

Analyse Complexe

Notes de Cours

Licence L3 — 2025–2026

Yaë Ulrich Gaba

*« Le plus court chemin entre deux vérités dans le
domaine réel passe par le domaine complexe. »*

— Jacques Hadamard

Table des matières

Préface	5
Notations	7
1 Nombres complexes — Rappels et géométrie du plan	8
1.1 Construction algébrique de $\mathbb{C}$	8
1.2 Module et argument	9
1.3 Forme exponentielle et formule d'Euler	11
1.4 Racines n -ièmes de l'unité	12
1.5 Inversion et transformations de Möbius	13
1.6 Topologie de $\mathbb{C}$	15
1.7 Le plan complexe étendu et la sphère de Riemann	16
1.8 Exercices	17
2 Fonctions holomorphes — Conditions de Cauchy-Riemann	19
2.1 Dérivée complexe	19
2.2 Conditions de Cauchy-Riemann	21
2.3 Interprétation géométrique : conformité	24
2.4 Fonctions harmoniques et lien avec l'holomorphic	25
2.5 Conditions de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires	28
2.6 Exercices	29
3 Fonctions Élémentaires	31
3.1 Introduction	31
3.2 L'exponentielle complexe	31
3.2.1 Image de bandes horizontales et verticales	32
3.3 Le logarithme complexe	34
3.3.1 L'argument et sa multivaluation	34
3.3.2 Définition du logarithme complexe	34
3.3.3 Branches du logarithme	36
3.3.4 Intuition sur les surfaces de Riemann	37
3.4 Puissances complexes	38
3.5 Fonctions trigonométriques complexes	40
3.5.1 Définitions via l'exponentielle	40
3.6 Fonctions hyperboliques complexes	41
3.7 Lien entre fonctions trigonométriques et hyperboliques	42
3.8 Tableau récapitulatif	42
3.9 Exemples détaillés	43
3.10 Transformations géométriques	44

3.11	Compléments sur les branches	45
3.12	Exercices	46
4	Intégration Complexe — Théorème de Cauchy	48
4.1	Introduction	48
4.2	Chemins dans le plan complexe	48
4.3	Intégrale curviligne complexe	50
4.4	Exemples fondamentaux	51
4.5	Primitives et indépendance du chemin	52
4.6	Lemme de Goursat	54
4.7	Théorème de Cauchy pour les domaines étoilés	55
4.8	Théorème de Cauchy pour les domaines simplement connexes	56
4.9	Preuve du théorème de Cauchy via la formule de Green	57
4.10	Version homotopique du théorème de Cauchy	58
4.11	Indice d'un point par rapport à un lacet	60
4.12	Version générale du théorème de Cauchy	62
4.13	Applications et exemples	63
4.14	Exercices	64
5	Formule Intégrale de Cauchy et Conséquences	69
5.1	Introduction	69
5.2	Formule intégrale de Cauchy pour un disque	69
5.3	Formule intégrale de Cauchy — version générale	70
5.4	Formule de Cauchy pour les dérivées	71
5.5	Théorème de Morera	72
5.6	Inégalités de Cauchy	73
5.7	Théorème de Liouville	74
5.8	Théorème de la moyenne	75
5.9	Principe du maximum	75
5.10	Développement en série de Taylor	76
5.11	Exercices	78
6	Séries de Laurent et Singularités Isolées	81
6.1	Introduction	81
6.2	Séries de Laurent : existence et unicité	81
6.3	Exemples de développements de Laurent	83
6.4	Classification des singularités isolées	85
6.5	Critère de Riemann pour les singularités éliminables	85
6.6	Ordre d'un pôle et partie principale	86
6.7	Théorème de Casorati-Weierstrass	87
6.8	Développements de Laurent : exemples supplémentaires	88
6.9	Singularité à l'infini	89
6.10	Résumé : tableau des singularités	90
6.11	Exercices	92
7	Théorème des Résidus et Applications	95
7.1	Résidus : définition et calcul	95
7.1.1	Définition du résidu	95
7.1.2	Formules de calcul des résidus	96

7.2	Le théorème des résidus	97
7.3	Applications au calcul d'intégrales réelles	98
7.3.1	Intégrales de fractions rationnelles sur $\mathbb{R}$	98
7.3.2	Intégrales trigonométriques	100
7.3.3	Lemme de Jordan et intégrales oscillantes	101
7.3.4	Intégrales avec coupure logarithmique	103
7.4	Principe de l'argument et théorème de Rouché	105
7.5	Exercices	106
8	Transformations Conformes	108
8.1	Applications conformes : généralités	108
8.1.1	Définition et conservation des angles	108
8.1.2	Exemples fondamentaux	109
8.2	Transformations de Möbius	110
8.2.1	Définition et propriétés algébriques	110
8.2.2	Birapport et action triple transitive	111
8.2.3	Points fixes et classification	112
8.3	La transformation de Cayley	113
8.4	Le théorème de Riemann	114
8.5	Applications conformes classiques	115
8.5.1	La fonction de Joukowski	115
8.5.2	Bandes, secteurs et demi-plans	116
8.5.3	Tableau récapitulatif	117
8.6	Exercices	117
9	Théorème de Rouché et Principe de l'Argument	119
9.1	Zéros des fonctions holomorphes	119
9.2	Le principe de l'argument	120
9.3	Le théorème de Rouché	122
9.4	Applications du théorème de Rouché	123
9.4.1	Le théorème fondamental de l'algèbre	123
9.4.2	Perturbation des racines	124
9.5	Le théorème de Hurwitz	124
9.6	Le théorème de l'application ouverte	125
9.7	Exercices	126
10	Introduction aux Fonctions Entières et Méromorphes	128
10.1	Fonctions entières	128
10.2	Ordre de croissance	129
10.3	Le petit théorème de Picard	130
10.4	Produits infinis et théorème de Weierstrass	131
10.4.1	Factorisation du sinus	133
10.5	Fonctions méromorphes et décomposition de Mittag-Leffler	134
10.6	Fonctions elliptiques : un aperçu	136
10.7	Exercices	137

Préface

L'analyse complexe est l'une des théories les plus élégantes et les plus puissantes des mathématiques. Là où l'analyse réelle offre une grande liberté — fonctions continues non dérivables, fonctions dérivables non deux fois dérivables, etc. — l'analyse complexe impose une rigidité remarquable : une seule dérivée complexe suffit à garantir que la fonction est infiniment dérivable, analytique, et entièrement déterminée par ses valeurs sur n'importe quel ouvert.

Cette rigidité provient de la structure algébrique et géométrique du corps $\mathbb{C}$. La dérivabilité complexe, formalisée par les *équations de Cauchy-Riemann*, lie les dérivées partielles réelles de manière à créer un couplage profond entre la partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction holomorphe. Ce couplage a des conséquences spectaculaires : le théorème intégral de Cauchy, la formule intégrale de Cauchy, le développement en série entière, le principe du maximum, le théorème de Liouville, et bien d'autres résultats fondamentaux.

Connexions avec d'autres domaines. L'analyse complexe n'est pas une discipline isolée. Ses applications irriguent de nombreux champs :

- **Mécanique des fluides.** Les fonctions holomorphes décrivent les écoulements plans irrotationnels de fluides incompressibles. La partie réelle donne le potentiel de vitesse, la partie imaginaire la fonction de courant.
- **Électrostatique.** Les fonctions harmoniques, étroitement liées aux fonctions holomorphes, modélisent les potentiels électrostatiques dans le plan.
- **Théorie des nombres.** La fonction zêta de Riemann $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, définie comme fonction d'une variable complexe, encode la distribution des nombres premiers.
- **Géométrie et topologie.** Les surfaces de Riemann, les fibrés en droites, la théorie de Hodge trouvent leurs racines dans l'analyse complexe.
- **Théorie du contrôle.** Les transformées de Laplace et de Fourier reposent sur l'évaluation de fonctions dans le plan complexe.

Prérequis. Ce cours suppose acquis :

- Analyse réelle (suites, séries, continuité, dérivabilité, intégration).
- Topologie élémentaire (ouverts, fermés, compacité, connexité dans $\mathbb{R}^n$).
- Algèbre linéaire (espaces vectoriels, applications linéaires, matrices).
- Calcul différentiel en plusieurs variables (dérivées partielles, différentielle).

Plan du cours.

Chapitre 1. Nombres complexes : rappels algébriques, géométrie du plan complexe, topologie de $\mathbb{C}$, sphère de Riemann.

Chapitre 2. Fonctions holomorphes : dérivée complexe, équations de Cauchy-Riemann, conformité, fonctions harmoniques.

Chapitre 3. Séries entières et fonctions analytiques.

Chapitre 4. Intégration complexe et théorème de Cauchy.

Chapitre 5. Formule intégrale de Cauchy et applications.

Chapitre 6. Séries de Laurent et théorie des résidus.

Chapitre 7. Applications conformes et théorème de Riemann.

Notations

Symbole	Signification
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	Ensembles de nombres usuels
$\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)$	Partie réelle et partie imaginaire de $z \in \mathbb{C}$
$ z $	Module de z
$\bar{z}$	Conjugué de z
$\arg(z)$	Argument de z (multivalué)
$\operatorname{Arg}(z)$	Argument principal, dans $(-\pi, \pi]$
$\operatorname{Log}(z)$	Logarithme principal de z
$\mathbb{D}$	Disque unité ouvert $\{z \in \mathbb{C} : z < 1\}$
$\mathbb{T}$	Cercle unité $\{z \in \mathbb{C} : z = 1\}$
$D(a, r)$	Disque ouvert de centre a et rayon r
$\bar{D}(a, r)$	Disque fermé de centre a et rayon r
$C(a, r)$	Cercle de centre a et rayon r
$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$	Plan complexe étendu (sphère de Riemann)
$\mathcal{O}(\Omega)$	Fonctions holomorphes sur Ω
$\mathcal{C}^k(\Omega)$	Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur Ω
$f'(z_0)$	Dérivée complexe de f en z_0
$\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$	Opérateurs de Wirtinger
$\operatorname{Res}_{z=a} f$	Résidu de f en a
$\operatorname{ind}_\gamma(a)$	Indice du point a par rapport au lacet γ
$dz = dx + i dy$	Différentielle complexe

Chapitre 1

Nombres complexes — Rappels et géométrie du plan

1.1 Construction algébrique de $\mathbb{C}$

Le corps des nombres complexes peut être construit de plusieurs manières équivalentes. Nous présentons ici la construction algébrique classique.

Définition 1.1 (Corps des nombres complexes). On définit $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ muni des opérations suivantes : pour $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$,

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (1.1)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc). \quad (1.2)$$

On note $i = (0, 1)$ l'unité imaginaire et on identifie $a \in \mathbb{R}$ avec $(a, 0) \in \mathbb{C}$. Tout élément $z = (a, b)$ s'écrit alors $z = a + ib$.

Théorème 1.2 (Structure de corps). $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un corps commutatif. Son élément neutre pour l'addition est $0 = (0, 0)$, et son élément neutre pour la multiplication est $1 = (1, 0)$. De plus, $i^2 = -1$.

Démonstration. La vérification des axiomes de corps est un calcul direct. Vérifions les points essentiels.

Associativité de la multiplication. Soient $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$, $z_3 = a_3 + ib_3$. On calcule $(z_1 z_2) z_3$ et $z_1 (z_2 z_3)$ et on vérifie que les deux expressions sont égales par développement. Ce calcul, bien que fastidieux, ne présente aucune difficulté.

Inverse multiplicatif. Soit $z = a + ib \neq 0$. Alors $a^2 + b^2 > 0$ et

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$

On vérifie que $z \cdot z^{-1} = 1$.

Unité imaginaire. $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$.

Les autres axiomes (commutativité, distributivité) se vérifient de manière analogue. $\square$

Remarque 1.3. Le corps $\mathbb{C}$ ne peut pas être muni d'un ordre total compatible avec ses opérations. En effet, si un tel ordre existait, on aurait soit $i > 0$, d'où $i^2 = -1 > 0$, contradiction ; soit $i < 0$, d'où $-i > 0$ et $(-i)^2 = -1 > 0$, même contradiction. Cette impossibilité est fondamentale : elle explique pourquoi de nombreuses techniques d'analyse réelle (comparaison, encadrement) ne se transposent pas directement en analyse complexe.

Définition 1.4 (Partie réelle, partie imaginaire, conjugué). Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

- (i) La *partie réelle* de z est $\operatorname{Re}(z) = a$.
- (ii) La *partie imaginaire* de z est $\operatorname{Im}(z) = b$ (c'est un réel, non un imaginaire pur).
- (iii) Le *conjugué* de z est $\bar{z} = a - ib$.

Proposition 1.5 (Propriétés du conjugué). Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$:

- (i) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$.
- (ii) $\overline{\bar{z}} = z$.
- (iii) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$, $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$.
- (iv) $z\bar{z} = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 \geq 0$, avec égalité si et seulement si $z = 0$.
- (v) $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$.
- (vi) La conjugaison $z \mapsto \bar{z}$ est un automorphisme de corps de $\mathbb{C}$ (le seul automorphisme continu non trivial).

Démonstration. Posons $z = a + ib$ et $w = c + id$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(i) $\overline{z + w} = \overline{(a + c) + i(b + d)} = (a + c) - i(b + d) = (a - ib) + (c - id) = \bar{z} + \bar{w}$.

Pour le produit : $zw = (ac - bd) + i(ad + bc)$, donc $\overline{zw} = (ac - bd) - i(ad + bc)$. D'autre part, $\bar{z}\bar{w} = (a - ib)(c - id) = (ac - bd) - i(ad + bc)$. D'où l'égalité.

(ii) $\overline{\bar{z}} = \overline{a - ib} = a + ib = z$.

(iii) $z + \bar{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a = 2 \operatorname{Re}(z)$. De même, $z - \bar{z} = 2ib = 2i \operatorname{Im}(z)$.

(iv) $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.

(v) et (vi) sont immédiats. □

1.2 Module et argument

Définition 1.6 (Module). Le *module* de $z = a + ib \in \mathbb{C}$ est

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Géométriquement, $|z|$ est la distance de z à l'origine dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Proposition 1.7 (Propriétés du module). *Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$:*

- (i) $|z| \geq 0$, avec $|z| = 0 \iff z = 0$.
- (ii) $|\bar{z}| = |z|$.
- (iii) $|zw| = |z| |w|$ (multiplicativité).
- (iv) $|z^{-1}| = |z|^{-1}$ pour $z \neq 0$.
- (v) $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.
- (vi) $|z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$.

Démonstration. Les propriétés (i), (ii), (v) et (vi) découlent directement de la définition.

$$(iii) |zw|^2 = (zw)\overline{(zw)} = zw\bar{z}\bar{w} = (z\bar{z})(w\bar{w}) = |z|^2 |w|^2.$$

$$(iv) \text{ Conséquence de (iii) : } |z| |z^{-1}| = |zz^{-1}| = |1| = 1. \quad \square$$

Théorème 1.8 (Inégalité triangulaire). *Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$:*

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

De plus, $||z| - |w|| \leq |z - w|$ (inégalité triangulaire inverse).

Démonstration. On calcule :

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)\overline{(z + w)} = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} \\ &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2. \end{aligned}$$

Or $\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq |z\bar{w}| = |z| |w|$, d'où

$$|z + w|^2 \leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2.$$

L'inégalité inverse s'obtient en écrivant $z = (z - w) + w$, d'où $|z| \leq |z - w| + |w|$. $\square$

Définition 1.9 (Argument). Soit $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Un *argument* de z est un réel $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta).$$

L'ensemble des arguments de z est $\arg(z) = \{\theta_0 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ pour tout argument particulier θ_0 .

L'*argument principal* $\operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$ est l'unique argument dans cet intervalle.

Remarque 1.10. La multivaluation de l'argument est un thème récurrent en analyse complexe. Elle est à l'origine des difficultés liées à la définition du logarithme complexe et des puissances complexes. La « coupure » le long de l'axe réel négatif, qui définit la branche principale de l'argument, est un choix conventionnel ; d'autres coupures sont parfois plus adaptées.

1.3 Forme exponentielle et formule d'Euler

Théorème 1.11 (Formule d'Euler). *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:*

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Démonstration. Considérons les séries entières convergentes :

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \theta^n}{n!}.$$

Séparons les termes pairs et impairs. Pour $n = 2k$: $i^{2k} = (-1)^k$. Pour $n = 2k + 1$: $i^{2k+1} = (-1)^k i$. Donc :

$$e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos \theta + i \sin \theta. \quad \square$$

Corollaire 1.12 (Forme exponentielle). *Tout nombre complexe $z \neq 0$ s'écrit de manière unique sous la forme*

$$z = r e^{i\theta}, \quad r = |z| > 0, \quad \theta = \text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi].$$

Proposition 1.13 (Propriétés de l'exponentielle complexe). *Pour tous $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$:*

- (i) $e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$ (les arguments s'additionnent).
- (ii) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.
- (iii) $|e^{i\theta}| = 1$ pour tout θ .
- (iv) $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$

Démonstration. (i) C'est l'identité $(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi)$, qui se vérifie par les formules d'addition trigonométriques.

(ii) $\overline{e^{i\theta}} = \cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = e^{-i\theta}$.

(iii) $|e^{i\theta}|^2 = e^{i\theta} \overline{e^{i\theta}} = e^{i\theta} e^{-i\theta} = e^0 = 1$.

(iv) Se déduit immédiatement de la formule d'Euler et de (ii). $\square$

Théorème 1.14 (Formule de De Moivre). *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$:*

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la propriété $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, elle-même conséquence de la propriété d'additivité de l'exponentielle. $\square$

Exemple 1.15 (Linéarisation trigonométrique). Exprimons $\cos^3 \theta$ en fonction de

$\cos(k\theta)$. On utilise les formules d'Euler :

$$\begin{aligned}\cos^3 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} (e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}) \\ &= \frac{1}{8} (2 \cos 3\theta + 6 \cos \theta) = \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta.\end{aligned}$$

1.4 Racines n -ièmes de l'unité

Théorème 1.16 (Racines n -ièmes). *Soit $w \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. L'équation $z^n = w$ possède exactement n solutions dans $\mathbb{C}$, données par :*

$$z_k = |w|^{1/n} \exp\left(i \frac{\text{Arg}(w) + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Démonstration. Écrivons $w = |w| e^{i\alpha}$ avec $\alpha = \text{Arg}(w)$, et cherchons $z = r e^{i\theta}$ tel que $z^n = w$. On obtient $r^n e^{in\theta} = |w| e^{i\alpha}$. L'identification des modules donne $r = |w|^{1/n}$ (unique réel positif). L'identification des arguments donne $n\theta = \alpha + 2k\pi$, soit $\theta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}$. Pour $k = 0, 1, \dots, n-1$, on obtient n valeurs distinctes de $e^{i\theta}$; pour $k = n$, on retrouve la valeur $k = 0$. $\square$

Définition 1.17 (Racines n -ièmes de l'unité). Les *racines n -ièmes de l'unité* sont les solutions de $z^n = 1$:

$$\omega_k = e^{2ik\pi/n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

On note $\omega = \omega_1 = e^{2i\pi/n}$ la racine primitive canonique. Alors $\omega_k = \omega^k$.

Proposition 1.18 (Propriétés des racines de l'unité). *Soit $\mathbb{U}_n = \{\omega^k : k = 0, \dots, n-1\}$ l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité.*

- (i) $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe cyclique de $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, engendré par ω .
- (ii) $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$.
- (iii) $\prod_{k=0}^{n-1} \omega^k = (-1)^{n+1}$.
- (iv) $z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (z - \omega^k)$.
- (v) Les racines n -ièmes de l'unité forment les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité.

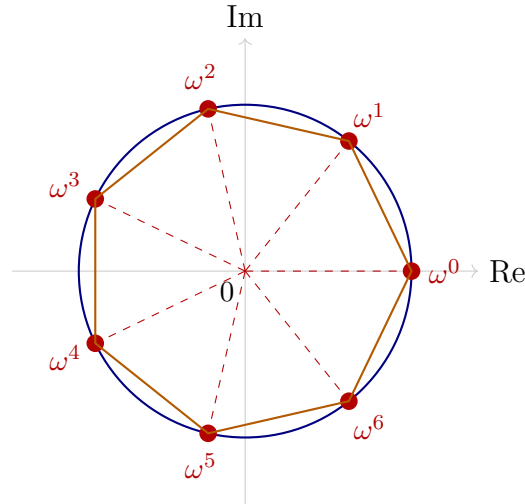
Démonstration. (i) $\omega^j \cdot \omega^k = \omega^{j+k} = \omega^{(j+k) \bmod n} \in \mathbb{U}_n$, et $(\omega^k)^{-1} = \omega^{-k} = \omega^{n-k} \in \mathbb{U}_n$.

(ii) La somme $S = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$ est une série géométrique. Comme $\omega \neq 1$ (pour $n \geq 2$), on a $S = \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = \frac{1 - 1}{\omega - 1} = 0$.

(iii) $\prod_{k=0}^{n-1} \omega^k = \omega^{0+1+\dots+(n-1)} = \omega^{n(n-1)/2} = e^{i\pi(n-1)} = (-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}$.

(iv) Le polynôme $z^n - 1$ est de degré n et admet les n racines ω^k ; d'où la factorisation.

(v) Les points $\omega^k = e^{2ik\pi/n}$ sont régulièrement espacés de $2\pi/n$ sur le cercle unité. $\square$



Racines 7-ièmes de l'unité

Exemple 1.19 (Racines cubiques de -8). Résolvons $z^3 = -8$. On a $|w| = 8$ et $\text{Arg}(w) = \pi$, donc

$$z_k = 2 \exp\left(i \frac{\pi + 2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

$$\text{— } z_0 = 2e^{i\pi/3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}.$$

$$\text{— } z_1 = 2e^{i\pi} = -2.$$

$$\text{— } z_2 = 2e^{i5\pi/3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}.$$

Vérifions : $(1 + i\sqrt{3})^3 = (1 + i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3})^2 = (1 + i\sqrt{3})(1 + 2i\sqrt{3} - 3) = (1 + i\sqrt{3})(-2 + 2i\sqrt{3}) = -2 + 2i\sqrt{3} - 2i\sqrt{3} + 2i^2 \cdot 3 = -2 - 6 = -8$.

