite de fonctions continues, alors l'ensemble des points de continuité de f est un G_δ dense.

Exercice 5.6 (★). Soit X un espace de Banach et $A \subset X$. Montrer que A est borné si et seulement si pour tout $f \in X^*$, $\sup_{x \in A} |f(x)| < +\infty$. (*Indication : utiliser le plongement canonique $J : X \rightarrow X^{**}$ et le principe de borne uniforme.*)

Exercice 5.7 (★★). En utilisant le théorème de condensation (Théorème 5.22), montrer qu'il existe $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ dont la série de Fourier diverge en tout point rationnel (i.e. en tout point de la forme $2\pi p/q$, $p/q \in \mathbb{Q}$).

Exercice 5.8 (★★). Soit $1 \leq p < \infty$ et $(a^{(n)})_{n \geq 1}$ une suite dans ℓ^p telle que pour tout $x \in \ell^q$ (où $1/p + 1/q = 1$), la série $\sum_k a_k^{(n)} x_k$ converge et $\sup_n \left| \sum_k a_k^{(n)} x_k \right| < \infty$. Montrer que $\sup_n \|a^{(n)}\|_{\ell^p} < \infty$.

Exercice 5.9 (★★). Soit $A = (a_{ij})_{i,j \geq 1}$ une matrice infinie telle que pour tout $x = (x_j) \in \ell^2$, la suite (y_i) définie par $y_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j$ est dans ℓ^2 . Montrer que l'opérateur $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ ainsi défini est borné. (*Utiliser le théorème du graphe fermé, ou Banach-Steinhaus avec les projections.*)

Exercice 5.10 (★★). Soit X un espace de Banach et $(x_n) \subset X$ telle que $x_n \rightharpoonup x$ (convergence faible). Montrer que (x_n) est bornée et que $\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|$. (*Utiliser $J(x_n) \in X^{**}$ et Banach-Steinhaus.*)

Exercice 5.11 (★ ★ ★). Construire un exemple d'un espace vectoriel normé *non complet* X et d'une suite $(f_n) \subset X^*$ telle que $\sup_n |f_n(x)| < \infty$ pour tout $x \in X$, mais $\sup_n \|f_n\| = +\infty$. Pourquoi cela ne contredit-il pas le théorème de Banach-Steinhaus ?

Exercice 5.12 (★ ★ ★). Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1])$. Les *polynômes de Bernstein* de f sont

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

- (a) Montrer que $B_n f \rightarrow f$ uniformément.
- (b) Montrer que les opérateurs $B_n : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1])$ satisfont $\|B_n\| = 1$.
- (c) En déduire que la convergence forte $B_n \rightarrow \text{Id}$ n'implique pas la convergence en norme.

Exercice 5.13 (★ ★ ★). Soit X un espace de Banach de dimension infinie et $(T_n) \subset \mathcal{L}(X, X)$ une suite telle que $T_n \rightarrow \text{Id}$ fortement (i.e. $T_n x \rightarrow x$ pour tout x). Montrer que si chaque T_n est de rang fini, alors $\|T_n - \text{Id}\| \geq 1$ pour tout n assez grand (en utilisant le fait qu'un opérateur de rang fini ne peut pas être surjectif en dimension infinie, ou une majoration de norme).

Chapitre 6

Théorème de l'Application Ouvverte et du Graphe Fermé

Contents

6.1	Le théorème de l'application ouverte	96
6.2	Corollaire : isomorphisme de Banach	98
6.3	Le théorème du graphe fermé	99
6.4	Applications : opérateurs non bornés	101
6.5	Théorème de l'image fermée	103
6.6	Principe de factorisation	104
6.7	Espaces de Fréchet et théorème du graphe fermé généralisé	105
6.8	Exercices	106

Ce chapitre est consacré à deux autres piliers de l'analyse fonctionnelle : le *théorème de l'application ouverte* (auss appelé théorème de Banach-Schauder) et le *théorème du graphe fermé*. Ces résultats, comme le théorème de Banach-Steinhaus du chapitre précédent, reposent de manière fondamentale sur le théorème de Baire. Ils constituent des outils indispensables pour l'étude des opérateurs linéaires entre espaces de Banach.

6.1 Le théorème de l'application ouverte

Définition 6.1 (Application ouverte). Une application $f : X \rightarrow Y$ entre espaces topologiques est dite *ouverte* si l'image de tout ouvert de X est un ouvert de Y .

Remarque 6.2. Attention : une application ouverte n'est pas nécessairement continue, et une application continue n'est pas nécessairement ouverte. Par exemple, $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue mais pas ouverte (l'image de $(-1, 1)$ est $[0, 1)$, qui n'est pas ouvert).

Le lemme suivant est l'étape clé de la démonstration.

Lemme 6.3 (Lemme d'ouverture approchée). Soient X et Y des espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ un opérateur surjectif. Alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$B_Y(0, \delta) \subset \overline{T(B_X(0, 1))},$$

où $B_X(0, 1)$ et $B_Y(0, \delta)$ désignent les boules ouvertes.

Démonstration. Comme T est surjectif, $Y = T(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_X(0, n))$ (car tout $x \in X$ est dans $B_X(0, n)$ pour n assez grand). Donc

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_X(0, n))}.$$

Par le théorème de Baire (car Y est complet), il existe n_0 tel que $\overline{T(B_X(0, n_0))}$ est d'intérieur non vide : il existe $y_0 \in Y$ et $r > 0$ tels que

$$B_Y(y_0, r) \subset \overline{T(B_X(0, n_0))}.$$

Comme $y_0 \in \overline{T(B_X(0, n_0))}$, par symétrie et convexité de $\overline{T(B_X(0, n_0))}$, on obtient $B_Y(-y_0, r) \subset \overline{T(B_X(0, n_0))}$ (car $T(B_X(0, n_0))$ est symétrique : $-T(B_X(0, n_0)) = T(B_X(0, n_0))$).

Pour tout $y \in B_Y(0, r)$, on peut écrire $y = \frac{1}{2}(y_0 + y) + \frac{1}{2}(-y_0 + y)$ avec $y_0 + y \in B_Y(y_0, r)$ et $-y_0 + y \in B_Y(-y_0, r)$. Donc $y_0 + y$ et $-y_0 + y$ sont dans $\overline{T(B_X(0, n_0))}$, et par convexité de l'adhérence d'un ensemble convexe :

$$y = \frac{1}{2}(y_0 + y) + \frac{1}{2}(-y_0 + y) \in \overline{T(B_X(0, n_0))}.$$

Donc $B_Y(0, r) \subset \overline{T(B_X(0, n_0))}$.

Par homogénéité (T est linéaire), $\overline{T(B_X(0, n_0))} = n_0 \overline{T(B_X(0, 1))}$, donc

$$B_Y\left(0, \frac{r}{n_0}\right) \subset \overline{T(B_X(0, 1))}.$$

On pose $\delta = r/n_0 > 0$. □

Théorème 6.4 (Théorème de l'application ouverte / Banach-Schauer). *Soient X et Y des espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ surjectif. Alors T est une application ouverte. Plus précisément, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$B_Y(0, \delta) \subset T(B_X(0, 1)).$$

Démonstration. Par le Lemme 6.3, il existe $\delta > 0$ tel que $B_Y(0, 2\delta) \subset \overline{T(B_X(0, 1))}$. Par homogénéité, pour tout $n \geq 1$:

$$B_Y(0, 2\delta \cdot 2^{-n}) \subset \overline{T(B_X(0, 2^{-n}))}. \quad (6.1)$$

Montrons que $B_Y(0, \delta) \subset T(B_X(0, 1))$.

Soit $y \in B_Y(0, \delta)$, donc $\|y\| < \delta$. Comme $\|y\| < \delta < 2\delta$, par (6.1) avec $n = 0$, $y \in \overline{T(B_X(0, 1))}$, donc il existe $x_0 \in B_X(0, 1)$ tel que $\|y - Tx_0\| < \delta/2$.

Par récurrence : supposons construits $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ avec $\|x_k\| < 2^{-k}$ et

$$\left\| y - T\left(\sum_{k=0}^{n-1} x_k\right) \right\| < \delta \cdot 2^{-n}.$$

Posons $y_n = y - T\left(\sum_{k=0}^{n-1} x_k\right)$. Comme $\|y_n\| < \delta \cdot 2^{-n} < 2\delta \cdot 2^{-n}$, par (6.1), il existe $x_n \in B_X(0, 2^{-n})$ tel que $\|y_n - Tx_n\| < \delta \cdot 2^{-(n+1)}$.

La série $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ converge absolument dans X car $\sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\| < \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2$. Comme X est complet, soit $x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \in X$. On a $\|x\| \leq \sum_k \|x_k\| < 2$, mais en fait $\|x_0\| < 1$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < 1$, donc $\|x\| < 2$.

Par continuité de T :

$$Tx = T\left(\sum_{k=0}^{\infty} x_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} T\left(\sum_{k=0}^n x_k\right) = y,$$

car $\|y - T(\sum_{k=0}^n x_k)\| < \delta \cdot 2^{-(n+1)} \rightarrow 0$.

Nous avons montré que pour tout $y \in B_Y(0, \delta)$, il existe $x \in X$ avec $\|x\| < 2$ et $Tx = y$. En remplaçant δ par $\delta/2$, on obtient : pour tout $y \in B_Y(0, \delta/2)$, il existe x avec $\|x\| < 1$ et $Tx = y$. Autrement dit, $B_Y(0, \delta/2) \subset T(B_X(0, 1))$.

Enfin, montrons que T est ouverte. Soit $U \subset X$ un ouvert et $y_0 = Tx_0 \in T(U)$. Comme U est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_X(x_0, r) \subset U$, i.e. $x_0 + B_X(0, r) \subset U$. Alors

$$T(U) \supset T(x_0 + B_X(0, r)) = Tx_0 + T(B_X(0, r)) \supset y_0 + B_Y(0, r\delta/2).$$

Donc y_0 est intérieur à $T(U)$, ce qui prouve que $T(U)$ est ouvert. $\square$

Remarque 6.5. Les hypothèses de complétude de X et de Y sont toutes deux nécessaires, ainsi que la surjectivité de T .

- Si X n'est pas complet : la série $\sum x_k$ pourrait ne pas converger.
- Si Y n'est pas complet : le théorème de Baire ne s'applique pas.
- Si T n'est pas surjectif : l'image de T pourrait être un sous-espace propre fermé, qui ne contient aucune boule ouverte de Y .

6.2 Corollaire : isomorphisme de Banach

Corollaire 6.6 (Isomorphisme de Banach). *Soient X et Y des espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ un opérateur bijectif. Alors $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$, c'est-à-dire que T^{-1} est automatiquement continu.*

Démonstration. L'application $T^{-1} : Y \rightarrow X$ est linéaire (vérification immédiate). Pour montrer qu'elle est continue, il suffit de montrer que T est ouverte, car alors pour tout ouvert $U \subset X$, $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ est ouvert dans Y .

Or T est surjectif (car bijectif), donc par le Théorème 6.4, T est une application ouverte. Donc T^{-1} est continue. $\square$

Remarque 6.7. Ce résultat est remarquable : pour montrer qu'un opérateur linéaire continu bijectif entre espaces de Banach est un isomorphisme topologique, il suffit de vérifier la bijectivité. La continuité de l'inverse est *gratuite*. Cela n'est pas vrai en général pour les espaces vectoriels normés non complets.

Corollaire 6.8 (Équivalence des normes). *Soit X un espace vectoriel muni de deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ telles que $(X, \|\cdot\|_1)$ et $(X, \|\cdot\|_2)$ soient des espaces de Banach. Si l'une des normes est plus fine que l'autre,*

i.e. s'il existe $C > 0$ tel que $\|x\|_2 \leq C \|x\|_1$ pour tout x , alors les deux normes sont équivalentes : il existe $c > 0$ tel que $c \|x\|_1 \leq \|x\|_2$ pour tout x .

Démonstration. L'application $\text{Id} : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2)$ est linéaire, continue (par hypothèse) et bijective. Par le Corollaire 6.6, $\text{Id}^{-1} : (X, \|\cdot\|_2) \rightarrow (X, \|\cdot\|_1)$ est continue, ce qui donne l'inégalité inverse. $\square$

Exemple 6.9. Sur l'espace $X = L^1([0, 1]) \cap L^\infty([0, 1])$, muni de la norme $\|f\|_1 = \|f\|_{L^1} + \|f\|_{L^\infty}$, $(X, \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet. La norme $\|f\|_{L^\infty}$ satisfait $\|f\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^\infty}$, mais les deux normes ne sont pas équivalentes sur X — ce qui ne contredit pas le corollaire précédent, puisque $(X, \|\cdot\|_1)$ n'est pas un espace de Banach.

Proposition 6.10 (Supplémentaire topologique). *Soit X un espace de Banach et $X = M \oplus N$ une décomposition en somme directe algébrique, où M et N sont des sous-espaces fermés. Alors la projection $P : X \rightarrow M$ parallèlement à N est continue.*

Démonstration. L'espace $M \times N$ muni de la norme $\|(m, n)\| = \|m\|_X + \|n\|_X$ est un espace de Banach (produit de Banach). L'application $\Phi : M \times N \rightarrow X$, $(m, n) \mapsto m + n$ est linéaire, continue (par l'inégalité triangulaire) et bijective (par hypothèse de somme directe). Par le Corollaire 6.6, Φ^{-1} est continue. Or $P = \pi_1 \circ \Phi^{-1}$ où $\pi_1 : M \times N \rightarrow M$ est la première projection (continue). Donc P est continue. $\square$

6.3 Le théorème du graphe fermé

Définition 6.11 (Graphe d'un opérateur). Soient X et Y des espaces vectoriels normés et $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire (éventuellement non borné), de domaine $D(T)$. Le *graphe* de T est le sous-ensemble de $X \times Y$ défini par

$$\Gamma(T) = \{(x, Tx) : x \in D(T)\} \subset X \times Y.$$

L'espace $X \times Y$ est muni de la norme produit $\|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$.

Remarque 6.12. Le graphe $\Gamma(T)$ est toujours un sous-espace vectoriel de $X \times Y$ (car T est linéaire). La question est de savoir s'il est fermé.

Définition 6.13 (Opérateur fermé). Un opérateur linéaire $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ est dit *fermé* si son graphe $\Gamma(T)$ est fermé dans $X \times Y$. De manière équivalente : si $(x_n) \subset D(T)$, $x_n \rightarrow x$ dans X et $Tx_n \rightarrow y$ dans Y , alors $x \in D(T)$ et $Tx = y$.

Exemple 6.14. L'opérateur de dérivation $T : D(T) \subset \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1])$, $Tf = f'$, avec $D(T) = \mathcal{C}^1([0, 1])$, est un opérateur fermé mais non borné.

En effet, si $f_n \rightarrow f$ uniformément et $f'_n \rightarrow g$ uniformément, alors f est dérivable et $f' = g$ (théorème classique d'analyse). Donc T est fermé. Il n'est pas borné : prendre $f_n(x) = x^n/n$, alors $\|f_n\|_\infty = 1/n \rightarrow 0$ mais $\|f'_n\|_\infty = \|x^{n-1}\|_\infty = 1$.

Exemple 6.15. L'opérateur $T : c_{00} \subset \ell^2 \rightarrow \ell^2$ défini par $T(e_n) = n e_n$ (étendu linéairement) n'est pas fermé. En effet, considérons $x_m = \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} e_n$. On a $x_m \rightarrow x = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} e_n \in \ell^2$ et $Tx_m = \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} e_n$. La suite (Tx_m) ne converge pas dans ℓ^2 car la série harmonique diverge. De plus, $x \notin c_{00}$, donc $x \notin D(T)$.

Théorème 6.16 (Théorème du graphe fermé). Soient X et Y des espaces de Banach et $T : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire (défini sur tout X). Alors T est continu si et seulement si son graphe $\Gamma(T)$ est fermé dans $X \times Y$.

Démonstration. ($\Rightarrow$) Si T est continu et $(x_n, Tx_n) \rightarrow (x, y)$ dans $X \times Y$, alors $x_n \rightarrow x$ et $Tx_n \rightarrow y$. Par continuité de T , $Tx_n \rightarrow Tx$, donc $y = Tx$ par unicité de la limite. Ainsi $(x, y) = (x, Tx) \in \Gamma(T)$.

($\Leftarrow$) Supposons que $\Gamma(T)$ est fermé dans $X \times Y$. L'espace $X \times Y$ muni de la norme $\|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$ est un espace de Banach. Comme $\Gamma(T)$ est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Banach, $\Gamma(T)$ est lui-même un espace de Banach.

Considérons les projections :

$$\begin{aligned}\pi_1 : \Gamma(T) &\rightarrow X, & (x, Tx) &\mapsto x, \\ \pi_2 : \Gamma(T) &\rightarrow Y, & (x, Tx) &\mapsto Tx.\end{aligned}$$

Les deux projections sont linéaires continues (car $\|x\| \leq \|(x, Tx)\|$ et $\|Tx\| \leq \|(x, Tx)\|$). De plus, π_1 est bijective (car T est défini sur tout X).

Par le Corollaire 6.6 (isomorphisme de Banach), $\pi_1^{-1} : X \rightarrow \Gamma(T)$ est continue. Donc $T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ est continue, comme composée d'applications continues. $\square$

Remarque 6.17. L'hypothèse $D(T) = X$ est cruciale dans le sens ($\Leftarrow$). L'Exemple 6.14 montre un opérateur à graphe fermé mais non borné, car son domaine $\mathcal{C}^1([0, 1])$ est un sous-espace propre de $\mathcal{C}([0, 1])$ (non fermé pour la norme $\|\cdot\|_\infty$).

Corollaire 6.18 (Critère séquentiel du graphe fermé). *Soient X et Y des espaces de Banach et $T : X \rightarrow Y$ linéaire. T est continu si et seulement si : pour toute suite (x_n) dans X telle que $x_n \rightarrow 0$ et $Tx_n \rightarrow y$, on a $y = 0$.*

Démonstration. ($\Rightarrow$) est évident.

($\Leftarrow$) Montrons que $\Gamma(T)$ est fermé. Soit $(x_n, Tx_n) \rightarrow (x, y)$. Alors $x_n \rightarrow x$ et $Tx_n \rightarrow y$. Posons $z_n = x_n - x$. Alors $z_n \rightarrow 0$ et $Tz_n = Tx_n - Tx \rightarrow y - Tx$. Par hypothèse, $y - Tx = 0$, donc $y = Tx$. Le Théorème 6.16 conclut. $\square$

Exemple 6.19 (Application du critère du graphe fermé). Soit $g \in L^\infty([0, 1])$ et $M_g : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$ l'opérateur de multiplication $M_g f = gf$. Montrons que M_g est borné en utilisant le critère du graphe fermé.

Si $f_n \rightarrow 0$ dans L^2 et $gf_n \rightarrow h$ dans L^2 , alors il existe une sous-suite $f_{n_k} \rightarrow 0$ p.p. et $gf_{n_k} \rightarrow h$ p.p. Comme g est bornée, $gf_{n_k} \rightarrow 0$ p.p., donc $h = 0$ p.p.

6.4 Applications : opérateurs non bornés

Le théorème du graphe fermé a des conséquences importantes pour l'étude des opérateurs non bornés, qui apparaissent naturellement en théorie spectrale et en équations aux dérivées partielles.

Définition 6.20 (Opérateur fermable). Un opérateur $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ est dit *fermable* si l'adhérence de son graphe $\overline{\Gamma(T)}$ dans $X \times Y$ est encore le graphe d'un opérateur (linéaire). Cet opérateur est alors noté $\overline{T}$ et appelé la *fermeture* de T .

Proposition 6.21 (Caractérisation des opérateurs fermables). *Un opérateur $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ est fermable si et seulement si la condition suivante est satisfaite :*

$$[x_n \in D(T), x_n \rightarrow 0, Tx_n \rightarrow y] \implies y = 0.$$

Démonstration. ($\Rightarrow$) Si T est fermable, $\overline{\Gamma(T)} = \Gamma(\overline{T})$. Si $x_n \rightarrow 0$ et $Tx_n \rightarrow y$, alors $(x_n, Tx_n) \rightarrow (0, y) \in \overline{\Gamma(T)} = \Gamma(\overline{T})$, donc $\overline{T}(0) = y$, d'où $y = 0$.

($\Leftarrow$) Supposons la condition satisfaite. Il faut vérifier que $\overline{\Gamma(T)}$ est le graphe d'une application, i.e. que si $(0, y) \in \overline{\Gamma(T)}$, alors $y = 0$. C'est exactement la condition donnée : si $(0, y) \in \overline{\Gamma(T)}$, il existe $(x_n, Tx_n) \rightarrow (0, y)$, donc $x_n \rightarrow 0$ et $Tx_n \rightarrow y$, d'où $y = 0$. $\square$

Proposition 6.22 (Norme du graphe). *Soit $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ un opérateur fermé. Alors $D(T)$ muni de la norme du graphe*

$$\|x\|_T = \|x\|_X + \|Tx\|_Y$$

est un espace de Banach. De plus, $T : (D(T), \|\cdot\|_T) \rightarrow Y$ est continu de norme ≤ 1 .

Démonstration. L'application $\Phi : (D(T), \|\cdot\|_T) \rightarrow (\Gamma(T), \|\cdot\|_{X \times Y}), x \mapsto (x, Tx)$ est une isométrie surjective. Comme $\Gamma(T)$ est fermé dans l'espace de Banach $X \times Y$, c'est un espace de Banach, et donc $(D(T), \|\cdot\|_T)$ aussi.

Enfin, $\|Tx\|_Y \leq \|x\|_X + \|Tx\|_Y = \|x\|_T$, donc $\|T\|_{(D(T), \|\cdot\|_T) \rightarrow Y} \leq 1$. $\square$

Corollaire 6.23. *Soit $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ un opérateur fermé entre espaces de Banach. Si $D(T)$ est fermé dans X , alors T est borné.*

Démonstration. Si $D(T)$ est fermé dans l'espace de Banach X , alors $(D(T), \|\cdot\|_X)$ est un espace de Banach. L'identité $\text{Id} : (D(T), \|\cdot\|_T) \rightarrow (D(T), \|\cdot\|_X)$ est continue (car $\|x\|_X \leq \|x\|_T$). Par le Corollaire 6.6, Id^{-1} est continue : il existe $C > 0$ tel que $\|x\|_T \leq C \|x\|_X$, d'où $\|Tx\|_Y \leq \|x\|_T \leq C \|x\|_X$. $\square$

6.5 Théorème de l'image fermée

Définition 6.24 (Image et conoyau). Soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. L'image de T est $\text{im } T = \{Tx : x \in X\}$, et le conoyau est $\text{coker } T = Y / \text{im } T$.

Théorème 6.25 (Théorème de l'image fermée). Soient X et Y des espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\text{im } T$ est fermée dans Y ;
- (ii) $\text{im } T^*$ est fermée dans X^* ;
- (iii) $\text{im } T = (\text{Ker } T^*)^\perp := \{y \in Y : f(y) = 0 \ \forall f \in \text{Ker } T^*\}$;
- (iv) $\text{im } T^* = (\text{Ker } T)^\perp := \{f \in X^* : f(x) = 0 \ \forall x \in \text{Ker } T\}$.

Démonstration. Nous démontrons les implications principales.

(i) $\Rightarrow$ (iii) : L'inclusion $\text{im } T \subset (\text{Ker } T^*)^\perp$ est toujours vraie : si $y = Tx$ et $f \in \text{Ker } T^*$, alors $f(y) = f(Tx) = (T^*f)(x) = 0$.

Pour l'inclusion inverse, supposons $\text{im } T$ fermée et soit $y_0 \notin \text{im } T$. Comme $\text{im } T$ est un sous-espace fermé, par le théorème de Hahn-Banach, il existe $f \in Y^*$ tel que $f|_{\text{im } T} = 0$ et $f(y_0) \neq 0$. Alors $T^*f = f \circ T = 0$, donc $f \in \text{Ker } T^*$, et $f(y_0) \neq 0$, donc $y_0 \notin (\text{Ker } T^*)^\perp$.

(i) $\Rightarrow$ (iv) : L'inclusion $\text{im } T^* \subset (\text{Ker } T)^\perp$ est toujours vraie. Pour l'inverse, supposons $\text{im } T$ fermée. L'opérateur $\tilde{T} : X / \text{Ker } T \rightarrow \text{im } T$, $\tilde{T}([x]) = Tx$ est linéaire, continu, bijectif entre espaces de Banach ($X / \text{Ker } T$ est Banach car $\text{Ker } T$ est fermé, et $\text{im } T$ est Banach par hypothèse). Par le Corollaire 6.6, $\tilde{T}$ est un isomorphisme.

Soit $g \in (\text{Ker } T)^\perp$. Alors g s'annule sur $\text{Ker } T$, donc g passe au quotient : il existe $\tilde{g} \in (X / \text{Ker } T)^*$ tel que $g = \tilde{g} \circ \pi$ (où $\pi : X \rightarrow X / \text{Ker } T$ est la projection canonique). Posons $h = \tilde{g} \circ \tilde{T}^{-1} \in (\text{im } T)^*$. En prolongeant h à Y par Hahn-Banach, on obtient $f \in Y^*$, et $T^*f(x) = f(Tx) = h(Tx) = \tilde{g}(\tilde{T}^{-1}(Tx)) = \tilde{g}([x]) = g(x)$. Donc $g = T^*f \in \text{im } T^*$.

(iv) $\Rightarrow$ (ii) : Trivial.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : On admet cette implication, dont la preuve repose sur des arguments de dualité plus fins et le théorème bipolaire. $\square$

Proposition 6.26 (Caractérisation par la constante de surjection). Soient X et Y des espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Alors $\text{im } T$ est

fermée si et seulement s'il existe $c > 0$ tel que

$$\forall y \in \operatorname{im} T, \quad \inf_{x \in T^{-1}(\{y\})} \|x\|_X \leq c \|y\|_Y,$$

autrement dit, T induit un isomorphisme de $X/\operatorname{Ker} T$ sur $\operatorname{im} T$.

Démonstration. ($\Leftarrow$) Soit $(y_n) \subset \operatorname{im} T$ avec $y_n \rightarrow y$. Pour chaque n , choisissons x_n tel que $Tx_n = y_n$ et $\|x_n\| \leq c\|y_n\| + 1/n$. La suite (x_n) est bornée (car (y_n) converge donc est bornée). En passant au quotient $X/\operatorname{Ker} T$ et en utilisant la complétude, on montre que $(x_n + \operatorname{Ker} T)$ a une sous-suite convergente vers $[x] \in X/\operatorname{Ker} T$. Alors $y = Tx \in \operatorname{im} T$.

Plus directement : l'opérateur induit $\tilde{T} : X/\operatorname{Ker} T \rightarrow Y$ est injectif et $\|y\| \geq c^{-1} \|[x]\|_{X/\operatorname{Ker} T}$ pour $y = Tx$. Donc $\tilde{T}$ est un isomorphisme sur son image. L'image d'un espace de Banach par un opérateur minoré est complète, donc fermée.

($\Rightarrow$) Si $\operatorname{im} T$ est fermée, c'est un espace de Banach. $\tilde{T} : X/\operatorname{Ker} T \rightarrow \operatorname{im} T$ est bijectif continu entre Banach, donc c'est un isomorphisme par le Corollaire 6.6. En particulier $\|[x]\| \leq \|\tilde{T}^{-1}\| \|Tx\|$, ce qui donne la constante $c = \|\tilde{T}^{-1}\|$. $\square$

6.6 Principe de factorisation

Théorème 6.27 (Principe de factorisation). *Soient X, Y, Z des espaces de Banach, $S \in \mathcal{L}(X, Z)$ et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Supposons que $\operatorname{Ker} T \subset \operatorname{Ker} S$. Alors il existe un unique opérateur $\tilde{S} : \operatorname{im} T \rightarrow Z$ tel que $S = \tilde{S} \circ T$. Si de plus $\operatorname{im} T$ est fermée, alors $\tilde{S}$ est continu.*

Démonstration. **Unicité :** Si $\tilde{S}$ existe, alors pour $y = Tx \in \operatorname{im} T$, $\tilde{S}(y) = \tilde{S}(Tx) = Sx$, ce qui détermine $\tilde{S}$ de manière unique. Il faut vérifier la bonne définition : si $Tx = Tx'$, alors $x - x' \in \operatorname{Ker} T \subset \operatorname{Ker} S$, donc $Sx = Sx'$.

Existence : Posons $\tilde{S}(Tx) = Sx$. Par ce qui précède, $\tilde{S}$ est bien défini et linéaire.

Continuité : Si $\operatorname{im} T$ est fermée, l'opérateur induit $\bar{T} : X/\operatorname{Ker} T \rightarrow \operatorname{im} T$ est un isomorphisme de Banach (par le Corollaire 6.6). On a $\tilde{S} = \bar{S} \circ \bar{T}^{-1}$, où $\bar{S} : X/\operatorname{Ker} T \rightarrow Z$ est induit par S (bien défini car $\operatorname{Ker} T \subset \operatorname{Ker} S$). Comme $\bar{S}$ et $\bar{T}^{-1}$ sont continus, $\tilde{S}$ l'est aussi. $\square$

Corollaire 6.28. *Sous les hypothèses du théorème, si $\text{im } T$ est fermée, alors*

$$\|\tilde{S}\|_{\mathcal{L}(\text{im } T, Z)} \leq \|S\| \cdot \|\bar{T}^{-1}\|.$$

6.7 Espaces de Fréchet et théorème du graphe fermé généralisé

Les espaces de Fréchet généralisent les espaces de Banach en autorisant une topologie définie par une *famille dénombrable* de semi-normes, avec complétude.