1.5 Inversion et transformations de Möbius

Définition 1.20 (Inversion complexe). L'*inversion complexe* est l'application $z \mapsto 1/z$, définie sur $\mathbb{C}^*$. En forme polaire, si $z = re^{i\theta}$, alors $1/z = r^{-1}e^{-i\theta}$: le module est inversé et l'argument est changé en son opposé.

Proposition 1.21 (Image de droites et cercles par l'inversion). L'*inversion* $z \mapsto 1/z$ transforme :

- (i) un cercle ne passant pas par l'origine en un cercle ne passant pas par l'origine ;
- (ii) un cercle passant par l'origine en une droite ne passant pas par l'origine ;
- (iii) une droite ne passant pas par l'origine en un cercle passant par l'origine ;
- (iv) une droite passant pas par l'origine en une droite passant par l'origine.

Démonstration. L'équation générale d'un cercle ou d'une droite dans $\mathbb{C}$ s'écrit

$$\alpha z\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + \gamma = 0,$$

avec $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{C}$. C'est un cercle si $\alpha \neq 0$, une droite si $\alpha = 0$.

Si l'on pose $w = 1/z$, soit $z = 1/w$, l'équation devient

$$\alpha \frac{1}{w\bar{w}} + \bar{\beta} \frac{1}{w} + \beta \frac{1}{\bar{w}} + \gamma = 0.$$

En multipliant par $w\bar{w}$:

$$\alpha + \bar{\beta}\bar{w} + \beta w + \gamma w\bar{w} = 0,$$

soit $\gamma w\bar{w} + \beta w + \bar{\beta}\bar{w} + \alpha = 0$. On obtient une équation de même type, avec α et γ échangés. Les quatre cas s'en déduisent. $\square$

Définition 1.22 (Transformation de Möbius). Une *transformation de Möbius* (ou *homographie*) est une application de la forme

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0.$$

La condition $ad - bc \neq 0$ assure que T n'est pas constante.

Proposition 1.23 (Propriétés des transformations de Möbius). (i) *L'ensemble des transformations de Möbius forme un groupe pour la composition, isomorphe à $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$.*

(ii) *Toute transformation de Möbius est une composée de translations ($z \mapsto z + b$), rotations-homothéties ($z \mapsto az$, $a \neq 0$), et de l'inversion ($z \mapsto 1/z$).*

(iii) *Les transformations de Möbius envoient cercles et droites sur cercles et droites.*

(iv) *Elles sont conformes (préservent les angles).*

Démonstration. (i) Si $T_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$ et $T_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$, alors $T_1 \circ T_2$ correspond au produit des matrices $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, dont le déterminant est $(a_1 d_1 - b_1 c_1)(a_2 d_2 - b_2 c_2) \neq 0$.

(ii) Si $c = 0$, alors $T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$. Si $c \neq 0$, on effectue la division euclidienne :

$$T(z) = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c^2} \cdot \frac{1}{z + d/c} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + d/c}.$$

C'est bien une composée de translation, inversion, homothétie et translation.

(iii) Découle de (ii) et de la prop : inversion-images.

(iv) Chaque opération élémentaire (translation, rotation-homothétie, inversion) est conforme, donc leur composée l'est aussi. $\square$

Exemple 1.24 (Transformation de Cayley). La transformation de Cayley $T(z) = \frac{z-i}{z+i}$ envoie le demi-plan supérieur $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ sur le disque unité $\mathbb{D}$. En effet, si $z = x + iy$ avec $y > 0$:

$$|T(z)|^2 = \frac{|z - i|^2}{|z + i|^2} = \frac{x^2 + (y - 1)^2}{x^2 + (y + 1)^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2y + 1}{x^2 + y^2 + 2y + 1}.$$

Le numérateur est strictement inférieur au dénominateur (leur différence est $-4y < 0$), donc $|T(z)| < 1$.

La transformation inverse est $T^{-1}(w) = i \frac{1+w}{1-w}$.

1.6 Topologie de $\mathbb{C}$

On identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ muni de la distance $d(z, w) = |z - w|$.

Définition 1.25 (Disques et cercles). Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$.

- (i) Le *disque ouvert* de centre a et de rayon r est $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$.
- (ii) Le *disque fermé* est $\overline{D}(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\}$.
- (iii) Le *cercle* est $C(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\}$.

Définition 1.26 (Ouverts, fermés, bord). Soit $A \subseteq \mathbb{C}$.

- (i) A est *ouvert* si pour tout $z \in A$, il existe $r > 0$ tel que $D(z, r) \subseteq A$.
- (ii) A est *fermé* si $\mathbb{C} \setminus A$ est ouvert.
- (iii) Le *bord* de A est $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.
- (iv) A est *borné* si $A \subseteq D(0, R)$ pour un certain $R > 0$.
- (v) A est *compact* s'il est fermé et borné (théorème de Heine-Borel).

Définition 1.27 (Connexité). Un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ est *connexe* si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

- (i) Ω ne peut pas s'écrire comme réunion disjointe de deux ouverts non vides.
- (ii) Pour tous $z, w \in \Omega$, il existe un chemin continu $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ tel que $\gamma(0) = z$ et $\gamma(1) = w$.

Un ouvert connexe est appelé un *domaine*.

Remarque 1.28. Pour les ouverts de $\mathbb{C}$, connexité et connexité par arcs sont équivalentes. On peut même imposer que les chemins soient des lignes polygonales. En revanche, pour des parties quelconques de $\mathbb{C}$, la connexité par arcs est strictement plus forte que la connexité.

Définition 1.29 (Connexité simple). Un domaine $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ est *simplement connexe* si tout lacet continu $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ (avec $\gamma(0) = \gamma(1)$) est homotope à un point dans Ω . Intuitivement, Ω est simplement connexe s'il n'a « pas de trous ».

Exemple 1.30 (Domaines importants). (i) $\mathbb{C}$ est un domaine simplement connexe.

(ii) $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est un domaine *non* simplement connexe.

(iii) $D(a, r)$ est un domaine simplement connexe.

(iv) La couronne $\{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - a| < r_2\}$ est un domaine non simplement connexe.

(v) Le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ est simplement connexe.

1.7 Le plan complexe étendu et la sphère de Riemann

Définition 1.31 (Plan complexe étendu). Le *plan complexe étendu* est $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, où ∞ est un point formel. On munit $\hat{\mathbb{C}}$ de la topologie suivante :

- Les ouverts de $\mathbb{C}$ restent ouverts dans $\hat{\mathbb{C}}$.
- Les voisinages de ∞ sont les ensembles $\{\infty\} \cup (\mathbb{C} \setminus K)$ où $K \subseteq \mathbb{C}$ est compact.

L'espace $\hat{\mathbb{C}}$ est compact et homéomorphe à la sphère S^2 .

Définition 1.32 (Projection stéréographique). La *projection stéréographique* est l'homéomorphisme $\Phi : S^2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ défini comme suit. On identifie $S^2 = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 : X^2 + Y^2 + Z^2 = 1\}$ et on projette depuis le pôle Nord $N = (0, 0, 1)$ sur le plan équatorial $\{Z = 0\} \simeq \mathbb{C}$.

Pour $(X, Y, Z) \in S^2 \setminus \{N\}$, la droite passant par N et (X, Y, Z) coupe le plan $Z = 0$ en

$$\Phi(X, Y, Z) = \frac{X}{1 - Z} + i \frac{Y}{1 - Z}.$$

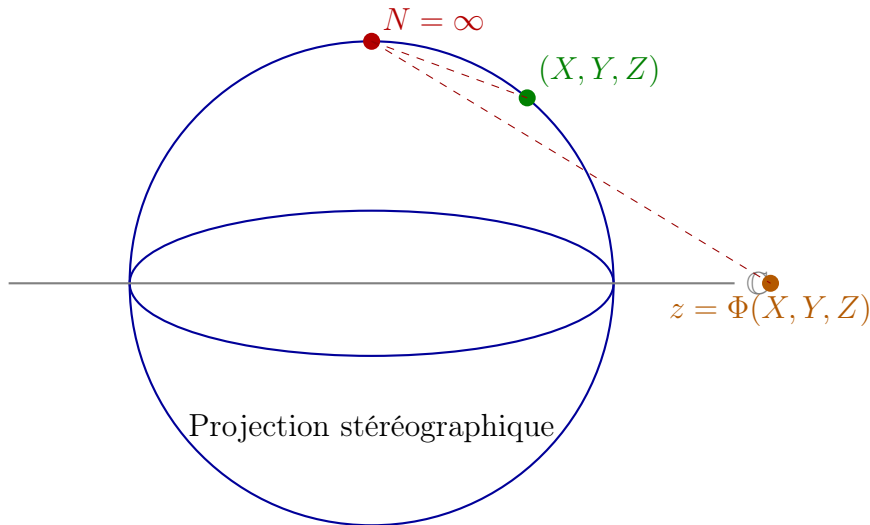
On pose $\Phi(N) = \infty$. L'application inverse est

$$\Phi^{-1}(z) = \left(\frac{2 \operatorname{Re}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{2 \operatorname{Im}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right).$$

Vérification de la formule inverse. Soit $z = x + iy$ et posons $r^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$. Le point (X, Y, Z) sur S^2 est paramétré par $(X, Y, Z) = (1 - t)N + t(x, y, 0) = (tx, ty, 1 - t)$ pour un $t > 0$. La condition $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ donne $t^2 r^2 + (1 - t)^2 = 1$, soit $t^2 r^2 + 1 - 2t + t^2 = 1$, d'où $t^2(r^2 + 1) = 2t$, soit $t = \frac{2}{r^2 + 1}$. On obtient :

$$X = \frac{2x}{r^2 + 1}, \quad Y = \frac{2y}{r^2 + 1}, \quad Z = 1 - \frac{2}{r^2 + 1} = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1}.$$

□



Proposition 1.33 (Propriétés de la projection stéréographique). (i) Φ est un homéomorphisme de S^2 sur $\hat{\mathbb{C}}$.

(ii) Φ est conforme : elle préserve les angles.

(iii) Φ envoie les cercles de S^2 sur les cercles et droites de $\hat{\mathbb{C}}$ (les droites correspondant aux cercles passant par N).

Définition 1.34 (Distance chordale). La *distance chordale* sur $\hat{\mathbb{C}}$ est définie par

$$\chi(z, w) = \frac{2|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2}\sqrt{1 + |w|^2}}, \quad \chi(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}.$$

Elle correspond à la distance euclidienne entre les points correspondants sur S^2 .

1.8 Exercices

Exercice 1.1 (★). Montrer que pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

Interpréter géométriquement ce résultat (identité du parallélogramme).

Exercice 1.2 (★). Soient $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$. Montrer l'inégalité triangulaire généralisée :

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|.$$

À quelle condition a-t-on égalité ?

Exercice 1.3 (★). Décrire les ensembles suivants et les représenter dans le plan complexe :

- (a) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = |z + 1|\}$.
- (b) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| + |z + 1| = 4\}$.
- (c) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) = 1\}$.
- (d) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 2|z + 1|\}$.

Exercice 1.4 (★★). (a) Calculer les racines quatrièmes de -4 .

- (b) Calculer les racines cinquièmes de $1 + i$.
- (c) Résoudre $z^6 + z^3 + 1 = 0$.

Exercice 1.5 (★★). Soit $n \geq 2$ un entier et $\omega = e^{2i\pi/n}$.

- (a) Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$.
- (b) Calculer $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. (*Indication* : utiliser la factorisation de $z^n - 1$ et évaluer en $z = 1$ après simplification.)
- (c) Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} |1 - \omega^k|^2 = 2n$.

Exercice 1.6 (★★). Soit $a \in \mathbb{D}$ (c'est-à-dire $|a| < 1$). Montrer que la transformation de Möbius

$$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

est un automorphisme du disque unité $\mathbb{D}$, c'est-à-dire une bijection holomorphe de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{D}$. Vérifier que $\varphi_a(\varphi_a(z)) = z$ (involution).

Exercice 1.7 (★★). Soient $a, b \in \mathbb{C}$ distincts et $k > 0$ avec $k \neq 1$. Montrer que l'ensemble

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{|z - a|}{|z - b|} = k \right\}$$

est un cercle (cercle d'Apollonius). Déterminer son centre et son rayon.

Exercice 1.8 (★★★). Soient $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$. Démontrer l'inégalité de Ptolémée :

$$|z_1 - z_3| |z_2 - z_4| \leq |z_1 - z_2| |z_3 - z_4| + |z_1 - z_4| |z_2 - z_3|.$$

(*Indication* : considérer le birapport et utiliser l'inégalité triangulaire.)

Exercice 1.9 (★★★). Montrer que la projection stéréographique envoie les cercles de S^2 sur les cercles et les droites de $\mathbb{C}$. Plus précisément, un cercle sur S^2 est l'intersection de S^2 avec un plan $\alpha X + \beta Y + \gamma Z = \delta$ (avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$). Exprimer l'image par Φ en fonction de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et montrer que c'est un cercle si $\gamma \neq \delta$, une droite si $\gamma = \delta$.

Exercice 1.10 (★★★). Montrer que le groupe des transformations de Möbius agit triplement transitivement sur $\hat{\mathbb{C}}$: pour tous triplets (z_1, z_2, z_3) et (w_1, w_2, w_3) de points distincts de $\hat{\mathbb{C}}$, il existe une unique transformation de Möbius T telle que $T(z_k) = w_k$ pour $k = 1, 2, 3$.

Indication : Construire d'abord la transformation T envoyant (z_1, z_2, z_3) sur $(0, 1, \infty)$ à l'aide du birapport :

$$T(z) = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}.$$

Chapitre 2

Fonctions holomorphes — Conditions de Cauchy-Riemann

2.1 Dérivée complexe

La notion centrale de l'analyse complexe est celle de dérivabilité complexe. Bien que sa définition soit formellement identique à celle de la dérivée réelle, ses conséquences sont incomparablement plus riches.

Définition 2.1 (Dérivabilité complexe). Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est *dérivable au sens complexe* (ou $\mathbb{C}$ -dérivable) en $z_0 \in \Omega$ si la limite

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existe dans $\mathbb{C}$, où $h \in \mathbb{C}^*$ tend vers 0 de manière quelconque. On appelle $f'(z_0)$ la *dérivée complexe* de f en z_0 .

Remarque 2.2. La condition cruciale est que la limite doit être la même quelle que soit la direction dans laquelle $h \rightarrow 0$. En analyse réelle, h ne peut tendre vers 0 que par valeurs positives ou négatives (deux directions). En analyse complexe, h peut tendre vers 0 dans une infinité de directions — le long de l'axe réel, de l'axe imaginaire, le long de spirales, etc. Cette contrainte beaucoup plus forte est la source de la rigidité de l'analyse complexe.

Définition 2.3 (Fonction holomorphe). Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert.

- (i) f est *holomorphe* en $z_0 \in \Omega$ si f est $\mathbb{C}$ -dérivable en z_0 .
- (ii) f est *holomorphe sur* Ω si f est holomorphe en tout point de Ω .
- (iii) On note $\mathcal{O}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω .
- (iv) f est *entière* si elle est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier.

Proposition 2.4 (Algèbre des fonctions holomorphes). Soient $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

- (i) $\lambda f + g \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$.
- (ii) $fg \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $(fg)' = f'g + fg'$ (règle de Leibniz).
- (iii) Si $g(z_0) \neq 0$, alors f/g est holomorphe au voisinage de z_0 et $(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
- (iv) Si $g : \Omega \rightarrow \Omega'$ et $f : \Omega' \rightarrow \mathbb{C}$ sont holomorphes, alors $f \circ g \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$ (règle de la chaîne).

En particulier, $\mathcal{O}(\Omega)$ est une $\mathbb{C}$ -algèbre.

Démonstration. Les preuves sont identiques à celles du cas réel. Montrons par exemple la règle de Leibniz. On a

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(z_0 + h) - (fg)(z_0)}{h} &= \frac{f(z_0 + h)g(z_0 + h) - f(z_0)g(z_0)}{h} \\ &= f(z_0 + h) \frac{g(z_0 + h) - g(z_0)}{h} + g(z_0) \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}. \end{aligned}$$

Comme f est dérivable en z_0 , elle est continue en z_0 , donc $f(z_0 + h) \rightarrow f(z_0)$. En passant à la limite :

$$(fg)'(z_0) = f(z_0)g'(z_0) + g(z_0)f'(z_0). \quad \square$$

Exemple 2.5 (Fonctions holomorphes élémentaires). (i) **Polynômes.** Tout polynôme $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ est entier, et $P'(z) = n a_n z^{n-1} + \dots + a_1$. En effet, $(z^n)' = n z^{n-1}$ se démontre par récurrence à l'aide de la règle de Leibniz.

(ii) **Fractions rationnelles.** Si P et Q sont des polynômes, $f(z) = P(z)/Q(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{z : Q(z) = 0\}$.

(iii) **Exponentielle.** $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$. On vérifie directement :

$$\frac{e^{z_0+h} - e^{z_0}}{h} = e^{z_0} \frac{e^h - 1}{h} \rightarrow e^{z_0} \quad \text{quand } h \rightarrow 0,$$

car $\frac{e^h - 1}{h} \rightarrow 1$ (par le développement $e^h = 1 + h + h^2/2 + \dots$). Donc $f'(z) = e^z$.

(iv) **Fonctions trigonométriques.** $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ et $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ sont entières, avec $(\cos z)' = -\sin z$ et $(\sin z)' = \cos z$.

Exemple 2.6 (Fonctions non holomorphes). (i) **Conjugaison.** $f(z) = \bar{z}$ n'est pas holomorphe. En effet,

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{\overline{h}}{h}.$$

Pour $h = t \in \mathbb{R}^*$, ce quotient vaut 1. Pour $h = it$ avec $t \in \mathbb{R}^*$, ce quotient vaut $\frac{-it}{it} = -1$. Les limites sont différentes, donc la dérivée n'existe pas.

(ii) **Module.** $f(z) = |z|$ n'est pas holomorphe (sauf peut-être en $z = 0$, mais un calcul montre que la dérivée n'existe pas non plus en 0).

(iii) **Partie réelle.** $f(z) = \operatorname{Re}(z)$ n'est pas holomorphe. En effet, $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$, et si Re était holomorphe, $\bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z) - z$ le serait aussi, ce qui est faux.

Remarque 2.7. Les exemples ci-dessus illustrent un phénomène fondamental : les fonctions $z \mapsto \bar{z}$, $z \mapsto \operatorname{Re}(z)$, $z \mapsto |z|^2$ sont toutes de classe $\mathcal{C}^\infty$ en tant que fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Pourtant, elles ne sont pas holomorphes. La $\mathbb{C}$ -dérivabilité est une condition strictement plus forte que la $\mathbb{R}$ -différentiabilité.

2.2 Conditions de Cauchy-Riemann

Les conditions de Cauchy-Riemann caractérisent les fonctions holomorphes en termes de leurs parties réelle et imaginaire.

Théorème 2.8 (Conditions de Cauchy-Riemann — condition nécessaire). *Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe en $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. Écrivons $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ où $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Alors les dérivées partielles de u et v existent en (x_0, y_0) et satisfont les équations de Cauchy-Riemann :*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \quad (2.1)$$

De plus, la dérivée complexe s'exprime par

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \quad (2.2)$$

Démonstration. Puisque la dérivée complexe existe, la limite $\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ est la même quel que soit le chemin emprunté par $h \rightarrow 0$.

Étape 1 : h réel. Prenons $h = t \in \mathbb{R}^*$, $t \rightarrow 0$. Alors

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + t, y_0) - u(x_0, y_0)}{t} + i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + t, y_0) - v(x_0, y_0)}{t} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Étape 2 : h imaginaire pur. Prenons $h = it$ avec $t \in \mathbb{R}^*$, $t \rightarrow 0$. Alors

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{it} \\ &= \frac{1}{i} \left[\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \right] \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé $1/i = -i$.

Étape 3 : Identification. En identifiant les parties réelles et imaginaires des deux expressions de $f'(z_0)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

□

Remarque 2.9. En notation compacte, les équations de Cauchy-Riemann s'écrivent $u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$, ou encore sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix}.$$

La matrice jacobienne de f vue comme application $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est donc de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, qui représente la composition d'une rotation et d'une homothétie. C'est la clé de l'interprétation géométrique de l'holomorphic.

Théorème 2.10 (Conditions de Cauchy-Riemann — condition suffisante). *Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et $f = u + iv : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Si u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et satisfont les équations de Cauchy-Riemann (2.1) en tout point de Ω , alors f est holomorphe sur Ω .*

Démonstration. Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. Comme u et v sont $\mathcal{C}^1$, elles sont différentiables au sens réel en (x_0, y_0) : il existe des fonctions $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ tendant vers 0 en $(0, 0)$ telles que

$$\begin{aligned} u(x_0 + s, y_0 + t) - u(x_0, y_0) &= u_x s + u_y t + |(s, t)| \varepsilon_1(s, t), \\ v(x_0 + s, y_0 + t) - v(x_0, y_0) &= v_x s + v_y t + |(s, t)| \varepsilon_2(s, t), \end{aligned}$$

où les dérivées partielles sont évaluées en (x_0, y_0) . Posons $h = s + it$. Alors :

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = (u_x s + u_y t) + i(v_x s + v_y t) + |h| \varepsilon(h),$$

où $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$. En utilisant les équations de Cauchy-Riemann ($u_x = v_y$, $u_y = -v_x$) :

$$\begin{aligned} (u_x s + u_y t) + i(v_x s + v_y t) &= u_x s - v_x t + i(v_x s + u_x t) \\ &= (u_x + iv_x)(s + it) \\ &= (u_x + iv_x) h. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = u_x + iv_x + \frac{|h|}{h} \varepsilon(h).$$

Or $||h|/h| = 1$, donc $\frac{|h|}{h} \varepsilon(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$. Ainsi $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$ existe. $\square$

Remarque 2.11. L'hypothèse $\mathcal{C}^1$ dans le théorème précédent peut être affaiblie : il suffit que les dérivées partielles existent et soient continues en (x_0, y_0) (et non sur tout Ω). Il existe même un résultat plus fin dû à Looman et Menchov : si f est continue et si les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites partout (avec existence des dérivées partielles), alors f est holomorphe.