Définition 6.29 (Espace de Fréchet). Un espace de Fréchet est un espace vectoriel topologique X dont la topologie est définie par une famille dénombrable de semi-normes $(p_n)_{n \geq 1}$ séparante (i.e. $p_n(x) = 0$ pour tout n implique $x = 0$), et qui est complet pour la métrique

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x - y)}{1 + p_n(x - y)}.$$

Exemple 6.30. (i) Tout espace de Banach est un espace de Fréchet (une seule semi-norme, qui est une norme).

(ii) L'espace $\mathcal{C}^\infty([0, 1])$ muni des semi-normes $p_n(f) = \sup_{x \in [0, 1]} |f^{(n)}(x)|$ est un espace de Fréchet.

(iii) L'espace $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ muni des semi-normes $p_n(f) = \sup_{|x| \leq n} |f(x)|$ (convergence uniforme sur les compacts) est un espace de Fréchet.

(iv) L'espace des suites $\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ muni des semi-normes $p_n((x_k)) = |x_n|$ est un espace de Fréchet.

Remarque 6.31. Un espace de Fréchet est un espace localement convexe métrisable complet. La métrique d ci-dessus est invariante par translation.

Théorème 6.32 (Application ouverte pour les espaces de Fréchet). *Soient X et Y des espaces de Fréchet et $T : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire continu surjectif. Alors T est ouvert.*

Démonstration. La preuve suit le même schéma que pour les espaces de Banach. Le théorème de Baire s'applique car un espace de Fréchet est un espace métrique complet. L'argument de « suite géométrique convergente » de la preuve du Théorème 6.4 se généralise en utilisant la famille de semi-normes au lieu de la norme unique. $\square$

Théorème 6.33 (Graphe fermé pour les espaces de Fréchet). *Soient X et Y des espaces de Fréchet et $T : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire à graphe fermé. Alors T est continu.*

Démonstration. $\Gamma(T)$ est un sous-espace fermé de l'espace de Fréchet $X \times Y$ (muni des semi-normes $q_n(x, y) = p_n^X(x) + p_n^Y(y)$), donc c'est un espace de Fréchet. La projection $\pi_1 : \Gamma(T) \rightarrow X$ est linéaire, continue, bijective et surjective. Par le Théorème 6.32, π_1 est ouverte, donc π_1^{-1} est continue. Alors $T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ est continue. $\square$

Remarque 6.34 (Limites du théorème du graphe fermé). Le théorème du graphe fermé est faux pour des espaces vectoriels topologiques généraux. Il existe des extensions au-delà des espaces de Fréchet (espaces *webbed* de De Wilde, espaces ultrabornologiques), mais ces extensions nécessitent des hypothèses structurelles sur les espaces.

6.8 Exercices

Exercice 6.1 (*). Soit X un espace de Banach et $M \subset X$ un sous-espace fermé. Montrer que la projection canonique $\pi : X \rightarrow X/M$ est une application ouverte. (Ne pas utiliser le théorème de l'application ouverte ; le démontrer directement.)

Exercice 6.2 (*). Soit $T : \ell^1 \rightarrow \ell^1$ l'opérateur défini par $T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)$, avec $D(T) = \{x \in \ell^1 : \sum n|x_n| < \infty\}$.

(a) Montrer que T est un opérateur fermé.

- (b) Montrer que T n'est pas borné.
 (c) Pourquoi cela ne contredit-il pas le théorème du graphe fermé ?

Exercice 6.3 (★). Montrer que si $1 \leq p < q \leq \infty$, alors ℓ^p et ℓ^q ne sont pas isomorphes comme espaces de Banach. (*Indication : considérer les propriétés de réflexivité, ou utiliser le fait que l'identité $\ell^p \hookrightarrow \ell^q$ n'est pas surjective.*)

Exercice 6.4 (★★). Soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ entre espaces de Banach, avec $\text{im } T$ fermée. Montrer que T est une application ouverte de X sur $\text{im } T$ (muni de la topologie induite).

Exercice 6.5 (★★). Soient X et Y des espaces de Banach et $T_n : X \rightarrow Y$ des opérateurs linéaires continus tels que pour tout $x \in X$, $(T_n x)$ converge vers Tx . On sait par le Corollaire 5.10 que T est borné. Donner une preuve alternative en utilisant le théorème du graphe fermé.

Exercice 6.6 (★★). Soit $T : X \rightarrow X$ un opérateur linéaire sur un espace de Banach X tel que $T^2 = \text{Id}$. Montrer que T est borné. (*Utiliser le théorème du graphe fermé : si $x_n \rightarrow 0$ et $Tx_n \rightarrow y$, appliquer T à nouveau.*)

Exercice 6.7 (★★). Soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ entre espaces de Banach. Montrer que si $\text{im } T$ est de codimension finie dans Y (i.e. $\dim(Y/\text{im } T) < \infty$), alors $\text{im } T$ est fermée. (*Écrire $Y = \text{im } T \oplus F$ avec $\dim F < \infty$, et utiliser le fait que les sous-espaces de dimension finie sont fermés.*)

Exercice 6.8 (★★). (**Théorème de Hellinger-Toeplitz**) Soit H un espace de Hilbert et $T : H \rightarrow H$ un opérateur linéaire *symétrique*, i.e. $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ pour tous $x, y \in H$. Montrer que T est automatiquement borné. (*Utiliser le théorème du graphe fermé.*)

Exercice 6.9 (★★★). Soient X et Y des espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Montrer les équivalences suivantes :

- (a) T est surjectif $\iff$ il existe $c > 0$ tel que $\|T^*f\|_{X^*} \geq c\|f\|_{Y^*}$ pour tout $f \in Y^*$.
- (b) T est injectif et $\text{im } T$ est fermée $\iff$ il existe $c > 0$ tel que $\|Tx\|_Y \geq c\|x\|_X$ pour tout $x \in X$.

Exercice 6.10 ($\star \star \star$). Soient X, Y des espaces de Banach et $S, T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tels que $\|Sx\| \leq C\|Tx\|$ pour tout $x \in X$ et une constante $C > 0$. Montrer qu'il existe $\tilde{S} \in \mathcal{L}(\overline{\text{im } T}, Y)$ tel que $S = \tilde{S} \circ T$.

Exercice 6.11 ($\star \star \star$). (**Problème des trois espaces**) Soit X un espace de Banach et $M \subset X$ un sous-espace fermé.

- (a) Montrer que si M et X/M sont des espaces de Hilbert, alors X est isomorphe (comme espace de Banach) à $M \oplus X/M$.
- (b) En utilisant l'application ouverte, montrer que la suite exacte courte $0 \rightarrow M \xrightarrow{\iota} X \xrightarrow{\pi} X/M \rightarrow 0$ admet une section continue à droite $s : X/M \rightarrow X$ (i.e. $\pi \circ s = \text{Id}$) si et seulement si M admet un supplémentaire topologique fermé dans X .

Exercice 6.12 ($\star \star \star$). Soit X un espace de Fréchet et $M \subset X$ un sous-espace fermé. Montrer que X/M est un espace de Fréchet.

Exercice 6.13 ($\star \star \star$). Montrer que tout espace de Banach est un espace webbed au sens de De Wilde. (*Construire un réseau (= web) en utilisant les boules $B(0, 2^{-n})$.*)

Chapitre 7

Espaces Duaux et Réflexivité

Contents

7.1	Le dual topologique	110
7.1.1	Rappels : le théorème de Hahn-Banach	110
7.2	Dual de ℓ^p pour $1 \leq p < \infty$	111
7.3	Dual de c_0	112
7.4	Dual de L^p	113
7.5	L'injection canonique et le bidual	114
7.6	Espaces réflexifs	115
7.7	Théorèmes fondamentaux de réflexivité	116
7.7.1	Le théorème de James	116
7.7.2	Le théorème d'Eberlein-Šmulian	117
7.7.3	Sous-espaces, quotients, et réflexivité	117
7.7.4	Le théorème de Milman-Pettis	119
7.8	Exercices	120

Ce chapitre approfondit l'étude des espaces duals amorcée dans les chapitres précédents. Nous identifions explicitement les duals des espaces ℓ^p et c_0 , introduisons l'injection canonique dans le bidual, et développons la théorie de la réflexivité. Les résultats profonds de James, Eberlein-Šmulian et Milman-Pettis sont présentés, certains avec preuve complète.

7.1 Le dual topologique

Définition 7.1 (Dual topologique). Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Le *dual topologique* de E , noté E' , est l'espace $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires continues sur E , muni de la norme d'opérateur :

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|.$$

Remarque 7.2. Le dual E' est toujours un espace de Banach, même si E ne l'est pas, car $\mathbb{K}$ est complet.

Notation 7.3. Pour $f \in E'$ et $x \in E$, on note souvent $\langle f, x \rangle_{E', E}$ ou simplement $\langle f, x \rangle$ la valeur $f(x)$, appelée *crochet de dualité*.

7.1.1 Rappels : le théorème de Hahn-Banach

Le théorème de Hahn-Banach, démontré au chapitre 4, est l'outil fondamental pour construire des formes linéaires continues. Rappelons ses conséquences les plus utiles.

Théorème 7.4 (Hahn-Banach analytique — rappel). Soit E un espace vectoriel normé, $F \subset E$ un sous-espace vectoriel, et $g \in F'$. Il existe $f \in E'$ tel que $f|_F = g$ et $\|f\|_{E'} = \|g\|_{F'}$.

Corollaire 7.5 (Séparation d'un point). Pour tout $x_0 \in E$ avec $x_0 \neq 0$, il existe $f \in E'$ tel que $\|f\| = 1$ et $f(x_0) = \|x_0\|$.

Corollaire 7.6 (Le dual sépare les points). Si $x, y \in E$ sont tels que $f(x) = f(y)$ pour tout $f \in E'$, alors $x = y$. En particulier, E' sépare les points de E .

Corollaire 7.7 (Norme via le dual). Pour tout $x \in E$,

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)| = \max_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)|.$$

7.2 Dual de ℓ^p pour $1 \leq p < \infty$

Nous identifions maintenant les duals des espaces de suites classiques. On note p' l'exposant conjugué de p , défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (avec la convention $1' = \infty$).

Théorème 7.8 (Dual de ℓ^p , $1 \leq p < \infty$). Soit $1 \leq p < \infty$ et $q = p'$ l'exposant conjugué de p . L'application

$$\Phi : \ell^q \longrightarrow (\ell^p)', \quad y = (y_n) \longmapsto \Phi_y, \quad \Phi_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n,$$

est une isométrie isomorphe : $(\ell^p)' \cong \ell^q$.

Démonstration. La preuve se décompose en trois étapes.

Étape 1 : Φ est bien définie et $\|\Phi_y\| \leq \|y\|_q$.

Soit $y \in \ell^q$. Pour $x \in \ell^p$, l'inégalité de Hölder donne

$$|\Phi_y(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| |y_n| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Donc $\Phi_y \in (\ell^p)'$ et $\|\Phi_y\|_{(\ell^p)'} \leq \|y\|_q$.

Étape 2 : $\|\Phi_y\| = \|y\|_q$.

Il faut exhiber un $x \in \ell^p$ avec $\|x\|_p = 1$ tel que $|\Phi_y(x)| = \|y\|_q$.

Cas $1 < p < \infty$ (donc $1 < q < \infty$). Si $y = 0$, c'est trivial. Sinon, posons

$$x_n = \frac{|y_n|^{q-1} \operatorname{sgn}(\overline{y_n})}{\|y\|_q^{q/p}}, \quad n \geq 1.$$

Comme $q - 1 = q/p$, on a $|x_n|^p = |y_n|^q / \|y\|_q^q$, d'où $\|x\|_p^p = \|y\|_q^q / \|y\|_q^q = 1$. De plus,

$$\Phi_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = \frac{1}{\|y\|_q^{q/p}} \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q = \frac{\|y\|_q^q}{\|y\|_q^{q/p}} = \|y\|_q^{q-q/p} = \|y\|_q.$$

Cas $p = 1$ (donc $q = \infty$). Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que $|y_{n_0}| > \|y\|_{\infty} - \varepsilon$. On prend $x = \operatorname{sgn}(\overline{y_{n_0}}) e_{n_0}$, où e_{n_0} est le n_0 -ième vecteur canonique, de sorte que $\|x\|_1 = 1$ et $\Phi_y(x) = |y_{n_0}| > \|y\|_{\infty} - \varepsilon$. Comme ε est arbitraire, $\|\Phi_y\| = \|y\|_{\infty}$.

Étape 3 : Φ est surjective.

Soit $f \in (\ell^p)'$. Posons $y_n = f(e_n)$ pour $n \geq 1$. Montrons que $y = (y_n) \in \ell^q$ et que $f = \Phi_y$.

Pour tout $x = (x_n) \in \ell^p$, on a $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ (convergence dans ℓ^p), donc par continuité de f ,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

Il reste à montrer $y \in \ell^q$.

Cas $1 < p < \infty$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, posons $x_n^{(N)} = |y_n|^{q-1} \operatorname{sgn}(\overline{y_n})$ pour $1 \leq n \leq N$ et $x_n^{(N)} = 0$ pour $n > N$. Alors $x^{(N)} \in \ell^p$ et

$$\|x^{(N)}\|_p^p = \sum_{n=1}^N |y_n|^{(q-1)p} = \sum_{n=1}^N |y_n|^q,$$

car $(q-1)p = q$. De plus,

$$f(x^{(N)}) = \sum_{n=1}^N |y_n|^q \leq \|f\| \|x^{(N)}\|_p = \|f\| \left(\sum_{n=1}^N |y_n|^q \right)^{1/p}.$$

Donc $\left(\sum_{n=1}^N |y_n|^q \right)^{1-1/p} \leq \|f\|$, soit $\left(\sum_{n=1}^N |y_n|^q \right)^{1/q} \leq \|f\|$. En passant à la limite $N \rightarrow \infty$, on obtient $\|y\|_q \leq \|f\| < \infty$.

Cas $p = 1$. On a $|y_n| = |f(e_n)| \leq \|f\| \|e_n\|_1 = \|f\|$, donc $\|y\|_{\infty} \leq \|f\| < \infty$ et $y \in \ell^{\infty}$.

Ainsi $f = \Phi_y$ avec $y \in \ell^q$, ce qui achève la preuve de la surjectivité, et donc de l'isométrie isomorphe. $\square$

7.3 Dual de c_0

Définition 7.9 (L'espace c_0). L'espace c_0 est le sous-espace fermé de ℓ^{∞} formé des suites convergentes vers 0 :

$$c_0 = \left\{ x = (x_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \right\},$$

muni de la norme $\|x\|_{\infty} = \sup_{n \geq 1} |x_n|$.

Théorème 7.10 (Dual de c_0). *L'application*

$$\Phi : \ell^1 \longrightarrow (c_0)', \quad y = (y_n) \longmapsto \Phi_y, \quad \Phi_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n,$$

est une isométrie isomorphe : $(c_0)' \cong \ell^1$.

Démonstration. Étape 1 : Φ est bien définie et isométrique.

Pour $y \in \ell^1$ et $x \in c_0 \subset \ell^\infty$,

$$|\Phi_y(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| |y_n| \leq \|x\|_\infty \|y\|_1,$$

donc $\Phi_y \in (c_0)'$ et $\|\Phi_y\| \leq \|y\|_1$.

Pour l'inégalité inverse, soit $\varepsilon > 0$. Pour N assez grand, considérons

$$x^{(N)} = (\operatorname{sgn}(\overline{y_1}), \operatorname{sgn}(\overline{y_2}), \dots, \operatorname{sgn}(\overline{y_N}), 0, 0, \dots) \in c_0.$$

Alors $\|x^{(N)}\|_\infty \leq 1$ et $\Phi_y(x^{(N)}) = \sum_{n=1}^N |y_n|$. En passant à la limite, $\|\Phi_y\| \geq \sup_N \sum_{n=1}^N |y_n| = \|y\|_1$. D'où $\|\Phi_y\| = \|y\|_1$.

Étape 2 : Φ est surjective.

Soit $f \in (c_0)'$. On pose $y_n = f(e_n)$ pour tout $n \geq 1$, où (e_n) est la base canonique. Comme pour ℓ^p , tout $x \in c_0$ s'écrit $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ (convergence dans c_0), donc $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$.

Il reste à montrer $y \in \ell^1$. Pour $N \geq 1$, posons $x^{(N)} = (\operatorname{sgn}(\overline{y_1}), \dots, \operatorname{sgn}(\overline{y_N}), 0, 0, \dots)$. Alors $\|x^{(N)}\|_\infty \leq 1$ et

$$\sum_{n=1}^N |y_n| = f(x^{(N)}) \leq \|f\|.$$

En passant à la limite, $\|y\|_1 \leq \|f\| < \infty$, donc $y \in \ell^1$. □

Remarque 7.11. Le dual de ℓ^∞ est bien plus compliqué : il s'identifie à l'espace $\operatorname{ba}(\mathbb{N})$ des mesures de Banach finiment additives sur $\mathbb{N}$, qui contient ℓ^1 comme sous-espace propre. En particulier, $(\ell^\infty)' \supsetneq \ell^1$.

7.4 Dual de L^p

Le résultat suivant généralise le théorème 7.8 au cadre des espaces de Lebesgue.

Théorème 7.12 (Dual de L^p , théorème de Riesz). Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ -fini et $1 \leq p < \infty$, avec $q = p'$. L'application

$$\Phi : L^q(\mu) \longrightarrow (L^p(\mu))', \quad g \longmapsto \Phi_g, \quad \Phi_g(f) = \int_{\Omega} f g \, d\mu,$$

est une isométrie isomorphe : $(L^p(\mu))' \cong L^q(\mu)$.

Remarque 7.13. La preuve de ce théorème repose sur le théorème de Radon-Nikodym et sera donnée au chapitre 11. L'hypothèse de σ -finitude est essentielle.

7.5 L'injection canonique et le bidual

Définition 7.14 (Bidual). Le *bidual* de E est le dual du dual : $E'' = (E')'$. C'est un espace de Banach pour la norme d'opérateur.

Définition 7.15 (Injection canonique). L'*injection canonique* est l'application

$$J : E \longrightarrow E'', \quad J(x)(f) = f(x), \quad \forall f \in E'.$$

Autrement dit, $J(x)$ est l'évaluation en x .

Théorème 7.16 (L'injection canonique est une isométrie). L'application $J : E \rightarrow E''$ est linéaire et isométrique. En particulier, J est injective et $J(E)$ est un sous-espace fermé de E'' si E est complet.

Démonstration. La linéarité est immédiate : pour $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in E'$,

$$J(\lambda x + y)(f) = f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) = (\lambda J(x) + J(y))(f).$$

Pour l'isométrie, on calcule

$$\|J(x)\|_{E''} = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |J(x)(f)| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)| = \|x\|,$$

où la dernière égalité découle du corollaire 7.7 (conséquence de Hahn-Banach).

Comme J est isométrique, elle est injective. Si E est un espace de Banach, alors $J(E)$ est un sous-espace complet de E'' , donc fermé. $\square$

Remarque 7.17. L'injection J est *canonique* au sens où elle ne dépend d'aucun choix (pas de base, pas de forme linéaire particulière). C'est un morphisme naturel au sens de la théorie des catégories. On identifie souvent E à $J(E) \subset E''$.

7.6 Espaces réflexifs

Définition 7.18 (Espace réflexif). Un espace de Banach E est dit *réflexif* si l'injection canonique $J : E \rightarrow E''$ est surjective, c'est-à-dire si $J(E) = E''$.

Remarque 7.19. La réflexivité exige que J elle-même soit surjective, et pas seulement qu'il existe un isomorphisme isométrique entre E et E'' . L'espace de James fournit un exemple d'espace de Banach isométriquement isomorphe à son bidual sans être réflexif.

Exemple 7.20 (Espaces réflexifs classiques). (i) Tout espace de Banach de dimension finie est réflexif (car $\dim E = \dim E' = \dim E''$).
(ii) Tout espace de Hilbert H est réflexif, par le théorème de représentation de Riesz.
(iii) Pour $1 < p < \infty$, ℓ^p est réflexif.
(iv) Pour $1 < p < \infty$ et μ σ -finie, $L^p(\mu)$ est réflexif.

Proposition 7.21 (ℓ^p est réflexif pour $1 < p < \infty$). Pour $1 < p < \infty$, l'espace ℓ^p est réflexif.

Démonstration. Soit $q = p'$ l'exposant conjugué de p . Par le théorème 7.8, $(\ell^p)' \cong \ell^q$ via Φ , et $(\ell^q)' \cong \ell^p$ via Ψ (car $q' = p$). Plus précisément, notons $\Phi : \ell^q \rightarrow (\ell^p)'$ l'isométrie $y \mapsto \Phi_y$ et $\Psi : \ell^p \rightarrow (\ell^q)'$ l'isométrie $x \mapsto \Psi_x$. L'injection canonique $J : \ell^p \rightarrow (\ell^p)''$ satisfait, pour $x \in \ell^p$ et $f \in (\ell^p)'$,

$$J(x)(f) = f(x).$$

Si $f = \Phi_y$ pour $y \in \ell^q$, alors

$$J(x)(\Phi_y) = \Phi_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = \Psi_x(y).$$

Ainsi $J(x) = \Psi_x \circ \Phi^{-1}$, et la surjectivité de J découle de celles de Φ et Ψ . Formellement, tout $\xi \in (\ell^p)''$ donne par composition $\xi \circ \Phi \in (\ell^q)'$, donc il existe $x \in \ell^p$ tel que $\xi \circ \Phi = \Psi_x$, i.e. $\xi(\Phi_y) = \sum_n x_n y_n$ pour tout $y \in \ell^q$, ce qui donne $\xi = J(x)$. $\square$

Proposition 7.22 (ℓ^1 n'est pas réflexif). *L'espace ℓ^1 n'est pas réflexif.*

Démonstration. Par le théorème 7.8 (cas $p = 1$), $(\ell^1)' \cong \ell^\infty$. Donc $(\ell^1)'' \cong (\ell^\infty)'$. Si ℓ^1 était réflexif, on aurait $(\ell^\infty)' \cong \ell^1$, ce qui impliquerait que ℓ^∞ est séparable (car le dual d'un espace séparable est séparable lorsque le préduel est séparable... en fait, c'est l'inverse : si E' est séparable, E l'est). Or on sait que ℓ^∞ n'est pas séparable.

Plus directement, la boule unité fermée de ℓ^1 n'est pas faiblement compacte. En effet, la suite des vecteurs canoniques (e_n) vérifie $\|e_n\|_1 = 1$ et $e_n \rightharpoonup 0$ faiblement (car pour tout $y \in \ell^\infty = (\ell^1)'$, $\langle y, e_n \rangle = y_n \rightarrow 0$ est faux en général, par exemple pour $y = (1, 1, 1, \dots)$, $\langle y, e_n \rangle = 1 \not\rightarrow 0$). Ainsi (e_n) n'admet aucune sous-suite faiblement convergente dans ℓ^1 . Le théorème d'Eberlein-Šmulian (théorème 7.26) implique que la boule unité fermée n'est pas faiblement compacte, donc ℓ^1 n'est pas réflexif. $\square$

Proposition 7.23 (c_0 n'est pas réflexif). *L'espace c_0 n'est pas réflexif.*

Démonstration. On a $(c_0)' \cong \ell^1$ et $(\ell^1)' \cong \ell^\infty$, donc $(c_0)'' \cong \ell^\infty$. L'injection canonique $J : c_0 \hookrightarrow \ell^\infty$ s'identifie à l'inclusion naturelle, qui n'est pas surjective (la suite constante $(1, 1, 1, \dots) \in \ell^\infty \setminus c_0$). $\square$

7.7 Théorèmes fondamentaux de réflexivité

7.7.1 Le théorème de James

Théorème 7.24 (Théorème de James). *Soit E un espace de Banach. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *E est réflexif.*
- (ii) *Toute forme linéaire continue $f \in E'$ atteint sa norme, c'est-à-*

dire qu'il existe $x_0 \in E$ avec $\|x_0\| = 1$ tel que $|f(x_0)| = \|f\|$.
 (iii) La boule unité fermée $\overline{B}_E$ est faiblement compacte.

Remarque 7.25. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est un exercice (exercice 7.3). L'implication (i) $\Rightarrow$ (iii) résulte du théorème de Banach-Alaoglu appliqué à E'' via J , et sera démontrée au chapitre 8. L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) est le résultat profond de R.C. James (1964) ; sa preuve dépasse le cadre de ce cours.

7.7.2 Le théorème d'Eberlein–Šmulian

Théorème 7.26 (Eberlein–Šmulian). *Soit E un espace de Banach et $A \subset E$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *A est relativement faiblement compact (l'adhérence de A dans la topologie $\sigma(E, E')$ est compacte).*
- (ii) *A est relativement faiblement séquentiellement compact (toute suite de A admet une sous-suite faiblement convergente dans E).*
- (iii) *A est faiblement séquentiellement compact dans A même.*

Remarque 7.27. Ce théorème est remarquable car la topologie faible n'est en général pas métrisable. Pour les espaces métriques, compacité et compacité séquentielle coïncident, mais ce n'est pas le cas en général pour les espaces topologiques. Le théorème d'Eberlein–Šmulian affirme que cette équivalence subsiste pour la topologie faible des espaces de Banach. La preuve complète, technique, peut être trouvée dans [1].

7.7.3 Sous-espaces, quotients, et réflexivité

Proposition 7.28 (Sous-espace fermé d'un espace réflexif). *Tout sous-espace fermé d'un espace de Banach réflexif est réflexif.*

Démonstration. Soit E un espace de Banach réflexif et $F \subset E$ un sous-espace fermé. Notons $J_E : E \rightarrow E''$ et $J_F : F \rightarrow F''$ les injections canoniques. Soit $\xi \in F''$. Nous devons montrer qu'il existe $y \in F$ tel que $\xi = J_F(y)$.

Considérons l'application restriction $R : E' \rightarrow F'$ définie par $R(f) = f|_F$. Par le théorème de Hahn-Banach, R est surjective. Son transposée $R' : F'' \rightarrow E''$ est définie par

$$R'(\xi)(f) = \xi(R(f)) = \xi(f|_F), \quad \forall f \in E'.$$

Comme E est réflexif, il existe $x \in E$ tel que $J_E(x) = R'(\xi)$, c'est-à-dire

$$f(x) = \xi(f|_F), \quad \forall f \in E'.$$

Montrons que $x \in F$. Si $x \notin F$, par Hahn-Banach il existe $f_0 \in E'$ tel que $f_0|_F = 0$ et $f_0(x) \neq 0$. Mais alors $f_0(x) = \xi(f_0|_F) = \xi(0) = 0$, contradiction. Donc $x \in F$.

Pour tout $g \in F'$, en choisissant $f \in E'$ tel que $f|_F = g$ (Hahn-Banach),

$$J_F(x)(g) = g(x) = f(x) = \xi(f|_F) = \xi(g).$$

Donc $J_F(x) = \xi$, ce qui prouve que J_F est surjective. $\square$

Proposition 7.29 (Quotient d'un espace réflexif). *Si E est un espace de Banach réflexif et $F \subset E$ un sous-espace fermé, alors E/F est réflexif.*

Démonstration. Notons $\pi : E \rightarrow E/F$ la projection canonique et $J : E/F \rightarrow (E/F)''$ l'injection canonique. Soit $\xi \in (E/F)''$.

L'application $\pi' : (E/F)' \rightarrow E'$ (transposée de π) est une isométrie de $(E/F)'$ sur $F^\perp = \{f \in E' : f|_F = 0\}$. On a aussi $\pi'' : E'' \rightarrow (E/F)''$.

Par la réflexivité de E , l'application $\pi'' \circ J_E : E \rightarrow (E/F)''$ est surjective (car J_E est surjective et π'' l'est aussi). Donc il existe $x \in E$ tel que $\pi''(J_E(x)) = \xi$. Or pour $g \in (E/F)'$,

$$\pi''(J_E(x))(g) = J_E(x)(\pi'(g)) = (\pi'(g))(x) = g(\pi(x)) = J(\pi(x))(g).$$

Donc $\xi = J(\pi(x))$, et J est surjective. $\square$

Corollaire 7.30. *Un espace de Banach E est réflexif si et seulement si E' est réflexif.*

Démonstration. $(\Rightarrow)$ Supposons E réflexif. Soit $\Phi \in E'''$. Considérons $\Phi \circ J_E^{-1} \in E'$ (bien défini car J_E est un isomorphisme isométrique de E sur E''). Plus précisément, définissons $f \in E'$ par $f(x) = \Phi(J_E(x))$ pour tout $x \in E$. Alors pour tout $\xi \in E''$, il existe $x \in E$ tel que $\xi = J_E(x)$ (réflexivité), et

$$J_{E'}(f)(\xi) = \xi(f) = J_E(x)(f) = f(x) = \Phi(J_E(x)) = \Phi(\xi).$$

Donc $J_{E'}(f) = \Phi$, et E' est réflexif.

($\Leftarrow$) Si E' est réflexif, alors $E'' = J_{E'}(E')$. Comme $J_E(E)$ est un sous-espace fermé de E'' (car E est complet), il suffit de montrer que $J_E(E)$ est dense dans E'' pour la topologie de la norme. Supposons par l'absurde que $J_E(E) \subsetneq E''$. Par Hahn-Banach, il existe $\Phi \in E''' \setminus \{0\}$ tel que $\Phi|_{J_E(E)} = 0$. Comme E' est réflexif, $\Phi = J_{E'}(f)$ pour un $f \in E'$. Alors pour tout $x \in E$,

$$0 = \Phi(J_E(x)) = J_{E'}(f)(J_E(x)) = J_E(x)(f) = f(x).$$

Donc $f = 0$, d'où $\Phi = 0$, contradiction. $\square$

7.7.4 Le théorème de Milman-Pettis

Théorème 7.31 (Milman-Pettis). *Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.*

Rappelons d'abord la définition.