Définition 2.12 (Opérateurs de Wirtinger). On définit les *opérateurs de Wirtinger*

par :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Proposition 2.13 (Holomorphie et opérateur de Wirtinger). *Soit $f = u + iv$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω . Alors :*

- (i) *Les équations de Cauchy-Riemann sont équivalentes à $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.*
- (ii) *Si f est holomorphe, alors $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}$.*

Démonstration. (i) On calcule :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} [(u_x + iv_x) + i(u_y + iv_y)] \\ &= \frac{1}{2} [(u_x - v_y) + i(v_x + u_y)]. \end{aligned}$$

Cette expression est nulle si et seulement si $u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$.

(ii) De même, $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} [(u_x + v_y) + i(v_x - u_y)] = u_x + iv_x = f'(z)$ en utilisant les équations de Cauchy-Riemann. $\square$

Exemple 2.14 (Vérification par Cauchy-Riemann). (i) Soit $f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$. Donc $u = x^2 - y^2$ et $v = 2xy$.

$$u_x = 2x = v_y, \quad u_y = -2y = -v_x.$$

Les conditions de Cauchy-Riemann sont satisfaites, u et v sont $\mathcal{C}^1$, donc f est holomorphe et $f'(z) = u_x + iv_x = 2x + 2iy = 2z$.

(ii) Soit $f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$. Donc $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$.

$$u_x = e^x \cos y = v_y, \quad u_y = -e^x \sin y = -v_x.$$

Donc f est holomorphe et $f'(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$.

(iii) Soit $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$. Ici $u = x^2 + y^2$ et $v = 0$.

$$u_x = 2x, \quad v_y = 0 \implies u_x = v_y \iff x = 0.$$

$$u_y = 2y, \quad v_x = 0 \implies u_y = -v_x \iff y = 0.$$

Les conditions ne sont satisfaites qu'en $z = 0$. Mais les dérivées partielles sont continues, donc f est $\mathbb{C}$ -dérivable en $z = 0$ seulement, avec $f'(0) = 0$. La fonction n'est holomorphe sur aucun ouvert.

2.3 Interprétation géométrique : conformité

Définition 2.15 (Application conforme). Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que f est *conforme* en $z_0 \in \Omega$ si f préserve les angles orientés entre courbes passant par z_0 , et préserve l'orientation. Plus précisément, si γ_1 et γ_2 sont deux courbes $\mathcal{C}^1$ passant par z_0 avec $\gamma_1'(0), \gamma_2'(0) \neq 0$, alors l'angle orienté entre $f \circ \gamma_1$ et $f \circ \gamma_2$ en $f(z_0)$ est égal à celui entre γ_1 et γ_2 en z_0 .

Théorème 2.16 (Holomorphie et conformité). Soit f holomorphe sur un ouvert Ω . Si $f'(z_0) \neq 0$, alors f est conforme en z_0 . Réciproquement, si f est $\mathcal{C}^1$, préserve les angles et l'orientation en z_0 , et sa différentielle en z_0 est non nulle, alors f est holomorphe en z_0 avec $f'(z_0) \neq 0$.

Démonstration. Sens direct. Soit $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Omega$ une courbe $\mathcal{C}^1$ avec $\gamma(0) = z_0$ et $\gamma'(0) \neq 0$. La courbe image est $\sigma = f \circ \gamma$, de dérivée

$$\sigma'(0) = f'(z_0) \cdot \gamma'(0).$$

L'argument de $\sigma'(0)$ est

$$\arg(\sigma'(0)) = \arg(f'(z_0)) + \arg(\gamma'(0)).$$

L'angle entre deux courbes γ_1, γ_2 en z_0 est $\arg(\gamma_2'(0)) - \arg(\gamma_1'(0))$. L'angle entre leurs images est

$$\arg(\sigma_2'(0)) - \arg(\sigma_1'(0)) = \arg(\gamma_2'(0)) - \arg(\gamma_1'(0)).$$

Le terme $\arg(f'(z_0))$ se simplifie : l'angle est préservé.

De plus, $|\sigma'(0)| = |f'(z_0)| |\gamma'(0)|$, donc les longueurs sont multipliées par le facteur constant $|f'(z_0)|$ (localement). C'est pourquoi f est dite *conforme* : elle ressemble localement à une rotation d'angle $\arg(f'(z_0))$ composée avec une homothétie de rapport $|f'(z_0)|$.

Sens réciproque. La matrice jacobienne de $f = (u, v)$ en (x_0, y_0) est $J = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$. La préservation des angles et de l'orientation impose que J est de la forme $\lambda R_\theta = \lambda \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ avec $\lambda > 0$. Posant $a = \lambda \cos \theta$ et $b = \lambda \sin \theta$, on obtient $u_x = a = v_y$ et $u_y = -b = -v_x$, qui sont les équations de Cauchy-Riemann. $\square$

Exemple 2.17 (Conformité de $f(z) = z^2$). La fonction $f(z) = z^2$ est conforme en tout point $z_0 \neq 0$ (car $f'(z_0) = 2z_0 \neq 0$). En $z_0 = 0$, $f'(0) = 0$ et la fonction double les angles : l'angle entre deux courbes est multiplié par 2.

Considérons la grille formée par les droites $x = c$ (constante) et $y = c$ (constante). L'image de $x = c$ par $f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$ est la courbe paramétrée par :

$$u = c^2 - y^2, \quad v = 2cy \quad \implies \quad u = c^2 - \frac{v^2}{4c^2},$$

qui est une parabole d'axe horizontal. De même, l'image de $y = c$ est $u = x^2 - c^2$, $v = 2cx$, soit $u = \frac{v^2}{4c^2} - c^2$, une autre famille de paraboles. Ces deux familles de paraboles se coupent à angles droits, confirmant la conformité.

Transformation conforme $z \mapsto z^2$: la grille orthogonale est envoyée sur deux familles de paraboles qui se coupent à angles droits.

Exemple 2.18 (Conformité de l'exponentielle). La fonction $f(z) = e^z$ est entière et $f'(z) = e^z \neq 0$ pour tout z , donc f est conforme en tout point. L'image de la droite horizontale $y = c$ est le rayon $\{re^{ic} : r > 0\}$. L'image de la droite verticale $x = c$ est le cercle $\{e^c e^{iy} : y \in \mathbb{R}\} = C(0, e^c)$. Les rayons et les cercles sont orthogonaux, confirmant la conformité.

2.4 Fonctions harmoniques et lien avec l'holomorphie

Définition 2.19 (Fonction harmonique). Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert. Une fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ est *harmonique* si elle satisfait l'équation de Laplace :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

L'opérateur $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$ est le *laplacien*.

Théorème 2.20 (Holomorphie et harmonicité). Si $f = u + iv$ est holomorphe sur un ouvert Ω , alors u et v sont harmoniques sur Ω .

Démonstration. On admettra temporairement que toute fonction holomorphe est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (ce résultat fondamental sera démontré au chapitre 5 via la formule intégrale de Cauchy). Les équations de Cauchy-Riemann donnent $u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$. En dérivant :

$$u_{xx} = v_{yx}, \quad u_{yy} = -v_{xy}.$$

Comme f est $\mathcal{C}^2$, le théorème de Schwarz donne $v_{yx} = v_{xy}$. Donc :

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0.$$

De même, $v_{xx} = -u_{yx}$ et $v_{yy} = u_{xy}$, d'où $\Delta v = -u_{yx} + u_{xy} = 0$. □

Remarque 2.21. Le laplacien s'exprime élégamment à l'aide des opérateurs de Wirtinger :

$$\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

En effet, $4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = 4 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \Delta$.

Définition 2.22 (Conjuguée harmonique). Soit u une fonction harmonique sur un ouvert Ω . Une fonction harmonique v est une *conjuguée harmonique* de u si $f = u + iv$ est holomorphe sur Ω , c'est-à-dire si u et v satisfont les équations de Cauchy-Riemann.

Théorème 2.23 (Existence de la conjuguée harmonique). Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un domaine simplement connexe et $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction harmonique. Alors u admet une conjuguée harmonique v , unique à une constante additive près.

Démonstration. Fixons un point $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. On cherche v telle que $v_x = -u_y$ et $v_y = u_x$. On définit, pour $(x, y) \in \Omega$:

$$v(x, y) = \int_{\gamma} (-u_y dx' + u_x dy'),$$

où γ est un chemin quelconque dans Ω de (x_0, y_0) à (x, y) .

Pour que cette intégrale soit bien définie (indépendante du chemin), il faut vérifier la condition d'exactitude. La 1-forme $\omega = -u_y dx + u_x dy$ est fermée car :

$$\frac{\partial(-u_y)}{\partial y} = -u_{yy}, \quad \frac{\partial(u_x)}{\partial x} = u_{xx}.$$

La condition $\frac{\partial(-u_y)}{\partial y} = \frac{\partial(u_x)}{\partial x}$ se réécrit $-u_{yy} = u_{xx}$, soit $\Delta u = 0$, ce qui est vrai par hypothèse. Comme Ω est simplement connexe, toute forme fermée est exacte (lemme de Poincaré), donc l'intégrale est indépendante du chemin.

La fonction v ainsi définie satisfait $v_x = -u_y$ et $v_y = u_x$ par construction, donc $f = u + iv$ est holomorphe.

L'unicité à constante près provient du fait que si v_1 et v_2 sont deux conjuguées harmoniques de u , alors $v_1 - v_2$ est une fonction holomorphe réelle (sa partie imaginaire est nulle), donc constante sur le connexe Ω (par les équations de Cauchy-Riemann : $(v_1 - v_2)_x = 0$ et $(v_1 - v_2)_y = 0$). $\square$

Remarque 2.24. L'hypothèse de connexité simple est essentielle. Sur $\mathbb{C}^*$, la fonction $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)^{1/2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ est harmonique, mais sa conjuguée harmonique est $v(x, y) = \arctan(y/x)$ (à constante près), qui n'est pas univoque sur $\mathbb{C}^*$. On ne peut pas définir une fonction v continue sur tout $\mathbb{C}^*$.

Exemple 2.25 (Construction d'une conjuguée harmonique). Soit $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$.

Vérifions que u est harmonique :

$$u_{xx} = 2, \quad u_{yy} = -2, \quad \Delta u = 0. \quad \checkmark$$

Cherchons v telle que $v_y = u_x = 2x + 1$ et $v_x = -u_y = 2y$. De la première équation :

$$v(x, y) = \int (2x + 1) dy = (2x + 1)y + \varphi(x),$$

où φ est une fonction de x seul. De la seconde équation :

$$v_x = 2y + \varphi'(x) = 2y \implies \varphi'(x) = 0 \implies \varphi(x) = C.$$

Donc $v(x, y) = 2xy + y + C$. La fonction holomorphe correspondante est

$$f(z) = (x^2 - y^2 + x) + i(2xy + y) + iC = z^2 + z + iC.$$

Proposition 2.26 (Propriétés des fonctions harmoniques). *Soit u harmonique sur un domaine Ω .*

- (i) *u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (car c'est la partie réelle d'une fonction holomorphe, elle-même $\mathcal{C}^\infty$).*
- (ii) *u satisfait la propriété de la moyenne : pour tout disque $\overline{D}(a, r) \subseteq \Omega$,*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

- (iii) *u satisfait le principe du maximum : si u atteint son maximum (ou son minimum) en un point intérieur de Ω , alors u est constante.*

Démonstration. Ces résultats seront démontrés rigoureusement au chapitre 5 comme conséquences de la formule intégrale de Cauchy. Donnons cependant l'idée pour le principe du maximum.

Supposons que u atteint son maximum M en $a \in \Omega$. Par la propriété de la moyenne,

$$M = u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

Comme $u(a + re^{i\theta}) \leq M$ pour tout θ , et que la moyenne de fonctions majorées par M vaut M , on doit avoir $u(a + re^{i\theta}) = M$ pour tout θ . En itérant, $u = M$ sur tout disque centré en a , puis par connexité, sur tout Ω . $\square$

Exemple 2.27 (Application : problème de Dirichlet). Le *problème de Dirichlet* consiste à trouver une fonction harmonique u sur un domaine Ω dont les valeurs au bord $\partial\Omega$ sont prescrites. Par exemple, sur le disque $\mathbb{D}$, si u est harmonique et continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, la formule intégrale de Poisson (qui sera vue au chapitre 5) donne :

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - \varphi) + r^2} u(e^{i\varphi}) d\varphi,$$

pour $0 \leq r < 1$. Le noyau $P_r(\theta - \varphi) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\theta-\varphi)+r^2}$ est le *noyau de Poisson*.

2.5 Conditions de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires

Proposition 2.28 (Cauchy-Riemann en coordonnées polaires). *Soit $f = u + iv$ holomorphe sur un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{C}^*$. En coordonnées polaires $z = re^{i\theta}$, les équations de Cauchy-Riemann s'écrivent :*

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}. \quad (2.3)$$

La dérivée complexe est

$$f'(z) = e^{-i\theta} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right).$$

Démonstration. On utilise le changement de variables $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, d'où par la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -u_x r \sin \theta + u_y r \cos \theta.$$

En utilisant $u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = v_y \cos \theta - v_x \sin \theta = \frac{1}{r} (v_x r \cos \theta \cdot 0 + \dots).$$

Calculons plutôt $\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{r} (-v_x r \sin \theta + v_y r \cos \theta) = -v_x \sin \theta + v_y \cos \theta.$$

Et

$$\frac{\partial u}{\partial r} = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta = v_y \cos \theta + (-v_x) \sin \theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

La deuxième équation se vérifie de manière analogue. □

Exemple 2.29 (Vérification avec $f(z) = \text{Log } z$). Le logarithme principal est $\text{Log } z = \ln r + i\theta$ (pour $\theta \in (-\pi, \pi)$). Ici $u = \ln r$ et $v = \theta$. Vérifions :

$$u_r = \frac{1}{r}, \quad \frac{1}{r} v_\theta = \frac{1}{r} \cdot 1 = \frac{1}{r}. \quad \checkmark$$

$$v_r = 0, \quad -\frac{1}{r} u_\theta = -\frac{1}{r} \cdot 0 = 0. \quad \checkmark$$

La dérivée est $f'(z) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r) = e^{-i\theta} \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z}$.

2.6 Exercices

Exercice 2.1 (★). Vérifier les conditions de Cauchy-Riemann et calculer la dérivée complexe pour :

- (a) $f(z) = z^3$.
- (b) $f(z) = \frac{1}{z}$ sur $\mathbb{C}^*$.
- (c) $f(z) = e^{z^2}$.

Exercice 2.2 (★). Montrer à l'aide des conditions de Cauchy-Riemann que les fonctions suivantes ne sont holomorphes en aucun point :

- (a) $f(z) = \operatorname{Re}(z)$.
- (b) $f(z) = \bar{z}^2$.
- (c) $f(z) = z\bar{z}$.

Pour (c), la fonction est-elle $\mathbb{C}$ -dérivable en un point isolé ?

Exercice 2.3 (★★). Pour chacune des fonctions harmoniques suivantes, trouver une conjuguée harmonique et la fonction holomorphe correspondante :

- (a) $u(x, y) = e^x \cos y$.
- (b) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$.
- (c) $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ sur $\mathbb{C}^*$ (attention à la connexité simple).
- (d) $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ sur $\mathbb{C}^*$.

Exercice 2.4 (★★). Montrer qu'une fonction harmonique de la forme $u(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ (avec $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$) est nécessairement telle que $a + c = 0$. Trouver la conjuguée harmonique et la fonction holomorphe associée.

Exercice 2.5 (★★). Soit $f(z) = e^z$.

- (a) Déterminer l'image par f de la bande $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$.
- (b) Déterminer l'image par f du rectangle $\{z : 0 < \operatorname{Re}(z) < 1, 0 < \operatorname{Im}(z) < \pi/2\}$.
- (c) En quel(s) point(s) f est-elle injective ? Est-elle injective sur S ?

Exercice 2.6 (★★). Soit $f = u + iv$ holomorphe sur un ouvert Ω .

- (a) Montrer que le jacobien de f (vue comme application $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$) est $J_f = |f'|^2$.
- (b) En déduire que f est localement injective en tout point z_0 tel que $f'(z_0) \neq 0$ (par le théorème d'inversion locale).
- (c) Montrer que si f est injective sur Ω , alors $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$.

Exercice 2.7 (★★). (a) Montrer que $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(z^n) = 0$ et $\frac{\partial}{\partial z}(z^n) = nz^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (b) Montrer que $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\bar{z}^n) = n\bar{z}^{n-1}$ et $\frac{\partial}{\partial z}(\bar{z}^n) = 0$.
- (c) Calculer $\frac{\partial}{\partial z}(|z|^2)$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(|z|^2)$.
- (d) Montrer que $\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$.

Exercice 2.8 (★★★). (a) Écrire les conditions de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires et les vérifier pour $f(z) = z^n$ ($n \in \mathbb{Z}$).

(b) En déduire le laplacien en coordonnées polaires :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

(c) Montrer que les fonctions $u(r, \theta) = r^n \cos(n\theta)$ et $v(r, \theta) = r^n \sin(n\theta)$ sont harmoniques pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.9 (★★★). Soit u harmonique et non constante sur un domaine borné Ω , continue sur $\overline{\Omega}$.

- (a) En admettant la propriété de la moyenne, montrer que u ne peut pas atteindre son maximum en un point intérieur (principe du maximum).
- (b) En déduire que $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.
- (c) En déduire l'unicité de la solution du problème de Dirichlet : si u_1 et u_2 sont harmoniques sur Ω , continues sur $\overline{\Omega}$, et $u_1 = u_2$ sur $\partial\Omega$, alors $u_1 = u_2$ sur Ω .

Exercice 2.10 (★★★). Soit f holomorphe sur un domaine Ω . Montrer que f est constante si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- (a) $\overline{f}$ est holomorphe sur Ω .
- (b) $|f|$ est constante sur Ω .
- (c) $\operatorname{Re}(f)$ est constante sur Ω .
- (d) $\arg(f)$ est constante sur Ω (et f ne s'annule pas).
- (e) $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$.
- (f) $f(\Omega)$ est contenu dans un cercle.

(Indication : utiliser les équations de Cauchy-Riemann.)

Exercice 2.11 (★★★). (a) Montrer que la transformation de Joukowski $f(z) = z + 1/z$ est conforme sur $\mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Déterminer l'image du cercle $|z| = R$ pour $R > 1$ et $R = 1$.

- (b) Montrer que $f(z) = \frac{1}{2}(z + 1/z)$ envoie l'extérieur du disque unité conformément sur $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Chapitre 3

Fonctions Élémentaires

3.1 Introduction

Les fonctions élémentaires — exponentielle, logarithme, puissances, fonctions trigonométriques et hyperboliques — constituent le socle de l'analyse complexe. Leur étude révèle des phénomènes sans analogue réel : la périodicité de l'exponentielle selon l'axe imaginaire, le caractère multivalué du logarithme et des puissances complexes, et l'unification profonde entre fonctions trigonométriques et hyperboliques par les formules d'Euler.

Ce chapitre développe systématiquement ces fonctions, en insistant sur les propriétés géométriques (image de bandes, de droites), sur la notion de *branche* d'une fonction multivaluée, et sur les calculs explicites.

3.2 L'exponentielle complexe

Définition 3.1 (Exponentielle complexe). Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$), on définit

$$\exp(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

De manière équivalente, $\exp$ est définie par la série entière convergente sur $\mathbb{C}$ tout entier :

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Théorème 3.2 (Propriétés fondamentales de l'exponentielle). *La fonction $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vérifie les propriétés suivantes.*

(i) **Holomorphie.** $\exp$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier (fonction entière) et $\exp'(z) = \exp(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

(ii) **Propriété fonctionnelle.** Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$,

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w.$$

(iii) **Non-annulation.** $e^z \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, et $e^{-z} = (e^z)^{-1}$.

(iv) **Module et argument.** $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)} = e^x$ et $\arg(e^z) = \operatorname{Im}(z) + 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

(v) **Périodicité.** $\exp$ est périodique de période $2\pi i$:

$$e^{z+2\pi i} = e^z \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}.$$

De plus, $2\pi i$ est une période fondamentale : si $e^{z+\omega} = e^z$ pour tout z , alors $\omega \in 2\pi i\mathbb{Z}$.

(vi) **Surjectivité.** $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est surjective.

Démonstration. (i) La série entière $\sum z^n/n!$ a un rayon de convergence infini (par le critère de d'Alembert : $|z|/(n+1) \rightarrow 0$). La dérivée terme à terme donne $\exp'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}/(n-1)! = \exp(z)$.

(ii) On utilise le produit de Cauchy des séries :

$$e^z \cdot e^w = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} z^j w^{k-j} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+w)^k}{k!} = e^{z+w},$$

la dernière égalité provenant du binôme de Newton.

(iii) De $e^z \cdot e^{-z} = e^0 = 1$, on déduit $e^z \neq 0$ et $e^{-z} = (e^z)^{-1}$.

(iv) On a $|e^z| = |e^x(\cos y + i \sin y)| = e^x |\cos y + i \sin y| = e^x$, car $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$.

(v) $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z$. Pour la minimalité, si $e^\omega = 1$ avec $\omega = a + ib$, alors $e^a = 1$ donc $a = 0$, et $\cos b + i \sin b = 1$ donc $b \in 2\pi\mathbb{Z}$.

(vi) Soit $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Écrivons $w = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors $z = \ln \rho + i\theta$ vérifie $e^z = e^{\ln \rho}(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta} = w$. $\square$

Remarque 3.3. La périodicité de $\exp$ implique qu'elle n'est *pas* injective sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, $e^{z_1} = e^{z_2}$ si et seulement si $z_1 - z_2 \in 2\pi i\mathbb{Z}$. En revanche, $\exp$ est injective sur toute bande horizontale de largeur strictement inférieure à 2π , par exemple sur $\{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im}(z) \leq \pi\}$.

3.2.1 Image de bandes horizontales et verticales

L'un des aspects les plus éclairants de l'exponentielle complexe est son action géométrique sur les bandes du plan.

Proposition 3.4 (Image de bandes horizontales). *Soit $\alpha < \beta$ avec $\beta - \alpha \leq 2\pi$. Alors $\exp$ envoie la bande horizontale*

$$B_{\alpha,\beta} = \{z \in \mathbb{C} : \alpha < \operatorname{Im}(z) < \beta\}$$

sur le secteur angulaire

$$S_{\alpha,\beta} = \{w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \alpha < \arg(w) < \beta\}.$$

En particulier :

(a) *La bande $\{-\pi < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$ est envoyée sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ (le plan coupé le long de la demi-droite réelle négative).*

- (b) La bande $\{0 < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$ est envoyée sur le demi-plan supérieur $\{\operatorname{Im}(w) > 0\}$.
 (c) La bande $\{-\pi/2 < \operatorname{Im}(z) < \pi/2\}$ est envoyée sur le demi-plan $\{\operatorname{Re}(w) > 0\}$.

Démonstration. Soit $z = x + iy$ avec $\alpha < y < \beta$. Alors $e^z = e^x e^{iy}$. Le module e^x parcourt $(0, +\infty)$ quand x parcourt $\mathbb{R}$, et l'argument y varie dans (α, β) . Donc l'image est exactement l'ensemble des $w \neq 0$ de module quelconque et d'argument dans (α, β) . Les cas particuliers s'en déduisent immédiatement. $\square$

Proposition 3.5 (Image de droites).

- (i) **Droite horizontale** $\operatorname{Im}(z) = y_0$ (i.e. $z = x + iy_0$, $x \in \mathbb{R}$) : l'image est la demi-droite issue de l'origine, de direction e^{iy_0} , privée de l'origine.
 (ii) **Droite verticale** $\operatorname{Re}(z) = x_0$ (i.e. $z = x_0 + iy$, $y \in \mathbb{R}$) : l'image est le cercle de centre 0 et de rayon e^{x_0} , parcouru dans le sens trigonométrique.

Démonstration. (i) Si $z = x + iy_0$, alors $e^z = e^x e^{iy_0}$. Quand x parcourt $\mathbb{R}$, e^x parcourt $(0, +\infty)$, et la direction e^{iy_0} est fixe.

(ii) Si $z = x_0 + iy$, alors $e^z = e^{x_0} e^{iy}$. Le module e^{x_0} est fixe, et e^{iy} parcourt le cercle unité quand y parcourt $[0, 2\pi)$. $\square$

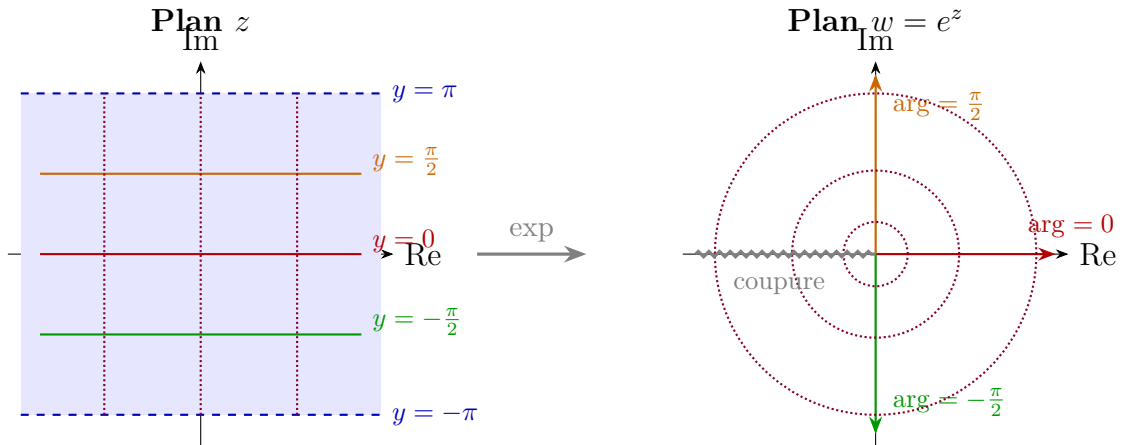


FIGURE 3.1 – Image par $\exp$ de la bande $\{-\pi < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$. Les droites horizontales deviennent des demi-droites, les droites verticales deviennent des cercles.

Exemple 3.6 (Résolution de $e^z = w$). Résolvons $e^z = -1 + i$.

On écrit $-1 + i$ en forme polaire : $|-1 + i| = \sqrt{2}$ et $\arg(-1 + i) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
 Donc

$$e^z = \sqrt{2} e^{i(3\pi/4 + 2k\pi)}.$$

On cherche $z = x + iy$ tel que $e^x = \sqrt{2}$ et $y = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$. Ainsi $x = \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2$ et

$$z = \frac{1}{2} \ln 2 + i \left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exemple 3.7 (Image d'un rectangle). Soit $R = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re}(z) < 1, 0 < \operatorname{Im}(z) < \pi/2\}$, le rectangle ouvert.

L'image $\exp(R)$ est le quart de couronne :

$$\exp(R) = \{w \in \mathbb{C} : 1 < |w| < e, 0 < \arg(w) < \pi/2\}.$$

En effet, $\operatorname{Re}(z) \in (0, 1)$ donne $|w| = e^{\operatorname{Re}(z)} \in (1, e)$, et $\operatorname{Im}(z) \in (0, \pi/2)$ donne $\arg(w) \in (0, \pi/2)$.

3.3 Le logarithme complexe

3.3.1 L'argument et sa multivaluation

Définition 3.8 (Argument principal). Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, l'*argument principal* de z , noté $\operatorname{Arg}(z)$, est l'unique $\theta \in (-\pi, \pi]$ tel que

$$z = |z| e^{i\theta}.$$

L'*argument* (multivalué) de z est l'ensemble $\arg(z) = \{\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Remarque 3.9. La fonction $\operatorname{Arg} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow (-\pi, \pi]$ est discontinue sur la demi-droite réelle négative $\mathbb{R}_{<0}$. En effet, si $z = -1 + i\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ petit, $\operatorname{Arg}(z) \approx \pi$, tandis que si $z = -1 - i\varepsilon$, $\operatorname{Arg}(z) \approx -\pi$. En revanche, Arg est continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$.

3.3.2 Définition du logarithme complexe

Définition 3.10 (Logarithme complexe (multivalué)). Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, on définit le *logarithme complexe* (multivalué) de z par

$$\log(z) = \ln |z| + i \arg(z) = \{\ln |z| + i(\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Chaque valeur de cet ensemble est appelée une *détermination* du logarithme de z .

Définition 3.11 (Logarithme principal). Le *logarithme principal* est la fonction

$$\operatorname{Log} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \operatorname{Log}(z) = \ln |z| + i \operatorname{Arg}(z),$$

où $\operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi)$ est l'argument principal de z (on exclut $\mathbb{R}_{\leq 0}$ pour assurer la continuité).

Remarque 3.12. Le domaine $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ est obtenu en retirant la demi-droite $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ du plan complexe. Cette demi-droite est appelée *coupure* (*branch cut*) du logarithme principal. C'est un choix conventionnel : on pourrait choisir n'importe quel rayon issu de l'origine comme coupure.

Théorème 3.13 (Propriétés du logarithme principal).

(i) Log est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$, et

$$\text{Log}'(z) = \frac{1}{z} \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}.$$

(ii) $\exp(\text{Log}(z)) = z$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$.

(iii) $\text{Log}(\exp(z)) = z$ pour tout z tel que $-\pi < \text{Im}(z) < \pi$.

(iv) $\text{Re}(\text{Log}(z)) = \ln |z|$ et $\text{Im}(\text{Log}(z)) = \text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi)$.

(v) L'image de Log est la bande $\{w \in \mathbb{C} : -\pi < \text{Im}(w) < \pi\}$.

Démonstration. (i) Écrivons $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta = \text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi)$. En coordonnées polaires, $\text{Log}(z) = \ln r + i\theta$. Posons $u(r, \theta) = \ln r$ et $v(r, \theta) = \theta$. Les équations de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires s'écrivent

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

On a $\partial u / \partial r = 1/r$, $\partial v / \partial \theta = 1$, $\partial v / \partial r = 0$, $\partial u / \partial \theta = 0$, donc les deux équations sont satisfaites. La dérivée complexe est

$$\text{Log}'(z) = e^{-i\theta} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) = e^{-i\theta} \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z}.$$

(ii) $\exp(\text{Log}(z)) = \exp(\ln r + i\theta) = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta} = z$.

(iii) Si $z = x + iy$ avec $-\pi < y < \pi$, alors $|e^z| = e^x$ et $\text{Arg}(e^z) = y$, donc $\text{Log}(e^z) = x + iy = z$.

(iv) et (v) découlent directement de la définition. $\square$

Remarque 3.14. Contrairement au logarithme réel, le logarithme principal ne vérifie pas en général $\text{Log}(z_1 z_2) = \text{Log}(z_1) + \text{Log}(z_2)$. On a seulement

$$\text{Log}(z_1 z_2) = \text{Log}(z_1) + \text{Log}(z_2) + 2k\pi i$$

pour un certain $k \in \{-1, 0, 1\}$. L'entier k corrige le fait que la somme $\text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)$ peut sortir de l'intervalle $(-\pi, \pi]$.

Exemple 3.15 (Calculs de $\text{Log}(z)$).

(a) $\text{Log}(1) = \ln 1 + i \cdot 0 = 0$.

(b) $\text{Log}(-1)$ n'est pas défini par Log (car $-1 \in \mathbb{R}_{\leq 0}$), mais la valeur multivaluée est $\log(-1) = i\pi + 2ki\pi = i(2k+1)\pi$.

(c) $\text{Log}(i) = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} = \frac{i\pi}{2}$.

(d) $\text{Log}(-i) = \ln 1 + i\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{i\pi}{2}$.

(e) $\text{Log}(1+i) = \ln |1+i| + i \text{Arg}(1+i) = \ln \sqrt{2} + \frac{i\pi}{4} = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{i\pi}{4}$.

(f) $\text{Log}(-1-i) = \ln \sqrt{2} + i\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{3i\pi}{4}$.

(g) $\text{Log}(e^{3+4i})$. On a $|e^{3+4i}| = e^3$ et $\text{Arg}(e^{3+4i}) = 4 - 2\pi$ (car $4 > \pi$, on soustrait 2π pour ramener dans $(-\pi, \pi)$). Donc $\text{Log}(e^{3+4i}) = 3 + i(4 - 2\pi)$.

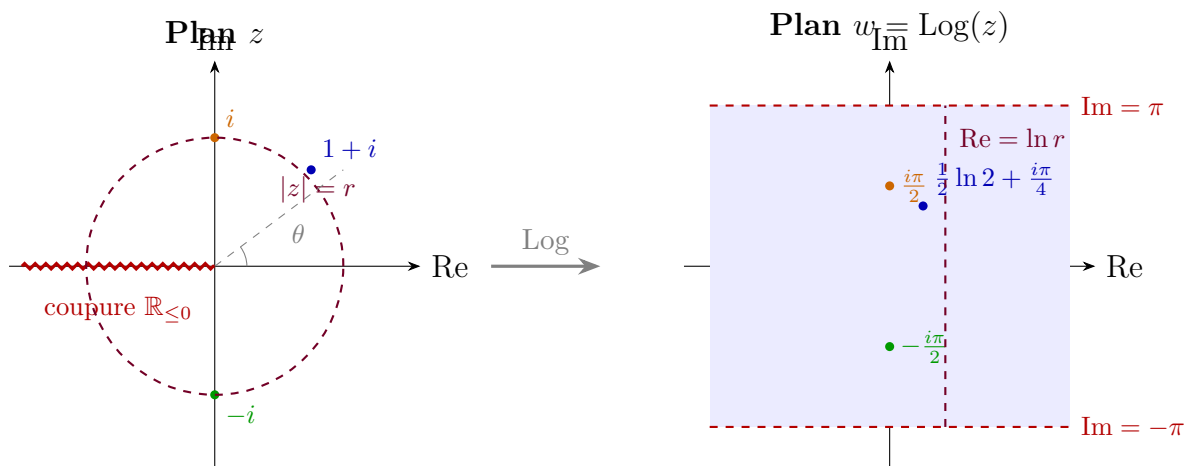


FIGURE 3.2 – Le logarithme principal Log envoie $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ bijectivement sur la bande $\{-\pi < \text{Im}(w) < \pi\}$. Les cercles centrés à l'origine deviennent des segments verticaux.

3.3.3 Branches du logarithme

Définition 3.16 (Branche du logarithme). Soit $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un ouvert connexe. Une *branche du logarithme* sur Ω est une fonction continue $\ell : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\exp(\ell(z)) = z \quad \text{pour tout } z \in \Omega.$$

Proposition 3.17 (Caractérisation des branches). Soit ℓ une branche du logarithme sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Alors :

- (i) ℓ est holomorphe sur Ω et $\ell'(z) = 1/z$.
- (ii) Toute autre branche du logarithme sur Ω est de la forme $\ell(z) + 2k\pi i$ pour un $k \in \mathbb{Z}$ fixé (indépendant de z).
- (iii) Pour tout $z \in \Omega$, $\ell(z) = \ln|z| + i\theta(z)$ où $\theta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une détermination continue de l'argument sur Ω .

Démonstration. (i) Puisque $\exp(\ell(z)) = z$, on a $\exp'(\ell(z)) \cdot \ell'(z) = 1$ partout où ℓ est dérivable (par le théorème d'inversion locale, l'holomorphicité de ℓ découle de la continuité de ℓ et du fait que $\exp' = \exp$ ne s'annule jamais). Donc $\ell'(z) = 1/\exp(\ell(z)) = 1/z$.

(ii) Si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux branches, alors $\exp(\ell_1(z) - \ell_2(z)) = z/z = 1$, donc $\ell_1(z) - \ell_2(z) \in 2\pi i\mathbb{Z}$ pour tout z . Par continuité et connexité de Ω , cette différence est constante.

(iii) De $\exp(\ell(z)) = z$, on tire $|\exp(\ell(z))| = |z|$, d'où $e^{\text{Re}(\ell(z))} = |z|$, soit $\text{Re}(\ell(z)) = \ln|z|$. La partie imaginaire $\theta(z) = \text{Im}(\ell(z))$ est alors une détermination continue de l'argument. $\square$

Théorème 3.18 (Existence d'une branche du logarithme). Soit $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un ouvert simplement connexe. Alors il existe une branche du logarithme sur Ω .

Démonstration. Fixons $z_0 \in \Omega$ et choisissons $w_0 \in \mathbb{C}$ tel que $e^{w_0} = z_0$. Puisque Ω est simplement connexe et $1/z$ est holomorphe sur Ω (car $0 \notin \Omega$), la fonction $1/z$ admet une primitive sur Ω (par le théorème de Cauchy pour les domaines simplement connexes). Posons

$$\ell(z) = w_0 + \int_{z_0}^z \frac{1}{\zeta} d\zeta,$$

l'intégrale étant calculée le long de n'importe quel chemin dans Ω reliant z_0 à z (le résultat ne dépend pas du chemin par simple connexité). Alors $\ell'(z) = 1/z$. Considérons $g(z) = z \exp(-\ell(z))$. On a

$$g'(z) = \exp(-\ell(z)) + z \cdot (-\ell'(z)) \exp(-\ell(z)) = \exp(-\ell(z))(1 - z/z) = 0.$$

Donc g est constante sur Ω : $g(z) = g(z_0) = z_0 e^{-w_0} = 1$. Ainsi $\exp(\ell(z)) = z$ pour tout $z \in \Omega$. $\square$

Exemple 3.19 (Branche du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$). On peut définir une branche du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ en prenant

$$\ell(z) = \ln |z| + i\theta(z), \quad \theta(z) \in (0, 2\pi).$$

Cette branche est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$, et sa partie imaginaire prend ses valeurs dans $(0, 2\pi)$ au lieu de $(-\pi, \pi)$ pour Log . Par exemple, $\ell(-1) = \ln 1 + i\pi = i\pi$ et $\ell(-i) = \ln 1 + i\frac{3\pi}{2} = \frac{3i\pi}{2}$, alors que $\text{Log}(-i) = -\frac{i\pi}{2}$.

3.3.4 Intuition sur les surfaces de Riemann

Le logarithme complexe est intrinsèquement multivalué : à chaque $z \neq 0$ correspond une infinité de valeurs $\ln |z| + i(\text{Arg}(z) + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Pour rendre le logarithme uniforme, Riemann a proposé de remplacer le plan $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ par une *surface de Riemann* sur laquelle les différentes déterminations se « raccordent » de manière naturelle.

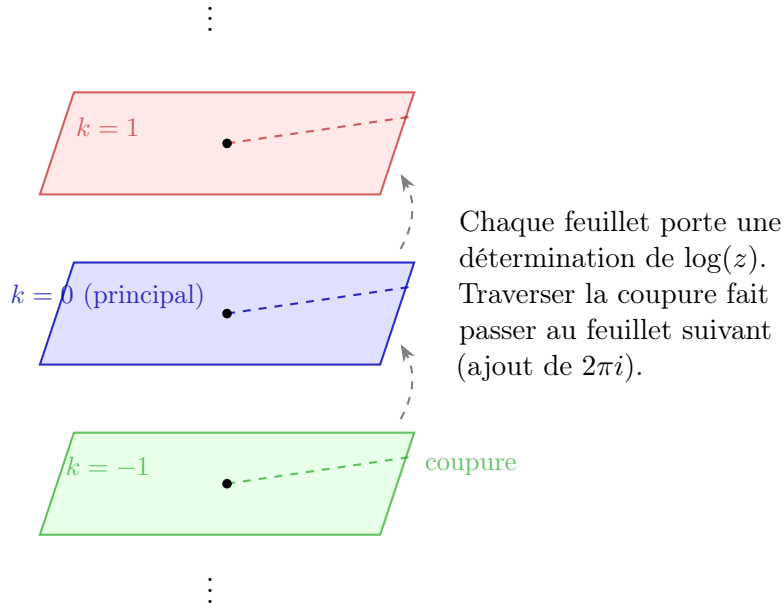


FIGURE 3.3 – Intuition de la surface de Riemann du logarithme : une infinité de feuillets, chacun portant une branche, raccordés le long de la coupure.

Remarque 3.20. La surface de Riemann de $\log$ est un revêtement universel de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. C'est une surface connexe, simplement connexe, homéomorphe à $\mathbb{C}$, sur laquelle le logarithme devient une bijection holomorphe. Le point $z = 0$ est un *point de branchement* : en tournant autour de 0, on passe d'un feuillet au suivant. L'étude rigoureuse des surfaces de Riemann dépasse le cadre de ce cours, mais cette vision géométrique éclaire la nature multivaluée du logarithme.

3.4 Puissances complexes

Définition 3.21 (Puissance complexe). Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, on définit la *puissance complexe* (multivaluée)

$$z^\alpha = \exp(\alpha \log z) = \exp(\alpha(\ln |z| + i \arg(z))).$$

La *détermination principale* de z^α est

$$z_{\text{princ}}^\alpha = \exp(\alpha \operatorname{Log} z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}.$$

Remarque 3.22. Les différentes valeurs de z^α sont

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log}(z)} \cdot e^{2k\pi i \alpha}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- Si $\alpha = n \in \mathbb{Z}$, alors $e^{2k\pi i n} = 1$ pour tout k , donc z^n est univaluée (comme attendu).
- Si $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$ (fraction irréductible, $q \geq 2$), alors $e^{2k\pi i p/q}$ prend exactement q valeurs distinctes. On retrouve les q racines q -ièmes.
- Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, alors $e^{2k\pi i \alpha}$ prend une infinité de valeurs distinctes.

Proposition 3.23 (Holomorphie de la puissance principale). *Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, la détermination principale $z \mapsto \exp(\alpha \operatorname{Log} z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$, et*

$$\frac{d}{dz} [\exp(\alpha \operatorname{Log} z)] = \frac{\alpha}{z} \exp(\alpha \operatorname{Log} z) = \alpha z^{\alpha-1},$$

où $z^{\alpha-1}$ désigne la détermination principale.

Démonstration. C'est la composée de fonctions holomorphes : $z \mapsto \operatorname{Log} z \mapsto \alpha \operatorname{Log} z \mapsto \exp(\alpha \operatorname{Log} z)$. Par la règle de la chaîne,

$$\frac{d}{dz} \exp(\alpha \operatorname{Log} z) = \exp(\alpha \operatorname{Log} z) \cdot \alpha \cdot \frac{1}{z} = \frac{\alpha}{z} \exp(\alpha \operatorname{Log} z).$$

Or $\exp(\alpha \operatorname{Log} z)/z = \exp(\alpha \operatorname{Log} z) \cdot \exp(-\operatorname{Log} z) = \exp((\alpha - 1) \operatorname{Log} z) = z^{\alpha-1}$. $\square$

Exemple 3.24 (Calcul de i^i). On cherche toutes les valeurs de i^i . On a

$$i^i = \exp(i \log i) = \exp\left(i \left(\ln 1 + i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{2} - 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Toutes les valeurs sont donc *réelles et positives*. La valeur principale (correspondant à $k = 0$) est

$$i_{\text{princ}}^i = e^{-\pi/2} \approx 0,2079.$$

C'est un résultat remarquable d'Euler : i^i est un nombre réel.