Définition 7.32 (Convexité uniforme). Un espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ est *uniformément convexe* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x - y\| \geq \varepsilon \implies \left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq 1 - \delta.$$

Exemple 7.33. Pour $1 < p < \infty$, l'espace ℓ^p (et plus généralement L^p) est uniformément convexe (inégalités de Clarkson). Les espaces ℓ^1 , ℓ^∞ , c_0 ne le sont pas.

Preuve du théorème de Milman-Pettis. Soit E un espace de Banach uniformément convexe. Par le théorème de James (théorème 7.24), il suffit de montrer que la boule unité fermée $\overline{B}_E$ est faiblement compacte. Nous allons plutôt montrer directement que $J(E) = E''$.

Soit $\xi \in E''$ avec $\|\xi\|_{E''} = 1$. Il suffit de trouver $x \in E$ tel que $J(x) = \xi$. Par le théorème de Goldstine (théorème 8.19, démontré au chapitre 8), $J(\overline{B}_E)$ est dense dans $\overline{B}_{E''}$ pour la topologie faible-* $\sigma(E'', E')$. Donc il existe un filet (x_α) dans $\overline{B}_E$ tel que $J(x_\alpha) \xrightarrow{*} \xi$ dans $(E'', \sigma(E'', E'))$.

Montrons que (x_α) possède un sous-filet convergent en norme, ce qui impliquera $\xi \in J(E)$.

Comme $\|\xi\| = 1$, il existe $f \in E'$ avec $\|f\| = 1$ et $\xi(f) = \|\xi\| = 1$ (le dual d'un espace uniformément convexe est *strictement convexe*, et la

norme y est lisse, ce qui garantit l'existence d'un tel f ; alternativement, on applique le lemme de Bishop-Phelps). Comme $J(x_\alpha)(f) = f(x_\alpha) \rightarrow \xi(f) = 1$ et $\|x_\alpha\| \leq 1$, on obtient $\operatorname{Re} f(x_\alpha) \rightarrow 1$.

Montrons que (x_α) est de Cauchy en norme. Par l'absurde, supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ et des sous-indices α_i, β_i avec $\|x_{\alpha_i} - x_{\beta_i}\| \geq \varepsilon$. Par convexité uniforme, il existe $\delta > 0$ tel que $\|(x_{\alpha_i} + x_{\beta_i})/2\| \leq 1 - \delta$. Mais alors

$$\operatorname{Re} f\left(\frac{x_{\alpha_i} + x_{\beta_i}}{2}\right) \leq \|f\| \left\| \frac{x_{\alpha_i} + x_{\beta_i}}{2} \right\| \leq (1 - \delta) \|f\|.$$

Or le membre de gauche tend vers 1, contradiction. Donc (x_α) est de Cauchy dans E (complet), donc convergente vers un $x \in E$. Ainsi $J(x) = \xi$, et E est réflexif. $\square$

Corollaire 7.34. *Pour $1 < p < \infty$, ℓ^p et $L^p(\mu)$ (μ σ -finie) sont réflexifs.*

Démonstration. Ces espaces sont uniformément convexes (inégalités de Clarkson), donc réflexifs par le théorème de Milman-Pettis. $\square$

7.8 Exercices

Exercice 7.1 ($\star$). Soit E un espace vectoriel normé et $x \in E$. Montrer que $\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in E', \|f\| \leq 1\}$ et que le supremum est atteint.

Exercice 7.2 ($\star$). Soit F un sous-espace fermé de E . Montrer que $F' \cong E'/F^\perp$ isométriquement, où $F^\perp = \{f \in E' : f|_F = 0\}$.

Exercice 7.3 ($\star\star$). Soit E un espace de Banach réflexif. Montrer que toute forme linéaire continue $f \in E'$ atteint sa norme, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in E$ avec $\|x_0\| = 1$ et $|f(x_0)| = \|f\|$.

Indication : Considérer une suite maximisante et utiliser la compacité faible de la boule unité (théorème de James/Banach-Alaoglu).

Exercice 7.4 ($\star\star$). Montrer que c_0 n'est isométriquement isomorphe au dual d'aucun espace de Banach.

Indication : Si $c_0 \cong X'$, alors $X' \cong c_0$ serait séparable, donc X serait séparable, donc la boule unité de X' serait faiblement-* séquentiellement compacte (par Banach-Alaoglu et métrisabilité). Examiner les vecteurs canoniques dans c_0 .

Exercice 7.5 (★★). Montrer qu'un espace de Banach réflexif E est séparable si et seulement si E' est séparable.

Exercice 7.6 (★★). Pour $p = 4/3$, calculer la norme de la forme linéaire $f : \ell^{4/3} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n/n^3$. Identifier f comme élément de ℓ^4 et calculer $\|f\|_4$.

Exercice 7.7 (★★★). Soit $T : \ell^1 \rightarrow c_0$ un opérateur linéaire continu surjectif.

- (a) Montrer qu'un tel opérateur existe (considérer $\ell^1 \rightarrow \ell^1/\text{Ker}(T)$ et utiliser le théorème de l'application ouverte).
- (b) En déduire que c_0 est isomorphe à un quotient de ℓ^1 .
- (c) Montrer que $\text{Ker}(T)$ n'est pas complété dans ℓ^1 .

Exercice 7.8 (★★). Montrer que tout espace uniformément convexe est strictement convexe (c'est-à-dire que si $\|x\| = \|y\| = 1$ et $x \neq y$, alors $\|(x+y)/2\| < 1$). La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 7.9 (★★★). Donner un exemple de forme linéaire continue $f \in (\ell^1)'$ qui n'atteint pas sa norme. En déduire que ℓ^1 n'est pas réflexif (via le théorème de James).

Indication : Considérer $y = (1 - 1/n)_{n \geq 1} \in \ell^\infty$ et la forme $\Phi_y(x) = \sum_n (1 - 1/n)x_n$.

Exercice 7.10 (★★). Soit E un espace de Banach. Montrer que si E'' est séparable, alors E est réflexif.

Indication : Montrer que $E'/J(E)^\perp \cong E'$, donc E' est séparable, puis E est séparable, et utiliser le fait que $J(E)$ est fermé et de codimension nulle.

Chapitre 8

Topologies Faibles

Contents

8.1	La topologie faible $\sigma(E, E')$	123
8.2	Convergence faible	125
8.3	La topologie faible-* $\sigma(E', E)$	126
8.4	Le théorème de Banach-Alaoglu	127
8.5	Le théorème de Goldstine	129
8.6	Le théorème de Kakutani	130
8.7	Le théorème de Mazur	130
8.8	Application : minimiseurs en calcul des variations	132
8.9	Compléments sur les topologies faibles	134
8.10	Exercices	135

La topologie de la norme d'un espace de Banach est souvent « trop fine » pour obtenir des résultats de compacité utiles en analyse. Ce chapitre introduit les *topologies faibles*, qui fournissent des notions de convergence plus souples et sont essentielles en théorie des EDP, en calcul des variations, et en optimisation. Les théorèmes centraux — Banach-Alaoglu, Goldstine, Kakutani, Mazur — sont démontrés en détail.

8.1 La topologie faible $\sigma(E, E')$

Définition 8.1 (Topologie faible). Soit E un espace vectoriel normé. La *topologie faible* sur E , notée $\sigma(E, E')$, est la topologie la moins fine rendant continues toutes les formes linéaires $f \in E'$. C'est la topologie

initiale engendrée par la famille $(f)_{f \in E'}$.

Proposition 8.2 (Base de voisinages). *Une base de voisinages de $x_0 \in E$ pour $\sigma(E, E')$ est constituée des ensembles de la forme*

$$V(x_0; f_1, \dots, f_n; \varepsilon) = \{x \in E : |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\},$$

où $n \geq 1$, $f_1, \dots, f_n \in E'$, et $\varepsilon > 0$.

Démonstration. Par définition de la topologie initiale, les sous-ensembles ouverts de $\sigma(E, E')$ sont les réunions d'intersections finies d'ensembles de la forme $f^{-1}(U)$ avec $f \in E'$ et U ouvert dans $\mathbb{K}$. Les ensembles $V(x_0; f_1, \dots, f_n; \varepsilon)$ s'écrivent $\bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(B(f_i(x_0), \varepsilon))$, qui sont bien des intersections finies de pré-images d'ouverts. Réciproquement, toute intersection finie $\bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(U_i)$ contenant x_0 contient un $V(x_0; f_1, \dots, f_n; \varepsilon)$ pour ε assez petit. $\square$

Proposition 8.3 (La topologie faible est séparée). *La topologie $\sigma(E, E')$ est séparée (Hausdorff).*

Démonstration. Soient $x \neq y$ dans E . Par le corollaire 7.6 (Hahn-Banach), il existe $f \in E'$ tel que $f(x) \neq f(y)$. Posons $\varepsilon = |f(x) - f(y)|/3 > 0$. Alors $V(x; f; \varepsilon) \cap V(y; f; \varepsilon) = \emptyset$, ce qui sépare x et y . $\square$

Proposition 8.4 (Comparaison avec la topologie forte). *La topologie $\sigma(E, E')$ est moins fine que la topologie de la norme. Si E est de dimension infinie, elle est strictement moins fine.*

Démonstration. Tout ouvert faible est ouvert pour la norme, car chaque $f \in E'$ est continue pour la norme. Réciproquement, si $\dim E = \infty$, la boule ouverte unité $B_E = \{x : \|x\| < 1\}$ n'est pas ouverte pour $\sigma(E, E')$. En effet, tout voisinage faible de 0 contient un sous-espace de codimension finie $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(f_i)$, qui est de dimension infinie, donc non borné; il ne peut donc pas être contenu dans B_E . $\square$

8.2 Convergence faible

Définition 8.5 (Convergence faible). Soit (x_n) une suite dans E . On dit que (x_n) converge faiblement vers $x \in E$, noté $x_n \rightharpoonup x$, si

$$f(x_n) \rightarrow f(x), \quad \forall f \in E'.$$

Remarque 8.6. La convergence forte (en norme) implique la convergence faible, mais la réciproque est fausse en dimension infinie. Par exemple, dans ℓ^2 , la base orthonormée (e_n) converge faiblement vers 0 (car pour $y \in \ell^2$, $\langle y, e_n \rangle = y_n \rightarrow 0$), mais $\|e_n\| = 1 \not\rightarrow 0$.

Proposition 8.7 (Unicité de la limite faible). Si $x_n \rightharpoonup x$ et $x_n \rightharpoonup y$, alors $x = y$.

Démonstration. Pour tout $f \in E'$, $f(x) = \lim f(x_n) = f(y)$. Comme E' sépare les points (corollaire 7.6), $x = y$. $\square$

Théorème 8.8 (Les suites faiblement convergentes sont bornées). Soit E un espace de Banach. Si $x_n \rightharpoonup x$, alors la suite (x_n) est bornée et $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$.

Démonstration. Considérons la famille $(J(x_n))_{n \geq 1}$ dans E'' . Pour tout $f \in E'$,

$$\sup_{n \geq 1} |J(x_n)(f)| = \sup_{n \geq 1} |f(x_n)| < \infty,$$

car $(f(x_n))$ converge et est donc bornée. Par le théorème de Banach-Steinhaus (principe de borne uniforme) appliqué à la famille $(J(x_n))_{n \geq 1} \subset E'' = \mathcal{L}(E', \mathbb{K})$ et à l'espace de Banach E' ,

$$\sup_{n \geq 1} \|J(x_n)\|_{E''} < \infty.$$

Comme J est isométrique, $\sup_{n \geq 1} \|x_n\| < \infty$.

Pour la seconde inégalité, soit $f \in E'$ avec $\|f\| \leq 1$. Alors $|f(x)| = \lim_n |f(x_n)| \leq \liminf_n \|x_n\|$. En prenant le sup sur f , $\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|$. $\square$

Remarque 8.9. La seconde inégalité signifie que la norme est *séquentiellement semi-continue inférieurement* pour la topologie faible. En fait, elle est s.c.i. pour $\sigma(E, E')$ (pas seulement séquentiellement).

Exemple 8.10 (Convergence faible dans ℓ^p). Soit $1 < p < \infty$. Alors $x_n \rightharpoonup x$ dans ℓ^p si et seulement si

- (i) $\sup_n \|x_n\|_p < \infty$, et
- (ii) pour tout $k \geq 1$, $x_n^{(k)} \rightarrow x^{(k)}$ (convergence coordonnée par coordonnée).

En effet, les e_k^* (évaluation de la k -ième coordonnée) sont dans $(\ell^p)' \cong \ell^q$, et ces formes linéaires engendrent un sous-espace dense de ℓ^q .

Exemple 8.11 (Convergence faible dans L^p). Soit $1 < p < \infty$ et μ une mesure σ -finie. Alors $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^p(\mu)$ si et seulement si $\sup_n \|f_n\|_p < \infty$ et $\int_A f_n d\mu \rightarrow \int_A f d\mu$ pour tout ensemble mesurable A de mesure finie.

8.3 La topologie faible-* $\sigma(E', E)$

Définition 8.12 (Topologie faible-*). Soit E un espace de Banach. La *topologie faible-** sur E' , notée $\sigma(E', E)$, est la topologie la moins fine rendant continues toutes les applications d'évaluation $\hat{x} : E' \rightarrow \mathbb{K}$, $\hat{x}(f) = f(x)$, pour $x \in E$.

Proposition 8.13 (Base de voisinages faible-*). Une base de voisinages de $f_0 \in E'$ pour $\sigma(E', E)$ est constituée des ensembles

$$V^*(f_0; x_1, \dots, x_n; \varepsilon) = \{f \in E' : |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\},$$

où $n \geq 1$, $x_1, \dots, x_n \in E$, et $\varepsilon > 0$.

Définition 8.14 (Convergence faible-*). On dit que (f_n) converge

faible-* vers f dans E' , noté $f_n \xrightarrow{*} f$, si

$$f_n(x) \rightarrow f(x), \quad \forall x \in E.$$

Proposition 8.15 (Relations entre topologies). *Sur E' , on a les inclusions*

$$\sigma(E', E) \subset \sigma(E', E'') \subset \tau_{\text{norme}},$$

où $\sigma(E', E'')$ est la topologie faible de E' (vu comme espace de Banach) et τ_{norme} la topologie de la norme. Si E est réflexif, les deux premières coïncident : $\sigma(E', E) = \sigma(E', E'')$.

Démonstration. L'inclusion $\sigma(E', E) \subset \sigma(E', E'')$ est claire : les évaluations par les éléments de $J(E) \subset E''$ forment un sous-ensemble de toutes les évaluations par E'' , et les évaluations par E'' définissent $\sigma(E', E'')$. Si E est réflexif, $J(E) = E''$, d'où l'égalité. $\square$

Remarque 8.16. La topologie $\sigma(E', E)$ est en général strictement moins fine que $\sigma(E', E'')$. C'est précisément lorsque E n'est pas réflexif qu'elles diffèrent.

8.4 Le théorème de Banach-Alaoglu

Le théorème de Banach-Alaoglu est l'un des résultats les plus importants de l'analyse fonctionnelle. Il fournit la compacité de la boule unité du dual pour la topologie faible-*, compensant l'absence de compacité pour la topologie forte en dimension infinie.

Théorème 8.17 (Banach-Alaoglu). *Soit E un espace vectoriel normé. La boule unité fermée du dual*

$$\overline{B}_{E'} = \{f \in E' : \|f\| \leq 1\}$$

est compacte pour la topologie faible- $\sigma(E', E)$.*

Démonstration. Pour chaque $x \in E$, posons $D_x = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq \|x\|\}$. C'est un compact de $\mathbb{K}$. Considérons l'espace produit

$$P = \prod_{x \in E} D_x,$$

muni de la topologie produit. Par le théorème de Tychonoff, P est compact.

Un élément de P est une application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $|\varphi(x)| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$. Considérons l'application

$$\Psi : \overline{B}_{E'} \longrightarrow P, \quad f \longmapsto (f(x))_{x \in E}.$$

Cette application est bien définie car si $\|f\| \leq 1$, alors $|f(x)| \leq \|f\| \|x\| \leq \|x\|$, donc $f(x) \in D_x$.

Étape 1 : Ψ est un homéomorphisme sur son image.

L'application Ψ est injective : si $\Psi(f) = \Psi(g)$, alors $f(x) = g(x)$ pour tout x , donc $f = g$.

La topologie produit sur P est la topologie de la convergence simple (chaque projection $\pi_x : P \rightarrow D_x$ est continue). Or la topologie $\sigma(E', E)$ est aussi la topologie de la convergence simple sur E' restreinte à E . Donc Ψ est continue et son inverse $\Psi^{-1} : \Psi(\overline{B}_{E'}) \rightarrow \overline{B}_{E'}$ est continue. Ainsi Ψ est un homéomorphisme de $(\overline{B}_{E'}, \sigma(E', E))$ sur $\Psi(\overline{B}_{E'}) \subset P$.

Étape 2 : $\Psi(\overline{B}_{E'})$ est fermé dans P .

Soit (φ_α) un filet dans $\Psi(\overline{B}_{E'})$ convergeant vers $\varphi \in P$. Pour chaque α , soit $f_\alpha \in \overline{B}_{E'}$ tel que $\varphi_\alpha = \Psi(f_\alpha)$, c'est-à-dire $\varphi_\alpha(x) = f_\alpha(x)$ pour tout $x \in E$.

La convergence dans P signifie $f_\alpha(x) \rightarrow \varphi(x)$ pour tout $x \in E$. Montrons que φ est linéaire. Pour $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda x + y) &= \lim_{\alpha} f_\alpha(\lambda x + y) = \lim_{\alpha} (\lambda f_\alpha(x) + f_\alpha(y)) \\ &= \lambda \varphi(x) + \varphi(y). \end{aligned}$$

De plus, $|\varphi(x)| \leq \|x\|$ pour tout x (car $\varphi \in P$), donc φ est une forme linéaire continue de norme ≤ 1 . Ainsi $\varphi \in \Psi(\overline{B}_{E'})$.

Conclusion. Comme $\Psi(\overline{B}_{E'})$ est un fermé d'un compact (P), il est compact. Par l'homéomorphisme Ψ , $\overline{B}_{E'}$ est compact pour $\sigma(E', E)$. $\square$

Remarque 8.18. Si E est séparable, alors $(\overline{B}_{E'}, \sigma(E', E))$ est métrisable. En effet, soit (x_n) une suite dense dans $\overline{B}_E$. La métrique

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |f(x_n) - g(x_n)|$$

engendre la topologie $\sigma(E', E)$ sur $\overline{B}_{E'}$. Dans ce cas, la compacité séquentielle et la compacité coïncident, et on peut remplacer Tychonoff par un argument diagonal plus élémentaire (théorème de Banach-

Alaoglu séquentiel, aussi appelé théorème de Banach).

8.5 Le théorème de Goldstine

Théorème 8.19 (Goldstine). *Soit E un espace de Banach et $J : E \rightarrow E''$ l'injection canonique. Alors $J(\overline{B}_E)$ est dense dans $\overline{B}_{E''}$ pour la topologie faible- $*$ $\sigma(E'', E')$.*

Démonstration. Notons $K = \overline{J(\overline{B}_E)}^{\sigma(E'', E')}$ l'adhérence faible- $*$ de $J(\overline{B}_E)$ dans E'' . Comme $J(\overline{B}_E) \subset \overline{B}_{E''}$ et que $\overline{B}_{E''}$ est faible- $*$ compact (Banach-Alaoglu appliqué à E') donc faible- $*$ fermé, on a $K \subset \overline{B}_{E''}$.

Il faut montrer $K = \overline{B}_{E''}$. Raisonnons par contraposée : supposons qu'il existe $\xi_0 \in \overline{B}_{E''} \setminus K$. Comme K est un convexe faible- $*$ fermé (adhérence d'un convexe, puisque $J(\overline{B}_E)$ est convexe par linéarité de J), le théorème de séparation de Hahn-Banach dans l'espace $(E'', \sigma(E'', E'))$ permet de séparer ξ_0 de K par une forme linéaire continue pour $\sigma(E'', E')$.

Or les formes linéaires continues sur $(E'', \sigma(E'', E'))$ sont exactement les éléments de E' (vus comme évaluations). Il existe donc $f \in E'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\operatorname{Re} \xi(f) \leq \alpha < \operatorname{Re} \xi_0(f), \quad \forall \xi \in K.$$

En particulier, pour tout $x \in \overline{B}_E$,

$$\operatorname{Re} f(x) = \operatorname{Re} J(x)(f) \leq \alpha.$$

Or $\sup_{\|x\| \leq 1} \operatorname{Re} f(x) = \|f\|$ (en choisissant x convenablement). Donc $\|f\| \leq \alpha$. Mais alors

$$\operatorname{Re} \xi_0(f) > \alpha \geq \|f\|,$$

ce qui contredit $|\xi_0(f)| \leq \|\xi_0\| \|f\| \leq \|f\|$ (car $\|\xi_0\| \leq 1$). Cette contradiction achève la preuve. $\square$

Corollaire 8.20. *$J(E)$ est dense dans E'' pour $\sigma(E'', E')$. En particulier, E est réflexif si et seulement si $\overline{B}_E$ est faiblement compacte.*

Démonstration. La densité de $J(E)$ suit de Goldstine par homogénéité (appliquer Goldstine à $r\overline{B}_E$ pour tout $r > 0$). Pour la seconde assertion :

($\Rightarrow$) Si E est réflexif, $J(\overline{B}_E) = \overline{B}_{E''}$ est faible-* compact dans E'' . Via J^{-1} , $\overline{B}_E$ est faiblement compacte dans E (car $\sigma(E, E') = J^{-1}(\sigma(E'', E')|_{J(E)})$ quand J est surjectif).

($\Leftarrow$) Si $\overline{B}_E$ est faiblement compacte, alors $J(\overline{B}_E)$ est faible-* compact dans E'' (car J est continue de $\sigma(E, E')$ vers $\sigma(E'', E')$), donc faible-* fermé. Par Goldstine, $J(\overline{B}_E)$ est faible-* dense dans $\overline{B}_{E''}$. Fermé et dense implique $J(\overline{B}_E) = \overline{B}_{E''}$, donc J est surjective. $\square$

8.6 Le théorème de Kakutani

Théorème 8.21 (Kakutani). *Soit E un espace de Banach. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) E est réflexif.
- (ii) La boule unité fermée $\overline{B}_E$ est compacte pour $\sigma(E, E')$.

Démonstration. C'est exactement le contenu du corollaire 8.20. Redonnons l'argument pour la commodité du lecteur.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Si E est réflexif, $J : E \rightarrow E''$ est un isomorphisme isométrique. Par Banach-Alaoglu, $\overline{B}_{E''}$ est $\sigma(E'', E')$ -compacte. Comme $J(\overline{B}_E) = \overline{B}_{E''}$, et que J est un homéomorphisme de $(E, \sigma(E, E'))$ sur $(J(E), \sigma(E'', E')|_{J(E)})$ (car $f \circ J^{-1}$ parcourt E' quand f le fait, via la surjectivité de la transposée), $\overline{B}_E$ est $\sigma(E, E')$ -compacte.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Supposons $\overline{B}_E$ faiblement compacte. L'application J est continue de $(E, \sigma(E, E'))$ vers $(E'', \sigma(E'', E'))$ (car pour $f \in E'$, la composée $\xi \mapsto \xi(f)$ avec J donne $x \mapsto f(x)$, qui est $\sigma(E, E')$ -continue). L'image continue d'un compact est compacte, donc $J(\overline{B}_E)$ est $\sigma(E'', E')$ -compacte, en particulier fermée. Par le théorème de Goldstine, $J(\overline{B}_E)$ est $\sigma(E'', E')$ -dense dans $\overline{B}_{E''}$. Un ensemble à la fois dense et fermé est égal à l'espace entier : $J(\overline{B}_E) = \overline{B}_{E''}$. Donc J est surjective et E est réflexif. $\square$

8.7 Le théorème de Mazur

Théorème 8.22 (Mazur). *Soit E un espace vectoriel normé et $C \subset E$ un ensemble convexe. Alors C est fermé pour la topologie de la norme si et seulement si C est fermé pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.*

Démonstration. ($\Leftarrow$) Tout faiblement fermé est fortement fermé, car la topologie faible est moins fine que la topologie forte (proposition 8.4).

($\Rightarrow$) Supposons C convexe et fermé (pour la norme). Montrons que C est faiblement fermé, c'est-à-dire que $E \setminus C$ est faiblement ouvert.

Soit $x_0 \in E \setminus C$. Comme C est convexe et fermé, le théorème de séparation de Hahn-Banach (sous sa forme géométrique, séparation stricte d'un point et d'un convexe fermé) fournit $f \in E'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\operatorname{Re} f(x_0) > \alpha \geq \sup_{x \in C} \operatorname{Re} f(x).$$

L'ensemble $U = \{x \in E : \operatorname{Re} f(x) > \alpha\}$ est un ouvert faible (pré-image d'un ouvert par $\operatorname{Re} \circ f$, qui est $\sigma(E, E')$ -continue). De plus, $x_0 \in U$ et $U \cap C = \emptyset$. Donc x_0 n'est pas dans l'adhérence faible de C .

Comme $x_0 \in E \setminus C$ est arbitraire, l'adhérence faible de C est contenue dans C , d'où C est faiblement fermé. $\square$

Corollaire 8.23 (Mazur pour les suites). *Soit (x_n) une suite dans un espace de Banach E telle que $x_n \rightharpoonup x$. Alors x appartient à l'adhérence forte de l'enveloppe convexe de $\{x_n : n \geq 1\}$:*

$$x \in \overline{\operatorname{conv}}\{x_n : n \geq 1\}.$$

Autrement dit, il existe une suite de combinaisons convexes des x_n qui converge fortement vers x .

Démonstration. Posons $C = \overline{\operatorname{conv}}\{x_n : n \geq 1\}$. C'est un convexe fermé, donc faiblement fermé par le théorème de Mazur. Comme $x_n \in C$ pour tout n et $x_n \rightharpoonup x$, la limite faible x appartient à l'adhérence faible de C , qui est C lui-même. $\square$

Remarque 8.24. Le corollaire de Mazur est souvent utilisé de la manière suivante : si (x_n) est une suite faiblement convergente dans un espace de Banach, on peut en extraire des combinaisons convexes qui convergent fortement. Cette observation est cruciale en théorie des EDP et en calcul des variations.

8.8 Application : minimiseurs en calcul des variations

Les topologies faibles trouvent une application majeure dans l'existence de minimiseurs pour des problèmes variationnels. La *méthode directe* du calcul des variations, due à Tonelli, repose sur le schéma suivant.

Théorème 8.25 (Méthode directe du calcul des variations). *Soit E un espace de Banach réflexif et $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonctionnelle vérifiant :*

- (i) Φ est coercive : $\Phi(x) \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow \infty$.
- (ii) Φ est séquentiellement faiblement semi-continue inférieurement (s.c.i. faible) : si $x_n \rightharpoonup x$, alors $\Phi(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \Phi(x_n)$.
- (iii) $\Phi \not\equiv +\infty$ (le domaine effectif est non vide).

Alors Φ atteint son minimum : il existe $x_0 \in E$ tel que $\Phi(x_0) = \inf_{x \in E} \Phi(x)$.

Démonstration. Posons $m = \inf_{x \in E} \Phi(x) \in [-\infty, +\infty[$. Comme $\Phi \not\equiv +\infty$, $m < +\infty$.

Étape 1 : Construction d'une suite minimisante. Il existe une suite (x_n) dans E telle que $\Phi(x_n) \rightarrow m$.

Étape 2 : Bornitude de la suite. Par coercivité, si $\|x_n\| \rightarrow \infty$ (le long d'une sous-suite), alors $\Phi(x_n) \rightarrow +\infty$, ce qui contredit $\Phi(x_n) \rightarrow m < +\infty$. Donc $\sup_n \|x_n\| < \infty$.

Étape 3 : Extraction d'une sous-suite faiblement convergente. Comme E est réflexif, la boule fermée $\overline{B}(0, R)$ (avec $R = \sup_n \|x_n\|$) est faiblement compacte (Kakutani, théorème 8.21). Par le théorème d'Eberlein-Šmulian (théorème 7.26), la compacité faible séquentielle permet d'extraire une sous-suite (x_{n_k}) telle que $x_{n_k} \rightharpoonup x_0$ pour un $x_0 \in E$.

Étape 4 : Passage à la limite. Par semi-continuité inférieure faible,

$$\Phi(x_0) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \Phi(x_{n_k}) = m.$$

Comme $\Phi(x_0) \geq m$ par définition de l'infimum, on conclut $\Phi(x_0) = m$. En particulier, $m > -\infty$. $\square$

Exemple 8.26 (Minimisation d'une fonctionnelle intégrale). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné et $p > 1$. Considérons l'espace de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ (qui est réflexif) et la fonctionnelle

$$\Phi(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx - \int_{\Omega} f u \, dx,$$

où $f \in L^{p'}(\Omega)$. Alors :

- Φ est coercive par l'inégalité de Poincaré.
- La norme $\|\nabla \cdot\|_p$ est convexe continue, donc faiblement s.c.i. (par Mazur). Le terme linéaire $u \mapsto \int f u$ est faiblement continu. Donc Φ est faiblement s.c.i.
- $\Phi(0) = 0$, donc le domaine est non vide.

Par le théorème 8.25, Φ admet un minimiseur $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, solution faible de l'équation du p -laplacien $-\Delta_p u = f$.

Proposition 8.27 (Fonctionnelle convexe s.c.i. forte $\Rightarrow$ s.c.i. faible). Soit E un espace de Banach et $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexe et semi-continue inférieurement pour la norme. Alors Φ est séquentiellement faiblement s.c.i.