Exemple 3.25 (Calcul de $(-1)^{\sqrt{2}}$). Les valeurs de $(-1)^{\sqrt{2}}$ sont

$$(-1)^{\sqrt{2}} = \exp(\sqrt{2} \log(-1)) = \exp(\sqrt{2} i(2k+1)\pi) = e^{i(2k+1)\sqrt{2}\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel, les nombres $(2k+1)\sqrt{2}$ sont tous distincts modulo 2, donc les valeurs de $(-1)^{\sqrt{2}}$ forment un sous-ensemble dense du cercle unité $\mathbb{T}$.

Exemple 3.26 (Racine carrée principale). La détermination principale de $z^{1/2}$ est

$$z^{1/2} = \exp\left(\frac{1}{2} \text{Log } z\right) = \exp\left(\frac{1}{2} \ln |z| + \frac{i}{2} \text{Arg}(z)\right) = \sqrt{|z|} e^{i \text{Arg}(z)/2}.$$

C'est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$, dont la dérivée est $\frac{1}{2} z^{-1/2}$.

Par exemple, $(-4)^{1/2}$ au sens de la valeur principale n'est pas défini (car $-4 \in \mathbb{R}_{\leq 0}$), mais au sens multivalué on a $(-4)^{1/2} = \pm 2i$.

Exemple 3.27 (Fonction $z^{1/3}$). Les trois valeurs de $z^{1/3}$ pour $z = -8$ sont

$$(-8)^{1/3} = \exp\left(\frac{1}{3} \log(-8)\right) = \exp\left(\frac{1}{3} (\ln 8 + i(2k+1)\pi)\right) = 2 \exp\left(\frac{i(2k+1)\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Cela donne :

- $k = 0 : 2e^{i\pi/3} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3},$
- $k = 1 : 2e^{i\pi} = -2,$
- $k = 2 : 2e^{i5\pi/3} = 1 - i\sqrt{3}.$

La racine cubique réelle -2 est bien l'une des trois déterminations.

3.5 Fonctions trigonométriques complexes

3.5.1 Définitions via l'exponentielle

Définition 3.28 (Cosinus et sinus complexes). Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Définition 3.29 (Tangente et cotangente complexes). Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\cos z \neq 0$ (resp. $\sin z \neq 0$),

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Théorème 3.30 (Propriétés des fonctions trigonométriques complexes).

(i) **Holomorphie.** $\cos$ et $\sin$ sont des fonctions entières, avec

$$\cos'(z) = -\sin(z), \quad \sin'(z) = \cos(z).$$

(ii) **Formule d'Euler.** Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

(iii) **Identité fondamentale.** $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

(iv) **Périodicité.** $\cos$ et $\sin$ sont 2π -périodiques.

(v) **Zéros.** $\cos z = 0 \iff z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) et $\sin z = 0 \iff z = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

(vi) **Formules d'addition.** Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \cos(z+w) &= \cos z \cos w - \sin z \sin w, \\ \sin(z+w) &= \sin z \cos w + \cos z \sin w. \end{aligned}$$

(vii) **Non-bornitude.** Contrairement au cas réel, $\cos$ et $\sin$ ne sont pas bornées sur $\mathbb{C}$.

Démonstration. (i) La dérivation de $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ donne $\cos'(z) = (ie^{iz} - ie^{-iz})/2 = -\sin z$. De même pour $\sin$.

$$(ii) \cos z + i \sin z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} + i \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} + \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = e^{iz}.$$

$$(iii) \cos^2 z + \sin^2 z = \frac{(e^{iz} + e^{-iz})^2}{4} + \frac{(e^{iz} - e^{-iz})^2}{-4} = \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} + \frac{-(e^{2iz} - 2 + e^{-2iz})}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

$$(iv) \text{ Découle de la } 2\pi i\text{-périodicité de } \exp : \cos(z+2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z.$$

(v) $\sin z = 0 \iff e^{iz} = e^{-iz} \iff e^{2iz} = 1 \iff 2iz \in 2\pi i\mathbb{Z} \iff z \in \pi\mathbb{Z}$. Pour $\cos z = 0$, on utilise $\cos z = \sin(z + \pi/2)$.

(vi) Calcul direct à partir des exponentielles et de la propriété fonctionnelle.

(vii) On a $\sin(iy) = \frac{e^{-y} - e^y}{2i} = \frac{i(e^y - e^{-y})}{2} = i \sinh y$. Quand $y \rightarrow +\infty$, $|\sin(iy)| = \sinh y \rightarrow +\infty$. $\square$

Proposition 3.31 (Parties réelle et imaginaire). Pour $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y, \quad (3.1)$$

$$\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y. \quad (3.2)$$

En conséquence :

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y, \quad |\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y.$$

Démonstration. Par les formules d'addition :

$$\cos(x + iy) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy).$$

Or $\cos(iy) = \frac{e^{-y} + e^y}{2} = \cosh y$ et $\sin(iy) = \frac{e^{-y} - e^y}{2i} = i \sinh y$. D'où le résultat pour le cosinus ; le cas du sinus est analogue.

Pour les modules, $|\cos z|^2 = \cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y = \cos^2 x (1 + \sinh^2 y) + \sin^2 x \sinh^2 y = \cos^2 x + \sinh^2 y$. $\square$

Remarque 3.32. La formule $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$ montre que sur la droite $x = \pi/2$ (i.e. $z = \pi/2 + iy$), $|\cos z| = \sinh |y|$, qui croît exponentiellement. Les fonctions trigonométriques complexes sont non bornées et prennent toutes les valeurs complexes (sauf peut-être une, par le petit théorème de Picard).

3.6 Fonctions hyperboliques complexes

Définition 3.33 (Cosinus et sinus hyperboliques). Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

De même, $\tanh z = \sinh z / \cosh z$ pour $\cosh z \neq 0$.

Théorème 3.34 (Propriétés des fonctions hyperboliques).

- (i) $\cosh$ et $\sinh$ sont des fonctions entières, avec $\cosh'(z) = \sinh(z)$ et $\sinh'(z) = \cosh(z)$.
- (ii) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.
- (iii) $\cosh$ et $\sinh$ sont $2\pi i$ -périodiques.
- (iv) $\cosh z = 0 \iff z = i(\pi/2 + k\pi)$ et $\sinh z = 0 \iff z = ik\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Les preuves sont analogues à celles du effhm :proprietes-trig, en utilisant les définitions exponentielles.

$$(ii) \cosh^2 z - \sinh^2 z = \frac{(e^z + e^{-z})^2 - (e^z - e^{-z})^2}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

$$(iv) \sinh z = 0 \iff e^z = e^{-z} \iff e^{2z} = 1 \iff z \in i\pi\mathbb{Z}. \quad \square$$

3.7 Lien entre fonctions trigonométriques et hyperboliques

Théorème 3.35 (Relations fondamentales). *Pour tout $z \in \mathbb{C}$:*

$$\cos(iz) = \cosh(z), \quad (3.3)$$

$$\sin(iz) = i \sinh(z), \quad (3.4)$$

$$\cosh(iz) = \cos(z), \quad (3.5)$$

$$\sinh(iz) = i \sin(z). \quad (3.6)$$

Démonstration. Calcul direct :

$$\cos(iz) = \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = \frac{e^{-z} + e^z}{2} = \cosh z.$$

$$\sin(iz) = \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^z}{2i} = \frac{-(e^z - e^{-z})}{2i} = \frac{i(e^z - e^{-z})}{2} = i \sinh z.$$

Les deux autres s'obtiennent en substituant iz par z dans les premières. $\square$

Remarque 3.36. Ces relations montrent que la distinction entre fonctions trigonométriques et hyperboliques disparaît dans le cadre complexe : les deux familles ne sont que des « rotations » l'une de l'autre dans le plan complexe. C'est l'une des simplifications conceptuelles majeures apportées par l'analyse complexe.

Corollaire 3.37 (Formules d'Euler généralisées). *Pour tout $z \in \mathbb{C}$:*

$$e^z = \cosh z + \sinh z, \quad e^{-z} = \cosh z - \sinh z.$$

Plus généralement, pour $z = x + iy$:

$$e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y = (\cosh x + \sinh x)(\cos y + i \sin y).$$

Démonstration. La première ligne découle de $\cosh z + \sinh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} + \frac{e^z - e^{-z}}{2} = e^z$. La seconde est la définition de $\exp$. $\square$

3.8 Tableau récapitulatif

Le tableau suivant résume les principales propriétés des fonctions élémentaires.

Fonction	Domaine	Période	Zéros	Dérivée
e^z	$\mathbb{C}$	$2\pi i$	aucun	e^z
$\text{Log } z$	$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$	—	$z = 1$	$1/z$
z^α (princ.)	$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$	—	aucun ($\alpha \neq 0$)	$\alpha z^{\alpha-1}$
$\cos z$	$\mathbb{C}$	2π	$\frac{\pi}{2} + k\pi$	$-\sin z$
$\sin z$	$\mathbb{C}$	2π	$k\pi$	$\cos z$
$\cosh z$	$\mathbb{C}$	$2\pi i$	$i(\frac{\pi}{2} + k\pi)$	$\sinh z$
$\sinh z$	$\mathbb{C}$	$2\pi i$	$ik\pi$	$\cosh z$

3.9 Exemples détaillés

Exemple 3.38 (Détermination de branches sur un domaine à trou). Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$ la couronne ouverte centrée à l'origine. Ce domaine n'est *pas* simplement connexe (le cercle $|z| = 2$ n'est pas contractible dans Ω). En conséquence, il n'existe pas de branche du logarithme sur Ω tout entier.

En effet, supposons qu'une telle branche ℓ existe. Alors $\ell'(z) = 1/z$ et

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{z} dz = \int_{|z|=2} \ell'(z) dz = \ell(z) \Big|_{\text{tour complet}} = 0,$$

car ℓ est univaluée. Or, par calcul direct, $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0$. Contradiction.

En revanche, si l'on coupe la couronne le long d'un rayon, par exemple $\Omega' = \Omega \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$, le domaine obtenu est simplement connexe et admet des branches du logarithme.

Exemple 3.39 (Calcul de $(1+i)^{3-i}$). Calculons la valeur principale de $(1+i)^{3-i}$.

Étape 1 : $\text{Log}(1+i)$. $|1+i| = \sqrt{2}$, $\text{Arg}(1+i) = \pi/4$. Donc $\text{Log}(1+i) = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{i\pi}{4}$.

Étape 2 : $\alpha \text{Log } z$. $(3-i) \text{Log}(1+i) = (3-i) \left(\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{i\pi}{4} \right)$.

Développons :

$$\begin{aligned} (3-i) \left(\frac{\ln 2}{2} + \frac{i\pi}{4} \right) &= \frac{3 \ln 2}{2} + \frac{3i\pi}{4} - \frac{i \ln 2}{2} - \frac{i^2 \pi}{4} \\ &= \left(\frac{3 \ln 2}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + i \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} \right). \end{aligned}$$

Étape 3 : Exponentielle.

$$(1+i)^{3-i}_{\text{princ}} = \exp \left[\left(\frac{3 \ln 2}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + i \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} \right) \right].$$

Le module est $\exp\left(\frac{3 \ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 2^{3/2} e^{\pi/4} \approx 6,168$.

L'argument est $\frac{3\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} \approx 2,009$ radians.

Exemple 3.40 (Résolution de $\cos z = 2$). Résolvons $\cos z = 2$. On a

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2, \quad \text{soit} \quad e^{iz} + e^{-iz} = 4.$$

En posant $w = e^{iz}$, on obtient $w + w^{-1} = 4$, soit $w^2 - 4w + 1 = 0$. Le discriminant est $16 - 4 = 12$, d'où

$$w = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Les deux valeurs sont réelles positives. Alors $e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3}$, d'où $iz = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi i$, et finalement

$$z = 2k\pi - i \ln(2 \pm \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Puisque $2 - \sqrt{3} = 1/(2 + \sqrt{3})$, on a $\ln(2 - \sqrt{3}) = -\ln(2 + \sqrt{3})$, et les solutions se réduisent à

$$z = 2k\pi \pm i \ln(2 + \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Remarquons que toutes ces solutions sont non réelles, confirmant que $\cos$ prend des valeurs en dehors de $[-1, 1]$ pour des arguments complexes.

Exemple 3.41 (Résolution de $\sinh z = i$). On résout $\sinh z = i$, c'est-à-dire $\frac{e^z - e^{-z}}{2} = i$. En posant $w = e^z$, on obtient $w - w^{-1} = 2i$, soit $w^2 - 2iw - 1 = 0$. Le discriminant est $-4 + 4 = 0$, donc $w = i$ (racine double). Alors $e^z = i$, d'où

$$z = \log(i) = i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3.10 Transformations géométriques

Proposition 3.42 (Image du demi-plan par $\sin$). *La fonction $\sin$ envoie la bande $\{z \in \mathbb{C} : -\pi/2 < \operatorname{Re}(z) < \pi/2\}$ bijectivement sur $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$.*

Démonstration. Posons $z = x + iy$ avec $-\pi/2 < x < \pi/2$ et $y \in \mathbb{R}$. Par la

efprop :trig-re-im,

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$

Soit $w = u + iv$ l'image. Alors $u = \sin x \cosh y$ et $v = \cos x \sinh y$.

Pour $y \neq 0$, on peut écrire

$$\frac{u^2}{\cosh^2 y} + \frac{v^2}{\sinh^2 y} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

c'est-à-dire que les images des droites horizontales $\operatorname{Im}(z) = y_0$ (avec $y_0 \neq 0$, $-\pi/2 < \operatorname{Re}(z) < \pi/2$) sont des demi-ellipses.

De même, pour x fixé avec $-\pi/2 < x < \pi/2$ et $x \neq 0$,

$$\frac{u^2}{\sin^2 x} - \frac{v^2}{\cos^2 x} = \cosh^2 y - \sinh^2 y = 1,$$

donc les images des droites verticales sont des branches d'hyperboles.

L'injectivité se vérifie par un argument d'unicité, et la surjectivité par résolution de $\sin z = w$ pour $w \notin (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. $\square$

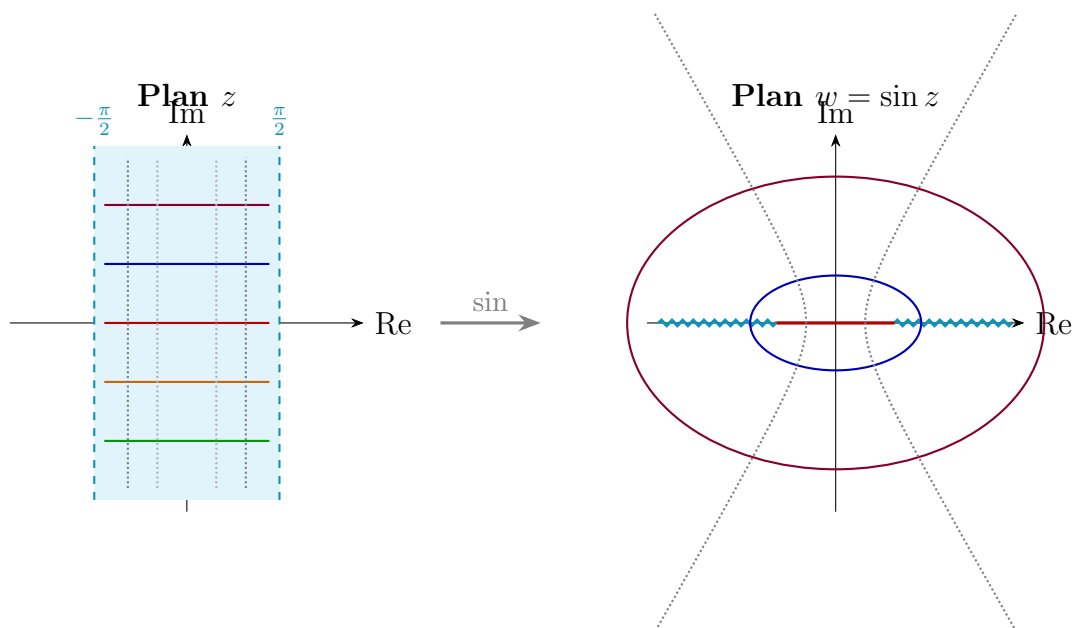


FIGURE 3.4 – Image de la bande $\{-\pi/2 < \operatorname{Re}(z) < \pi/2\}$ par $\sin$. Les droites horizontales deviennent des ellipses, les droites verticales des hyperboles.

3.11 Compléments sur les branches

Définition 3.43 (Branche d'une puissance). Soit $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un ouvert connexe et $\alpha \in \mathbb{C}$. Une *branche de z^α* sur Ω est une fonction continue $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ telle qu'il existe une branche du logarithme ℓ sur Ω avec

$$f(z) = \exp(\alpha \ell(z)) \quad \text{pour tout } z \in \Omega.$$

Proposition 3.44 (Branches de la racine carrée). Soit $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un ouvert simplement connexe. Alors il existe exactement deux branches de $z^{1/2}$ sur Ω , et elles sont opposées l'une de l'autre.

Démonstration. Par le thm :existence-branche-log, il existe une branche du logarithme ℓ sur Ω . Les branches de $z^{1/2}$ sont $f_k(z) = \exp(\frac{1}{2}(\ell(z) + 2k\pi i))$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Or $\exp(\frac{1}{2} \cdot 2k\pi i) = \exp(k\pi i) = (-1)^k$. Donc $f_k = f_0$ si k est pair, et $f_k = -f_0$ si k est impair. Il n'y a que deux branches distinctes : f_0 et $-f_0$. $\square$

Exemple 3.45 (Branche de $\sqrt{z^2 - 1}$). Considérons la fonction multivaluée $\sqrt{z^2 - 1} = \sqrt{(z-1)(z+1)}$. Les points de branchement sont $z = 1$ et $z = -1$. On peut choisir comme coupure le segment $[-1, 1]$ sur l'axe réel. Sur le domaine $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, qui est simplement connexe, il existe deux branches de $\sqrt{z^2 - 1}$, holomorphes sur Ω . La branche principale est déterminée par la condition que $\sqrt{z^2 - 1} > 0$ pour $z > 1$.

réel. On peut l'écrire

$$\sqrt{z^2 - 1} = \exp\left(\frac{1}{2} \operatorname{Log}(z^2 - 1)\right),$$

mais cette formule n'est valable que pour $z^2 - 1 \notin \mathbb{R}_{\leq 0}$. Une écriture plus correcte est

$$\sqrt{z^2 - 1} = \exp\left(\frac{1}{2}(\ell_1(z - 1) + \ell_2(z + 1))\right),$$

où ℓ_1 et ℓ_2 sont des branches du logarithme convenablement choisies sur Ω , compatibles avec la coupure $[-1, 1]$.

3.12 Exercices

Exercice 3.1 (Calculs élémentaires). Calculer :

- (a) $e^{2+i\pi/3}$, $e^{-1+3\pi i}$, $e^{i\pi/6}$.
- (b) $\operatorname{Log}(2i)$, $\operatorname{Log}(-3)$, $\operatorname{Log}(1 - i)$.
- (c) Toutes les valeurs de $\log(-2i)$.

Exercice 3.2 (Équations exponentielles). Résoudre dans $\mathbb{C}$:

- (a) $e^z = 1 + i\sqrt{3}$.
- (b) $e^z = -e$.
- (c) $e^{2z} - 3e^z + 2 = 0$.

Exercice 3.3 (Puissances complexes). (a) Calculer toutes les valeurs de 2^i . Sont-elles réelles ?

- (b) Déterminer la valeur principale de $(1 - i)^{1+i}$.
- (c) Montrer que $i^i = e^{-\pi/2}$ est la valeur principale et que toutes les valeurs sont réelles.
- (d) Trouver toutes les valeurs de $(-1)^i$.

Exercice 3.4 (Équations trigonométriques). Résoudre dans $\mathbb{C}$:

- (a) $\sin z = 3$.
- (b) $\cos z = i$.
- (c) $\cosh z = 0$.
- (d) $\tan z = 2i$.

Exercice 3.5 (Images géométriques). (a) Déterminer l'image par $\exp$ de la bande $\{z : 0 < \operatorname{Im}(z) < \pi/4\}$.

- (b) Déterminer l'image par $\exp$ du rectangle $\{z : -1 < \operatorname{Re}(z) < 1, \pi/2 < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$.
- (c) Quelle est l'image du demi-plan $\operatorname{Re}(z) > 0$ par $z \mapsto \operatorname{Log} z$?
- (d) Déterminer l'image du disque $|z - 1| < 1$ par Log .

Exercice 3.6 (Identités). Démontrer les identités suivantes pour tous $z, w \in \mathbb{C}$:

- (a) $\cos^2 z = \frac{1+\cos 2z}{2}$, $\sin^2 z = \frac{1-\cos 2z}{2}$.
- (b) $\cosh^2 z = \frac{1+\cosh 2z}{2}$, $\sinh^2 z = \frac{\cosh 2z - 1}{2}$.

- (c) $\sin(iz) = i \sinh z$ et $\cos(iz) = \cosh z$.
 (d) $|\sin z|^2 + |\cos z|^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2y + 1)$ où $y = \operatorname{Im}(z)$.

Exercice 3.7 (Propriété du logarithme). (a) Trouver des $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tels que $\operatorname{Log}(z_1 z_2) \neq \operatorname{Log}(z_1) + \operatorname{Log}(z_2)$.

- (b) Montrer que $\operatorname{Log}(z_1 z_2) = \operatorname{Log}(z_1) + \operatorname{Log}(z_2) + 2k\pi i$ pour un unique $k \in \{-1, 0, 1\}$.
 (c) La formule $\operatorname{Log}(z^2) = 2\operatorname{Log}(z)$ est-elle toujours vraie ? Trouver un contre-exemple.

Exercice 3.8 (Branches du logarithme). (a) Montrer qu'il n'existe pas de branche continue du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- (b) Soit $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$. Construire explicitement une branche du logarithme sur Ω dont la partie imaginaire prend ses valeurs dans $(0, 2\pi)$.
 (c) Soit $\Omega = \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_{\geq 0}$ (on retire la demi-droite imaginaire positive). Construire une branche du logarithme sur Ω .