Démonstration. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble de sous-niveau $C_\alpha = \{x \in E : \Phi(x) \leq \alpha\}$ est convexe (car Φ est convexe) et fermé (car Φ est s.c.i. forte). Par le théorème de Mazur, C_α est faiblement fermé. Donc Φ est faiblement s.c.i. (car une fonction est s.c.i. si et seulement si tous ses sous-niveaux sont fermés).

Pour la version séquentielle : si $x_n \rightharpoonup x$ et $\liminf \Phi(x_n) < \alpha$, alors pour une sous-suite $x_{n_k} \rightharpoonup x$ avec $\Phi(x_{n_k}) \leq \alpha$ (pour k assez grand), et $x_{n_k} \in C_\alpha$. Comme C_α est faiblement fermé, $x \in C_\alpha$, donc $\Phi(x) \leq \alpha$. En faisant tendre α vers $\liminf \Phi(x_n)$, on obtient $\Phi(x) \leq \liminf \Phi(x_n)$. $\square$

8.9 Compléments sur les topologies faibles

Proposition 8.28 (Métrisabilité de la topologie faible sur les bornés). *Si E' est séparable, alors la topologie $\sigma(E, E')$ est métrisable sur les parties bornées de E .*

Démonstration. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite dense dans $\overline{B}_{E'}$. Pour $R > 0$, sur $R\overline{B}_E$, la métrique

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |f_n(x) - f_n(y)|$$

engendre la topologie $\sigma(E, E')$ restreinte à $R\overline{B}_E$. En effet, $d(x_k, x) \rightarrow 0$ si et seulement si $f_n(x_k) \rightarrow f_n(x)$ pour tout n , ce qui équivaut (par densité de (f_n) et bornitude de (x_k)) à $f(x_k) \rightarrow f(x)$ pour tout $f \in E'$. $\square$

Proposition 8.29 (Dual faible). *Les formes linéaires $\sigma(E, E')$ -continues sur E sont exactement les éléments de E' . Autrement dit, $(E, \sigma(E, E'))' = E'$.*

Démonstration. Toute $f \in E'$ est $\sigma(E, E')$ -continue par définition. Réciproquement, soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$ linéaire et $\sigma(E, E')$ -continue. La continuité en 0 donne : il existe $f_1, \dots, f_n \in E'$ et $\varepsilon > 0$ tels que $|f_i(x)| < \varepsilon$ pour $i = 1, \dots, n$ implique $|\varphi(x)| < 1$. Par homogénéité, $|\varphi(x)| \leq \varepsilon^{-1} \max_i |f_i(x)|$ pour tout x . En particulier, $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(f_i) \subset \text{Ker}(\varphi)$.

Par un résultat classique d'algèbre linéaire, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \in E'$. $\square$

Proposition 8.30 (Topologie faible-* et dual). *Les formes linéaires $\sigma(E', E)$ -continues sur E' sont exactement les évaluations $\hat{x}$ pour $x \in E$. Autrement dit, $(E', \sigma(E', E))' = J(E) \cong E$.*

Démonstration. Argument identique au précédent, en remplaçant E par E' et E' par $\{\hat{x} : x \in E\}$. $\square$

8.10 Exercices

Exercice 8.1 (★). Montrer que tout voisinage faible de 0 dans un espace de dimension infinie contient un sous-espace vectoriel de dimension infinie (donc les voisinages faibles de 0 ne sont jamais bornés en dimension infinie).

Exercice 8.2 (★). Soit E un espace de Banach, (x_n) une suite bornée de E , et $D \subset E'$ un sous-ensemble dense. Montrer que si $f(x_n) \rightarrow f(x)$ pour tout $f \in D$, alors $x_n \rightharpoonup x$.

Exercice 8.3 (★★). Montrer que dans un espace de Banach de dimension infinie, la sphère unité $S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ n'est pas faiblement fermée.

Indication : Montrer que 0 est dans l'adhérence faible de S_E .

Exercice 8.4 (★★). Soit E un espace de Banach séparable et (f_n) une suite bornée dans E' . Montrer qu'il existe une sous-suite (f_{n_k}) et $f \in E'$ tels que $f_{n_k} \xrightarrow{*} f$.

Exercice 8.5 (★★). Soit $E = \ell^1$, de sorte que $E' = \ell^\infty$.

- (a) Montrer que la suite (e_n^*) des vecteurs canoniques de ℓ^∞ converge faible-* vers 0, mais ne converge pas faiblement vers 0 dans ℓ^∞ .
- (b) En déduire que $\sigma(\ell^\infty, \ell^1) \subsetneq \sigma(\ell^\infty, (\ell^\infty)')$.

Exercice 8.6 (★★). Soit (x_n) une suite dans un espace de Banach E telle que $x_n \rightharpoonup x$. Montrer qu'il existe une suite (y_N) de combinaisons convexes $y_N = \sum_{k=1}^{n_N} \lambda_k^{(N)} x_k$ (avec $\lambda_k^{(N)} \geq 0$ et $\sum_k \lambda_k^{(N)} = 1$) telle que $\|y_N - x\| \rightarrow 0$.

Exercice 8.7 (★★). Soit E un espace de Banach et $x_n \rightharpoonup x$.

- (a) Montrer que $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$.
- (b) Donner un exemple où l'inégalité est stricte.
- (c) Montrer que si $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ et si E est uniformément convexe,

alors $x_n \rightarrow x$ en norme.

Exercice 8.8 (***). Soit E un espace de Banach non réflexif.

- (a) Montrer qu'il existe $\xi \in E'' \setminus J(E)$ avec $\|\xi\| = 1$.
- (b) En utilisant Goldstine, construire un filet (x_α) dans $\overline{B}_E$ tel que $J(x_\alpha) \xrightarrow{*} \xi$ mais (x_α) n'a pas de sous-filet convergent en norme vers un élément de E .
- (c) En déduire que $\overline{B}_E$ n'est pas faiblement compacte.

Exercice 8.9 (***). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné à bord régulier, et $f \in L^2(\Omega)$.

- (a) Montrer que la fonctionnelle $\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} f u dx$ est coercive et faiblement s.c.i. sur $H_0^1(\Omega)$.
- (b) En déduire l'existence d'un minimiseur $u_0 \in H_0^1(\Omega)$.
- (c) Montrer que u_0 est solution faible de $-\Delta u = f$ avec conditions de Dirichlet homogènes.
- (d) Montrer l'unicité du minimiseur.

Exercice 8.10 (**). Soit E un espace de Banach réflexif et $C \subset E$ un convexe fermé non vide. Pour $x \in E$, montrer qu'il existe un unique $y \in C$ tel que $\|x - y\| = \inf_{z \in C} \|x - z\|$ si E est en outre uniformément convexe.

Indication : L'existence vient de la méthode directe. Pour l'unicité, utiliser la convexité uniforme.

Exercice 8.11 (***). Démontrer la propriété de Schur : dans ℓ^1 , convergence faible et convergence forte coïncident pour les suites. C'est-à-dire, si $x_n \rightharpoonup x$ dans ℓ^1 , alors $\|x_n - x\|_1 \rightarrow 0$.

Indication : Raisonner par l'absurde. Si $\|x_n - x\|_1 \not\rightarrow 0$, extraire une sous-suite et utiliser un argument de blocs (lemme de glissement) pour construire une forme linéaire qui contredit la convergence faible.

Exercice 8.12 (**). Soient E et F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

- (a) Montrer que T est continu de $(E, \sigma(E, E'))$ vers $(F, \sigma(F, F'))$.
- (b) En déduire que si $x_n \rightharpoonup x$ dans E , alors $Tx_n \rightharpoonup Tx$ dans F .
- (c) La réciproque est-elle vraie ? (c'est-à-dire, une application linéaire faiblement-faiblement continue est-elle bornée ?)

Chapitre 9

Théorie Spectrale des Opérateurs Compacts

Contents

9.1	Opérateurs compacts : rappels et exemples	139
9.2	Fermeture de l'espace des opérateurs compacts .	141
9.3	Alternative de Fredholm	142
9.4	Théorie de Riesz–Schauder	143
9.5	Opérateurs compacts auto-adjoints : théorème spectral	145
9.6	Théorème de Hilbert–Schmidt	148
9.7	Application : équations intégrales de Fredholm . .	149
9.8	Exercices	150

9.1 Opérateurs compacts : rappels et exemples

Définition 9.1 (Opérateur compact). Soient E et F deux espaces de Banach. Un opérateur linéaire $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est dit *compact* si l'image de la boule unité fermée $\overline{B_E}$ est relativement compacte dans F , c'est-à-dire si $T(\overline{B_E})$ est compact dans F .

De manière équivalente, T est compact si et seulement si pour toute suite bornée (x_n) de E , la suite (Tx_n) admet une sous-suite convergente dans F .

Notation 9.2. On note $\mathcal{K}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F , et $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E, E)$.

Exemple 9.3 (Opérateurs de rang fini). Un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est de *rang fini* si $\dim \operatorname{im}(T) < \infty$. Tout opérateur de rang fini est compact : en effet, $T(\overline{B_E})$ est un borné d'un espace de dimension finie, donc relativement compact.

Par exemple, si $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in E'$ et $y_1, \dots, y_n \in F$, l'opérateur

$$Tx = \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) y_k$$

est de rang fini, donc compact.

Exemple 9.4 (Opérateurs intégraux). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné et $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$. L'opérateur intégral

$$(T_K f)(x) = \int_{\Omega} K(x, y) f(y) dy$$

définit un opérateur compact $T_K : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$. On dit que K est le *noyau* de T_K . C'est un opérateur de *Hilbert–Schmidt*.

Exemple 9.5 (Injection de Sobolev). Si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un ouvert borné régulier, l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte (théorème de Rellich–Kondrachov).

Exemple 9.6 (Opérateur diagonal). Sur $\ell^2(\mathbb{N})$, considérons l'opérateur diagonal $T(e_n) = \lambda_n e_n$ où (λ_n) est une suite de scalaires. Alors T est compact si et seulement si $\lambda_n \rightarrow 0$.

Proposition 9.7 (Propriétés élémentaires). Soient E, F, G des espaces de Banach.

- (i) $\mathcal{K}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$.
- (ii) Si $T \in \mathcal{K}(E, F)$, $S \in \mathcal{L}(F, G)$ et $R \in \mathcal{L}(G, E)$, alors $ST \in \mathcal{K}(E, G)$ et $TR \in \mathcal{K}(G, F)$.
- (iii) $\mathcal{K}(E)$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(E)$.

Démonstration. (i) Si $T_1, T_2 \in \mathcal{K}(E, F)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, soit (x_n) bornée dans E . On extrait une sous-suite telle que $(T_1 x_{n_k})$ converge, puis une sous-sous-suite

telle que $(T_2 x_{n_{k_l}})$ converge. Alors $((\alpha T_1 + \beta T_2) x_{n_{k_l}})$ converge.

(ii) Si (x_n) est bornée dans E , (Tx_n) admet une sous-suite convergente $(Tx_{n_k}) \rightarrow y$. Alors $STx_{n_k} \rightarrow Sy$ par continuité de S . Donc ST est compact. Pour TR : si (z_n) est bornée dans G , alors (Rz_n) est bornée dans E , donc (TRz_n) admet une sous-suite convergente.

(iii) Conséquence directe de (i) et (ii). $\square$

9.2 Fermeture de l'espace des opérateurs compacts

Théorème 9.8 ($\mathcal{K}(E, F)$ est fermé dans $\mathcal{L}(E, F)$). Soient E, F deux espaces de Banach. L'espace $\mathcal{K}(E, F)$ est fermé dans $\mathcal{L}(E, F)$ pour la topologie de la norme.

Démonstration. Soit (T_n) une suite d'opérateurs compacts convergeant vers $T \in \mathcal{L}(E, F)$ en norme : $\|T_n - T\| \rightarrow 0$. Montrons que T est compact.

Soit (x_k) une suite bornée de E , disons $\|x_k\| \leq M$ pour tout k . On procède par extraction diagonale.

Étape 1. Comme T_1 est compact, il existe une sous-suite $(x_k^{(1)})_{k \geq 1}$ de (x_k) telle que $(T_1 x_k^{(1)})$ converge. Comme T_2 est compact, on extrait de $(x_k^{(1)})$ une sous-suite $(x_k^{(2)})$ telle que $(T_2 x_k^{(2)})$ converge. Par récurrence, on obtient des sous-suites emboîtées $(x_k^{(n)})_k$ telles que $(T_n x_k^{(n)})_k$ converge pour chaque n fixé.

Étape 2. Posons $y_k = x_k^{(k)}$ (extraction diagonale). Pour tout n fixé, la suite $(T_n y_k)_{k \geq n}$ est une sous-suite de $(T_n x_k^{(n)})_k$, donc elle converge. Ainsi $(T_n y_k)_k$ converge pour tout n .

Étape 3. Montrons que (Ty_k) est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons n tel que $\|T - T_n\| < \varepsilon/(3M)$. Comme $(T_n y_k)_k$ converge, il existe K_0 tel que pour $j, l \geq K_0$:

$$\|T_n y_j - T_n y_l\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Alors pour $j, l \geq K_0$:

$$\begin{aligned} \|Ty_j - Ty_l\| &\leq \|Ty_j - T_n y_j\| + \|T_n y_j - T_n y_l\| + \|T_n y_l - Ty_l\| \\ &\leq \|T - T_n\| \|y_j\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|T_n - T\| \|y_l\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3M} \cdot M + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3M} \cdot M = \varepsilon. \end{aligned}$$

Comme F est complet, (Ty_k) converge. Donc T est compact. $\square$

Corollaire 9.9. *Si F possède la propriété d'approximation (en particulier si F est un espace de Hilbert), tout opérateur compact $T \in \mathcal{K}(E, F)$ est limite en norme d'opérateurs de rang fini.*

9.3 Alternative de Fredholm

L'alternative de Fredholm est un résultat fondamental qui décrit la structure des solutions de l'équation $x - Tx = y$ lorsque T est compact.

Théorème 9.10 (Alternative de Fredholm). *Soit E un espace de Banach et $T \in \mathcal{K}(E)$. Alors exactement l'une des deux alternatives suivantes est réalisée :*

- (a) *L'opérateur $\text{Id} - T$ est bijectif : pour tout $y \in E$, l'équation $x - Tx = y$ admet une unique solution, et $(\text{Id} - T)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$.*
- (b) *L'opérateur $\text{Id} - T$ n'est pas injectif : $\text{Ker}(\text{Id} - T) \neq \{0\}$, et dans ce cas $\dim \text{Ker}(\text{Id} - T) < \infty$ et $\text{im}(\text{Id} - T)$ est un sous-espace fermé de codimension finie avec $\text{codim im}(\text{Id} - T) = \dim \text{Ker}(\text{Id} - T)$.*

Démonstration. La preuve repose sur la théorie de Riesz et le théorème de Schauder.

Étape 1 : $\text{Ker}(\text{Id} - T)$ est de dimension finie. Sur $N = \text{Ker}(\text{Id} - T)$, on a $Tx = x$ pour tout $x \in N$. La boule unité fermée de N est donc contenue dans $T(\overline{B_E})$, qui est relativement compacte. Ainsi la boule unité de N est compacte, ce qui implique $\dim N < \infty$ par le théorème de Riesz.

Étape 2 : $\text{im}(\text{Id} - T)$ est fermé. Comme $\text{Ker}(\text{Id} - T)$ est de dimension finie, il admet un supplémentaire topologique : $E = \text{Ker}(\text{Id} - T) \oplus F_0$ avec F_0 fermé. La restriction $(\text{Id} - T)|_{F_0} : F_0 \rightarrow E$ est injective.

Montrons qu'il existe $c > 0$ tel que $\|x - Tx\| \geq c\|x\|$ pour tout $x \in F_0$. Supposons par l'absurde que non : il existe une suite $(x_n) \subset F_0$ avec $\|x_n\| = 1$ et $\|x_n - Tx_n\| \rightarrow 0$. Comme T est compact, quitte à extraire, $Tx_{n_k} \rightarrow z$. Alors $x_{n_k} \rightarrow z$, donc $z \in F_0$ (car F_0 est fermé) et $\|z\| = 1$. Mais $z - Tz = \lim_k (x_{n_k} - Tx_{n_k}) = 0$, donc $z \in \text{Ker}(\text{Id} - T) \cap F_0 = \{0\}$, contradiction avec $\|z\| = 1$.

Donc il existe $c > 0$ tel que $\|(\text{Id} - T)x\| \geq c\|x\|$ pour tout $x \in F_0$. Si $(\text{Id} - T)x_n \rightarrow y$ avec $x_n \in F_0$, alors (x_n) est de Cauchy, converge vers $x \in F_0$, et $(\text{Id} - T)x = y$. Donc $\text{im}(\text{Id} - T)$ est fermé.

Étape 3 : Noyaux et images itérés. Posons $N_k = \text{Ker}(\text{Id} - T)^k$ et $R_k = \text{im}(\text{Id} - T)^k$. On a $N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \dots$ et $R_0 \supset R_1 \supset R_2 \supset \dots$, chaque N_k est de dimension finie et chaque R_k est fermé (par récurrence, en utilisant que $(\text{Id} - T)^k$ est de la forme $\text{Id} - S_k$ avec S_k compact).

La suite (N_k) se stabilise. Sinon, $N_k \subsetneq N_{k+1}$ pour tout k . Par le lemme de Riesz, il existe $x_k \in N_{k+1}$ avec $\|x_k\| = 1$ et $\text{dist}(x_k, N_k) \geq 1/2$. Pour $j < k$:

$$Tx_k - Tx_j = x_k - \underbrace{[(x_k - Tx_k) + x_j - (x_j - Tx_j)]}_{\in N_k}.$$

En effet, $(\text{Id} - T)x_k \in N_k$ car $x_k \in N_{k+1}$, et $x_j, (\text{Id} - T)x_j \in N_k$ car $j < k$. Donc $\|Tx_k - Tx_j\| \geq 1/2$, ce qui contredit la compacité de T .

De même, (R_k) se stabilise : si $R_k \supsetneq R_{k+1}$ pour tout k , on obtient une contradiction similaire.

Étape 4 : Indice de Fredholm et codimension. L'opérateur adjoint $T' \in \mathcal{L}(E')$ est aussi compact (théorème de Schauder). On a la relation

$$\text{im}(\text{Id} - T)^\perp = \text{Ker}(\text{Id} - T'),$$

où $\text{im}(\text{Id} - T)^\perp = \{\varphi \in E' : \varphi|_{\text{im}(\text{Id} - T)} = 0\}$. Comme $\text{im}(\text{Id} - T)$ est fermé :

$$\text{codim im}(\text{Id} - T) = \dim \text{im}(\text{Id} - T)^\perp = \dim \text{Ker}(\text{Id} - T').$$

Il reste à montrer que $\dim \text{Ker}(\text{Id} - T) = \dim \text{Ker}(\text{Id} - T')$. On montre que l'indice de Fredholm $\text{ind}(\text{Id} - T) = \dim \text{Ker}(\text{Id} - T) - \text{codim im}(\text{Id} - T)$ vaut 0. Considérons la famille $\text{Id} - tT$ pour $t \in [0, 1]$. Pour $t = 0$, $\text{ind}(\text{Id}) = 0$. L'indice est localement constant sur l'ensemble des opérateurs de Fredholm (qui est ouvert), et $t \mapsto \text{Id} - tT$ est continue. Donc $\text{ind}(\text{Id} - T) = \text{ind}(\text{Id}) = 0$.

Ainsi, dans le cas (b) : $\text{codim im}(\text{Id} - T) = \dim \text{Ker}(\text{Id} - T) < \infty$. $\square$

Remarque 9.11. Dans le cas (b), l'équation $x - Tx = y$ a une solution si et seulement si $\varphi(y) = 0$ pour tout $\varphi \in \text{Ker}(\text{Id} - T')$, c'est-à-dire si y est orthogonal (au sens de la dualité) à toutes les solutions de l'équation homogène adjointe $\varphi - T'\varphi = 0$.

9.4 Théorie de Riesz–Schauder

Théorème 9.12 (Riesz–Schauder). *Soit E un espace de Banach de dimension infinie et $T \in \mathcal{K}(E)$. Alors :*

(i) $0 \in \sigma(T)$.

- (ii) $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est constitué uniquement de valeurs propres de T .
- (iii) Chaque valeur propre non nulle λ a une multiplicité algébrique finie.
- (iv) L'ensemble $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est au plus dénombrable, et 0 est le seul point d'accumulation possible de $\sigma(T)$.

Démonstration. (i) Si $0 \notin \sigma(T)$, alors T est inversible. Donc $\text{Id} = T^{-1} \circ T$ serait compact (composé d'un opérateur borné et d'un compact). Or Id n'est compact que si $\dim E < \infty$. Contradiction.

(ii) Soit $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$. L'opérateur $\lambda \text{Id} - T = \lambda(\text{Id} - T/\lambda)$. Comme T/λ est compact, l'alternative de Fredholm (théorème 9.10) s'applique à $\text{Id} - T/\lambda$. Si $\text{Id} - T/\lambda$ était bijectif, alors $\lambda \text{Id} - T$ le serait aussi, et $\lambda \notin \sigma(T)$: contradiction. Donc $\text{Ker}(\text{Id} - T/\lambda) \neq \{0\}$, c'est-à-dire que λ est valeur propre de T .

(iii) Par l'alternative de Fredholm, $\dim \text{Ker}(\text{Id} - T/\lambda) < \infty$. Plus généralement, $\dim \text{Ker}(\text{Id} - T/\lambda)^k < \infty$ pour tout k (car $(\text{Id} - T/\lambda)^k$ est de la forme $\text{Id} - S$ avec S compact), et la suite des noyaux itérés se stabilise.

(iv) Montrons que pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{\lambda \in \sigma(T) : |\lambda| \geq \varepsilon\}$ est fini.

Supposons par l'absurde qu'il existe une suite infinie $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ de valeurs propres distinctes avec $|\lambda_n| \geq \varepsilon > 0$. Soient e_n des vecteurs propres associés : $Te_n = \lambda_n e_n$, $\|e_n\| = 1$. Posons $F_n = \text{span}(e_1, \dots, e_n)$. Comme les λ_n sont distincts, les vecteurs propres sont linéairement indépendants (résultat classique d'algèbre linéaire), donc $F_{n-1} \subsetneq F_n$ pour tout $n \geq 2$.

Par le lemme de Riesz, il existe $x_n \in F_n$ avec $\|x_n\| = 1$ et $\text{dist}(x_n, F_{n-1}) \geq 1/2$. Chaque F_n est invariant par T . On écrit $x_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k^{(n)} e_k$, de sorte que

$$Tx_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k^{(n)} \lambda_k e_k.$$

Pour $m < n$, calculons :

$$\frac{Tx_n}{\lambda_n} = x_n + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k^{(n)} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_n} - 1 \right) e_k$$

de sorte que $Tx_n/\lambda_n - x_n \in F_{n-1}$. De même, $Tx_m/\lambda_m \in F_m \subset F_{n-1}$. Donc

$$\frac{Tx_n}{\lambda_n} - \frac{Tx_m}{\lambda_m} = x_n - \underbrace{\left(x_n - \frac{Tx_n}{\lambda_n} + \frac{Tx_m}{\lambda_m} \right)}_{\in F_{n-1}}$$

ce qui donne $\|Tx_n/\lambda_n - Tx_m/\lambda_m\| \geq 1/2$. Ainsi

$$\|Tx_n - Tx_m\| \geq \frac{1}{2} \min(|\lambda_n|, |\lambda_m|) \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme (x_n) est bornée ($\|x_n\| = 1$), cela contredit la compacité de T .

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{\lambda \in \sigma(T) : |\lambda| \geq \varepsilon\}$ est fini. En prenant $\varepsilon = 1/n$ et en réunissant, on obtient que $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est au plus dénombrable, et 0 est le seul point d'accumulation possible. $\square$

9.5 Opérateurs compacts auto-adjoints : théorème spectral

Dans cette section, H désigne un espace de Hilbert séparable de dimension infinie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Lemme 9.13. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjoint ($T = T^*$). Alors*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle|.$$

Démonstration. Posons $M = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle|$. L'inégalité $M \leq \|T\|$ est immédiate : $|\langle Tx, x \rangle| \leq \|T\| \|x\|^2 = \|T\|$.

Pour l'inégalité inverse, utilisons l'identité de polarisation. Comme T est auto-adjoint, pour tous $u, v \in H$:

$$4 \Re \langle Tu, v \rangle = \langle T(u+v), u+v \rangle - \langle T(u-v), u-v \rangle.$$

Donc

$$4 |\Re \langle Tu, v \rangle| \leq M(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2) = 2M(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

par l'identité du parallélogramme. Pour $\|u\| = \|v\| = 1$, on obtient $|\Re \langle Tu, v \rangle| \leq M$.

Soit $x \in H$ avec $\|x\| = 1$ et $Tx \neq 0$. Posons $v = Tx / \|Tx\|$. Alors $\|v\| = 1$ et

$$\|Tx\| = \langle Tx, v \rangle = \Re \langle Tx, v \rangle \leq M.$$

(On peut toujours choisir la phase pour que $\langle Tx, v \rangle$ soit réel positif.) Donc $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \leq M$. $\square$

Lemme 9.14. *Soit $T \in \mathcal{K}(H)$ auto-adjoint, $T \neq 0$. Alors $\|T\|$ ou $-\|T\|$ est valeur propre de T .*

Démonstration. Par le lemme 9.13, il existe une suite (x_n) avec $\|x_n\| = 1$ et $\langle Tx_n, x_n \rangle \rightarrow \lambda$ où $|\lambda| = \|T\|$. Notons que $\lambda \in \mathbb{R}$ car $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$ pour T auto-adjoint.

Calculons :

$$\begin{aligned} \|Tx_n - \lambda x_n\|^2 &= \|Tx_n\|^2 - 2\lambda \langle Tx_n, x_n \rangle + \lambda^2 \|x_n\|^2 \\ &= \|Tx_n\|^2 - 2\lambda \langle Tx_n, x_n \rangle + \lambda^2 \\ &\leq \|T\|^2 - 2\lambda \langle Tx_n, x_n \rangle + \lambda^2. \end{aligned}$$

Comme $\lambda^2 = \|T\|^2$ et $\langle Tx_n, x_n \rangle \rightarrow \lambda$, on obtient

$$\|Tx_n - \lambda x_n\|^2 \leq 2\lambda^2 - 2\lambda \langle Tx_n, x_n \rangle \rightarrow 0.$$

Comme T est compact et (x_n) bornée, quitte à extraire, $Tx_{n_k} \rightarrow y$. Alors $\lambda x_{n_k} \rightarrow y$ (car $\|Tx_{n_k} - \lambda x_{n_k}\| \rightarrow 0$), donc $x_{n_k} \rightarrow e := y/\lambda$ (car $\lambda \neq 0$). On a $\|e\| = 1$ et $Te = \lim Tx_{n_k} = y = \lambda e$. Donc λ est valeur propre de T . $\square$

Théorème 9.15 (Théorème spectral pour les opérateurs compacts auto-adjoints). *Soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et $T \in \mathcal{K}(H)$ auto-adjoint. Alors il existe une suite (finie ou dénombrable) $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ de valeurs propres réelles non nulles, tendant vers 0 si la suite est infinie, et une famille orthonormée $(e_n)_{n \geq 1}$ de vecteurs propres associés, telle que :*

$$Tx = \sum_{n \geq 1} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n, \quad \forall x \in H.$$

De plus, $H = \text{Ker}(T) \oplus \overline{\text{span}\{e_n : n \geq 1\}}$.

Démonstration. Étape 1 : Construction itérative. Si $T = 0$, il n'y a rien à prouver. Sinon, par le lemme 9.14, il existe λ_1 avec $|\lambda_1| = \|T\|$ et un vecteur propre unitaire $e_1 : Te_1 = \lambda_1 e_1$.

Posons $H_1 = \{e_1\}^\perp$. Le sous-espace H_1 est invariant par T : si $\langle x, e_1 \rangle = 0$, alors $\langle Tx, e_1 \rangle = \langle x, Te_1 \rangle = \lambda_1 \langle x, e_1 \rangle = 0$.

La restriction $T_1 = T|_{H_1} : H_1 \rightarrow H_1$ est un opérateur compact auto-adjoint sur l'espace de Hilbert H_1 . Si $T_1 = 0$, on s'arrête. Sinon, par le

lemme 9.14 appliqué à T_1 , il existe λ_2 avec $|\lambda_2| = \|T_1\| \leq \|T\| = |\lambda_1|$ et $e_2 \in H_1$, $\|e_2\| = 1$, $Te_2 = \lambda_2 e_2$.

Par récurrence, on construit $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ et $e_1, e_2, \dots$ orthonormés avec $Te_n = \lambda_n e_n$ et $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots > 0$.

Étape 2 : $\lambda_n \rightarrow 0$. Si la suite est infinie, les (e_n) forment un système orthonormé, donc $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$ pour $n \neq m$. Or $Te_n = \lambda_n e_n$, d'où

$$\|Te_n - Te_m\|^2 = \lambda_n^2 + \lambda_m^2.$$

Si $|\lambda_n| \geq \varepsilon > 0$ pour tout n , alors $\|Te_n - Te_m\| \geq \varepsilon\sqrt{2}$, ce qui contredit la compacité de T . Donc $\lambda_n \rightarrow 0$.

Étape 3 : Décomposition. Posons $H_n = \{e_1, \dots, e_n\}^\perp$. Soit $x \in H$ et écrivons

$$x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k + x_n, \quad x_n \in H_n.$$

On a $Tx_n = Tx - \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k$ et $\|T|_{H_n}\| = |\lambda_{n+1}| \rightarrow 0$. Donc

$$\left\| Tx - \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k \right\| = \|Tx_n\| \leq |\lambda_{n+1}| \|x_n\| \leq |\lambda_{n+1}| \|x\| \rightarrow 0.$$

Si le processus s'arrête après un nombre fini d'étapes, c'est-à-dire $T|_{H_N} = 0$ pour un certain N , la décomposition est une somme finie et $\text{Ker}(T) = H_N$.