Exercice 3.9 (Non-existence de branche sur une couronne). Soit $A = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ avec $0 < r < R$.

- (a) Montrer qu'il n'existe pas de branche du logarithme sur A .
 (b) En déduire qu'il n'existe pas de branche de $z^{1/n}$ ($n \geq 2$) sur A .
 (c) Montrer qu'en revanche, il existe une branche holomorphe de z^2 sur A (triviale : $z \mapsto z^2$).

Exercice 3.10 (Calcul de $(\sqrt{3} + i)^{10}$). (a) Écrire $\sqrt{3} + i$ sous forme exponentielle.

- (b) En déduire $(\sqrt{3} + i)^{10}$ sans utiliser le binôme de Newton.
 (c) Retrouver le résultat en utilisant le logarithme principal.

Exercice 3.11 (Application conforme de l'exponentielle). (a) Montrer que $\exp$ est une application conforme (holomorphe et injective) de la bande $S = \{z : 0 < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$ sur le demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{w : \operatorname{Im}(w) > 0\}$.

- (b) En déduire que Log est une application conforme de $\mathbb{H}$ sur S .
 (c) Déterminer les images par $\exp$ des côtés du rectangle $\{z : a < \operatorname{Re}(z) < b, 0 < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$.

Exercice 3.12 (Fonction z^z). On considère $f(z) = z^z = \exp(z \operatorname{Log} z)$, définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ par la branche principale.

- (a) Calculer $f'(z)$.
 (b) Déterminer $f(i)$, $f(-i)$ (valeurs principales seulement, en écrivant soigneusement les étapes).
 (c) Montrer que $|f(e^{i\theta})| = e^{-\theta}$ pour $\theta \in (-\pi, \pi)$.

Chapitre 4

Intégration Complexe — Théorème de Cauchy

4.1 Introduction

L'intégration complexe constitue le cœur de l'analyse complexe. Alors qu'en analyse réelle l'intégrale d'une fonction sur un intervalle ne dépend que des bornes, dans le plan complexe l'intégrale dépend *a priori* du chemin suivi entre deux points. Le théorème de Cauchy affirme que, sous des hypothèses convenables d'holomorphicité et de topologie du domaine, cette dépendance disparaît : l'intégrale d'une fonction holomorphe le long d'un lacet est nulle. Ce résultat, d'apparence simple, a des conséquences profondes que nous développerons dans les chapitres suivants.

Ce chapitre s'organise comme suit. Nous commençons par la notion de chemin et d'intégrale curviligne complexe (§4.2–§4.3), puis nous établissons les résultats fondamentaux : le lemme de Goursat (§4.6), le théorème de Cauchy sous ses différentes formes (§4.7–§4.10), la notion d'indice (§4.11), et enfin la version générale du théorème de Cauchy (§4.12).

4.2 Chemins dans le plan complexe

Définition 4.1 (Chemin). Un **chemin** (ou **arc paramétré**) dans $\mathbb{C}$ est une application continue $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, où $[a, b]$ est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. On appelle $\gamma(a)$ le **point initial** et $\gamma(b)$ le **point terminal** du chemin. L'**image** (ou **trace**) de γ est l'ensemble

$$\gamma^* = \gamma([a, b]) = \{\gamma(t) : t \in [a, b]\} \subset \mathbb{C}.$$

Définition 4.2 (Chemin lisse, lisse par morceaux). Un chemin $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est dit :

- (i) **lisse** (ou **régulier**) s'il est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et si $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a, b]$;
- (ii) **lisse par morceaux** s'il existe une subdivision $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ telle que la restriction $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ soit lisse pour chaque $k \in \{1, \dots, n\}$.

Définition 4.3 (Lacet). Un chemin $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est un **lacet** (ou **courbe fermée**) si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Définition 4.4 (Lacet simple). Un lacet $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est dit **simple** (ou **courbe de Jordan**) s'il est injectif sur $[a, b)$, c'est-à-dire si $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ avec $t_1, t_2 \in [a, b)$ implique $t_1 = t_2$.

Définition 4.5 (Chemin inverse, concaténation). Soit $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin.

(i) Le **chemin inverse** γ^- est défini par

$$\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t), \quad t \in [a, b].$$

Il parcourt la même trace que γ mais en sens opposé.

(ii) Si $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ et $\gamma_2: [b, c] \rightarrow \mathbb{C}$ sont deux chemins tels que $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, la **concaténation** $\gamma_1 + \gamma_2: [a, c] \rightarrow \mathbb{C}$ est définie par

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } t \in [a, b], \\ \gamma_2(t) & \text{si } t \in [b, c]. \end{cases}$$

Exemple 4.6 (Cercle de centre z_0 et rayon r). Le chemin canonique du cercle de centre $z_0 \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$, parcouru dans le sens trigonométrique, est

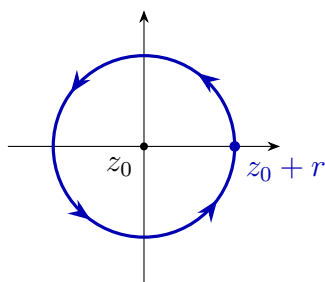
$$\gamma(t) = z_0 + re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

C'est un lacet simple lisse. Sa trace est le cercle $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$.

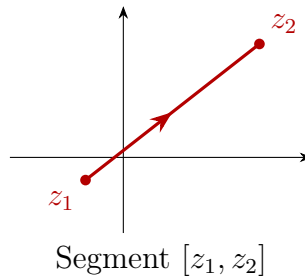
Exemple 4.7 (Segment de droite). Le segment de z_1 à z_2 ($z_1 \neq z_2$) est paramétré par

$$\gamma(t) = (1 - t)z_1 + tz_2 = z_1 + t(z_2 - z_1), \quad t \in [0, 1].$$

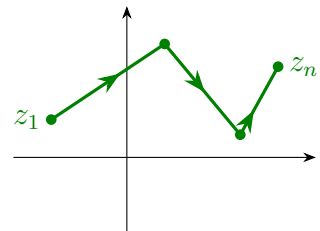
On note parfois ce chemin $[z_1, z_2]$.



Cercle $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$



Segment $[z_1, z_2]$



Chemin lisse par morceaux

FIGURE 4.1 – Exemples de chemins dans le plan complexe.

Définition 4.8 (Longueur d'un chemin). La **longueur** d'un chemin lisse par morceaux $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt.$$

4.3 Intégrale curviligne complexe

Définition 4.9 (Intégrale le long d'un chemin). Soit $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin lisse par morceaux et soit $f: \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. L'**intégrale curviligne** de f le long de γ est

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt.$$

Si γ est seulement lisse par morceaux (avec subdivision $a = t_0 < \dots < t_n = b$), on pose

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt.$$

Remarque 4.10. L'intégrale $\int_{\gamma} f(z) \, dz$ ne dépend pas du paramétrage choisi pour le chemin, tant que l'orientation est préservée. Si $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ est un difféomorphisme croissant de classe $\mathcal{C}^1$, et $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$, alors $\int_{\tilde{\gamma}} f(z) \, dz = \int_{\gamma} f(z) \, dz$.

Proposition 4.11 (Propriétés de l'intégrale curviligne). Soient γ un chemin lisse par morceaux et f, g continues sur γ^* .

(i) **Linéarité.** Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\int_{\gamma} [\alpha f(z) + \beta g(z)] \, dz = \alpha \int_{\gamma} f(z) \, dz + \beta \int_{\gamma} g(z) \, dz.$$

(ii) **Chemin inverse.** $\int_{\gamma^-} f(z) \, dz = - \int_{\gamma} f(z) \, dz$.

(iii) **Concaténation.** Si $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, alors

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = \int_{\gamma_1} f(z) \, dz + \int_{\gamma_2} f(z) \, dz.$$

Démonstration. (i) Résulte directement de la linéarité de l'intégrale réelle.

(ii) Posons $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ et $\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t)$. Alors $(\gamma^-)'(t) = -\gamma'(a + b - t)$ et

$$\begin{aligned} \int_{\gamma^-} f(z) \, dz &= \int_a^b f(\gamma(a + b - t)) (-\gamma'(a + b - t)) \, dt \\ &= - \int_a^b f(\gamma(a + b - t)) \gamma'(a + b - t) \, dt. \end{aligned}$$

Le changement de variable $u = a + b - t$ ($du = -dt$) donne

$$= - \int_b^a f(\gamma(u)) \gamma'(u) (-du) = - \int_a^b f(\gamma(u)) \gamma'(u) du = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

(iii) Découle immédiatement de l'additivité de l'intégrale sur les sous-intervalles. $\square$

Théorème 4.12 (Inégalité ML). *Soit γ un chemin lisse par morceaux de longueur $\ell(\gamma)$ et f continue sur γ^* . Posons $M = \sup_{z \in \gamma^*} |f(z)|$. Alors*

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot \ell(\gamma).$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt \\ &\leq M \int_a^b |\gamma'(t)| dt = M \cdot \ell(\gamma). \end{aligned} \quad \square$$

Remarque 4.13. L'inégalité ML est l'un des outils les plus utilisés en analyse complexe pour majorer des intégrales. Elle est particulièrement utile pour montrer que certaines intégrales tendent vers zéro lorsque le rayon d'un cercle tend vers l'infini (ou vers zéro).

4.4 Exemples fondamentaux

Les calculs suivants sont à la base de toute la théorie.

Proposition 4.14 (Intégrale de z^n sur un cercle). *Soit $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, le cercle de centre z_0 et de rayon $r > 0$ parcouru dans le sens positif. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$,*

$$\int_{\gamma} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } n = -1, \\ 0 & \text{si } n \neq -1. \end{cases}$$

Démonstration. On paramétrise par $z = z_0 + re^{it}$, $dz = ire^{it} dt$, et $(z - z_0)^n = r^n e^{int}$. Donc

$$\int_{\gamma} (z - z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} r^n e^{int} \cdot ire^{it} dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt.$$

Cas $n = -1$. On obtient $ir^0 \int_0^{2\pi} e^0 dt = i \cdot 2\pi = 2\pi i$.

Cas $n \neq -1$. On a $n + 1 \neq 0$, et

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = \left[\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \right]_0^{2\pi} = \frac{e^{2\pi i(n+1)} - 1}{i(n+1)} = \frac{1 - 1}{i(n+1)} = 0,$$

car $e^{2\pi i(n+1)} = 1$ pour $n + 1 \in \mathbb{Z}$. $\square$

Remarque 4.15. Le cas $n = -1$ est le résultat crucial : c'est la seule puissance de $(z - z_0)$ dont l'intégrale sur un cercle autour de z_0 est non nulle. Ce fait sous-tend toute la théorie des résidus (chapitre 9).

Exemple 4.16 (Intégrale de $\bar{z}$ sur le cercle unité). Soit $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, le cercle unité. On calcule

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} \overline{e^{it}} \cdot ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} e^{-it} \cdot ie^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

On observe que $\bar{z}$ n'est pas holomorphe, et pourtant cette intégrale est non nulle — ce qui est cohérent car le théorème de Cauchy ne s'applique pas aux fonctions non holomorphes.

Exemple 4.17 (Intégrale de $\operatorname{Re}(z)$ sur le cercle unité). Avec le même γ , puisque $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$,

$$\int_{\gamma} \operatorname{Re}(z) dz = \frac{1}{2} \int_{\gamma} z dz + \frac{1}{2} \int_{\gamma} \bar{z} dz = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 2\pi i = \pi i.$$

L'intégrale de $z dz$ sur le cercle unité vaut 0 car z^1 admet la primitive $z^2/2$.

4.5 Primitives et indépendance du chemin

Définition 4.18 (Primitive). Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ continue. Une **primitive** de f sur U est une fonction holomorphe $F: U \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $F'(z) = f(z)$ pour tout $z \in U$.

Théorème 4.19 (Primitive et indépendance du chemin). Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ continue. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f admet une primitive sur U .
- (ii) Pour tout lacet lisse par morceaux γ dans U , $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.
- (iii) L'intégrale $\int_{\gamma} f(z) dz$ ne dépend que des extrémités de γ (et non du chemin lisse par morceaux γ dans U).

De plus, si F est une primitive de f , alors pour tout chemin lisse par morceaux γ de z_1 à z_2 dans U ,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1).$$

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (iii) **et formule.** Supposons que $F' = f$ sur U . Si $\gamma: [a, b] \rightarrow U$

est lisse, la règle de la chaîne donne

$$\frac{d}{dt}[F(\gamma(t))] = F'(\gamma(t)) \gamma'(t) = f(\gamma(t)) \gamma'(t).$$

Donc

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = [F(\gamma(t))]_a^b = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(z_2) - F(z_1).$$

Le cas lisse par morceaux s'obtient par sommation télescopique. L'intégrale ne dépend que de $z_1 = \gamma(a)$ et $z_2 = \gamma(b)$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Si γ est un lacet, $z_1 = z_2$, donc l'intégrale vaut $F(z_1) - F(z_1) = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Fixons $z_0 \in U$. Puisque U est ouvert connexe, pour tout $z \in U$ il existe un chemin lisse par morceaux γ_z de z_0 à z dans U . Posons

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta.$$

La condition (ii) garantit que F est bien définie (indépendante du chemin choisi). Montrons que $F'(z) = f(z)$.

Soit $z \in U$. Puisque U est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $D(z, \delta) \subset U$. Pour $h \in \mathbb{C}$ avec $0 < |h| < \delta$, le segment $[z, z+h]$ est dans U , et

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z, z+h]} f(\zeta) d\zeta.$$

Or, en paramétrant $\zeta = z + th$, $t \in [0, 1]$,

$$\int_{[z, z+h]} f(\zeta) d\zeta = h \int_0^1 f(z + th) dt.$$

Donc

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \int_0^1 [f(z + th) - f(z)] dt.$$

Par continuité de f , pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta' \leq \delta$ tel que $|h| < \delta'$ implique $|f(z + th) - f(z)| < \varepsilon$ pour tout $t \in [0, 1]$. Ainsi

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve que $F'(z) = f(z)$. □

Corollaire 4.20. Pour $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$, la fonction z^n admet la primitive $\frac{z^{n+1}}{n+1}$ sur $\mathbb{C}$ (si $n \geq 0$) ou sur $\mathbb{C}^*$ (si $n \leq -2$). En particulier, $\int_{\gamma} z^n dz = 0$ pour tout lacet γ dans le domaine correspondant. En revanche, $1/z$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$.

Démonstration. Pour $n \neq -1$, on vérifie que $\frac{d}{dz} \frac{z^{n+1}}{n+1} = z^n$. Le théorème 4.19 s'applique. Pour $1/z$, si une primitive existait sur $\mathbb{C}^*$, l'intégrale de $1/z$ sur tout lacet dans $\mathbb{C}^*$ serait nulle. Or, la proposition 4.14 montre que $\int_{\gamma} (1/z) dz = 2\pi i \neq 0$ pour γ le cercle unité. □

4.6 Lemme de Goursat

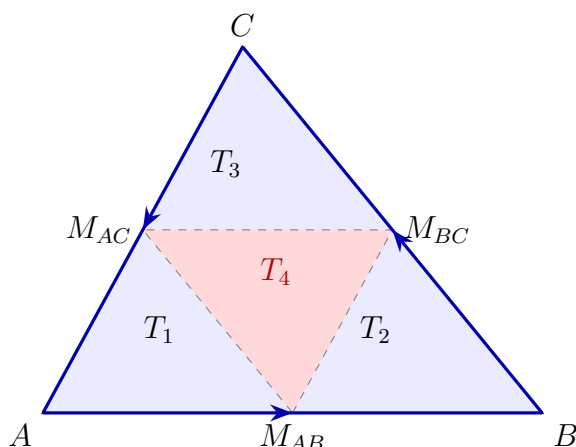
Le lemme de Goursat est un résultat technique fondamental : il établit que l'intégrale d'une fonction holomorphe sur le bord d'un triangle est nulle, *sans* supposer la continuité de la dérivée. Ceci est remarquable car la preuve du théorème de Cauchy via la formule de Green nécessite cette continuité.

Lemme 4.21 (Goursat). *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Soit $T \subset U$ un triangle fermé (c'est-à-dire l'enveloppe convexe de trois points non alignés), avec $T \subset U$. Si ∂T désigne le bord de T parcouru dans le sens positif, alors*

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0.$$

Démonstration. La preuve repose sur un argument de **bissection itérée**.

Étape 1 : Construction par subdivision. Notons $T^{(0)} = T$ et $I_0 = \int_{\partial T^{(0)}} f(z) dz$. En reliant les milieux des trois côtés de $T^{(0)}$, on obtient quatre sous-triangles T_1, T_2, T_3, T_4 (voir figure 4.2).



Les intégrales sur les côtés intérieurs s'annulent deux à deux (parcours opposés).

$$I_0 = \sum_{j=1}^4 \int_{\partial T_j} f(z) dz$$

FIGURE 4.2 – Subdivision d'un triangle dans la preuve du lemme de Goursat.

Les intégrales sur les côtés intérieurs (ceux introduits par la subdivision) s'annulent deux à deux car chaque côté intérieur est parcouru une fois dans chaque sens. Donc

$$I_0 = \int_{\partial T^{(0)}} f(z) dz = \sum_{j=1}^4 \int_{\partial T_j} f(z) dz.$$

Par l'inégalité triangulaire, il existe $j_0 \in \{1, 2, 3, 4\}$ tel que

$$\left| \int_{\partial T_{j_0}} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{4} |I_0|.$$

On pose $T^{(1)} = T_{j_0}$.

Étape 2 : Itération. En itérant ce procédé, on construit une suite de triangles emboîtés $T^{(0)} \supset T^{(1)} \supset T^{(2)} \supset \dots$ tels que, pour tout $k \geq 0$:

$$(a) \left| \int_{\partial T^{(k)}} f(z) dz \right| \geq \frac{|I_0|}{4^k},$$

$$(b) \ell(\partial T^{(k)}) = \frac{\ell(\partial T^{(0)})}{2^k},$$

$$(c) \text{diam}(T^{(k)}) = \frac{\text{diam}(T^{(0)})}{2^k}.$$

Étape 3 : Point limite. Par le théorème des fermés emboîtés, $\bigcap_{k=0}^{\infty} T^{(k)} = \{z_0\}$ pour un certain $z_0 \in T \subset U$. Puisque f est holomorphe en z_0 , on peut écrire

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0) \varphi(z),$$

où $\varphi(z) \rightarrow 0$ quand $z \rightarrow z_0$.

Étape 4 : Majoration. La fonction $z \mapsto f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ est un polynôme de degré ≤ 1 en z , donc elle admet une primitive. Par le théorème 4.19,

$$\int_{\partial T^{(k)}} [f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)] dz = 0.$$

Donc

$$\int_{\partial T^{(k)}} f(z) dz = \int_{\partial T^{(k)}} (z - z_0) \varphi(z) dz.$$

Pour $z \in \partial T^{(k)}$, on a $|z - z_0| \leq \text{diam}(T^{(k)}) = d_0/2^k$ où $d_0 = \text{diam}(T^{(0)})$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe K tel que pour $k \geq K$ et $z \in T^{(k)}$, on a $|\varphi(z)| < \varepsilon$. Par l'inégalité ML,

$$\left| \int_{\partial T^{(k)}} f(z) dz \right| \leq \frac{d_0}{2^k} \cdot \varepsilon \cdot \frac{L_0}{2^k} = \frac{\varepsilon d_0 L_0}{4^k},$$

où $L_0 = \ell(\partial T^{(0)})$. Or, d'après (a), $|I_0|/4^k \leq \left| \int_{\partial T^{(k)}} f(z) dz \right|$. Donc

$$|I_0| \leq \varepsilon d_0 L_0.$$

Comme ceci vaut pour tout $\varepsilon > 0$, on conclut que $I_0 = 0$. □

Remarque 4.22. La force du lemme de Goursat est de ne supposer que l'existence de $f'(z)$, sans supposer la continuité de f' . On sait, grâce au théorème de Looman–Menchov, que cette continuité est en fait automatique, mais la preuve de Goursat est élémentaire et directe.

4.7 Théorème de Cauchy pour les domaines étoilés

Définition 4.23 (Domaine étoilé). Un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ est **étoilé** par rapport à un point $z_0 \in U$ si, pour tout $z \in U$, le segment $[z_0, z]$ est contenu dans U . On dit simplement que U est étoilé s'il est étoilé par rapport à au moins un de ses points.

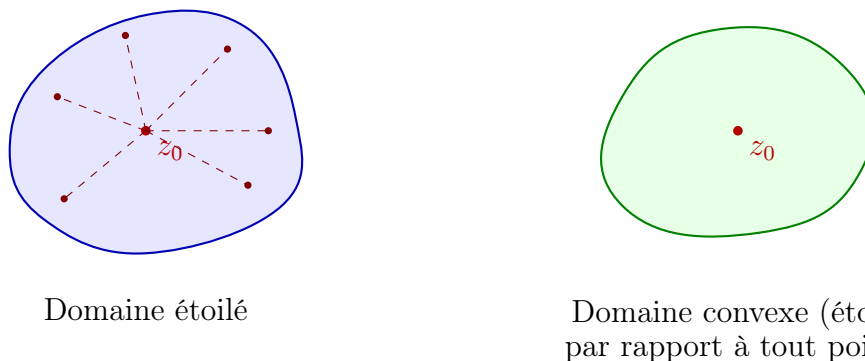


FIGURE 4.3 – Domaine étoilé et domaine convexe.

Théorème 4.24 (Cauchy pour les domaines étoilés). *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert étoilé et $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Alors :*

- (i) *f admet une primitive F sur U .*
- (ii) *Pour tout lacet lisse par morceaux γ dans U , $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.*

Démonstration. Soit $z_0 \in U$ un point par rapport auquel U est étoilé. Pour tout $z \in U$, le segment $[z_0, z]$ est dans U . On définit

$$F(z) = \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta = \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))(z - z_0) dt.$$

Montrons que $F'(z) = f(z)$. Soit $z \in U$ et $h \in \mathbb{C}$ assez petit. Le triangle de sommets $z_0, z, z + h$ est contenu dans U (car U est étoilé par rapport à z_0 , les segments $[z_0, z]$, $[z_0, z + h]$ sont dans U , et par convexité locale le segment $[z, z + h]$ est aussi dans U pour $|h|$ assez petit). Par le lemme de Goursat 4.21,

$$\int_{[z_0, z]} f + \int_{[z, z+h]} f + \int_{[z+h, z_0]} f = 0.$$

Donc

$$F(z + h) - F(z) = \int_{[z_0, z+h]} f - \int_{[z_0, z]} f = \int_{[z, z+h]} f.$$

En paramétrant le segment par $\zeta = z + th$, $t \in [0, 1]$,

$$\frac{F(z + h) - F(z)}{h} = \int_0^1 f(z + th) dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(z)$$

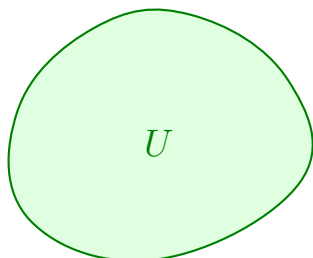
par continuité de f . Donc F est holomorphe et $F' = f$.

L'assertion (ii) découle alors du théorème 4.19. □

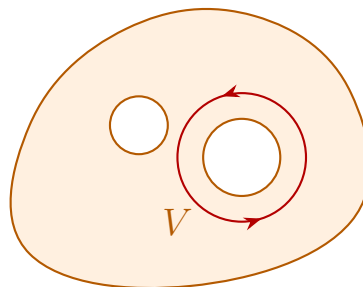
4.8 Théorème de Cauchy pour les domaines simplement connexes

Définition 4.25 (Domaine simplement connexe). Un ouvert connexe $U \subset \mathbb{C}$ est **simplement connexe** si tout lacet continu dans U est homotope à un point dans U , c'est-à-dire si $\pi_1(U, z_0) = \{e\}$ pour tout (ou un) $z_0 \in U$.

De manière équivalente (pour les ouverts de $\mathbb{C}$), U est simplement connexe si et seulement si $\mathbb{C} \setminus U$ est connexe dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (la sphère de Riemann).



Simplement connexe
(pas de trou)



Multiplément connexe
(deux trous)

FIGURE 4.4 – Domaines simplement et multiplément connexes.

Théorème 4.26 (Cauchy pour les domaines simplement connexes). Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe et $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Alors :

- (i) f admet une primitive sur U .
- (ii) Pour tout lacet lisse par morceaux γ dans U , $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Nous reportons la preuve complète à la section 4.10, où elle sera obtenue comme conséquence de la version homotopique du théorème de Cauchy.

Exemple 4.27.

- (1) $\mathbb{C}$, tout disque $D(z_0, r)$, tout demi-plan sont simplement connexes. Le théorème de Cauchy s'y applique.
- (2) $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ n'est *pas* simplement connexe : le cercle unité est un lacet non contractible dans $\mathbb{C}^*$.
- (3) $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ (le plan privé du demi-axe réel négatif) est simplement connexe. C'est le domaine naturel pour la détermination principale du logarithme.

4.9 Preuve du théorème de Cauchy via la formule de Green

La preuve qui suit utilise la formule de Green (Stokes en dimension 2) et suppose la continuité de f' . On montrera plus tard (comme conséquence de la formule intégrale de Cauchy) que toute fonction holomorphe a une dérivée continue, de sorte que cette hypothèse supplémentaire est finalement superflue.

Théorème 4.28 (Cauchy via Green). *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert borné dont le bord ∂U est une courbe de Jordan lisse par morceaux (ou une réunion finie de telles courbes), orienté positivement. Si f est holomorphe sur un ouvert contenant $\bar{U}$ et si f' est continue, alors*

$$\oint_{\partial U} f(z) dz = 0.$$

Démonstration. Écrivons $f = u + iv$ et $z = x + iy$, de sorte que $f(z) dz = (u + iv)(dx + i dy)$. En développant,

$$f(z) dz = (u dx - v dy) + i(v dx + u dy).$$

Par la formule de Green (théorème de Stokes en dimension 2), pour un domaine D à bord lisse par morceaux orienté positivement,

$$\oint_{\partial D} (P dx + Q dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Partie réelle. Avec $P = u$, $Q = -v$:

$$\oint_{\partial U} (u dx - v dy) = \iint_U \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy.$$

Par les équations de Cauchy–Riemann ($u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$), on a $-v_x - u_y = -(-u_y) - u_y = u_y - u_y = 0$.

Partie imaginaire. Avec $P = v$, $Q = u$:

$$\oint_{\partial U} (v dx + u dy) = \iint_U \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = \iint_U (u_x - v_y) dx dy = 0.$$

Les parties réelle et imaginaire de l'intégrale sont toutes deux nulles, d'où $\oint_{\partial U} f(z) dz = 0$. $\square$

Remarque 4.29. Cette preuve a l'avantage de la clarté conceptuelle : le théorème de Cauchy est une conséquence directe des équations de Cauchy–Riemann et du théorème de Stokes. Cependant, elle requiert l'hypothèse supplémentaire que f' soit continue, ce que la preuve via le lemme de Goursat évite.

4.10 Version homotopique du théorème de Cauchy

Définition 4.30 (Homotopie de chemins). Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Deux chemins $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow U$ ayant les mêmes extrémités ($\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ et $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$) sont dits **homotopes à extrémités fixes** dans U s'il existe une application continue $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow U$ telle que

$$\begin{aligned} H(t, 0) &= \gamma_0(t) && \text{pour tout } t \in [a, b], \\ H(t, 1) &= \gamma_1(t) && \text{pour tout } t \in [a, b], \\ H(a, s) &= \gamma_0(a) = \gamma_1(a) && \text{pour tout } s \in [0, 1], \\ H(b, s) &= \gamma_0(b) = \gamma_1(b) && \text{pour tout } s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

L'application H est appelée une **homotopie** de γ_0 vers γ_1 . On note $\gamma_0 \simeq \gamma_1$ dans U .

Définition 4.31 (Lacets homotopes). Deux lacets γ_0, γ_1 basés en $z_0 \in U$ sont homotopes (en tant que lacets) s'il existe une homotopie H comme ci-dessus avec $H(a, s) = H(b, s) = z_0$ pour tout s .

Un lacet est dit **contractile** (ou **homotope à un point**) s'il est homotope au lacet constant z_0 .

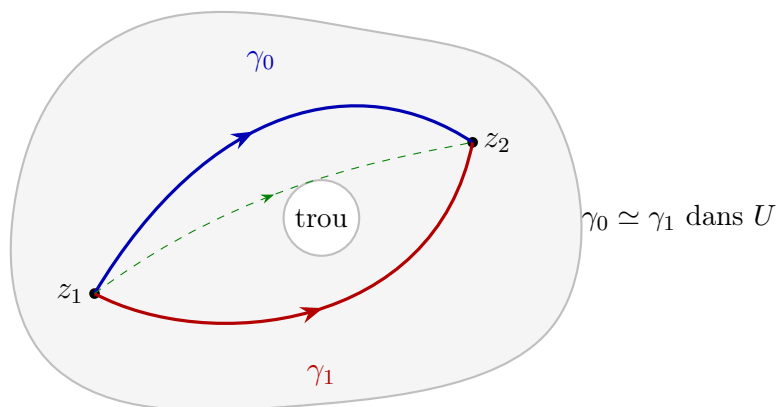


FIGURE 4.5 – Homotopie de chemins — γ_0 peut être continûment déformé en γ_1 sans sortir de U ni traverser le trou.

Théorème 4.32 (Cauchy — version homotopique). Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe.

- (i) Si γ_0 et γ_1 sont deux chemins lisses par morceaux homotopes à extrémités fixes dans U , alors

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

- (ii) En particulier, si γ est un lacet lisse par morceaux contractile dans U , alors
- $$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Démonstration. Nous donnons les grandes lignes de la preuve; les détails techniques d'approximation lisse par morceaux sont admis.

Idée clé. Soit $H: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow U$ l'homotopie. Le compact $K = H([a, b] \times [0, 1]) \subset U$ est à distance strictement positive du complémentaire de U . On subdivise le rectangle $[a, b] \times [0, 1]$ en sous-rectangles suffisamment petits pour que l'image de chacun soit contenue dans un disque ouvert inclus dans U .

Pour chaque paire de chemins intermédiaires adjacents γ_s et $\gamma_{s+\Delta s}$ (correspondant à deux valeurs consécutives du paramètre d'homotopie), la différence des intégrales se décompose en une somme d'intégrales sur de petits lacets, chacun contenu dans un disque (donc étoilé). Par le théorème de Cauchy pour les domaines étoilés (4.24), chacune de ces intégrales est nulle.

Plus précisément, on subdivise $[a, b] = \bigcup [t_{j-1}, t_j]$ et $[0, 1] = \bigcup [s_{k-1}, s_k]$ en sous-intervalles assez fins. Pour chaque rectangle $[t_{j-1}, t_j] \times [s_{k-1}, s_k]$, l'image $H([t_{j-1}, t_j] \times$

$[s_{k-1}, s_k]$) est contenue dans un disque $D_{jk} \subset U$. En reliant les images des sommets par des segments, on construit un quadrilatère dans D_{jk} . L'intégrale de f le long du bord de ce quadrilatère est nulle (car D_{jk} est étoilé). En sommant sur tous les sous-rectangles, les contributions des côtés intérieurs s'annulent, et il ne reste que la différence entre les intégrales le long de γ_0 et γ_1 (à une approximation polygonale près qui converge).

L'assertion (ii) en découle immédiatement en prenant γ_1 constant. $\square$

Corollaire 4.33 (Preuve du théorème 4.26). *Si U est simplement connexe, tout lacet dans U est contractile. Le théorème 4.32(ii) donne donc $\int_\gamma f(z) dz = 0$ pour tout lacet γ et toute f holomorphe sur U . L'existence d'une primitive résulte alors du théorème 4.19.*

4.11 Indice d'un point par rapport à un lacet

Définition 4.34 (Indice (nombre d'enroulement)). Soit γ un lacet lisse par morceaux dans $\mathbb{C}$ et $z_0 \notin \gamma^*$. L'**indice** (ou **nombre d'enroulement**) de γ par rapport à z_0 est

$$\text{ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}.$$

Théorème 4.35 (Intégralité de l'indice). *Pour tout lacet lisse par morceaux γ et tout $z_0 \notin \gamma^*$, l'indice $\text{ind}(\gamma, z_0)$ est un entier.*

Démonstration. Soit $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ avec $\gamma(a) = \gamma(b)$. Considérons la fonction

$$\varphi(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} ds, \quad t \in [a, b].$$

On a $\varphi(a) = 0$ et $\varphi(b) = \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i \text{ind}(\gamma, z_0)$.

Définissons $\psi(t) = (\gamma(t) - z_0) e^{-\varphi(t)}$. Pour t en un point de dérivabilité de γ ,

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= \gamma'(t) e^{-\varphi(t)} + (\gamma(t) - z_0) (-\varphi'(t)) e^{-\varphi(t)} \\ &= \gamma'(t) e^{-\varphi(t)} - (\gamma(t) - z_0) \cdot \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} \cdot e^{-\varphi(t)} \\ &= \gamma'(t) e^{-\varphi(t)} - \gamma'(t) e^{-\varphi(t)} = 0. \end{aligned}$$

(Sur chaque morceau lisse, ψ est constante.) Puisque γ est lisse par morceaux et ψ est continue, ψ est constante sur $[a, b]$ entier. Donc $\psi(b) = \psi(a)$, c'est-à-dire

$$(\gamma(b) - z_0) e^{-\varphi(b)} = (\gamma(a) - z_0) e^{-\varphi(a)}.$$

Or $\gamma(a) = \gamma(b)$ et $\varphi(a) = 0$, donc $e^{-\varphi(b)} = 1$. Ceci signifie $\varphi(b) \in 2\pi i \mathbb{Z}$, d'où $\text{ind}(\gamma, z_0) = \varphi(b)/(2\pi i) \in \mathbb{Z}$. $\square$

Proposition 4.36 (Propriétés de l'indice). Soit γ un lacet lisse par morceaux dans $\mathbb{C}$.

- (i) **Constance sur les composantes.** La fonction $z_0 \mapsto \text{ind}(\gamma, z_0)$ est continue (et à valeurs entières, donc constante) sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.
- (ii) **Valeur à l'infini.** $\text{ind}(\gamma, z_0) = 0$ pour tout z_0 dans la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.
- (iii) **Chemin inverse.** $\text{ind}(\gamma^-, z_0) = -\text{ind}(\gamma, z_0)$.
- (iv) **Additivité.** Si $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ est une concaténation de lacets, alors $\text{ind}(\gamma, z_0) = \text{ind}(\gamma_1, z_0) + \text{ind}(\gamma_2, z_0)$.

Démonstration. (i) Soit $z_0 \notin \gamma^*$. La fonction $z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$ est continue en z (on peut dériver sous le signe intégral puisque γ^* est compact et $z \notin \gamma^*$). Étant continue et à valeurs dans $\mathbb{Z}$, elle est localement constante, donc constante sur chaque composante connexe.

(ii) Si $|z_0|$ est assez grand (plus grand que $\max_{\gamma^*} |\zeta|$), on peut majorer :

$$|\text{ind}(\gamma, z_0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{|z_0| - \max |\zeta|} \cdot \ell(\gamma) \xrightarrow{|z_0| \rightarrow \infty} 0.$$

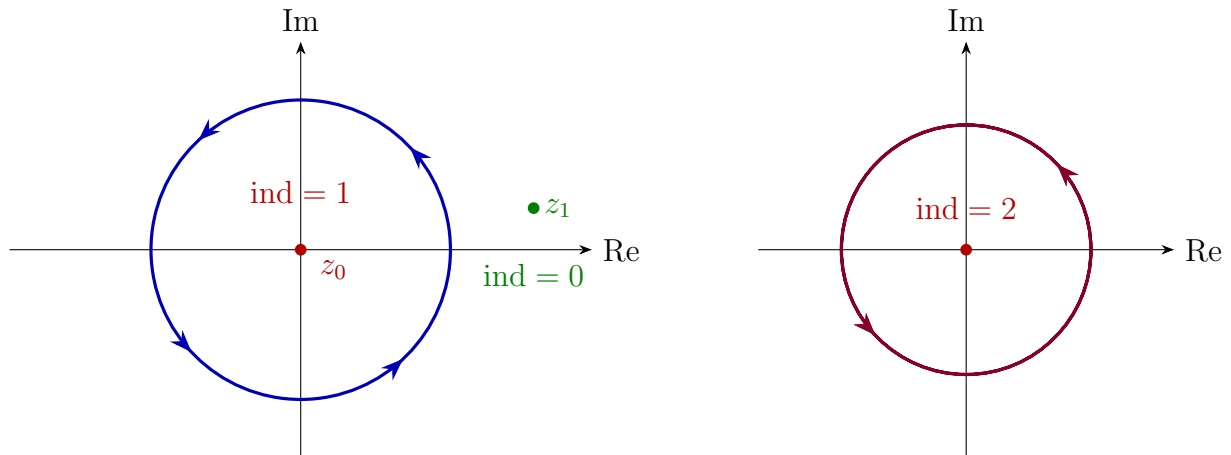
Comme $\text{ind}(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z}$, il vaut 0 pour $|z_0|$ grand, donc sur toute la composante non bornée par (i).

(iii) et (iv) résultent directement des propriétés de l'intégrale curviligne (proposition 4.11). $\square$

Exemple 4.37 (Indice du cercle). Soit $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Pour z_1 à l'intérieur du cercle ($|z_1 - z_0| < r$),

$$\text{ind}(\gamma, z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_1}.$$

On montre que $\text{ind}(\gamma, z_1) = 1$ (car z_1 est dans la composante bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, et $\text{ind}(\gamma, z_0) = 1$ par le calcul de la proposition 4.14). Pour z_1 à l'extérieur ($|z_1 - z_0| > r$), $\text{ind}(\gamma, z_1) = 0$.



Lacet enroulé 2 fois

FIGURE 4.6 – Nombre d'enroulement : le lacet simple encercle z_0 une fois ($\text{ind} = 1$) et ne tourne pas autour de z_1 ($\text{ind} = 0$). À droite, un lacet parcourant deux fois le cercle donne $\text{ind} = 2$.

4.12 Version générale du théorème de Cauchy

La version générale du théorème de Cauchy fait intervenir l'indice et ne requiert aucune hypothèse de simple connexité.

Théorème 4.38 (Cauchy — version générale). *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Soit γ un lacet lisse par morceaux dans U tel que*

$$\text{ind}(\gamma, z_0) = 0 \quad \text{pour tout } z_0 \in \mathbb{C} \setminus U.$$

Alors

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = 0.$$

Remarque 4.39. La condition $\text{ind}(\gamma, z_0) = 0$ pour tout $z_0 \notin U$ signifie que le lacet γ ne tourne autour d'aucun point extérieur à U . C'est une condition *homologique* sur γ : on dit que γ est *homologue à zéro* dans U , et on note $\gamma \sim 0$ dans U .

Le théorème affirme donc : si f est holomorphe sur U et $\gamma \sim 0$ dans U , alors $\int_{\gamma} f = 0$.

Nous admettons la preuve complète du théorème 4.38 (qui sera établie au chapitre 5 comme conséquence de la formule intégrale de Cauchy), et nous en développons plutôt les applications.

Corollaire 4.40 (Déformation de contours). *Soit f holomorphe sur un ouvert U et soient γ_0, γ_1 deux lacets lisses par morceaux dans U tels que*

$$\text{ind}(\gamma_0, z) = \text{ind}(\gamma_1, z) \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C} \setminus U.$$

Alors
$$\int_{\gamma_0} f(z) \, dz = \int_{\gamma_1} f(z) \, dz.$$

Démonstration. Le lacet $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1^-$ vérifie $\text{ind}(\gamma, z) = \text{ind}(\gamma_0, z) - \text{ind}(\gamma_1, z) = 0$ pour tout $z \notin U$. Par le théorème 4.38, $0 = \int_{\gamma} f = \int_{\gamma_0} f - \int_{\gamma_1} f$. $\square$

Exemple 4.41 (Contournement d'une singularité). Soit f holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Soient C_1 le cercle $|z| = 1$ et C_2 le cercle $|z| = 2$, tous deux parcourus dans le sens positif. Alors $\text{ind}(C_1, 0) = \text{ind}(C_2, 0) = 1$ et $\text{ind}(C_j, z) = 0$ pour $z \notin \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (c'est-à-dire pour $z \neq 0$, mais l'hypothèse est sur $z \notin U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, et $0 \notin U$). Puisque les indices sur $\mathbb{C} \setminus U = \{0\}$ sont égaux ($= 1$), on a $\int_{C_1} f = \int_{C_2} f$.

Théorème 4.42 (Cauchy pour un domaine à bord multiple). *Soit U un ouvert borné dont le bord est constitué de $n + 1$ courbes de Jordan lisses par morceaux : une courbe extérieure Γ_0 parcourue dans le sens positif et des courbes intérieures $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ parcourues dans le sens négatif (horaire). Si f est holomorphe sur un ouvert contenant $\overline{U}$, alors*

$$\int_{\Gamma_0} f(z) dz + \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} f(z) dz = 0,$$

c'est-à-dire

$$\int_{\Gamma_0} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k^+} f(z) dz,$$

où Γ_k^+ désigne Γ_k parcourue dans le sens positif.

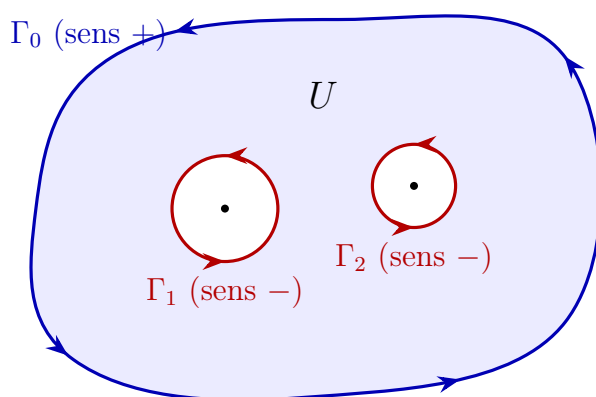


FIGURE 4.7 – Domaine multiplement connexe avec bord orienté : Γ_0 dans le sens trigonométrique, Γ_1, Γ_2 dans le sens horaire.

4.13 Applications et exemples

Exemple 4.43 (Calcul de $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 1}$). Soit γ le cercle $|z| = 2$ parcouru dans le sens positif. La fonction $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$ a des pôles en $z = i$ et $z = -i$, tous deux à l'intérieur du cercle.

Par décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z - i} - \frac{1}{z + i} \right).$$

Donc, en utilisant la proposition 4.14 et la linéarité,

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{1}{2i} \left(\int_{\gamma} \frac{dz}{z - i} - \int_{\gamma} \frac{dz}{z + i} \right) = \frac{1}{2i} (2\pi i - 2\pi i) = 0.$$

Exemple 4.44 (Calcul de $\int_{\gamma} \frac{z}{z^2 + 1} dz$). Avec le même cercle γ , $|z| = 2$:

$$\frac{z}{z^2 + 1} = \frac{z}{(z - i)(z + i)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z - i} + \frac{1}{z + i} \right).$$

Donc

$$\int_{\gamma} \frac{z}{z^2 + 1} dz = \frac{1}{2}(2\pi i + 2\pi i) = 2\pi i.$$

Exemple 4.45 (Invariance par déformation). Soit $f(z) = \frac{1}{z}$, holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. Soit γ un lacet simple lisse par morceaux dans $\mathbb{C}^*$ tel que $\text{ind}(\gamma, 0) = 1$. Par le corollaire 4.40, l'intégrale $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$ est égale à l'intégrale sur le cercle unité (qui a le même indice par rapport à 0), donc

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

Ce résultat illustre la puissance de la déformation de contours : peu importe la forme du lacet, seul l'indice compte.