Dans tous les cas, si $z \perp e_n$ pour tout n , alors $z \in \bigcap_n H_n$ et $\|Tz\| \leq |\lambda_{n+1}| \|z\|$ pour tout n , donc $Tz = 0$. Ainsi $\text{Ker}(T) = \overline{\text{span}\{e_n\}}^\perp$ et $H = \text{Ker}(T) \oplus \text{span}\{e_n : n \geq 1\}$. $\square$

Remarque 9.16. Si l'on complète la famille (e_n) par une base hilbertienne de $\text{Ker}(T)$, on obtient une base hilbertienne de H formée de vecteurs propres de T (avec la valeur propre 0 pour les vecteurs de $\text{Ker}(T)$).

Corollaire 9.17 (Min-max de Courant–Fischer). *Soit $T \in \mathcal{K}(H)$ auto-adjoint positif ($\langle Tx, x \rangle \geq 0$ pour tout x). Ordonnons les valeurs propres : $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0$. Alors*

$$\lambda_n = \min_{\substack{V \subset H \\ \text{codim } V = n-1}} \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|=1}} \langle Tx, x \rangle = \max_{\substack{W \subset H \\ \dim W = n}} \inf_{\substack{x \in W \\ \|x\|=1}} \langle Tx, x \rangle.$$

9.6 Théorème de Hilbert–Schmidt

Définition 9.18 (Opérateur de Hilbert–Schmidt). Soit H un espace de Hilbert séparable de base hilbertienne $(e_n)_{n \geq 1}$. Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est de *Hilbert–Schmidt* si

$$\|T\|_{\text{HS}}^2 := \sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty.$$

Cette quantité ne dépend pas du choix de la base hilbertienne : si (f_m) est une autre base, alors $\sum_n \|Te_n\|^2 = \sum_n \sum_m |\langle Te_n, f_m \rangle|^2 = \sum_m \sum_n |\langle e_n, T^* f_m \rangle|^2 = \sum_m \|T^* f_m\|^2$, et de même $\sum_m \|T f_m\|^2 = \sum_n \|T^* e_n\|^2 = \sum_n \|Te_n\|^2$.

Théorème 9.19 (Hilbert–Schmidt). Soit T un opérateur de Hilbert–Schmidt sur un espace de Hilbert séparable H . Alors :

- (i) T est compact.
- (ii) $\|T\| \leq \|T\|_{\text{HS}}$.
- (iii) Si de plus T est auto-adjoint, et (λ_n) désigne la suite de ses valeurs propres non nulles comptées avec multiplicité, alors $\sum_n \lambda_n^2 = \|T\|_{\text{HS}}^2$.

Démonstration. (i) Soit (e_n) une base hilbertienne de H . Définissons l'opérateur de rang fini T_N par :

$$T_N x = T \left(\sum_{n=1}^N \langle x, e_n \rangle e_n \right) = \sum_{n=1}^N \langle x, e_n \rangle T e_n.$$

Chaque T_N est de rang au plus N , donc compact. Pour $x \in H$ avec $\|x\| \leq 1$:

$$(T - T_N)x = T \left(\sum_{n>N} \langle x, e_n \rangle e_n \right) = \sum_{n>N} \langle x, e_n \rangle T e_n.$$

Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz :

$$\|(T - T_N)x\|^2 \leq \left(\sum_{n>N} |\langle x, e_n \rangle|^2 \right) \left(\sum_{n>N} \|T e_n\|^2 \right) \leq \sum_{n>N} \|T e_n\|^2 \rightarrow 0.$$

Donc $\|T - T_N\| \rightarrow 0$, et T est compact comme limite d'opérateurs compacts.

(ii) L'inégalité $\|T\| \leq \|T\|_{\text{HS}}$ découle de : $\|Tx\|^2 = \sum_n |\langle Tx, e_n \rangle|^2 = \sum_n |\langle x, T^* e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \sum_n \|T^* e_n\|^2 = \|x\|^2 \|T\|_{\text{HS}}^2$.

(iii) Par le théorème spectral 9.15, choisissons une base hilbertienne (f_n) de H formée de vecteurs propres de $T : Tf_n = \mu_n f_n$ (avec $\mu_n = 0$ pour les vecteurs de $\text{Ker}(T)$). Alors

$$\|T\|_{\text{HS}}^2 = \sum_n \|Tf_n\|^2 = \sum_n \mu_n^2 = \sum_n \lambda_n^2$$

(les μ_n non nuls étant exactement les λ_n). □

Exemple 9.20 (Noyau de Hilbert–Schmidt). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mesurable de mesure finie et $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$. L'opérateur intégral T_K défini par $(T_K f)(x) = \int_{\Omega} K(x, y) f(y) dy$ est de Hilbert–Schmidt sur $L^2(\Omega)$ avec $\|T_K\|_{\text{HS}} = \|K\|_{L^2(\Omega \times \Omega)}$.

9.7 Application : équations intégrales de Fredholm

Considérons l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce :

$$f(x) - \lambda \int_{\Omega} K(x, y) f(y) dy = g(x), \quad x \in \Omega, \quad (9.1)$$

où $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$, $g \in L^2(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Corollaire 9.21. Soit $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Alors :

- (i) Soit l'équation (9.1) admet une unique solution $f \in L^2(\Omega)$ pour tout $g \in L^2(\Omega)$.
- (ii) Soit l'équation homogène ($g = 0$) admet un nombre fini $d \geq 1$ de solutions linéairement indépendantes $f_1, \dots, f_d$, et l'équation (9.1) a une solution si et seulement si

$$\int_{\Omega} g(x) \overline{\bar{f}_j(x)} dx = 0, \quad j = 1, \dots, d,$$

où $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_d$ sont les solutions de l'équation homogène adjointe : $\bar{f}(x) - \bar{\lambda} \int_{\Omega} \overline{K(y, x)} \bar{f}(y) dy = 0$.

Démonstration. L'équation (9.1) s'écrit $(\text{Id} - \lambda T_K)f = g$. Comme T_K est compact, on applique l'alternative de Fredholm à λT_K . L'adjoint de λT_K est $\bar{\lambda} T_{K^*}$ où $K^*(x, y) = \overline{K(y, x)}$. $\square$

Exemple 9.22 (Développement spectral). Soit $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$ avec $K \in L^2([0, 1]^2)$. L'opérateur T_K est auto-adjoint compact sur $L^2([0, 1])$. Par le théorème spectral, il existe des valeurs propres $(\mu_n)_{n \geq 1}$ (réelles, tendant vers 0) et des fonctions propres orthonormées (e_n) telles que $T_K f = \sum_n \mu_n \langle f, e_n \rangle e_n$. L'équation $f - \lambda T_K f = g$ admet une solution pour tout g si et seulement si $\lambda \neq 1/\mu_n$ pour tout n , et dans ce cas :

$$f = g + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda \mu_n}{1 - \lambda \mu_n} \langle g, e_n \rangle e_n.$$

9.8 Exercices

Exercice 9.1 ($\star$). Montrer que si E est un espace de Banach de dimension infinie, l'identité Id_E n'est pas compacte.

Exercice 9.2 ($\star$). Soit $T \in \mathcal{K}(H)$ avec H un espace de Hilbert. Montrer que T^* est compact.

Exercice 9.3 ($\star\star$). Montrer que l'opérateur de Volterra $V : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$ défini par $(Vf)(x) = \int_0^x f(t) dt$ est compact. Montrer que $\sigma(V) = \{0\}$.

Indication : pour le spectre, montrer que V est quasi-nilpotent en estimant $\|V^n\|$.

Exercice 9.4 ($\star\star$). Soit $K \in C([0, 1]^2)$. Montrer que pour $|\lambda|$ suffisamment petit, l'équation $f(x) - \lambda \int_0^1 K(x, t) f(t) dt = g(x)$ admet une unique solution continue pour tout $g \in C([0, 1])$. *Indication : série de Neumann.*

Exercice 9.5 (***). (*Théorème de Mercer.*) Soit $K \in C([0, 1]^2)$ symétrique et positif. Soient (λ_n, e_n) les couples valeurs propres/vecteurs propres de T_K . Montrer que $K(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n(x) \overline{e_n(y)}$ uniformément.

Exercice 9.6 (**). Soit $T \in \mathcal{K}(H)$ auto-adjoint positif. Montrer que T admet une unique racine carrée compacte auto-adjointe positive : il existe un unique $S \in \mathcal{K}(H)$ auto-adjoint positif tel que $S^2 = T$.

Exercice 9.7 (***). On dit que $T \in \mathcal{L}(H)$ positif est un *opérateur à trace* si $\sum_n \langle T e_n, e_n \rangle < \infty$ pour une base hilbertienne (e_n) . Montrer :

- (a) Cette définition ne dépend pas du choix de la base.
- (b) Tout opérateur à trace est de Hilbert–Schmidt.
- (c) Si T est à trace, auto-adjoint positif, de valeurs propres (λ_n) , alors $\text{Tr}(T) := \sum_n \langle T e_n, e_n \rangle = \sum_n \lambda_n$.

Chapitre 10

Théorème Spectral pour les Opérateurs Auto-Adjoints

Contents

10.1 Calcul fonctionnel continu	153
10.2 Mesures spectrales et résolution de l'identité . . .	155
10.3 Théorème spectral : version mesure spectrale . .	155
10.4 Calcul fonctionnel borélien	157
10.5 Opérateurs positifs et racine carrée	157
10.6 Décomposition polaire	158
10.7 Opérateurs non bornés	159
10.8 Opérateurs auto-adjoints non bornés	160
10.9 Théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints non bornés	161
10.10 Application : mécanique quantique	162
10.11 Exercices	163

10.1 Calcul fonctionnel continu

Soit H un espace de Hilbert complexe et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint borné. On sait que $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ et plus précisément $\sigma(T) \subset [m, M]$ où $m = \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle$ et $M = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle$.

Théorème 10.1 (Calcul fonctionnel continu). *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjoint. Il existe un unique morphisme d'algèbres involutives isomé-*

trique

$$\Phi : C(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{L}(H), \quad f \mapsto f(T),$$

tel que $\Phi(1) = \text{Id}$ et $\Phi(\text{id}) = T$ (où $\text{id}(\lambda) = \lambda$). Ce morphisme satisfait :

- (i) $(\alpha f + \beta g)(T) = \alpha f(T) + \beta g(T)$ (linéarité).
- (ii) $(fg)(T) = f(T)g(T)$ (multiplicativité).
- (iii) $\bar{f}(T) = f(T)^*$ (respect de l'involution).
- (iv) $\|f(T)\| = \|f\|_\infty := \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |f(\lambda)|$ (isométrie).
- (v) $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$ (application spectrale).

Démonstration. Étape 1 : Polynômes. Pour un polynôme $p(\lambda) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k$, on définit $p(T) = \sum_{k=0}^n a_k T^k$. Les propriétés (i)–(iii) sont immédiates. Pour (iv), on utilise la formule du rayon spectral et le fait que pour T auto-adjoint, $\|T^n\| = \|T\|^n$:

$$\|p(T)\| = r(p(T)) = \sup_{\mu \in \sigma(p(T))} |\mu| = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |p(\lambda)| = \|p\|_\infty.$$

La dernière égalité utilise le théorème d'application spectrale pour les polynômes : $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$.

Étape 2 : Extension par densité. Par le théorème de Weierstrass, les polynômes sont denses dans $C(\sigma(T))$. Comme Φ est une isométrie sur les polynômes, elle se prolonge de manière unique en une isométrie de $C(\sigma(T))$ dans $\mathcal{L}(H)$.

Étape 3 : Propriétés du prolongement. La linéarité, la multiplicativité et le respect de l'involution passent à la limite par continuité. Pour l'application spectrale (v) : si $f \in C(\sigma(T))$ et $\mu \notin f(\sigma(T))$, alors $g = (f - \mu)^{-1} \in C(\sigma(T))$ et $g(T)(f(T) - \mu \text{Id}) = \text{Id}$, donc $\mu \notin \sigma(f(T))$. Réciproquement, si $\mu = f(\lambda_0)$ avec $\lambda_0 \in \sigma(T)$, on montre que $\mu \in \sigma(f(T))$ par un argument d'approximation. $\square$

Remarque 10.2. Le calcul fonctionnel continu est *positif* : si $f \geq 0$ sur $\sigma(T)$, alors $f(T) \geq 0$ (i.e., $\langle f(T)x, x \rangle \geq 0$ pour tout x). En effet, $f = (\sqrt{f})^2$, donc $f(T) = \sqrt{f}(T)^* \sqrt{f}(T) \geq 0$.

10.2 Mesures spectrales et résolution de l'identité

Définition 10.3 (Mesure spectrale). Soit $(\Omega, \mathcal{B})$ un espace mesurable. Une *mesure spectrale* (ou *mesure à valeurs projections*) sur $(\Omega, \mathcal{B})$ à valeurs dans un espace de Hilbert H est une application $E : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{L}(H)$ telle que :

- (i) $E(B)$ est un projecteur orthogonal pour tout $B \in \mathcal{B}$.
- (ii) $E(\emptyset) = 0$ et $E(\Omega) = \text{Id}$.
- (iii) $E(B_1 \cap B_2) = E(B_1)E(B_2)$ pour tous $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$.
- (iv) Si (B_n) est une suite de boréliens disjoints, alors $E(\bigcup_n B_n) = \sum_n E(B_n)$ (convergence forte).

Remarque 10.4. Pour tous $x, y \in H$, l'application $B \mapsto \langle E(B)x, y \rangle$ définit une mesure complexe $\mu_{x,y}$ sur $(\Omega, \mathcal{B})$, et $B \mapsto \langle E(B)x, x \rangle = \|E(B)x\|^2$ est une mesure positive μ_x de masse totale $\|x\|^2$.

Définition 10.5 (Résolution de l'identité). Une *résolution de l'identité* sur $\mathbb{R}$ est une famille $(E_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ de projecteurs orthogonaux sur H telle que :

- (i) $E_\lambda \leq E_\mu$ (au sens $E_\lambda H \subset E_\mu H$) pour $\lambda \leq \mu$.
- (ii) $E_\lambda \rightarrow 0$ (fortement) quand $\lambda \rightarrow -\infty$ et $E_\lambda \rightarrow \text{Id}$ quand $\lambda \rightarrow +\infty$.
- (iii) E_λ est continue à droite : $E_{\lambda+} = E_\lambda$.

10.3 Théorème spectral : version mesure spectrale

Théorème 10.6 (Théorème spectral — version mesure spectrale). Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjoint. Il existe une unique mesure spectrale E sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ à valeurs dans H , concentrée sur $\sigma(T)$, telle que :

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda \, dE(\lambda),$$

au sens où $\langle Tx, y \rangle = \int_{\sigma(T)} \lambda d\mu_{x,y}(\lambda)$ pour tous $x, y \in H$. Plus généralement, pour toute fonction borélienne bornée $f : \sigma(T) \rightarrow \mathbb{C}$:

$$f(T) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda) dE(\lambda)$$

et $\|f(T)\| = \|f\|_{L^\infty(\sigma(T), E)}$.

Démonstration. Étape 1 : Du calcul fonctionnel continu aux mesures. Par le théorème de représentation de Riesz, pour chaque $x \in H$, la forme linéaire positive $f \mapsto \langle f(T)x, x \rangle$ sur $C(\sigma(T))$ est représentée par une unique mesure de Borel positive μ_x sur $\sigma(T)$:

$$\langle f(T)x, x \rangle = \int_{\sigma(T)} f(\lambda) d\mu_x(\lambda), \quad \forall f \in C(\sigma(T)).$$

La masse de μ_x est $\mu_x(\sigma(T)) = \langle \text{Id } x, x \rangle = \|x\|^2$.

Étape 2 : Mesures complexes. Par polarisation, pour $x, y \in H$, on définit la mesure complexe :

$$\mu_{x,y} = \frac{1}{4}(\mu_{x+y} - \mu_{x-y} + i\mu_{x+iy} - i\mu_{x-iy}),$$

de sorte que $\langle f(T)x, y \rangle = \int f d\mu_{x,y}$ pour tout $f \in C(\sigma(T))$.

Étape 3 : Construction de la mesure spectrale. Pour tout borélien $B \subset \sigma(T)$, la forme sesquilinéaire $(x, y) \mapsto \mu_{x,y}(B)$ est bornée (car $|\mu_{x,y}(B)| \leq \|x\| \|y\|$). Par le théorème de représentation de Riesz-Fréchet, il existe un unique opérateur borné $E(B) \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\langle E(B)x, y \rangle = \mu_{x,y}(B)$.

$E(B)$ est un projecteur orthogonal. Pour $f = \mathbf{1}_B$ (fonction caractéristique), on a $\mathbf{1}_B^2 = \mathbf{1}_B$ et $\overline{\mathbf{1}_B} = \mathbf{1}_B$. En étendant le calcul fonctionnel aux fonctions boréliennes bornées (par passage à la limite monotone et théorèmes de convergence), on obtient $E(B)^2 = E(B)$ et $E(B)^* = E(B)$.

σ -additivité. Si $B = \bigsqcup_n B_n$ (union disjointe), alors $\mathbf{1}_B = \sum_n \mathbf{1}_{B_n}$. Pour tout x : $\|E(B)x\|^2 = \mu_x(B) = \sum_n \mu_x(B_n) = \sum_n \|E(B_n)x\|^2$. Comme les $E(B_n)$ ont des images orthogonales ($E(B_n)E(B_m) = E(B_n \cap B_m) = 0$ pour $n \neq m$), on obtient $E(B)x = \sum_n E(B_n)x$ (convergence forte).

Étape 4 : Calcul fonctionnel borélien. Pour toute fonction borélienne bornée f , on définit $f(T) = \int f dE$. Par construction : $\langle f(T)x, y \rangle = \int f d\mu_{x,y}$. Les propriétés de morphisme d'algèbre et l'isométrie $\|f(T)\| = \|f\|_{L^\infty(E)}$ se vérifient par approximation.

Unicité. Si E' est une autre mesure spectrale vérifiant l'énoncé, alors $\int f dE = \int f dE'$ pour tout $f \in C(\sigma(T))$. Par le théorème d'unicité de Riesz, $\mu_x^E = \mu_x^{E'}$ pour tout x , d'où $E = E'$. $\square$

10.4 Calcul fonctionnel borélien

Définition 10.7 (Calcul fonctionnel borélien). Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjoint et E sa mesure spectrale. Pour toute fonction borélienne bornée $f : \sigma(T) \rightarrow \mathbb{C}$, on définit :

$$f(T) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda) dE(\lambda) \in \mathcal{L}(H).$$

Proposition 10.8. *Le calcul fonctionnel borélien $f \mapsto f(T)$ est un morphisme d'algèbres involutives :*

- (i) $(fg)(T) = f(T)g(T)$.
- (ii) $\bar{f}(T) = f(T)^*$.
- (iii) $\|f(T)\| \leq \|f\|_\infty$.
- (iv) Si $f_n \rightarrow f$ ponctuellement avec $\sup_n \|f_n\|_\infty < \infty$, alors $f_n(T) \rightarrow f(T)$ fortement (convergence dominée spectrale).

Exemple 10.9 (Projecteur spectral). Pour un borélien $B \subset \sigma(T)$, on a $\mathbf{1}_B(T) = E(B)$. En particulier, $E(\{\lambda\})$ est le projecteur orthogonal sur le sous-espace propre associé à λ (nul si λ n'est pas valeur propre).

10.5 Opérateurs positifs et racine carrée

Définition 10.10 (Opérateur positif). Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est dit *positif* (noté $T \geq 0$) si T est auto-adjoint et $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in H$. On note $T \geq S$ si $T - S \geq 0$.

Théorème 10.11 (Racine carrée). Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ positif. Il existe un unique opérateur positif $S \in \mathcal{L}(H)$ tel que $S^2 = T$. On le note $S = T^{1/2}$ ou $S = \sqrt{T}$. De plus, S commute avec tout opérateur qui commute avec T .

Démonstration. Existence. Comme $T \geq 0$, on a $\sigma(T) \subset [0, \|T\|]$. La fonction $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$ est continue sur $\sigma(T)$. On pose $S = f(T) = \sqrt{\cdot}(T)$ par

le calcul fonctionnel continu. Alors $S^2 = (\sqrt{\cdot})^2(T) = \text{id}(T) = T$ et $S^* = \overline{\sqrt{\cdot}}(T) = \sqrt{\cdot}(T) = S$ (car $\sqrt{\cdot}$ est réelle). De plus, $\langle Sx, x \rangle = \int \sqrt{\lambda} d\mu_x(\lambda) \geq 0$.

Unicité. Soit $R \geq 0$ avec $R^2 = T$. Montrons $R = S$. D'abord, R commute avec $T = R^2$, et donc avec tout polynôme en T , et par densité avec $S = f(T)$. Ainsi $RS = SR$.

Soit $x \in H$ et $y = (S - R)x$. Alors

$$\langle Sy, y \rangle + \langle Ry, y \rangle = \langle (S + R)y, y \rangle = \langle (S + R)(S - R)x, y \rangle = \langle (S^2 - R^2)x, y \rangle = \langle (T - T)x, y \rangle = 0$$

(On a utilisé $SR = RS$ pour que $(S + R)(S - R) = S^2 - R^2$.) Comme $S, R \geq 0$, on a $\langle Sy, y \rangle \geq 0$ et $\langle Ry, y \rangle \geq 0$, donc $\langle Sy, y \rangle = \langle Ry, y \rangle = 0$. En particulier, $\langle Sy, y \rangle = \|S^{1/2}y\|^2 = 0$ (en utilisant la racine carrée de S), d'où $S^{1/2}y = 0$, puis $Sy = S^{1/2}(S^{1/2}y) = 0$.

De même, $Ry = 0$. Donc $(S - R)y = 0$, i.e., $(S - R)^2x = 0$ pour tout x . Comme $S - R$ est auto-adjoint, $\|(S - R)x\|^2 = \langle (S - R)^2x, x \rangle = 0$, d'où $S = R$.

Commutation. Si A commute avec T , alors A commute avec tout polynôme en T , et par densité (calcul fonctionnel continu), A commute avec $S = \sqrt{\cdot}(T)$. $\square$

Définition 10.12 (Module d'un opérateur). Pour $T \in \mathcal{L}(H)$, on définit le *module* de T par $|T| = (T^*T)^{1/2}$.

10.6 Décomposition polaire

Théorème 10.13 (Décomposition polaire). Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Il existe une unique isométrie partielle U telle que $T = U|T|$ et $\text{Ker}(U) = \text{Ker}(T)$. De plus :

- (i) U^*U est le projecteur orthogonal sur $\overline{\text{im}(|T|)} = \overline{\text{im}(T^*)} = (\text{Ker } T)^\perp$.
- (ii) UU^* est le projecteur orthogonal sur $\overline{\text{im}(T)}$.
- (iii) $|T| = U^*T$.

Démonstration. **Existence.** Pour tout $x \in H$:

$$\| |T| x \|^2 = \langle |T|^2 x, x \rangle = \langle T^*T x, x \rangle = \|Tx\|^2.$$

Donc l'application $|T|x \mapsto Tx$ est bien définie et isométrique de $\text{im}(|T|)$ dans $\text{im}(T)$. Elle se prolonge en une isométrie $U_0 : \overline{\text{im}(|T|)} \rightarrow \overline{\text{im}(T)}$. On prolonge U_0 en $U \in \mathcal{L}(H)$ en posant $U = 0$ sur $\overline{\text{im}(|T|)}^\perp = \text{Ker}(|T|) = \text{Ker}(T)$.

Par construction, $U|T|x = Tx$ pour tout x , $\text{Ker}(U) = \text{Ker}(|T|) = \text{Ker}(T)$, et U est une isométrie partielle d'espace initial $\text{im}(|T|) = (\text{Ker}(T))^\perp$ et d'espace final $\overline{\text{im}(T)}$.

Propriétés. (i) U^*U est le projecteur sur l'espace initial de U , soit $(\text{Ker}(T))^\perp$. (ii) UU^* est le projecteur sur l'espace final, soit $\overline{\text{im}(T)}$. (iii) $U^*T = U^*U|T| = P_{(\text{Ker}(T))^\perp}|T| = |T|$ (car $\text{im}(|T|) \subset (\text{Ker}(T))^\perp$).

Unicité. Si $T = V|T|$ avec V isométrie partielle et $\text{Ker}(V) = \text{Ker}(T)$, alors V et U coïncident sur $\text{im}(|T|)$ (car $V|T|x = Tx = U|T|x$), donc sur $\overline{\text{im}(|T|)}$ par continuité, et toutes deux sont nulles sur $\text{Ker}(T) = \overline{\text{im}(|T|)}^\perp$. Donc $V = U$. $\square$

10.7 Opérateurs non bornés

Définition 10.14 (Opérateur non borné). Un *opérateur non borné* sur un espace de Hilbert H est un opérateur linéaire $T : \text{dom}(T) \rightarrow H$ défini sur un sous-espace $\text{dom}(T) \subset H$ appelé le *domaine* de T . On suppose en général que $\text{dom}(T)$ est dense dans H .

Définition 10.15 (Graphe d'un opérateur). Le *graphe* de T est le sous-espace $\Gamma(T) = \{(x, Tx) : x \in \text{dom}(T)\} \subset H \times H$.

Définition 10.16 (Opérateur fermé, opérateur fermable). Un opérateur T est *fermé* si son graphe $\Gamma(T)$ est fermé dans $H \times H$. Un opérateur T est *fermable* si la fermeture $\overline{\Gamma(T)}$ est encore le graphe d'un opérateur (noté $\overline{T}$, la *fermeture* de T).

Proposition 10.17. *T est fermé si et seulement si : pour toute suite $(x_n) \subset \text{dom}(T)$ avec $x_n \rightarrow x$ et $Tx_n \rightarrow y$, on a $x \in \text{dom}(T)$ et $Tx = y$.*

Exemple 10.18 (Opérateur de dérivation). Sur $H = L^2([0, 1])$, l'opérateur $Tf = f'$ avec $\text{dom}(T) = H^1([0, 1])$ est un opérateur fermé non borné, densément défini.

10.8 Opérateurs auto-adjoints non bornés

Définition 10.19 (Adjoint d'un opérateur non borné). Soit T densément défini. L'adjoint T^* est l'opérateur de domaine

$$\text{dom}(T^*) = \{y \in H : x \mapsto \langle Tx, y \rangle \text{ est continu sur } \text{dom}(T)\}$$

et défini par $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$ pour tout $x \in \text{dom}(T)$.

Définition 10.20 (Opérateur symétrique, auto-adjoint). Un opérateur densément défini T est :

- *symétrique* si $T \subset T^*$, i.e., $\text{dom}(T) \subset \text{dom}(T^*)$ et $T^*x = Tx$ pour $x \in \text{dom}(T)$.
- *auto-adjoint* si $T = T^*$, i.e., T est symétrique et $\text{dom}(T) = \text{dom}(T^*)$.

Remarque 10.21. La distinction entre symétrique et auto-adjoint est cruciale pour la théorie spectrale. Un opérateur symétrique peut ne pas être auto-adjoint si $\text{dom}(T) \subsetneq \text{dom}(T^*)$.

Théorème 10.22 (Critère d'auto-adjonction). Soit T un opérateur symétrique densément défini. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) T est auto-adjoint.
- (ii) T est fermé et $\text{Ker}(T^* \pm i \text{Id}) = \{0\}$.
- (iii) $\text{im}(T \pm i \text{Id}) = H$.

Démonstration. **(i) $\Rightarrow$ (ii).** Si $T = T^*$, alors T est fermé car T^* est toujours fermé. Si $T^*y = iy$, alors $\langle Ty, y \rangle = \langle y, T^*y \rangle = \langle y, iy \rangle = -i\|y\|^2$ et aussi $\langle Ty, y \rangle = \langle T^*y, y \rangle = i\|y\|^2$ (car $T = T^*$). Donc $\|y\|^2 = 0$, d'où $y = 0$. Même argument pour $-i$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Montrons que $\text{im}(T + i \text{Id})$ est fermé. Si $(T + i \text{Id})x_n \rightarrow y$ avec $x_n \in \text{dom}(T)$, alors pour tout n :

$$\|(T + i \text{Id})x_n\|^2 = \|Tx_n\|^2 + \|x_n\|^2$$

(par développement, utilisant $\langle Tx_n, ix_n \rangle + \langle ix_n, Tx_n \rangle = 0$ car T est symétrique). Donc $\|x_n\|^2 \leq \|(T + i \text{Id})x_n\|^2$, la suite (x_n) est de Cauchy (car

(($(T + i)x_n$) converge), $x_n \rightarrow x$, et $Tx_n \rightarrow y - ix$. Comme T est fermé, $x \in \text{dom}(T)$ et $(T + i)x = y$. Donc $\text{im}(T + i)$ est fermé.

Si $\text{im}(T + i) \neq H$, il existe $z \neq 0$ avec $z \perp \text{im}(T + i)$. Pour tout $x \in \text{dom}(T)$: $\langle (T + i)x, z \rangle = 0$, donc $\langle Tx, z \rangle = -i \langle x, z \rangle$. Cela signifie $z \in \text{dom}(T^*)$ et $T^*z = iz$, d'où $z \in \text{Ker}(T^* - i) = \{0\}$: contradiction. Donc $\text{im}(T + i) = H$. Même argument pour $T - i$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Soit $y \in \text{dom}(T^*)$. Comme $\text{im}(T + i) = H$, il existe $x_0 \in \text{dom}(T)$ tel que $(T + i)x_0 = (T^* + i)y$. Comme $T \subset T^* : (T^* + i)x_0 = (T^* + i)y$, d'où $T^*(y - x_0) = -i(y - x_0)$. Or $\text{Ker}(T^* + i) = \text{im}(T - i)^\perp = H^\perp = \{0\}$ (car $\text{im}(T - i) = H$). Donc $y = x_0 \in \text{dom}(T)$. Ainsi $\text{dom}(T^*) \subset \text{dom}(T)$, d'où $T = T^*$. $\square$

Exemple 10.23 (Le laplacien $-\Delta$). Sur $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert borné régulier, l'opérateur $-\Delta$ avec domaine $\text{dom}(-\Delta) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ est auto-adjoint positif sur $L^2(\Omega)$.

Exemple 10.24 (L'opérateur $i \frac{d}{dx}$). Sur $L^2(\mathbb{R})$, l'opérateur $P = -i \frac{d}{dx}$ (opérateur d'impulsion en mécanique quantique) avec domaine $\text{dom}(P) = H^1(\mathbb{R})$ est auto-adjoint. Sur $L^2([0, 1])$, la situation est plus subtile : l'opérateur $-i \frac{d}{dx}$ avec domaine $C_c^\infty((0, 1))$ est symétrique mais pas auto-adjoint. Ses extensions auto-adjointes sont paramétrées par les conditions aux bords $f(1) = e^{i\theta} f(0)$, $\theta \in [0, 2\pi)$.

10.9 Théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints non bornés

Théorème 10.25 (Théorème spectral — opérateurs non bornés). *Soit T un opérateur auto-adjoint (non nécessairement borné) sur H . Il existe une unique mesure spectrale E sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, concentrée sur $\sigma(T)$, telle que :*

$$T = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE(\lambda)$$

avec $\text{dom}(T) = \{x \in H : \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\mu_x(\lambda) < \infty\}$. Plus généralement, pour

toute fonction borélienne $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$:

$$f(T) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dE(\lambda), \quad \text{dom}(f(T)) = \left\{ x \in H : \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d\mu_x(\lambda) < \infty \right\}.$$

Nous omettons la preuve complète, qui utilise la transformée de Cayley $U = (T - i)(T + i)^{-1}$, qui est un opérateur unitaire. On applique le théorème spectral pour les opérateurs unitaires à U , puis on revient à T par transformation inverse.

10.10 Application : mécanique quantique

En mécanique quantique, un système physique est décrit par un espace de Hilbert H (l'espace des états), et les observables physiques sont représentées par des opérateurs auto-adjoints sur H .

- Remarque 10.26* (Postulats de la mécanique quantique). (i) L'état d'un système est un vecteur unitaire $\psi \in H$ (à une phase près).
(ii) Une observable est un opérateur auto-adjoint A sur H .
(iii) La valeur moyenne de A dans l'état ψ est $\langle A\psi, \psi \rangle$.
(iv) Les valeurs possibles d'une mesure de A sont les éléments de $\sigma(A)$.
(v) La probabilité d'obtenir un résultat dans l'ensemble borélien B est $\|E(B)\psi\|^2 = \mu_\psi(B)$.
(vi) Après une mesure donnant un résultat dans B , l'état devient $E(B)\psi / \|E(B)\psi\|$ (réduction du paquet d'ondes).

Exemple 10.27 (Position et impulsion). Sur $H = L^2(\mathbb{R})$:

- L'opérateur position : $(Qf)(x) = xf(x)$, $\text{dom}(Q) = \{f \in L^2 : xf \in L^2\}$.
- L'opérateur impulsion : $(Pf)(x) = -i\hbar f'(x)$, $\text{dom}(P) = H^1(\mathbb{R})$.

Ces opérateurs satisfont la relation de commutation canonique : $[Q, P] = QP - PQ = i\hbar \text{Id}$ (sur un domaine dense approprié). Le spectre de Q et de P est $\mathbb{R}$ tout entier (spectre purement continu).

Exemple 10.28 (Hamiltonien de l'oscillateur harmonique). L'opérateur $H_{\text{osc}} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$ (avec $\hbar = m = \omega = 1$) est auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R})$. Son spectre est purement ponctuel : $\sigma(H_{\text{osc}}) = \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$, avec des fonctions propres données par les fonctions de Hermite.

10.11 Exercices

Exercice 10.1 (★). Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjoint. Montrer que $\sigma(T) \subset [m, M]$ où $m = \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle$ et $M = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle$, et que $m, M \in \sigma(T)$.

Exercice 10.2 (★). Soit T auto-adjoint borné et E sa mesure spectrale. Montrer que $\lambda \in \sigma(T)$ si et seulement si $E((a, b)) \neq 0$ pour tout intervalle ouvert (a, b) contenant λ .

Exercice 10.3 (★★). Soit T auto-adjoint borné avec $\sigma(T) = \{a, b\}$ (deux points). Montrer que T est de la forme $T = aP + b(\text{Id} - P)$ où P est un projecteur orthogonal. Calculer la mesure spectrale.

Exercice 10.4 (★★). Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ positif. Montrer que $\text{Ker}(T^{1/2}) = \text{Ker}(T)$ et $\overline{\text{im}(T^{1/2})} = \overline{\text{im}(T)}$.

Exercice 10.5 (★★). Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ et $T = U|T|$ sa décomposition polaire. Montrer que $T^* = U^*|T^*|$ n'est pas en général la décomposition polaire de T^* , mais que $T^* = V|T^*|$ avec $V = U^*$.

Exercice 10.6 (★★★). (*Critère de Nelson.*) Soit T symétrique sur H . On dit que $x \in \text{dom}^\infty(T) = \bigcap_{n \geq 1} \text{dom}(T^n)$ est un *vecteur analytique* si $\sum_{n=0}^\infty \frac{\|T^n x\|}{n!} t^n < \infty$ pour un $t > 0$. Soit $\mathcal{D} \subset \text{dom}^\infty(T)$ un sous-espace dense de vecteurs analytiques. Montrer que T est essentiellement auto-adjoint (i.e., $\overline{T}$ est auto-adjoint).

Exercice 10.7 ($\star\star$). Soit (Ω, μ) un espace mesuré σ -fini et $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable. L'opérateur de multiplication $M_\varphi f = \varphi f$ sur $L^2(\Omega, \mu)$ avec domaine $\text{dom}(M_\varphi) = \{f \in L^2 : \varphi f \in L^2\}$ est auto-adjoint. Déterminer sa mesure spectrale et son spectre.

Exercice 10.8 ($\star\star\star$). (*Théorème de Stone.*) Soit $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ un groupe fortement continu d'opérateurs unitaires sur H . Montrer qu'il existe un unique opérateur auto-adjoint A tel que $U_t = e^{itA}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Chapitre 11

Espaces L^p et Dualité

Contents

11.1 Inégalités fondamentales	165
11.2 Complétude de L^p : théorème de Riesz–Fischer .	167
11.3 Densité de C_c^∞ dans L^p	168
11.4 Convolution et approximation de l’identité	169
11.5 Dual de L^p	170
11.6 L^2 comme espace de Hilbert	171
11.7 Théorème de Radon–Nikodym	172
11.8 Interpolation : théorème de Riesz–Thorin	172
11.9 Application : transformée de Fourier	173
11.10 Exercices	174

11.1 Inégalités fondamentales

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Pour $1 \leq p \leq \infty$, on note $L^p(\Omega) = L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ l’espace des (classes de) fonctions mesurables $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ telles que $\|f\|_p < \infty$, où

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \inf\{C \geq 0 : |f| \leq C \text{ } \mu\text{-p.p.}\} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

On rappelle que les *exposants conjugués* p et q satisfont $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, avec la convention $q = \infty$ si $p = 1$.

Théorème 11.1 (Inégalité de Young). *Pour tous $a, b \geq 0$ et $1 < p < \infty$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

L'égalité a lieu si et seulement si $a^p = b^q$.

Démonstration. La fonction $\varphi(t) = \log t$ est concave. Par la convexité de l'exponentielle, pour $s, t > 0$:

$$st = e^{\log s + \log t} = e^{\frac{1}{p}(p \log s) + \frac{1}{q}(q \log t)} \leq \frac{1}{p} e^{p \log s} + \frac{1}{q} e^{q \log t} = \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q}$$

par l'inégalité de Jensen (ou directement par convexité de e^x). On applique avec $s = a$, $t = b$. $\square$

Théorème 11.2 (Inégalité de Hölder). *Soient $1 \leq p \leq \infty$ et q son exposant conjugué. Pour tous $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$:*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Démonstration. Les cas $p = 1$ ($q = \infty$) et $p = \infty$ ($q = 1$) sont immédiats.

Supposons $1 < p < \infty$. Si $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$, le résultat est trivial. Sinon, posons $\tilde{f} = f/\|f\|_p$ et $\tilde{g} = g/\|g\|_q$. Par l'inégalité de Young (théorème 11.1) :

$$|\tilde{f}(x)| \cdot |\tilde{g}(x)| \leq \frac{|\tilde{f}(x)|^p}{p} + \frac{|\tilde{g}(x)|^q}{q}$$

pour μ -presque tout x . En intégrant :

$$\int_{\Omega} |\tilde{f}| |\tilde{g}| \, d\mu \leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\tilde{f}|^p \, d\mu + \frac{1}{q} \int_{\Omega} |\tilde{g}|^q \, d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Donc $\int |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$. $\square$

Théorème 11.3 (Inégalité de Minkowski). *Pour $1 \leq p \leq \infty$ et $f, g \in L^p(\Omega)$:*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Démonstration. Les cas $p = 1$ (inégalité triangulaire pour $|\cdot|$) et $p = \infty$ sont immédiats. Supposons $1 < p < \infty$. On a :

$$|f + g|^p \leq |f + g|^{p-1} |f| + |f + g|^{p-1} |g|.$$

Comme $(p-1)q = p$, la fonction $|f + g|^{p-1} \in L^q(\Omega)$ avec $\| |f + g|^{p-1} \|_q = \|f + g\|_p^{p/q}$. En appliquant Hölder à chaque terme :

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &\leq \|f\|_p \|f + g\|_p^{p/q} + \|g\|_p \|f + g\|_p^{p/q} \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p/q}. \end{aligned}$$

Si $\|f + g\|_p > 0$, on divise par $\|f + g\|_p^{p/q}$ et on utilise $p - p/q = 1$. $\square$

11.2 Complétude de L^p : théorème de Riesz–Fischer

Théorème 11.4 (Riesz–Fischer). *Pour $1 \leq p \leq \infty$, l'espace $L^p(\Omega, \mu)$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Seule la complétude reste à montrer (la vérification que $\|\cdot\|_p$ est une norme est classique via Minkowski). Traitons le cas $1 \leq p < \infty$.

Méthode par sous-suites. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^p . Il suffit de montrer qu'elle admet une sous-suite convergente (car une suite de Cauchy ayant une sous-suite convergente converge elle-même).

Extrayons une sous-suite (f_{n_k}) telle que $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq 2^{-k}$. Posons

$$g_N(x) = \sum_{k=1}^N |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|, \quad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|.$$

Par Minkowski :

$$\|g_N\|_p \leq \sum_{k=1}^N \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \sum_{k=1}^N 2^{-k} \leq 1.$$

Par le lemme de Fatou : $\int g^p d\mu \leq \liminf_N \int g_N^p d\mu \leq 1$. Donc $g < \infty$ μ -presque partout, ce qui signifie que la série télescopique

$$f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$$

converge absolument pour μ -presque tout x . Notons $f(x)$ sa limite : $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ μ -p.p.

Il reste à montrer que $f \in L^p$ et $\|f_{n_k} - f\|_p \rightarrow 0$. On a $|f_{n_k}| \leq |f_{n_1}| + g$ μ -p.p., donc $|f| \leq |f_{n_1}| + g \in L^p$, d'où $f \in L^p$. De plus, $|f_{n_k} - f|^p \leq (2(|f_{n_1}| + g))^p \in L^1$. Par convergence dominée, $\|f_{n_k} - f\|_p \rightarrow 0$.

Le cas $p = \infty$ est plus simple : si (f_n) est de Cauchy dans L^∞ , il existe un ensemble de mesure nulle N tel que $(f_n(x))$ soit de Cauchy dans $\mathbb{K}$ pour tout $x \notin N$. La limite ponctuelle f est dans L^∞ et $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$. $\square$

11.3 Densité de C_c^∞ dans L^p

Théorème 11.5. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $1 \leq p < \infty$. Alors $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ (pour la mesure de Lebesgue).*

Démonstration. On procède en trois étapes.

Étape 1 : Les fonctions simples à support compact sont denses.

Par définition de l'intégrale de Lebesgue, toute $f \in L^p(\Omega)$ non négative est limite croissante de fonctions simples s_n . Par convergence dominée, $\|f - s_n\|_p \rightarrow 0$. En tronquant $(s_n \cdot \mathbf{1}_{B(0,n)})$, on obtient des fonctions simples à support compact.

Étape 2 : Les fonctions continues à support compact sont denses.

Par le théorème de Lusin, pour tout $\varepsilon > 0$, toute fonction mesurable f à support compact coïncide avec une fonction continue sur un ensemble dont le complémentaire a mesure $< \varepsilon$. Cela permet d'approcher les fonctions simples à support compact par des fonctions de $C_c(\Omega)$.

Alternativement, on approche $\mathbf{1}_K$ (pour K compact $\subset \Omega$) par des fonctions de $C_c(\Omega)$ via le lemme d'Urysohn.

Étape 3 : Régularisation par convolution. Soit $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec $\rho \geq 0$, $\text{supp } \rho \subset B(0,1)$ et $\int \rho = 1$. Posons $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d}\rho(x/\varepsilon)$. Pour $f \in C_c(\Omega)$, la fonction $f * \rho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\text{supp}(f * \rho_\varepsilon) \subset \text{supp}(f) + B(0, \varepsilon)$. Pour ε assez petit, $f * \rho_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ et $\|f * \rho_\varepsilon - f\|_p \rightarrow 0$ par un argument standard de convergence dominée. $\square$

Remarque 11.6. Pour $p = \infty$, $C_c^\infty(\Omega)$ n'est pas dense dans $L^\infty(\Omega)$: en effet, l'adhérence de $C_c(\Omega)$ dans L^∞ est $C_0(\Omega)$ (fonctions continues tendant vers 0 à l'infini), qui est strictement inclus dans L^∞ .

11.4 Convolution et approximation de l'identité

Définition 11.7 (Convolution). Soient $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$ mesurables. Le *produit de convolution* est défini (lorsqu'il existe) par :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y) g(y) \, dy.$$

Théorème 11.8 (Inégalité de Young pour la convolution). Soient $1 \leq p, q, r \leq \infty$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, alors $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$ et

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Définition 11.9 (Approximation de l'identité). Une *approximation de l'identité* est une famille $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de fonctions dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que :

- (i) $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon \, dx = 1$ pour tout $\varepsilon > 0$.
- (ii) $\sup_\varepsilon \|\rho_\varepsilon\|_1 < \infty$.
- (iii) Pour tout $\delta > 0$: $\int_{|x|>\delta} |\rho_\varepsilon(x)| \, dx \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Proposition 11.10. Soit (ρ_ε) une approximation de l'identité et $1 \leq p < \infty$. Pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$:

$$\|f * \rho_\varepsilon - f\|_p \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

Démonstration. On a $(f * \rho_\varepsilon)(x) - f(x) = \int [f(x - y) - f(x)] \rho_\varepsilon(y) \, dy$. Par Minkowski intégral :

$$\|f * \rho_\varepsilon - f\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_p |\rho_\varepsilon(y)| \, dy$$

où $\tau_y f(x) = f(x - y)$. On sait que $y \mapsto \|\tau_y f - f\|_p$ est continue et vaut 0 en $y = 0$. Soit $\delta > 0$ tel que $\|\tau_y f - f\|_p < \varepsilon'$ pour $|y| < \delta$. Alors :

$$\begin{aligned} \|f * \rho_\varepsilon - f\|_p &\leq \varepsilon' \int_{|y|<\delta} |\rho_\varepsilon| \, dy + 2 \|f\|_p \int_{|y|\geq\delta} |\rho_\varepsilon| \, dy \\ &\leq \varepsilon' \|\rho_\varepsilon\|_1 + 2 \|f\|_p \int_{|y|\geq\delta} |\rho_\varepsilon| \, dy \rightarrow \varepsilon' \cdot C \end{aligned}$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Comme ε' est arbitraire, on conclut. $\square$

11.5 Dual de L^p

Théorème 11.11 (Représentation de Riesz pour L^p). *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ -fini et $1 \leq p < \infty$. Alors l'application*

$$\Phi : L^q(\Omega) \rightarrow (L^p(\Omega))', \quad \Phi(g)(f) = \int_{\Omega} f \bar{g} \, d\mu$$

(où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) est une isométrie isomorphe : $(L^p(\Omega))' \cong L^q(\Omega)$.

Démonstration. **Φ est une isométrie.** Par Hölder, $|\Phi(g)(f)| \leq \|f\|_p \|g\|_q$, donc $\|\Phi(g)\| \leq \|g\|_q$. Pour l'égalité, si $g \neq 0$, posons

$$f_0 = \frac{\bar{g}}{|g|} \cdot |g|^{q/p} = \frac{\bar{g}}{|g|} \cdot |g|^{q-1}$$

(avec $f_0 = 0$ là où $g = 0$). Alors $|f_0|^p = |g|^{(q-1)p} = |g|^q$, donc $\|f_0\|_p = \|g\|_q^{q/p}$. Et $\Phi(g)(f_0) = \int |g|^q \, d\mu = \|g\|_q^q$. Donc $\|\Phi(g)\| \geq \|g\|_q^q / \|g\|_q^{q/p} = \|g\|_q^{q-q/p} = \|g\|_q$.

Φ est surjective. Soit $\ell \in (L^p(\Omega))'$. On construit g tel que $\ell = \Phi(g)$.

Cas $p = 2$. C'est le théorème de représentation de Riesz–Fréchet dans l'espace de Hilbert L^2 .

Cas $1 \leq p < \infty$ général, μ σ -finie. Définissons une mesure signée ν sur $(\Omega, \mathcal{A})$ par $\nu(A) = \ell(\mathbf{1}_A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$ de mesure finie. Vérifions que ν est bien définie et σ -additive :

- $\mathbf{1}_A \in L^p$ car $\mu(A) < \infty$, donc $\nu(A) = \ell(\mathbf{1}_A)$ est défini.
- $|\nu(A)| = |\ell(\mathbf{1}_A)| \leq \|\ell\| \|\mathbf{1}_A\|_p = \|\ell\| \mu(A)^{1/p}$. En particulier, $\nu \ll \mu$.
- La σ -additivité de ν résulte de la continuité de ℓ et de la convergence dans L^p des sommes partielles $\sum_{k=1}^N \mathbf{1}_{A_k}$.

Par le théorème de Radon–Nikodym (valable car μ est σ -finie), il existe $g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ telle que $\nu(A) = \int_A g \, d\mu$ pour tout ensemble mesurable A de mesure finie. Donc :

$$\ell(s) = \int_{\Omega} s g \, d\mu$$

pour toute fonction simple s à support de mesure finie. Par densité des fonctions simples dans L^p et continuité de ℓ :

$$\ell(f) = \int_{\Omega} f g \, d\mu, \quad \forall f \in L^p(\Omega).$$

Il reste à montrer que $g \in L^q(\Omega)$. Pour $1 < p < \infty$: prenons $f_n = \bar{g}/|g| \cdot \min(|g|^{q-1}, n) \cdot \mathbf{1}_{\Omega_n}$ où $\Omega_n \uparrow \Omega$ avec $\mu(\Omega_n) < \infty$. Alors $f_n \in L^p$ et

$$\int_{\Omega_n} \min(|g|^q, n|g|) d\mu = \ell(f_n) \leq \|\ell\| \|f_n\|_p.$$

Un calcul montre $\|f_n\|_p^p \leq \int \min(|g|^q, n|g|) d\mu$, d'où $\|f_n\|_p^p \leq \|\ell\| \cdot \|f_n\|_p$, c'est-à-dire $\|f_n\|_p^{p-1} \leq \|\ell\|$. En passant à la limite ($n \rightarrow \infty$) par convergence monotone, $\|g\|_q^{q/p} \leq \|\ell\|$, donc $g \in L^q$.

Pour $p = 1$ ($q = \infty$) : pour tout ensemble mesurable A avec $\mu(A) > 0$:

$$\frac{1}{\mu(A)} \left\| \int_A g d\mu \right\| = \frac{|\ell(\mathbf{1}_A)|}{\mu(A)} \leq \frac{\|\ell\| \mu(A)}{\mu(A)} = \|\ell\|.$$

Par le théorème de Lebesgue sur la différentiation, $|g(x)| \leq \|\ell\|$ pour μ -presque tout x . Donc $g \in L^\infty$ et $\|g\|_\infty \leq \|\ell\|$. $\square$

Remarque 11.12. Le dual de $L^\infty(\Omega)$ est strictement plus grand que $L^1(\Omega)$: c'est l'espace des mesures finiment additives absolument continues $\text{ba}(\Omega, \mu)$. En particulier, L^∞ n'est pas réflexif.

11.6 L^2 comme espace de Hilbert

Remarque 11.13. L'espace $L^2(\Omega, \mu)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f \bar{g} d\mu.$$

C'est le seul espace L^p qui soit un espace de Hilbert ($p = q = 2$). La dualité $(L^2)' \cong L^2$ coïncide avec le théorème de représentation de Riesz–Fréchet pour les espaces de Hilbert.

Exemple 11.14 (Bases hilbertiennes classiques). (i) Sur $L^2([0, 2\pi])$: la famille $\{e^{inx}/\sqrt{2\pi}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne (système trigonométrique).
(ii) Sur $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2} dx)$: les polynômes de Hermite normalisés forment une base hilbertienne.
(iii) Sur $L^2([-1, 1])$: les polynômes de Legendre normalisés forment une base hilbertienne.

11.7 Théorème de Radon–Nikodym

Le théorème de Radon–Nikodym a été utilisé dans la preuve du dual de L^p . Énonçons-le pour référence.

Théorème 11.15 (Radon–Nikodym). *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ -fini et ν une mesure signée σ -finie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ avec $\nu \ll \mu$ (absolument continue). Alors il existe une unique (à modification μ -p.p. près) fonction mesurable $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) telle que :*

$$\nu(A) = \int_A g \, d\mu, \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

La fonction g s'appelle la dérivée de Radon–Nikodym de ν par rapport à μ et se note $g = \frac{d\nu}{d\mu}$.

Nous admettons ce résultat (voir par exemple Rudin [2] pour une preuve complète). La preuve classique utilise le théorème de représentation de Riesz dans L^2 ou le lemme de Von Neumann.

11.8 Interpolation : théorème de Riesz–Thorin

Théorème 11.16 (Riesz–Thorin). *Soient (Ω_1, μ_1) et (Ω_2, μ_2) deux espaces mesurés σ -finis. Soient $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ et T un opérateur linéaire défini sur $L^{p_0}(\Omega_1) + L^{p_1}(\Omega_1)$ tel que :*

$$\|Tf\|_{q_0} \leq M_0 \|f\|_{p_0}, \quad \|Tf\|_{q_1} \leq M_1 \|f\|_{p_1}.$$

Alors pour tout $0 < \theta < 1$, en posant

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1},$$

on a $T : L^p(\Omega_1) \rightarrow L^q(\Omega_2)$ avec

$$\|Tf\|_q \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_p.$$

Démonstration. La preuve utilise le *théorème des trois droites* de Hadamard. On se ramène au cas $M_0 = M_1 = 1$ par normalisation.

Soit $f = \sum_j a_j \mathbf{1}_{A_j}$ une fonction simple sur Ω_1 et $g = \sum_k b_k \mathbf{1}_{B_k}$ une fonction simple sur Ω_2 avec $\|f\|_p = \|g\|_{q'} = 1$ (où q' est le conjugué de q). Il suffit de montrer que $|\int (Tf)\bar{g} d\mu_2| \leq 1$.

Pour $z \in S = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \Re z \leq 1\}$ (la bande), définissons :

$$f_z(x) = \sum_j |a_j|^{p(\frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1})} \frac{a_j}{|a_j|} \mathbf{1}_{A_j}(x), \quad g_z(x) = \sum_k |b_k|^{q'(\frac{1-z}{q'_0} + \frac{z}{q'_1})} \frac{b_k}{|b_k|} \mathbf{1}_{B_k}(x).$$

Posons $F(z) = \int_{\Omega_2} (Tf_z) \bar{g}_z d\mu_2$. La fonction F est holomorphe sur l'intérieur de S , continue et bornée sur S .

Sur la droite $\Re z = 0$: $\|f_{it}\|_{p_0} = 1$ et $\|g_{it}\|_{q'_0} = 1$, donc $|F(it)| \leq \|Tf_{it}\|_{q_0} \leq M_0 = 1$.

Sur la droite $\Re z = 1$: $\|f_{1+it}\|_{p_1} = 1$ et $\|g_{1+it}\|_{q'_1} = 1$, donc $|F(1+it)| \leq 1$.

Par le théorème des trois droites : $|F(z)| \leq 1$ pour tout $z \in S$. En particulier, $|F(\theta)| = |\int (Tf)\bar{g} d\mu_2| \leq 1$.

Par densité des fonctions simples et dualité $(L^q)' = L^{q'} : \|Tf\|_q \leq \|f\|_p$. $\square$

11.9 Application : transformée de Fourier

Définition 11.17 (Transformée de Fourier sur L^1). Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, la transformée de Fourier de f est :

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Proposition 11.18. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d) : \hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$ (continue, tendant vers 0 à l'infini) et $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ (lemme de Riemann–Lebesgue).

Théorème 11.19 (Plancherel). La transformée de Fourier se prolonge en une isométrie surjective $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$:

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

Démonstration. Sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (espace de Schwartz), on montre par un calcul

direct que $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$: par Fubini,

$$\begin{aligned} \int |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi &= \int \hat{f}(\xi) \overline{\hat{f}(\xi)} d\xi = \int \hat{f}(\xi) \widehat{\bar{f}}(-\xi) d\xi \\ &= \int f(x) \overline{f(x)} dx = \|f\|_2^2 \end{aligned}$$

(en utilisant la formule de Parseval pour les fonctions de Schwartz). Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, l'isométrie se prolonge par continuité. La surjectivité résulte de la formule d'inversion de Fourier sur $\mathcal{S}$. $\square$

Corollaire 11.20 (Hausdorff–Young). *Pour $1 \leq p \leq 2$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$:*
 $\|\hat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p$ (où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$).

Démonstration. Par Riesz–Thorin : $\mathcal{F} : L^1 \rightarrow L^\infty$ avec norme ≤ 1 et $\mathcal{F} : L^2 \rightarrow L^2$ avec norme $= 1$. Par interpolation avec $\theta = 2/p' = 2 - 2/p$: $\mathcal{F} : L^p \rightarrow L^{p'}$ avec norme ≤ 1 . $\square$

11.10 Exercices

Exercice 11.1 ($\star$). Montrer le cas d'égalité dans l'inégalité de Hölder : $\|fg\|_1 = \|f\|_p \|g\|_q$ si et seulement si $|f|^p$ et $|g|^q$ sont proportionnelles μ -p.p.

Exercice 11.2 ($\star$). Soit $\mu(\Omega) < \infty$ et $1 \leq p \leq r \leq \infty$. Montrer que $L^r(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ avec injection continue : $\|f\|_p \leq \mu(\Omega)^{1/p-1/r} \|f\|_r$.

Exercice 11.3 ($\star\star$). Montrer que $L^1(\mathbb{R})$ n'est pas réflexif. *Indication :* $(L^1)' = L^\infty$ et $(L^\infty)' \supsetneq L^1$.

Exercice 11.4 ($\star\star$). Soit (f_n) une suite dans $L^p(\Omega)$ ($1 \leq p < \infty$) convergeant vers f dans L^p . Montrer qu'il existe une sous-suite (f_{n_k}) et une fonction $g \in L^p$ telles que $f_{n_k} \rightarrow f$ μ -p.p. et $|f_{n_k}| \leq g$ μ -p.p. pour tout k .

Exercice 11.5 (**). Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ($1 \leq p \leq \infty$), alors $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

Exercice 11.6 (***). Utiliser le théorème de Riesz–Thorin pour montrer l’inégalité de Hausdorff–Young généralisée : si G est un groupe abélien localement compact et $1 \leq p \leq 2$, alors la transformée de Fourier envoie $L^p(G)$ dans $L^{p'}(\hat{G})$ continûment.

Exercice 11.7 (**). Montrer que $L^p(\mathbb{R}^d)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$, mais que $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ ne l’est pas.

Exercice 11.8 (**). Soit $1 < p < \infty$ et (f_n) bornée dans $L^p(\Omega)$ avec $\mu(\Omega) < \infty$. Montrer que si $f_n \rightarrow f$ μ -p.p., alors $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^p(\Omega)$.
Indication : utiliser la réflexivité de L^p et la convergence dominée.

Chapitre 12

Algèbres de Banach et C^* -Algèbres : Introduction

Contents

12.1 Algèbres de Banach : définition et exemples . . .	177
12.2 Spectre et rayon spectral	178
12.3 Algèbres de Banach commutatives : théorie de Gelfand	179
12.4 C^* -algèbres	181
12.5 Théorème de Gelfand–Naimark commutatif . . .	181
12.6 Calcul fonctionnel continu dans les C^* -algèbres .	182
12.7 États et formes positives	183
12.8 Construction GNS	183
12.9 Application : mécanique quantique et théorie des représentations	185
12.10 Exercices	185

12.1 Algèbres de Banach : définition et exemples

Définition 12.1 (Algèbre de Banach). Une *algèbre de Banach* est un espace de Banach $(A, \|\cdot\|)$ muni d'une multiplication $A \times A \rightarrow A$, $(a, b) \mapsto ab$, qui est bilinéaire, associative et satisfait $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$ pour tous $a, b \in A$.

Si A possède un élément unité e avec $\|e\| = 1$, on dit que A est une algèbre de Banach *unitaire* (ou *unital*).

- Exemple 12.2** (Exemples fondamentaux). (i) $\mathcal{L}(E)$, l'algèbre des opérateurs bornés sur un espace de Banach E , avec la composition et la norme d'opérateur. L'unité est Id .
- (ii) $C(K)$, l'algèbre des fonctions continues sur un espace compact K , avec la multiplication ponctuelle et la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|$.
- (iii) $\ell^1(\mathbb{Z})$ avec le produit de convolution : $(a * b)(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k) b(n - k)$. C'est une algèbre de Banach commutative unitaire (l'unité est δ_0).
- (iv) $L^1(G)$ pour un groupe localement compact G , avec le produit de convolution.
- (v) Le *disque algébrique* $A(\mathbb{D})$: fonctions continues sur $\overline{\mathbb{D}}$ et holomorphes sur $\mathbb{D}$, avec la norme $\|f\|_\infty$.

12.2 Spectre et rayon spectral

Définition 12.3 (Spectre dans une algèbre de Banach). Soit A une algèbre de Banach unitaire et $a \in A$. Le *spectre* de a est

$$\text{Spec}(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda e \text{ n'est pas inversible dans } A\}.$$

L'ensemble $\rho(a) = \mathbb{C} \setminus \text{Spec}(a)$ est la *résolvante* de a , et l'application $\lambda \mapsto (a - \lambda e)^{-1}$ est la *fonction résolvante*.

Proposition 12.4. *Pour tout $a \in A$ (A unitaire), $\text{Spec}(a)$ est un compact non vide de $\mathbb{C}$ contenu dans le disque $\{|\lambda| \leq \|a\|\}$.*

Démonstration. Si $|\lambda| > \|a\|$, alors $a - \lambda e = -\lambda(e - a/\lambda)$ et $\|a/\lambda\| < 1$, donc $e - a/\lambda$ est inversible par la série de Neumann : $(e - a/\lambda)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (a/\lambda)^n$. Donc $\text{Spec}(a) \subset \overline{B}(0, \|a\|)$.

Le spectre est fermé car l'ensemble des éléments inversibles est ouvert (par perturbation de l'identité). Le spectre est non vide : si $\text{Spec}(a) = \emptyset$, alors la fonction résolvante $\lambda \mapsto (a - \lambda e)^{-1}$ est entière (holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier, à valeurs dans A). De plus, pour $|\lambda| \rightarrow \infty$, $\|(a - \lambda e)^{-1}\| = \frac{1}{|\lambda|} \|(e - a/\lambda)^{-1}\| \rightarrow 0$. Par le théorème de Liouville vectoriel, la résolvante est identiquement nulle, ce qui est absurde. $\square$

Théorème 12.5 (Formule du rayon spectral). *Soit A une algèbre de Banach unitaire et $a \in A$. Le rayon spectral $r(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \text{Spec}(a)\}$ satisfait :*

$$r(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n} = \inf_{n \geq 1} \|a^n\|^{1/n}.$$

Démonstration. Posons $R = \lim_n \|a^n\|^{1/n}$ (la limite existe car la suite $(\log \|a^n\|)$ est sous-additive, par le lemme de Fekete).

$r(a) \leq R$. Si $\lambda \in \text{Spec}(a)$, alors $\lambda^n \in \text{Spec}(a^n)$ (car si $a^n - \lambda^n e$ est inversible, un argument de factorisation montre que $a - \lambda e$ est inversible). Donc $|\lambda|^n \leq \|a^n\|$, i.e., $|\lambda| \leq \|a^n\|^{1/n}$. En passant à la limite : $|\lambda| \leq R$.

$R \leq r(a)$. La série de Laurent de la résolvante au voisinage de l'infini est :

$$(a - \lambda e)^{-1} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^{n+1}}, \quad |\lambda| > r(a).$$

Cette série converge dans A pour $|\lambda| > r(a)$. Pour tout $\varphi \in A'$ (le dual de A), la fonction $\lambda \mapsto \varphi((a - \lambda e)^{-1})$ est holomorphe sur $\{|\lambda| > r(a)\}$ avec le développement $-\sum_n \varphi(a^n)/\lambda^{n+1}$. Par la théorie des séries de Laurent, cette série converge pour $|\lambda| > r(a)$, donc $|\varphi(a^n)|/|\lambda|^{n+1} \rightarrow 0$ pour tout $|\lambda| > r(a)$. Ainsi la suite $(\varphi(a^n/\lambda^n))$ est bornée pour tout $\varphi \in A'$. Par Banach–Steinhaus, $\sup_n \|a^n/\lambda^n\| < \infty$, d'où $\|a^n\|^{1/n} \leq C^{1/n} |\lambda|$ pour tout $|\lambda| > r(a)$. En passant à la limite : $R \leq |\lambda|$ pour tout $|\lambda| > r(a)$, donc $R \leq r(a)$. $\square$

12.3 Algèbres de Banach commutatives : théorie de Gelfand

Définition 12.6 (Caractère). Soit A une algèbre de Banach commutative unitaire. Un *caractère* de A est un morphisme d'algèbres non nul $\chi : A \rightarrow \mathbb{C}$, c'est-à-dire une forme linéaire multiplicative : $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$ et $\chi(e) = 1$.

Proposition 12.7. *Tout caractère χ est automatiquement continu avec $\|\chi\| = 1$.*

Démonstration. Si $|\chi(a)| > \|a\|$, posons $\lambda = \chi(a)$. Alors $a - \lambda e$ est inversible (car $|\lambda| > \|a\|$), et $\chi(a - \lambda e) = \chi(a) - \lambda = 0$, donc χ annulerait un élément

inversible : $0 = \chi((a - \lambda e)(a - \lambda e)^{-1}) = \chi(a - \lambda e)\chi((a - \lambda e)^{-1}) = 0$, ce qui est cohérent mais impossible car $\chi(e) = \chi((a - \lambda e)(a - \lambda e)^{-1}) = 0 \cdot \chi(\dots) = 0 \neq 1$. Contradiction. Donc $|\chi(a)| \leq \|a\|$, i.e., $\|\chi\| \leq 1$. Comme $\chi(e) = 1$ et $\|e\| = 1$, on a $\|\chi\| = 1$. $\square$

Définition 12.8 (Espace de Gelfand). L'espace de Gelfand (ou spectre) de A est l'ensemble $\hat{A}$ de tous les caractères de A , muni de la topologie faible-* (restreinte de $\sigma(A', A)$).

Proposition 12.9. $\hat{A}$ est un espace compact non vide.

Démonstration. Comme $\|\chi\| \leq 1$ pour tout $\chi \in \hat{A}$, l'ensemble $\hat{A}$ est contenu dans la boule unité fermée de A' , qui est compacte pour la topologie faible-* par le théorème de Banach–Alaoglu. Montrons que $\hat{A}$ est fermé (pour $\sigma(A', A)$) : si $\chi_\alpha \rightarrow \varphi$ dans $\sigma(A', A)$, alors $\varphi(ab) = \lim \chi_\alpha(ab) = \lim \chi_\alpha(a)\chi_\alpha(b) = \varphi(a)\varphi(b)$ et $\varphi(e) = 1$. Donc $\varphi \in \hat{A}$. Fermé dans un compact, $\hat{A}$ est compact.

Non-vacuité : tout idéal maximal M de A donne un caractère $A \rightarrow A/M \cong \mathbb{C}$ (car A/M est un corps, et un corps qui est une algèbre de Banach est isomorphe à $\mathbb{C}$ par le théorème de Gelfand–Mazur). $\square$

Définition 12.10 (Transformée de Gelfand). La transformée de Gelfand est l'application

$$\Gamma : A \rightarrow C(\hat{A}), \quad \Gamma(a)(\chi) = \hat{a}(\chi) = \chi(a).$$

Théorème 12.11 (Propriétés de la transformée de Gelfand). L'application $\Gamma : A \rightarrow C(\hat{A})$ est un morphisme d'algèbres continu avec :

- (i) $\widehat{ab} = \hat{a} \cdot \hat{b}$ et $\widehat{\alpha a + \beta b} = \alpha \hat{a} + \beta \hat{b}$.
- (ii) $\hat{e} = 1$.
- (iii) $\|\hat{a}\|_\infty = r(a)$ (rayon spectral de a).
- (iv) $\text{Spec}(a) = \hat{a}(\hat{A}) = \{\chi(a) : \chi \in \hat{A}\}$.

Démonstration. (i) et (ii) sont immédiats par définition.

(iii) On a $\lambda \in \text{Spec}(a) \iff a - \lambda e$ n'est pas inversible $\iff a - \lambda e$ appartient à un idéal maximal $M \iff$ il existe $\chi \in \hat{A}$ avec $\chi(a - \lambda e) = 0 \iff \chi(a) = \lambda$ pour un $\chi \in \hat{A}$. Donc $\text{Spec}(a) = \hat{a}(\hat{A})$ et $\|\hat{a}\|_\infty = \sup_\chi |\chi(a)| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \text{Spec}(a)\} = r(a)$. $\square$

12.4 C^* -algèbres

Définition 12.12 (C^* -algèbre). Une C^* -algèbre est une algèbre de Banach A munie d'une *invololution* $*$: $A \rightarrow A$ (antilinéaire, $(ab)^* = b^*a^*$, $(a^*)^* = a$) satisfaisant l'axiome C^* :

$$\|a^*a\| = \|a\|^2, \quad \forall a \in A.$$

Exemple 12.13 (Exemples de C^* -algèbres). (i) $\mathcal{L}(H)$ avec $T^* =$ adjoint hilbertien. L'axiome C^* est : $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

(ii) $C(K)$ avec $f^*(x) = \overline{f(x)}$. L'axiome C^* est : $\|\bar{f}f\|_\infty = \|f\|_\infty^2$ (évident).

(iii) Toute sous-algèbre fermée et stable par $*$ de $\mathcal{L}(H)$ est une C^* -algèbre.

Lemme 12.14. Dans une C^* -algèbre, si $a = a^*$ (auto-adjoint), alors $\|a\| = r(a)$.

Démonstration. On a $\|a^2\| = \|a^*a\| = \|a\|^2$. Par récurrence : $\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}$. Donc $r(a) = \lim_n \|a^n\|^{1/n} = \lim_k \|a^{2^k}\|^{1/2^k} = \|a\|$. $\square$

12.5 Théorème de Gelfand–Naimark commutatif

Théorème 12.15 (Gelfand–Naimark commutatif). Soit A une C^* -algèbre commutative unitaire. Alors la transformée de Gelfand

$$\Gamma : A \rightarrow C(\hat{A}), \quad a \mapsto \hat{a},$$

est un isomorphisme isométrique de C^* -algèbres. Autrement dit, $A \cong C(\hat{A})$.

Démonstration. Par le théorème 12.11, Γ est un morphisme d'algèbres avec $\|\hat{a}\|_\infty = r(a)$.

Respect de l'invololution. Pour tout $\chi \in \hat{A}$ et $a \in A$: si $a = a^*$, alors $\text{Spec}(a) \subset \mathbb{R}$ (dans une C^* -algèbre, les éléments auto-adjoints ont un spectre

réel¹), donc $\chi(a) \in \mathbb{R} = \overline{\chi(a)}$. Tout a s'écrit $a = \frac{a+a^*}{2} + i\frac{a-a^*}{2i}$ (somme de deux auto-adjoints), d'où $\chi(a^*) = \overline{\chi(a)}$, i.e., $\widehat{a^*} = \overline{\widehat{a}}$.

Isométrie. Pour tout $a \in A$: a^*a est auto-adjoint, donc $\|a\|^2 = \|a^*a\| = r(a^*a) = \|\widehat{a^*a}\|_\infty = \|\widehat{a} \cdot \widehat{a}\|_\infty = \|\widehat{a}\|_\infty^2$. Donc $\|\widehat{a}\|_\infty = \|a\|$: Γ est une isométrie.

Injectivité. Conséquence immédiate de l'isométrie.

Surjectivité. L'image $\Gamma(A)$ est une sous-algèbre fermée de $C(\widehat{A})$ (car A est complet et Γ isométrique) qui sépare les points de $\widehat{A}$ (si $\chi_1 \neq \chi_2$, il existe a avec $\chi_1(a) \neq \chi_2(a)$), contient les constantes ($\widehat{e} = 1$), et est stable par conjugaison ($\widehat{a^*} = \overline{\widehat{a}}$). Par le théorème de Stone–Weierstrass, $\Gamma(A) = C(\widehat{A})$. $\square$

Remarque 12.16. Ce théorème dit que toute C^* -algèbre commutative unitaire est (isométriquement isomorphe à) l'algèbre des fonctions continues sur un espace compact. C'est un résultat remarquable : la structure algébrique et l'involution déterminent complètement l'espace topologique sous-jacent.

12.6 Calcul fonctionnel continu dans les C^* -algèbres

Corollaire 12.17 (Calcul fonctionnel continu). *Soit A une C^* -algèbre unitaire et $a \in A$ un élément normal ($a^*a = aa^*$). Alors il existe un unique $*$ -morphisme isométrique $\Phi : C(\text{Spec}(a)) \rightarrow A$ tel que $\Phi(\text{id}) = a$ et $\Phi(1) = e$.*

Démonstration. La sous- C^* -algèbre $C^*(a)$ engendrée par a et e est commutative (car a est normal). Par le théorème de Gelfand–Naimark, $C^*(a) \cong C(\widehat{C^*(a)})$. On montre que $\widehat{C^*(a)} \cong \text{Spec}(a)$ via $\chi \mapsto \chi(a)$, ce qui donne l'identification $C^*(a) \cong C(\text{Spec}(a))$. $\square$

1. En effet, si $a = a^*$ et $\lambda = \alpha + i\beta$ avec $\beta \neq 0$, alors $\|a + i\lambda e\|^2 = \|(a + i\lambda e)^*(a + i\lambda e)\| = \|a^2 + t^2 e\| \leq \|a\|^2 + t^2$, mais aussi $r(a + i\lambda e) \geq |\alpha + i(\beta + t)|$. Pour t grand, cela donne une contradiction.

12.7 États et formes positives

Définition 12.18 (Forme positive, état). Soit A une C^* -algèbre unitaire.

- Une forme linéaire $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ est *positive* si $\varphi(a^*a) \geq 0$ pour tout $a \in A$.
- Un *état* est une forme positive φ avec $\varphi(e) = 1$.

L'ensemble des états est noté $\mathcal{S}(A)$.

Proposition 12.19. Soit φ un état sur A . Alors :

- (i) $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$ pour tout a .
- (ii) $|\varphi(a)|^2 \leq \varphi(a^*a)$ (Cauchy–Schwarz).
- (iii) φ est continu avec $\|\varphi\| = 1$.

Démonstration. (i) On écrit $a = h + ik$ avec h, k auto-adjoints. Comme $\varphi(h) \in \mathbb{R}$ pour h auto-adjoint (car $h = h^*$ et $\varphi(h) = \varphi(h^*) = \overline{\varphi(h)}$), montré en écrivant h comme différence de deux éléments positifs), on obtient $\varphi(a^*) = \varphi(h - ik) = \varphi(h) - i\varphi(k) = \overline{\varphi(a)}$.

(ii) La forme sesquilinéaire $(a, b) \mapsto \varphi(b^*a)$ est positive ($\varphi(a^*a) \geq 0$). L'inégalité de Cauchy–Schwarz donne : $|\varphi(b^*a)|^2 \leq \varphi(a^*a)\varphi(b^*b)$. Avec $b = e$: $|\varphi(a)|^2 \leq \varphi(a^*a) \cdot 1$.

(iii) De (ii) : $|\varphi(a)|^2 \leq \varphi(a^*a) \leq \|a^*a\| = \|a\|^2$ (car φ est positive et $\|a^*a\| e - a^*a \geq 0$). Donc $\|\varphi\| \leq 1$, et $\varphi(e) = 1$ donne $\|\varphi\| = 1$. $\square$

12.8 Construction GNS

Théorème 12.20 (Construction GNS). Soit A une C^* -algèbre unitaire et φ un état sur A . Il existe un espace de Hilbert H_φ , un $*$ -morphisme $\pi_\varphi : A \rightarrow \mathcal{L}(H_\varphi)$ (une représentation) et un vecteur $\xi_\varphi \in H_\varphi$ tels que :

- (i) $\varphi(a) = \langle \pi_\varphi(a)\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle$ pour tout $a \in A$.
 - (ii) ξ_φ est cyclique : $\overline{\pi_\varphi(A)\xi_\varphi} = H_\varphi$.
- Ce triplet $(H_\varphi, \pi_\varphi, \xi_\varphi)$ est unique à isomorphisme unitaire près.

Démonstration. **Étape 1 : Pré-espace de Hilbert.** Posons $N_\varphi = \{a \in A : \varphi(a^*a) = 0\}$. Par Cauchy–Schwarz, N_φ est un idéal à gauche fermé de A . Sur

le quotient A/N_φ , la forme sesquilinéaire

$$\langle [a], [b] \rangle = \varphi(b^*a)$$

est bien définie et est un produit scalaire (la positivité résulte de la définition de N_φ : $\langle [a], [a] \rangle = \varphi(a^*a) = 0 \Rightarrow [a] = 0$).

Étape 2 : Complétion. Soit H_φ le complété de $(A/N_\varphi, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Étape 3 : Représentation. Pour $a \in A$, l'application $[b] \mapsto [ab]$ est bien définie sur A/N_φ (car N_φ est un idéal à gauche). Elle est bornée :

$$\|[ab]\|^2 = \varphi(b^*a^*ab) \leq \|a^*a\| \varphi(b^*b) = \|a\|^2 \|[b]\|^2$$

(en utilisant que $\|a\|^2 e - a^*a \geq 0$, donc $\varphi(b^*(\|a\|^2 e - a^*a)b) \geq 0$). Donc elle se prolonge en un opérateur borné $\pi_\varphi(a) \in \mathcal{L}(H_\varphi)$ avec $\|\pi_\varphi(a)\| \leq \|a\|$.

On vérifie que π_φ est un $*$ -morphisme :

- $\pi_\varphi(ab)[c] = [abc] = \pi_\varphi(a)[bc] = \pi_\varphi(a)\pi_\varphi(b)[c]$.
- $\langle \pi_\varphi(a^*)[b], [c] \rangle = \langle [a^*b], [c] \rangle = \varphi(c^*a^*b) = \langle [b], [ac] \rangle = \langle [b], \pi_\varphi(a)[c] \rangle$.

Donc $\pi_\varphi(a^*) = \pi_\varphi(a)^*$.

Étape 4 : Vecteur cyclique. Posons $\xi_\varphi = [e] \in H_\varphi$. Alors :

$$\langle \pi_\varphi(a)\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle = \langle [a], [e] \rangle = \varphi(e^*a) = \varphi(a).$$

Et $\pi_\varphi(A)\xi_\varphi = \{[a] : a \in A\} = A/N_\varphi$, qui est dense dans H_φ par construction.

Unicité. Si (H', π', ξ') est un autre triplet satisfaisant (i) et (ii), l'application $U : \pi_\varphi(a)\xi_\varphi \mapsto \pi'(a)\xi'$ est bien définie et isométrique : $\|\pi'(a)\xi'\|^2 = \langle \pi'(a^*a)\xi', \xi' \rangle = \varphi(a^*a) = \|\pi_\varphi(a)\xi_\varphi\|^2$. Elle se prolonge en un unitaire $U : H_\varphi \rightarrow H'$ avec $U\pi_\varphi(a)U^* = \pi'(a)$ et $U\xi_\varphi = \xi'$. $\square$

Corollaire 12.21 (Gelfand–Naimark abstrait). *Toute C^* -algèbre admet une représentation fidèle (injective) sur un espace de Hilbert. Autrement dit, toute C^* -algèbre est isométriquement $*$ -isomorphe à une sous- C^* -algèbre de $\mathcal{L}(H)$ pour un certain espace de Hilbert H .*

Démonstration. Pour chaque état $\varphi \in \mathcal{S}(A)$, construisons le triplet GNS $(H_\varphi, \pi_\varphi, \xi_\varphi)$. Posons $H = \bigoplus_{\varphi \in \mathcal{S}(A)} H_\varphi$ et $\pi = \bigoplus_{\varphi} \pi_\varphi$. Alors $\pi : A \rightarrow \mathcal{L}(H)$ est un $*$ -morphisme.

Injectivité : si $\pi(a) = 0$, alors $\pi_\varphi(a) = 0$ pour tout état φ , donc $\varphi(a^*a) = \langle \pi_\varphi(a^*a)\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle = \|\pi_\varphi(a)\xi_\varphi\|^2 = 0$. Comme les états séparent les éléments positifs (pour tout $b \geq 0$, $b \neq 0$, il existe un état φ avec $\varphi(b) > 0$), on obtient $a^*a = 0$, d'où $\|a\|^2 = \|a^*a\| = 0$ et $a = 0$. $\square$

12.9 Application : mécanique quantique et théorie des représentations

Remarque 12.22 (Observables en mécanique quantique). La formulation algébrique de la mécanique quantique (due à Segal, Haag, Kastler) considère les observables comme les éléments auto-adjoints d'une C^* -algèbre A . Les états physiques sont les états au sens de la définition 12.18. La construction GNS fournit alors l'espace de Hilbert et la représentation concrète du système.

Cette approche est essentielle en théorie quantique des champs, où l'espace de Hilbert n'est pas fixé a priori mais dépend de l'état (représentations inéquivalentes).

12.10 Exercices

Exercice 12.1 (★). Calculer le spectre de l'élément $f(x) = x$ dans $C([0, 1])$. En déduire que $r(f) = \|f\|_\infty$.

Exercice 12.2 (★). Soit A une algèbre de Banach unitaire et $a, b \in A$. Montrer que $\text{Spec}(ab) \cup \{0\} = \text{Spec}(ba) \cup \{0\}$.

Exercice 12.3 (★★). (*Théorème de Gelfand–Mazur.*) Montrer que si A est une algèbre de Banach unitaire dans laquelle tout élément non nul est inversible, alors $A \cong \mathbb{C}$.

Exercice 12.4 (★★). Calculer l'espace de Gelfand de $\ell^1(\mathbb{Z})$ et identifier la transformée de Gelfand. *Indication : les caractères sont les morphismes $a \mapsto \sum_n a(n)z^n$ pour $z \in \mathbb{T}$ (le cercle unité).*

Exercice 12.5 (★★). Soit A une C^* -algèbre et $a \in A$ normal. Montrer que $\|a\| = r(a)$.

Exercice 12.6 (***). Soit $A = M_n(\mathbb{C})$ (les matrices $n \times n$) et $\varphi(a) = \frac{1}{n} \operatorname{Tr}(a)$. Construire explicitement le triplet GNS $(H_\varphi, \pi_\varphi, \xi_\varphi)$.

Exercice 12.7 (**). Un état φ est *pur* s'il est un point extrême de $\mathcal{S}(A)$. Montrer que φ est pur si et seulement si la représentation GNS associée est irréductible.

Exercice 12.8 (***). (*Théorème de Wiener.*) Soit $f \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et $\tilde{f}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)z^n$ sa série de Fourier. Montrer : si $\tilde{f}(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{T}$, alors $1/\tilde{f}$ est aussi une série de Fourier absolument convergente, c'est-à-dire $1/\tilde{f} = \tilde{g}$ pour un $g \in \ell^1(\mathbb{Z})$.

Indication : utiliser la théorie de Gelfand.

Annexe A

Rappels d'Analyse et de Topologie

Contents

A.1	Théorème de Baire	187
A.2	Lemme de Zorn	188
A.3	Théorème de Tychonoff	188
A.4	Mesure de Lebesgue : rappels	188
A.5	Convergence dominée	189
A.6	Théorème de Fubini	189
A.7	Autres rappels utiles	189

Ce chapitre rassemble sans démonstration les résultats d'analyse, de topologie et de théorie de la mesure utilisés dans le cours.

A.1 Théorème de Baire

Théorème A.1 (Baire). *Soit X un espace métrique complet (ou un espace localement compact). Toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense dans X . De manière équivalente, X ne peut pas être réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide.*

Remarque A.2. Ce théorème est le fondement des trois grands théorèmes de l'analyse fonctionnelle linéaire : Banach–Steinhaus, théorème de l'application ouverte et théorème du graphe fermé.

A.2 Lemme de Zorn

Théorème A.3 (Lemme de Zorn). *Soit $(X, \leq)$ un ensemble ordonné inductif (i.e., toute chaîne admet un majorant). Alors X possède au moins un élément maximal.*

Ce résultat, équivalent à l'axiome du choix, est utilisé pour :

- L'existence de bases algébriques (bases de Hamel).
- Le théorème de Hahn–Banach.
- L'existence d'idéaux maximaux dans les algèbres.
- Le théorème de Tychonoff.

A.3 Théorème de Tychonoff

Théorème A.4 (Tychonoff). *Tout produit d'espaces topologiques compacts est compact (pour la topologie produit).*

Ce théorème est équivalent à l'axiome du choix. Il est utilisé dans la preuve du théorème de Banach–Alaoglu (compacité de la boule unité du dual pour la topologie faible-*).

A.4 Mesure de Lebesgue : rappels

On rappelle les propriétés fondamentales de la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}^d$:

- (i) λ est une mesure de Borel régulière, σ -finie, invariante par translation.
- (ii) λ est complète (les sous-ensembles de mesure nulle sont mesurables).
- (iii) λ est la complétion de sa restriction aux boréliens.
- (iv) Pour tout borélien B : $\lambda(B) = \inf\{\sum_n |I_n| : B \subset \bigcup_n I_n, I_n \text{ intervalles}\}$.

A.5 Convergence dominée

Théorème A.5 (Convergence dominée de Lebesgue). *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et (f_n) une suite de fonctions mesurables telle que :*

(i) $f_n \rightarrow f$ μ -presque partout.

(ii) Il existe $g \in L^1(\Omega, \mu)$ avec $|f_n| \leq g$ μ -p.p. pour tout n .

Alors $f \in L^1(\Omega, \mu)$ et $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$. De plus, $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$.

A.6 Théorème de Fubini

Théorème A.6 (Fubini–Tonelli). *Soient (Ω_1, μ_1) et (Ω_2, μ_2) des espaces mesurés σ -finis.*

(i) **Tonelli.** *Si $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow [0, +\infty]$ est mesurable, alors*

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x, y) d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x, y) d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y).$$

(ii) **Fubini.** *Si $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$, alors les mêmes égalités sont valides et les intégrales intérieures définissent des fonctions intégrables pour μ_1 -p.p. x (resp. μ_2 -p.p. y).*

A.7 Autres rappels utiles

Théorème A.7 (Convergence monotone). *Si (f_n) est une suite croissante de fonctions mesurables positives, alors $\int \lim_n f_n d\mu = \lim_n \int f_n d\mu$.*

Théorème A.8 (Lemme de Fatou). *Si (f_n) est une suite de fonctions mesurables positives, alors $\int \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu$.*

Théorème A.9 (Stone–Weierstrass). *Soit K un espace compact et $\mathcal{A} \subset C(K, \mathbb{R})$ une sous-algèbre qui sépare les points et contient les constantes. Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $C(K, \mathbb{R})$.*

Version complexe : si de plus $\mathcal{A}$ est stable par conjugaison, alors $\mathcal{A}$ est dense dans $C(K, \mathbb{C})$.

Théorème A.10 (Ascoli–Arzelà). *Soit K un espace métrique compact. Un sous-ensemble $\mathcal{F} \subset C(K)$ est relativement compact si et seulement si $\mathcal{F}$ est borné et équicontinu.*

Bibliographie

- [1] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Graduate Texts in Mathematics 183, Springer-Verlag, 1998.
- [2] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3e édition, McGraw-Hill, 1987.

Index

- G_δ , 81
- L^p
 - comparaison des normes, 99
- ℓ^2 , 90
- ℓ^∞ , 84
- ℓ^p
 - borne uniforme, 93
 - isomorphisme, 107
- $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, 105
- $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, 87
- $\mathcal{C}^\infty$, 105
- ω , 105
- c_{00} , 83
- adjoint, 44
 - calcul, 48
 - de l'opérateur de multiplication, 45
 - et matrice, 50
 - propriétés, 44
- Alaoglu, Leonidas, 127
- algèbre
 - $C(K)$, 178
 - des opérateurs bornés, 178
 - $L^1(G)$, 178
 - $\ell^1(\mathbb{Z})$, 178
- algèbre de Banach, 20, 55, 177
 - commutative, 179
 - définition, 177
 - unitaire, 55, 177
- alternative de Fredholm, 51, 142
- analyse fonctionnelle, 7
- analyse harmonique, 32
- annihilateur, 76
- annulateur, 118, 120
- application
 - ouverte, 96–108
 - image d'un opérateur, 107
 - quotient, 106
- application linéaire continue, 18
- application lipschitzienne, 54
- approximation de l'identité, 91, 168, 169
 - définition, 169
- argument de blocs, 136
- argument diagonal, 128
- Ascoli, théorème d', 57
- Ascoli–Arzelà (théorème d'), 190
- auto-adjoint, 34, 45
 - spectre, 46
 - spectre réel, 45
- axiome C^* , 181
- axiome du choix, 188
- $\text{ba}(\mathbb{N})$, 113
- $\text{ba}(\mathbb{N})$, 73
- Baire (théorème de), 187
- Banach, Stefan, 7, 13, 79, 127
- Banach–Alaoglu (théorème de), 180, 188
- Banach–Steinhaus, 179
- Banach–Alaoglu, théorème de, 75
 - et réflexivité, 76
- Banach–Schauder, théorème de, 95, 97
- Banach–Steinhaus, 82
 - espace non séparable, 94
 - pour les suites d'opérateurs, 85
- base canonique, 113

- base de Fourier, 40
- base hilbertienne, 37
 - critères de complétude, 39
 - de vecteurs propres, 147
 - dénombrable, 40
 - exemples dans L^2 , 171
- base orthonormale complète, 37
- Bessel, inégalité de, 38
- bidual, 74–76, 109, 114–115
 - définition, 74, 114
 - exercice, 78
- biorthogonal, 35
- Bolzano-Weierstrass, théorème de, 56
- borné, 13
 - ponctuellement, 82, 84
 - uniformément, 82
- borné inférieurement, 49
- boule fermée, 8
- boule ouverte, 8
- boule unité
 - compacité faible-*, 75
- boule unité fermée, 8
 - compacité, 16
- Brezis, Haïm, 28
- $C(K)$, 10
- C^* -algèbre, 181
 - définition, 181
 - exemples, 181
 - éléments auto-adjoints, 181
- $C^k([a, b])$, 15
- c_0 , 75, 109
 - dual de, 112–113
 - définition, 112
 - non réflexif, 116
 - non-réflexivité, 77
- calcul des variations, 123, 131–133
- calcul fonctionnel
 - borélien, 157
 - définition, 157
 - continu, 153
 - théorème, 153
 - dans les C^* -algèbres, 182
 - positivité, 154
- caractère
 - automatiquement continu, 179
 - d'une algèbre de Banach, 179
- Carleson, théorème de, 88
- catégorie, théorie des, 115
- Cauchy-Schwarz
 - pour les états, 183
- Cauchy-Schwarz, inégalité de, 28
- Cayley
 - transformée de, 162
- codimension
 - finie, 107
- coefficients de Fourier, 37, 86
- coercivité, 37, 132
- compacité
 - dans $\mathbb{K}^n$, 18
 - et totale bornitude, 26
 - faible, 116, 117
 - relative, 117
 - séquentielle, 117
- compacité séquentielle, 17
- compact, 10, *voir* opérateur compact
 - en dimension finie, 16
 - opérateur, 48
- complet, 13
- complétion, 23
 - construction explicite, 25
 - exemples, 24
 - existence et unicité, 23
 - propriété universelle, 23
- complétude
 - caractérisation par les séries, 22
 - de ℓ^p , 13
 - de $\mathcal{L}(E, F)$, 19
 - de $C(K)$, 14
 - nécessité dans Banach-Steinhaus, 83

- nécessité dans l'application ouverte, convexe fermé
 - 98
 - projection, 33
- condensation de Banach-Steinhaus, 88–94
- conoyau, 103
- constante de surjection, 103
- continuité
 - des opérations vectorielles, 12
- contraction, 47
- convention
 - linéarité du produit scalaire, 28
- convergence
 - dans un e.v.n., 11
 - en norme d'opérateurs, 84
 - faible, 93
 - faible vs forte, 93
 - faible-*, 84
 - forte d'opérateurs, 83–94
 - non uniforme, 94
 - simple, 128
 - uniforme d'opérateurs, 84–94
 - uniforme sur les compacts, 105
- convergence dominée, 168, 189
- convergence dominée spectrale, 157
- convergence dominée, théorème de, 42
- convergence faible, 125–126
 - bornée, 125
 - dans ℓ^p , 126
 - dans L^p , 126, 175
 - définition, 125
 - unicité, 125
 - versus convergence forte, 125
- convergence faible-*, 126
- convergence monotone, 189
- convergence monotone, théorème de, 42
- convergence uniforme
 - et continuité, 14
- convexe, 33
 - fermé = faiblement fermé, 130
 - fermé faible-*, 129
- convexité stricte, 119, 121
- convexité uniforme, 119
 - définition, 119
- convolution, 43, 169
 - définition, 169
 - régularisation, 168
 - sur $\ell^1(\mathbb{Z})$, 178
- Courant–Fischer (théorème de), 147
- crochet de dualité, 110
- De Wilde, 106, 108
- densité
 - dans L^2 , 42
 - de C_c^∞ dans L^p , 168
- deuxième catégorie, 80, 81
- différentiation de Lebesgue, 171
- dimension finie
 - compacité de la boule, 16
 - complétude, 16
 - sous-espace fermé, 18
 - équivalence des normes, 16
- disque algébrique, 178
- distance, 8
- divergence
 - des séries de Fourier, 87
- domaine, 99
- domaine d'un opérateur, 159
- du Bois-Reymond, théorème de, 86–94
- dual
 - borne uniforme, 93
 - de ℓ^∞ , 73
 - de ℓ^p , 20, 73
 - de c_0 , 26
 - de L^p , 77
 - de L^∞ , 171
 - de L^p , 170
 - séparation des points, 70
 - topologique, 19

- complétude, 20
- dual topologique, 110
 - sépare les points, 110
- dualité, 67
- décalage à droite, 20, 25, 48
- décalage à gauche, 20
- décomposition en parties réelle et imaginaire, 62
- décomposition orthogonale, 43
- décomposition polaire, 158
 - théorème, 158
- décomposition spectrale, 146
- décroissance rapide, 15
- dépassement de Gibbs, 92
- dérivation
 - des limites uniformes, 15
- dérivée de Radon–Nikodym, 172
- E' , 19, 55, 110
- E'' , 74
- Eberlein, William Frederick, 117
- Eberlein–Šmulian, 109
- Eberlein–Šmulian, théorème d', 76
- EDP, 123, 131
- EDP elliptique, 31
- ℓ^2 , 31
- ℓ^p , 9
- ensemble
 - G_δ , 81
 - G_δ dense, 88
 - de Cantor, 80
 - maigre, 80
 - nulle part dense, 80
 - rare, 80
 - résiduel, 80, 88
- ensemble convexe, 70
 - ouvert, 70
- ensemble résolvant, 58
- enveloppe convexe, 131
 - fermée, 77
- espace
 - $C(K)$, 10
 - complétude, 14
 - C^k , 15
 - L^2 , 31
 - $L^2([0, 2\pi])$, 32
 - L^p , 10
 - non hilbertien pour $p \neq 2$, 31
 - $\mathbb{C}^n$
 - comme espace de Hilbert, 31
 - ℓ^2 , 31
 - ℓ^p , 9
 - complétude, 13
 - complétude (preuve alternative), 22
 - inclusions, 25
 - séparabilité, 13
 - c , 15
 - c_0 , 10
 - complétude, 15
 - s , 15
 - de Baire, 80
 - de Banach, 82
 - $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, 87
 - produit, 100
 - de dimension finie
 - réflexif, 115
 - de Fréchet, 105–108
 - quotient, 108
 - de Hilbert, 107
 - localement compact, 81
 - métrique, 80
 - métrique complet, 80
 - non complet, 25
 - $\mathbb{R}^n$, 9
 - uniformément convexe, 119
 - vectériel normé, 82
 - webbed, 106, 108
- espace de Banach, 7, 13, 110
- espace de Fréchet, 15
- espace de Hardy, 32
- espace de Hilbert, 27, 30, 60

- non séparable, 48
 - réflexif, 36, 115
 - séparable, 40
- espace de Hilbert à noyau reproduisant, 49
- espace de James, 115
- espace de Sobolev, 31, 133
- espace dual
 - complétude, 55
 - topologique, 109
- espace L^2
 - espace de Hilbert, 171
- espace L^∞
 - dual, 171
- espace L^p , 165
 - complétude, 167
 - dualité, 170
- espace mesuré, 10
- espace métrique, 8
- espace produit, 127
- espace propre, 46
- espace préhilbertien, 28
- espace quotient, 22
 - réflexif, 118
- espace réflexif, 67, 74–76, 115–120
 - caractérisation de Kakutani, 130
 - dual réflexif, 118
 - définition, 74, 115
 - exemples, 74
 - exercice, 78
 - propriétés, 75
 - quotient, 118
 - sous-espace fermé, 117
 - versus isomorphe au bidual, 115
- espace séparable, 40
- espace vectoriel normé, 7, 110
- espace vectoriel topologique, 12
- exercice
 - c_0 n'est dual d'aucun espace, 120
 - alternative de Fredholm, 150
 - application de Banach-Alaoglu, 135
 - application de Goldstine, 136
 - application de Mazur, 135
 - base de voisinages faibles, 135
 - bidual et réflexivité, 121
 - boule non faiblement fermée, 135
 - C^* -algèbre, 185
 - calcul de normes duales, 121
 - calcul fonctionnel, 163
 - convergence dans L_p , 174
 - convergence faible L_p , 175
 - convexité uniforme, 121
 - convolution, 175
 - critère auto-adjoint, 163
 - dual d'un sous-espace, 120
 - dual sépare les points, 120
 - décomposition polaire, 163
 - faible- $*$ versus faible, 135
 - Gelfand–Mazur, 185
 - GNS, 186
 - Hölder, 174
 - inclusion L_p , 174
 - L_p non réflexif, 174
 - minimisation et EDP, 136
 - opérateur compact, 150
 - opérateur de multiplication, 164
 - opérateur de Volterra, 150
 - opérateur à trace, 151
 - projecteur spectral, 163
 - propriété de Schur, 136
 - quotient de ℓ^1 , 121
 - racine carrée, 163
 - rayon spectral, 185
 - Riesz–Thorin application, 175
 - réflexif et séparable, 121
 - réflexif implique norme atteinte, 120
 - réflexivité et suites minimisantes, 136
 - semi-continuité inférieure de la norme, 135
 - spectre, 185

- spectre auto-adjoint, 163
- Stone (théorème de), 164
- suite faiblement convergente bornée, 135
- séparabilité L_p , 175
- théorème de James appliqué à ℓ^1 , 121
- théorème de Mercer, 151
- topologie faible et produit, 136
- transformée de Gelfand, 185
- Wiener (théorème de), 186
- état pur, 186
- exposant conjugué, 111
- exposants conjugués, 10, 165
- extensions auto-adjointes, 161
- factorisation, 104–108
 - application, 108
 - principe de, 104
- faible-*, 84
- faible-*, *voir* topologie faible-*
- famille orthonormale, 37
- Fatou
 - lemme de, 167, 189
- Fejér, noyau de, 91
- Fekete
 - lemme de, 179
- Fekete, lemme de, 60
- fermable, 102
- fermement non expansif, 50
- fermeture
 - d'un opérateur, 102
- fermé, 82
- Fischer-Riesz, théorème de, 41
 - cas L^p , 42
- fonction
 - nulle part dérivable, 82
 - semi-continue, 93
- fonction en escalier, 42
- fonction lisse à support compact, 42
- fonctionnelle
 - linéaire, 84–94
- fonctionnelle de Minkowski, 70
 - exercice, 77
 - propriétés, 70
- fonctionnelle intégrale, 133
- fonctionnelle sous-linéaire, 67
- fonctions test, 168
- forme bilinéaire, 89
 - borne uniforme, 89
- forme linéaire, 20
 - continue, 110
 - passage réel-complexe, 69
- forme positive, 183
 - définition, 183
- forme sesquilinéaire, 37
- Fourier, base de, 40
- Fourier, coefficients de, 37
- Fredholm
 - alternative de, 142
 - interprétation duale, 143
 - indice de, 143
 - noyau symétrique, 150
 - équation intégrale de, 149
- Fredholm, alternative de, 51
- Fréchet, espace de, 105
- Fubini (théorème de), 189
- Gelfand
 - espace de, 180
 - compact, 180
 - théorie de, 179
 - transformée de, 180
 - propriétés, 180
- Gelfand, formule de, 59
- Gelfand–Mazur (théorème de), 180, 185
- Gelfand–Naimark
 - interprétation, 182
 - théorème abstrait, 184
 - théorème commutatif, 181
- Gelfand–Naimark–Segal, 183

- $GL(E)$, 55
 - ouverture, 57
- GNS (construction), 183
 - preuve, 183
 - théorème, 183
- Goldstine, Herman Heine, 129
- Gram-Schmidt, procédé de, 40, 41, 48
- graphe, 99
 - d'un opérateur, 99
 - fermé, 99–108
 - convergence de suites, 107
 - critère séquentiel, 101
 - domaine, 101
 - exercice, 106
- graphe d'un opérateur, 159
- groupe des inversibles, 21
- générique, 89
- H^1 , 31
- $H^2(\mathbb{D})$, 32
- Hadamard, formule de, 60
- Hahn, Hans, 7
- Hahn–Banach (théorème de), 188
- Hahn-Banach, *voir* théorème de Hahn-Banach
- Hahn-Banach, théorème de, 67–78, 103
 - exercice, 76
 - forme analytique complexe, 69–70
 - forme analytique réelle, 67–69
 - forme géométrique, 70–73
 - prolongement isométrique, 70
- Hamel
 - base de, 188
- Hamiltonien, 163
- Hardy, espace de, 32
- Hausdorff, 81, 124
- Hausdorff–Young (inégalité de), 174
- Heine-Borel, théorème de, 16, 18
- Hellinger-Toeplitz, 107
- Hermite
 - fonctions de, 163
 - polynômes de, 171
- Hermite, polynômes de, 41
- hermitien, 45
- Hilbert, David, 27, 30
- Hilbert–Schmidt
 - noyau, 149
 - opérateur de, 140, 148
 - théorème de, 148
- Hilbert-Schmidt, opérateur de, 45
- hyperplan, 67
 - définition, 70
 - fermé, 70
- Hölder
 - inégalité de, 166
- Hölder, inégalité de, 73
- idempotent, 34
- identification $H \simeq H'$, 36
- identité C^* , 61
 - exercice, 66
- identité de la résolvante, 58
- identité de Parseval, 38
- identité de polarisation, 29, 62
- identité du parallélogramme, 30, 145
 - contre-exemple, 47
- image, 103
 - fermée, 103–108
 - de codimension finie, 107
- injection canonique, 74, 109, 114–115
 - caractère naturel, 115
 - définition, 74, 114
 - image dense, 129
 - isométrie, 74, 114
- injection de Sobolev, 140
- interpolation, 172
- interpolation complexe, 172
- inverse
 - automatique, 107
- inversion
 - continuité, 58
- involution, 181

- inégalité
 - de Hölder, 111
 - de Poincaré, 133
- inégalité de Bessel, 38
- inégalité de Cauchy-Schwarz, 28
 - intégrale, 42
- inégalité de Hölder
 - discrète, 10
- inégalité de Minkowski
 - discrète, 11
- inégalité de Young, 10
- inégalité triangulaire, 8
- inégalité triangulaire inversée, 12
- inégalités
 - de Clarkson, 119, 120
- isomorphisme
 - avec ℓ^2 , 39
 - de Banach, 98–108
 - stabilité, 21
- isomorphisme isométrique antilinéaire, 35
- isométrie, 23, 102
 - isomorphe, 111
- isométrie partielle, 158
- James, Robert C., 109, 116
 - théorème de, 117
- James, théorème de, 78
- jauge, *voir* fonctionnelle de Minkowski
- Jensen
 - inégalité de, 166
- Jordan-von Neumann, théorème de, 30
- $\mathcal{K}(E, F)$, 55, 139
- Kakutani, Shizuo, 130
- $\mathcal{L}(E, F)$, 19, 53
 - complétude, 19, 54
- ℓ^1
 - non réflexif, 116
- L^2 , 31
- laplacien, 161
- Lax-Milgram, théorème de, 37
 - application, 48
- Lebesgue
 - mesure de, 188
 - théorème de convergence dominée, 189
- Legendre
 - polynômes de, 171
- Legendre, polynômes de, 41, 48
- lemme
 - d'ouverture approchée, 96
 - de Bishop-Phelps, 120
- lemme de Riesz (géométrie), 17
- limite de Banach, 73
 - invariance, 76
- ℓ^∞
 - dual de, 113
 - non séparable, 116
- Liouville
 - théorème de, 178
- Liouville, théorème de, 59
- lipschitzien, 18
- localement convexe, 105
- L^p , 10
 - dual de, 113–114
 - réflexif, 115
- ℓ^p , 109
 - dual de, 111–112
 - réflexif, 115, 120
 - uniformément convexe, 119
- Lusin (théorème de), 168
- Lusin, théorème de, 43
- matrice
 - infinie, 93
- matrice de Gram, 49
- matrice hermitienne, 50
- Mazur, Stanisław, 130
- Mazur, théorème de, 78
- Megginson, 117

- Mercer (théorème de), 151
- mesure de Lebesgue, 188
- mesure spectrale, 47, 155
 - définition, 155
 - mesure associée, 155
- Milman, David, 119
- Milman–Pettis, 109
- min-max, 147
- Minkowski
 - inégalité de, 166
 - inégalité intégrale, 169
- minoré
 - opérateur, 103
- module d’un opérateur, 158
- moyennes de Cesàro, 91
- multiplicité
 - algébrique finie, 144
- mécanique quantique, 27, 162
 - et C^* -algèbres, 185
 - postulats, 162
- méthode directe, 132–133
 - du calcul des variations, 132
 - théorème, 132
- métrique
 - d’un espace de Fréchet, 105
- métrisabilité
 - de la topologie faible, 134
 - de la topologie faible-*, 128
- Nelson (critère de), 163
- Neumann
 - série de, 178
- Neumann, série de, 20
- normal, 45
- norme, 8
 - ℓ^1 , 9
 - ℓ^p sur $\mathbb{K}^n$, 9
 - associée au produit scalaire, 29
 - d’opérateur, 19, 54
 - calcul, 64
 - caractérisation, 26
 - du graphe, 102
 - euclidienne, 9
 - expression duale, 70
 - homogénéité, 8
 - quotient, 22
 - semi-continuité inférieure faible, 126
 - sup, 9
 - séparation, 8
 - uniforme, 10
 - via le dual, 110
 - vérification, 24
- norme de Hilbert–Schmidt, 148
- norme L^p , 165
- normes
 - équivalentes, 98
- normes équivalentes, 12, 25
 - en dimension finie, 16
 - et complétude, 16
 - sur $\mathbb{K}^n$, 12
- noyau, 35
 - de Dirichlet, 86–94
 - norme L^1 , 86
 - de Fejér, 91
 - propriétés, 91
 - et image de l’adjoint, 46, 61
- noyau défini positif, 49
- noyau intégral, 45
- noyau reproduisant, 49
- noyau régularisant, 43
- noyaux itérés, 143
- observable, 185
- optimisation, 123
- opérateur
 - adjoint, 44, 53, 60–61
 - composition, 61
 - existence, 60
 - propriétés, 61
 - auto-adjoint, 45, 62–64
 - définition, 62
 - norme et spectre, 63

- spectre, 63
- valeurs propres, 62
- borné, 18
- borné inférieurement, 49
- compact, 48, 51
- composition, 20
- de décalage, 20
- de dérivation, 100
- de Hilbert-Schmidt, 45
- de multiplication, 45, 101
- de rang fini, 56, 94, 140
- dérivée, 161
- exemple, 25
- fermable, 102
 - caractérisation, 102
- fermé, 100
 - à domaine fermé, 102
- impulsion, 162
- intégral, 45
- involutif, 107
- laplacien, 161
- non borné, 99, 101–108
- non fermé, 100
- normal, 45, 62–64
 - caractérisation, 62
 - définition, 62
 - exercice, 65
- norme, 19
- positif, 45, 63
- position, 162
- symétrique, 107
- unitaire, 45, 62–64
 - caractérisation, 50, 64
 - définition, 62
- opérateur adjoint
 - non borné, 160
- opérateur auto-adjoint
 - calcul fonctionnel, 153
 - critère, 160
 - non borné, 160
 - définition, 160
- norme, 145
- opérateur compact, 53, 55–139
 - auto-adjoint, 145
 - caractérisation séquentielle, 55, 139
 - définition, 55, 139
 - espace fermé, 141
 - fermeture dans $L(E)$, 141
 - idéal bilatère, 56
 - limite d'opérateurs de rang fini, 142
 - propriétés, 56, 140
 - sur ℓ^2 , 65
- opérateur de décalage
 - pondéré, 65
 - spectre, 60
- opérateur de dérivation, 159
- opérateur de multiplication, 164
 - spectre, 65
- opérateur de Volterra, 64
- opérateur diagonal, 57
- opérateur diagonal compact, 140
- opérateur fermable, 159
- opérateur fermé, 159
- opérateur hermitien, *voir* opérateur auto-adjoint
- opérateur intégral, 140
 - compact, 56
 - noyau de Hilbert-Schmidt, 140
- opérateur linéaire borné, 53–55
 - composition, 55
 - continuité, 54
 - définition, 53
- opérateur linéaire continu, 53
- opérateur monotone, 50
- opérateur non borné, 159
 - définition, 159
- opérateur positif, 157
 - définition, 157
- opérateur symétrique, 160
 - vs auto-adjoint, 160
- opérateur à trace, 151

- orthogonal
 - sous-espace fermé, 32
- orthogonalité, 32
- oscillateur harmonique, 41, 163
- ouvert dense, 80
- ouverte, application, 96
- p -laplacien, 133
- parallélogramme, identité du, 30
- Parseval
 - formule de, 174
- Parseval, identité de
 - calcul explicite, 51
 - généralisée, 40
- Parseval, théorème de, 38
 - cas non séparable, 39
- partie bornée, 13
- partie dense, 13
- P_C , 33
- $\perp$, 32
- perturbation
 - d'un opérateur inversible, 65
 - de l'identité, 58
- Pettis, Billy James, 119
- phénomène de Gibbs, 91–94
- Plancherel (théorème de), 173
- polarisation, identité de, 29
- polynômes de Bernstein, 94
- polynômes de Hermite, 41
- polynômes de Legendre, 41
- positif, 45
- première catégorie, 80
- principe de borne uniforme, 79, 82, 125
 - pour les familles, 89–94
 - pour les opérateurs bornés, 90
- principe de factorisation, 104–108
- problème des trois espaces, 108
- procédé diagonal, 56
- produit scalaire, 28
 - caractère défini, 28
- continuité, 32, 50
- linéarité, 28
- positivité, 28
- symétrie hermitienne, 28
- vérification, 47
- projecteur spectral, 157
- projection, 99, 101
 - calcul explicite, 47
 - caractérisation, 33
 - contraction, 47
 - formule explicite, 49
 - sur un convexe
 - propriétés, 50
 - sur un convexe fermé, 33
 - sur un sous-espace fermé, 34
- projection canonique, 118
- projection orthogonale, 62
 - exercice, 66
 - propriétés, 34
- prolongement
 - de formes linéaires, 70
- propriété d'approximation, 142
- propriété de Schur, 136
- Pythagore, théorème de, 32
 - séries, 48
- racine carrée
 - d'un opérateur, 157
 - existence et unicité, 157
- Radon–Nikodym (théorème de), 170, 172
 - énoncé, 172
- Radon–Nikodym, théorème de, 78
- rationnels, 80
- rayon spectral, 154
 - définition, 59
 - formule, 179
 - formule de Gelfand, 59
 - formule du, 178
- relation de commutation canonique, 162

- Rellich–Kondrachov (théorème de), 140
- Riemann–Lebesgue (lemme de), 173
- Riesz
 - lemme de, 142
 - théorème de représentation, 156
 - théorème de représentation pour L^p , 170
- Riesz, Frigyes, 114
- Riesz, lemme de, 17
- Riesz, théorème de représentation de, 35, 60, 61
 - application, 36, 48
- Riesz–Fischer (théorème de), 167
- Riesz–Schauder (théorie de), 143
- Riesz–Thorin (théorème de), 172
 - énoncé, 172
- réduction du paquet d’ondes, 162
- réflexif
 - L^∞ non, 171
- réflexivité, 36, 109, 115–120
- résolution de l’identité, 155
 - définition, 155
- résolvante, 58–60, 178
 - analyticité, 58
 - ensemble, 58
 - opérateur, 58
 - propriétés, 58
- Schauder
 - théorème de, 143
- Schauder, Juliusz, 7
- Schur, Issai, 136
- Schwartz
 - espace de, 173
- semi-continuité inférieure, 126
 - convexe forte implique faible, 133
 - faible, 132
- semi-norme, 8, 68, 105
- shift à droite, 60
- shift à gauche, 60
- $\sigma(E', E)$, 75, 126
- $\sigma(E, E')$, 123
- σ -fini, 114
- σ -finitude, 114
- Šmulian, Vitold, 117
- Sobolev, espace de, 24, 31
- somme directe hilbertienne, 43
 - de copies de $\mathbb{C}$, 43
 - exercice, 49
- somme directe orthogonale, 34
- somme harmonique, 87
- somme partielle de Fourier, 86
- sommes partielles de Fourier, 86
- sous-espace
 - de codimension finie, 76
 - dense, 13, 50
 - fermé, 25, 99, 100
 - et complétude, 15
 - projection, 34
 - non fermé, 18
 - propre fermé, 17
- spectre, 58–60
 - compacité, 59
 - compact non vide, 178
 - continu, 58
 - d’un opérateur auto-adjoint, 46, 63
 - dans une algèbre de Banach, 178
 - définition, 58
 - définition algébrique, 178
 - dénombrable, 144
 - non-vacuité, 59
 - opérateur compact, 143
 - ponctuel, 58
 - résiduel, 58
- spectre de Gelfand, 180
- sphère unité, 8
- Steinhaus, Hugo, 79
- Stone
 - théorème de, 164
- Stone–Weierstrass
 - théorème de, 182, 189

- suite
 - de Cauchy, 81
- suite de Cauchy, 11
 - et sous-suite convergente, 21
 - extraction de sous-suite, 21
- suite sous-multiplicative, 60
- supplémentaire
 - topologique, 99
- support compact, 42
- surjectif, 97
- système orthonormal, 37
 - complétude, 39
- système total, 39
- système trigonométrique, 171
- Szegő, noyau de, 49
- séparable, 13, 40
- séparation
 - cas complexe, 72
 - d'un point, 110
 - de deux convexes, 72
 - point et convexe, 71
 - stricte, 72
- séparation de convexes, 67, 70–73
 - applications, 78
- série
 - absolument convergente, 12
 - et complétude, 22
 - convergente, 12
 - d'opérateurs, 25
 - dans un e.v.n., 12
- série de Fourier, 32
- série de Neumann, 20, 25, 57–58
 - application, 26
- séries de Fourier, 86–94
 - divergence, 93
 - divergence générique, 89
- T^* , 60
- théorie des opérateurs, 44
- Théorie des opérations linéaires, 7
- théorie quantique des champs, 185
- théorie spectrale, 27, 47, 53
- théorème
 - d'Alexandrov, 81
 - d'Eberlein–Šmulian, 117
 - de Baire, 79–96
 - exercice, 93
 - de Banach (Alaoglu séquentiel), 129
 - de Banach-Alaoglu, 123, 127–129
 - cas séparable, 128
 - séquentiel, 129
 - de Banach-Steinhaus, 82–94, 125
 - de condensation, 88
 - de Fejér, 91
 - de Goldstine, 123, 129–130
 - de Hahn-Banach, 110–111, 114
 - forme analytique, 110
 - forme géométrique, 129
 - forme géométrique (séparation stricte), 131
 - de Hellinger-Toeplitz, 107
 - de James, 116
 - de Kakutani, 123, 130
 - de l'application ouverte, 95–108
 - pour les espaces de Fréchet, 106
 - de l'image fermée, 103–108
 - de l'isomorphisme de Banach, 98
 - de Mazur, 123, 130–131
 - aspect constructif, 131
 - pour les suites, 131
 - de Milman-Pettis, 119
 - de Radon-Nikodym, 114
 - de Riesz (représentation dans L^p), 114
 - de Riesz (représentation hilbertienne), 115
 - de Tychonoff, 128
 - du graphe fermé, 95, 99–108
 - généralisé, 105–108
 - pour les espaces de Fréchet, 106
- théorème de Fischer-Riesz, 41

- théorème de Lax-Milgram, 37
- théorème de Parseval, 38
- théorème de Pythagore, 32
- théorème de représentation de Riesz, 35
- théorème spectral, 47
 - décomposition, 146
 - mesure spectrale, 155
 - opérateurs bornés, 155
 - opérateurs compacts, 145
 - opérateurs non bornés, 161
- Tonelli (théorème de), 189
- Tonelli, Leonida, 132
- topologie
 - faible, 123–137
 - base de voisinages, 124
 - comparaison avec la norme, 124
 - définition, 123–126
 - formes linéaires continues, 134
 - métrisabilité, 134
 - séparée, 124
 - faible-*, 84
 - faible-*, 119, 126–137
 - base de voisinages, 126
 - comparaison, 127
 - définition, 126
 - formes linéaires continues, 134
 - versus topologie faible, 127
 - forte, 124
 - initiale, 124
 - produit, 128
- topologie faible-*, 75
 - comparaison, 75
 - métrisabilité, 77
- tore, 86
- totalelement borné, 26
- traitement du signal, 27
- transformée de Fourier, 173
 - sur L^1 , 173
 - sur L^2 , 173
- transposée conjuguée, 50
- triplet de Gelfand, 36
- trois droites
 - théorème des, 172
- Tychonoff (théorème de), 188
- Tychonov, théorème de, 75
- ultrabornologique, 106
- unitaire, 45
- Urysohn
 - lemme d', 168
- valeur absolue
 - d'un opérateur, *voir* module d'un opérateur
- valeur propre, 46, 58
 - extrémale, 146
 - opérateur compact, 144
- vecteur canonique, 111, 112
- Volterra
 - opérateur de, 150
- Von Neumann
 - lemme de, 172
- von Neumann, John, 27
- $\xrightarrow{*}$, 126
- $\rightarrow$, 125
- Weierstrass
 - théorème de, 154
- Weierstrass, théorème de, 26
 - approximation, 26
 - trigonométrique, 40
- Wiener
 - théorème de, 186
- Young
 - inégalité de, 166
 - inégalité de convolution, 169
- Zorn (lemme de), 188
- Zorn, lemme de, 67, 68
- école de Lwów, 8
- équation intégrale, 27, 149

équations aux dérivées partielles, 27

état

 définition, 183

 propriétés, 183

 pur, 186

 sur une C^* -algèbre, 183

évaluation, 114