Proposition 4.46 (Intégrale de $\frac{1}{z-a}$ le long d'un lacet). Soit γ un lacet lisse par morceaux et $a \notin \gamma^*$. Alors

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z - a} = 2\pi i \text{ ind}(\gamma, a).$$

Démonstration. C'est la définition même de l'indice (définition 4.34). □

4.14 Exercices

Exercice 4.1 (Calculs directs d'intégrales curvilignes). Calculer les intégrales suivantes.

- (a) $\int_{\gamma} z^2 dz$ où γ est le segment de 0 à $1 + i$.
- (b) $\int_{\gamma} |z|^2 dz$ où γ est le segment de 0 à $1 + i$.
- (c) $\int_{\gamma} |z|^2 dz$ où γ est le chemin constitué du segment de 0 à 1 suivi du segment de 1 à $1 + i$.
- (d) $\int_{\gamma} e^z dz$ où γ est un chemin quelconque de 0 à πi .

Solution. (a) z^2 admet la primitive $z^3/3$, donc $\int_{\gamma} z^2 dz = (1 + i)^3/3 - 0 = (1 + 3i + 3i^2 + i^3)/3 = (1 + 3i - 3 - i)/3 = (-2 + 2i)/3$.

(b) Paramétrons $\gamma(t) = t(1 + i)$, $t \in [0, 1]$. Alors $\gamma'(t) = 1 + i$ et $|\gamma(t)|^2 = t^2 \cdot 2$. Donc

$$\int_{\gamma} |z|^2 dz = \int_0^1 2t^2 \cdot (1 + i) dt = (1 + i) \cdot \frac{2}{3} = \frac{2(1 + i)}{3}.$$

(c) Sur le premier segment, $\gamma_1(t) = t$, $t \in [0, 1]$, $|z|^2 = t^2$, $\gamma'_1 = 1$: $\int_{\gamma_1} = \int_0^1 t^2 dt = 1/3$. Sur le second, $\gamma_2(t) = 1 + it$, $t \in [0, 1]$, $|z|^2 = 1 + t^2$, $\gamma'_2 = i$: $\int_{\gamma_2} = i \int_0^1 (1 + t^2) dt = i(1 + 1/3) = 4i/3$. Total : $1/3 + 4i/3$.

On constate que les réponses (b) et (c) diffèrent : $|z|^2$ n'est pas holomorphe, l'intégrale dépend du chemin.

(d) e^z admet la primitive e^z , donc $\int_{\gamma} e^z dz = e^{\pi i} - e^0 = -1 - 1 = -2$. $\square$

Exercice 4.2 (Inégalité ML en pratique). Soit γ_R le demi-cercle supérieur $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, avec $R > 1$.

(a) Montrer que $\left| \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2 + 1} \right| \leq \frac{\pi R}{R^2 - 1}$.

(b) En déduire que cette intégrale tend vers 0 quand $R \rightarrow +\infty$.

Solution. (a) Sur γ_R , $|z| = R$ donc $|z^2 + 1| \geq |z|^2 - 1 = R^2 - 1$ (inégalité triangulaire inverse). D'où $|1/(z^2 + 1)| \leq 1/(R^2 - 1)$. La longueur de γ_R est πR . Par l'inégalité ML :

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{R^2 - 1} \cdot \pi R = \frac{\pi R}{R^2 - 1}.$$

(b) $\frac{\pi R}{R^2 - 1} = \frac{\pi}{R - 1/R} \rightarrow 0$ quand $R \rightarrow +\infty$. $\square$

Exercice 4.3 (Primitive de $1/z$ sur un demi-plan). Soit $U = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ le demi-plan droit.

(a) Montrer que U est simplement connexe.

(b) Montrer que $F(z) = \operatorname{Log}(z)$ (détermination principale du logarithme) est une primitive de $1/z$ sur U .

(c) Calculer $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$ où γ est un chemin quelconque de 1 à i dans U .

Solution. (a) Le demi-plan U est convexe (pour $z_1, z_2 \in U$ et $t \in [0, 1]$, $\operatorname{Re}((1-t)z_1 + tz_2) = (1-t)\operatorname{Re}(z_1) + t\operatorname{Re}(z_2) > 0$). Tout convexe est étoilé, et tout étoilé connexe est simplement connexe.

(b) $\operatorname{Log}(z) = \ln|z| + i \operatorname{Arg}(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \supset U$, et $\operatorname{Log}'(z) = 1/z$.

(c) Par le théorème 4.19,

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \operatorname{Log}(i) - \operatorname{Log}(1) = (\ln 1 + i\pi/2) - 0 = \frac{\pi i}{2}. \quad \square$$

Exercice 4.4 (Lemme de Goursat et régularité). Soit $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continue, holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Montrer que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier.

Indication. Montrer que $\int_{\partial T} f = 0$ pour tout triangle T (distinguer selon que 0 est sommet, sur un côté, ou à l'intérieur de T), puis utiliser le théorème de Morera (chapitre 5).

Exercice 4.5 (Calcul de l'indice). Soit γ le lacet rectangulaire de sommets $-2 - i$, $2 - i$, $2 + i$, $-2 + i$ parcouru dans le sens positif.

(a) Déterminer $\text{ind}(\gamma, 0)$, $\text{ind}(\gamma, 3)$ et $\text{ind}(\gamma, i)$.

(b) Calculer $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$ et $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-3}$.

Solution. (a) Les points 0 et i sont à l'intérieur du rectangle (car $|\text{Re}(0)| < 2$ et $|\text{Im}(0)| < 1$, et $\text{Im}(i) = 1$ est sur le bord, donc exclu ; en fait i est sur le bord γ^* , l'indice n'y est pas défini).

Corrigeons : i est un sommet du rectangle, donc $i \in \gamma^*$ et $\text{ind}(\gamma, i)$ n'est pas défini.

Pour 0 : 0 est à l'intérieur du rectangle, donc $\text{ind}(\gamma, 0) = 1$. Pour 3 : 3 est à l'extérieur ($\text{Re}(3) = 3 > 2$), donc $\text{ind}(\gamma, 3) = 0$.

(b) Par la proposition 4.46, $\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i$ et $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-3} = 2\pi i \cdot 0 = 0$. $\square$

Exercice 4.6 (Théorème de Cauchy et intégrales réelles). En intégrant $f(z) = e^{-z^2}$ le long du contour rectangulaire de sommets $-R$, R , $R + ia$, $-R + ia$ (avec $a > 0$ fixé et $R > 0$), montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2at) dt = \sqrt{\pi} e^{-a^2}.$$

Indication. On admettra que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

Solution. La fonction $f(z) = e^{-z^2}$ est entière. Le contour rectangulaire γ_R est un lacet dans $\mathbb{C}$ (simplement connexe), donc par le théorème de Cauchy, $\oint_{\gamma_R} e^{-z^2} dz = 0$.

Le contour se décompose en quatre segments. Sur le côté inférieur ($z = t$, $t \in [-R, R]$), l'intégrale vaut $\int_{-R}^R e^{-t^2} dt$.

Sur le côté supérieur ($z = t + ia$, t de R à $-R$), l'intégrale vaut $-\int_{-R}^R e^{-(t+ia)^2} dt$. Or $e^{-(t+ia)^2} = e^{-(t^2+2iat-a^2)} = e^{a^2-t^2} e^{-2iat}$.

Sur les côtés verticaux ($z = \pm R + is$, $s \in [0, a]$), on majore : $\left| e^{-(R+is)^2} \right| = e^{-(R^2-s^2)} \leq e^{-(R^2-a^2)} \rightarrow 0$ quand $R \rightarrow \infty$. Donc ces intégrales tendent vers 0.

En passant à la limite $R \rightarrow \infty$:

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt - e^{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-2iat} dt.$$

Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-2iat} dt = e^{-a^2} \sqrt{\pi}.$$

En prenant la partie réelle : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2at) dt = \sqrt{\pi} e^{-a^2}$. $\square$

Exercice 4.7 (Lacets et indices composés). Soit γ le lacet en forme de « huit » défini comme suit : γ parcourt d'abord le cercle $|z-1| = 1/2$ dans le sens positif, puis le cercle $|z+1| = 1/2$ dans le sens négatif.

(a) Déterminer $\text{ind}(\gamma, 1)$, $\text{ind}(\gamma, -1)$ et $\text{ind}(\gamma, 0)$.

(b) Calculer $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2-1}$.

Solution. (a) Par additivité de l'indice :

- $\text{ind}(\gamma, 1) = \text{ind}(C_1^+, 1) + \text{ind}(C_2^-, 1) = 1 + 0 = 1$ (car 1 est à l'intérieur de C_1 et à l'extérieur de C_2).
- $\text{ind}(\gamma, -1) = \text{ind}(C_1^+, -1) + \text{ind}(C_2^-, -1) = 0 + (-1) = -1$ (car -1 est à l'extérieur de C_1 et à l'intérieur de C_2 , parcourue en sens négatif).
- $\text{ind}(\gamma, 0) = 0 + 0 = 0$ (car 0 est extérieur aux deux petits cercles).

(b) On a $\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{(z-1)(z+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right)$. Donc

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2-1} &= \frac{1}{2} \left(\int_{\gamma} \frac{dz}{z-1} - \int_{\gamma} \frac{dz}{z+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} (2\pi i \text{ind}(\gamma, 1) - 2\pi i \text{ind}(\gamma, -1)) = \frac{1}{2} (2\pi i - (-2\pi i)) = 2\pi i. \quad \square \end{aligned}$$

Exercice 4.8 (Indice et topologie). Soit γ un lacet lisse par morceaux dans $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ tel que $\text{ind}(\gamma, 0) = 3$ et $\text{ind}(\gamma, 1) = -2$.

(a) Calculer $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$ et $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-1}$.

(b) Calculer $\int_{\gamma} \frac{2z-1}{z(z-1)} dz$.

(c) Montrer que γ n'est pas contractile dans $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

Solution. (a) $\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i \cdot 3 = 6\pi i$ et $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-1} = 2\pi i \cdot (-2) = -4\pi i$.

(b) $\frac{2z-1}{z(z-1)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$ (vérification : $\frac{z-1+z}{z(z-1)} = \frac{2z-1}{z(z-1)}$). Donc

$$\int_{\gamma} \frac{2z-1}{z(z-1)} dz = 6\pi i + (-4\pi i) = 2\pi i.$$

(c) Si γ était contractile dans $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, on aurait $\text{ind}(\gamma, z) = 0$ pour tout $z \notin \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, en particulier $\text{ind}(\gamma, 0) = 0$ et $\text{ind}(\gamma, 1) = 0$. Contradiction. $\square$

Exercice 4.9 (Formule de Cauchy pour l'indice et logarithme). Soit $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ un lacet lisse par morceaux. Montrer que

$$\text{ind}(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi} [\arg(\gamma(t))]_0^1,$$

où $\arg(\gamma(t))$ désigne toute détermination continue de l'argument le long de γ .

Indication. Si $\theta(t)$ est une détermination continue de l'argument de $\gamma(t)$, écrire $\gamma(t) = |\gamma(t)| e^{i\theta(t)}$, calculer $\gamma'(t)/\gamma(t)$, et intégrer.

Solution. Posons $r(t) = |\gamma(t)|$ et $\theta(t)$ une détermination continue de l'argument. Alors $\gamma(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$ et

$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = \frac{r'(t)}{r(t)} + i\theta'(t).$$

En intégrant,

$$\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = [\ln r(t)]_0^1 + i[\theta(t)]_0^1.$$

Comme γ est un lacet, $r(1) = r(0)$, donc $[\ln r]_0^1 = 0$. Ainsi $\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = i(\theta(1) - \theta(0))$ et

$$\text{ind}(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot i(\theta(1) - \theta(0)) = \frac{\theta(1) - \theta(0)}{2\pi} = \frac{[\arg(\gamma(t))]_0^1}{2\pi}. \quad \square$$

Exercice 4.10 (Inégalité de la moyenne pour l'intégrale). Soit f holomorphe sur un ouvert contenant le disque fermé $\overline{D}(0, R)$.

(a) En utilisant le théorème de Cauchy, montrer que $\int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta}) d\theta = 2\pi f(0)$.

Indication. Poser $\gamma(t) = Re^{it}$ et relier $\int_\gamma \frac{f(z)}{z} dz$ à l'intégrale ci-dessus.

(b) En déduire que $|f(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(Re^{i\theta})| d\theta$.

Solution. (a) Posons $\gamma(t) = Re^{it}$. Par le résultat de la proposition 4.14 appliqué à la fonction $f(z)/z$ (qui n'est holomorphe que si $f(0) = 0$, mais nous anticipons ici la formule intégrale de Cauchy ou nous raisonnons directement) :

$$\text{On calcule } \int_\gamma \frac{f(z)}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it})}{Re^{it}} \cdot iRe^{it} dt = i \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) dt.$$

Ce résultat sera identifié à $2\pi i f(0)$ par la formule intégrale de Cauchy (chapitre 5). En anticipant, $\int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta}) d\theta = 2\pi f(0)$.

(b) Par l'inégalité triangulaire pour les intégrales :

$$2\pi |f(0)| = \left| \int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta}) d\theta \right| \leq \int_0^{2\pi} |f(Re^{i\theta})| d\theta. \quad \square$$

Exercice 4.11 (Un lemme utile pour les résidus). Soit f holomorphe sur $D(a, R) \setminus \{a\}$ avec un pôle simple en a . Soit γ_ε l'arc de cercle $\gamma_\varepsilon(t) = a + \varepsilon e^{it}$, $t \in [\alpha, \beta]$, avec $0 < \varepsilon < R$.

(a) Montrer que si $f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + g(z)$ où g est holomorphe sur $D(a, R)$, alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz = i(\beta - \alpha) c_{-1}.$$

(b) En déduire le cas particulier $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$ (cercle complet).

Solution. (a) On a $\int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz = c_{-1} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dz}{z-a} + \int_{\gamma_\varepsilon} g(z) dz$.

Pour le premier terme : $\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dz}{z-a} = \int_\alpha^\beta \frac{i\varepsilon e^{it}}{\varepsilon e^{it}} dt = i(\beta - \alpha)$.

Pour le second : g est continue (donc bornée) sur $\overline{D}(a, \varepsilon_0)$ pour ε_0 petit, disons $|g(z)| \leq M$. Par l'inégalité ML, $\left| \int_{\gamma_\varepsilon} g(z) dz \right| \leq M \cdot \varepsilon(\beta - \alpha) \rightarrow 0$.

Donc $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz = i(\beta - \alpha) c_{-1}$.

(b) Pour $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$, on retrouve $\int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz \rightarrow 2\pi i c_{-1} = 2\pi i \operatorname{Res}(f, a)$. $\square$

Chapitre 5

Formule Intégrale de Cauchy et Conséquences

5.1 Introduction

La formule intégrale de Cauchy constitue l'un des résultats les plus profonds et les plus féconds de l'analyse complexe. Elle exprime la valeur d'une fonction holomorphe en un point intérieur à un contour fermé comme une intégrale curviligne sur ce contour. De ce résultat fondamental découlent des conséquences remarquables : formules pour les dérivées d'ordre supérieur, inégalités de Cauchy, théorème de Liouville, développement en série de Taylor, et les principes du maximum et du minimum.

5.2 Formule intégrale de Cauchy pour un disque

Théorème 5.1 (Formule intégrale de Cauchy pour un disque). *Soit f holomorphe sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ contenant le disque fermé $\overline{D}(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}$. Alors pour tout $z \in D(z_0, R)$, on a*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

où le cercle $|\zeta - z_0| = R$ est parcouru dans le sens positif (trigonométrique).

Démonstration. Soit $z \in D(z_0, R)$ fixé. Posons $r = |z - z_0| < R$ et notons C_R le cercle $|\zeta - z_0| = R$ parcouru dans le sens positif, et C_ε le cercle $|\zeta - z| = \varepsilon$ parcouru dans le sens positif, avec $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $\overline{D}(z, \varepsilon) \subset D(z_0, R)$.

Étape 1 : Réduction par le théorème de Cauchy. La fonction $g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ est holomorphe sur $U \setminus \{z\}$. Par le théorème de Cauchy-Goursat appliqué à la couronne $\{w : \varepsilon \leq |w - z| \leq R'\}$ (avec R' convenablement choisi et en reliant les deux cercles par des segments), on obtient

$$\oint_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \oint_{C_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Plus précisément, on considère le domaine simplement connexe obtenu en retirant une fente radiale de la couronne. Les intégrales le long des deux bords de la fente s'annulent car elles sont parcourues en sens opposés, ce qui donne l'égalité ci-dessus.

Étape 2 : Évaluation sur le petit cercle. On paramétrise C_ε par $\zeta = z + \varepsilon e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Alors $d\zeta = i\varepsilon e^{i\theta} d\theta$ et

$$\oint_{C_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}} \cdot i\varepsilon e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta.$$

Puisque f est continue en z , pour tout $\delta > 0$ il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour $\varepsilon < \varepsilon_0$,

$$|f(z + \varepsilon e^{i\theta}) - f(z)| < \delta \quad \text{pour tout } \theta \in [0, 2\pi].$$

Par conséquent,

$$\left| \oint_{C_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i f(z) \right| = \left| i \int_0^{2\pi} [f(z + \varepsilon e^{i\theta}) - f(z)] d\theta \right| \leq 2\pi\delta.$$

Comme le membre de gauche est l'intégrale sur C_R (qui ne dépend pas de ε) moins $2\pi i f(z)$, et comme $\delta > 0$ est arbitraire, on conclut

$$\oint_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i f(z),$$

ce qui achève la preuve. □

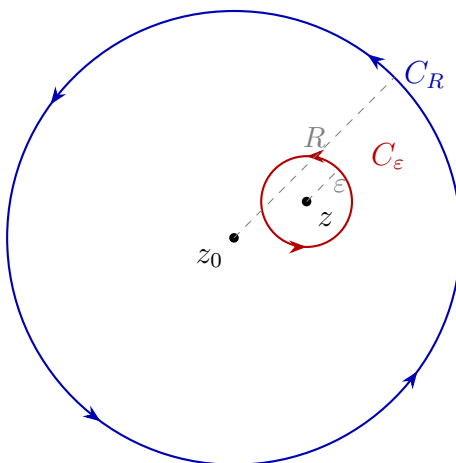


FIGURE 5.1 – Contour d'intégration pour la formule de Cauchy : le grand cercle C_R et le petit cercle C_ε autour de z .

5.3 Formule intégrale de Cauchy — version générale

Théorème 5.2 (Formule intégrale de Cauchy — version générale). *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, et γ un cycle dans U tel que $\text{ind}(\gamma, w) = 0$ pour tout*

$w \notin U$. Alors pour tout $z \in U \setminus \gamma^*$,

$$\text{ind}(\gamma, z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

où γ^* désigne l'image de γ .

Remarque 5.3 (Rôle de l'indice). Lorsque γ est un cercle parcouru une fois dans le sens positif et z est à l'intérieur, $\text{ind}(\gamma, z) = 1$ et l'on retrouve la formule du théorème 5.1. Pour un point extérieur, $\text{ind}(\gamma, z) = 0$ et l'intégrale est nulle.

Exemple 5.4 (Calcul direct par la formule de Cauchy). Calculons $I = \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} dz$. La fonction $f(z) = e^z$ est entière, et $z_0 = 1$ est à l'intérieur du cercle $|z| = 2$. Par la formule intégrale de Cauchy,

$$I = 2\pi i \cdot f(1) = 2\pi i \cdot e.$$

Exemple 5.5 (Point extérieur au contour). Calculons $J = \oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z-3} dz$.

Le point $z_0 = 3$ est à l'extérieur du cercle $|z| = 1$, donc la fonction $\zeta \mapsto \frac{\sin \zeta}{\zeta - 3}$ est holomorphe sur un ouvert contenant $\overline{D}(0, 1)$. Par le théorème de Cauchy-Goursat, $J = 0$.

5.4 Formule de Cauchy pour les dérivées

Théorème 5.6 (Formule de Cauchy pour les dérivées). Soit f holomorphe sur un ouvert U et soit γ un cercle positivement orienté dans U dont l'intérieur est contenu dans U . Alors f est indéfiniment dérivable sur l'intérieur de γ , et pour tout entier $n \geq 0$ et tout z à l'intérieur de γ ,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Démonstration. Nous démontrons le résultat par récurrence sur n .

Cas $n = 0$. C'est la formule intégrale de Cauchy (théorème 5.1).

Cas $n = 1$ (passage au quotient différentiel). Soit z à l'intérieur de γ et $h \in \mathbb{C}^*$ assez petit pour que $z + h$ soit aussi à l'intérieur. Par la formule de Cauchy,

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(\zeta) \cdot \frac{1}{h} \left(\frac{1}{\zeta - z - h} - \frac{1}{\zeta - z} \right) d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} d\zeta. \end{aligned}$$

Notons $d = \min_{\zeta \in \gamma^*} |\zeta - z| > 0$. Pour $|h| < d/2$, on a $|\zeta - z - h| \geq d/2$ pour tout $\zeta \in \gamma^*$, et donc

$$\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} - \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} = \frac{h \cdot f(\zeta)}{(\zeta - z)^2(\zeta - z - h)}.$$

En posant $M = \max_{\zeta \in \gamma^*} |f(\zeta)|$ et $L = \text{longueur}(\gamma)$, on obtient la majoration

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{|h| ML}{d^2 \cdot (d/2)} = \frac{ML|h|}{\pi d^3} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Ainsi $f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$.

Cas général (récurrence). Le passage de n à $n+1$ suit exactement le même schéma. On forme le quotient différentiel

$$\frac{f^{(n)}(z+h) - f^{(n)}(z)}{h} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(\zeta) \cdot \frac{1}{h} \left[\frac{1}{(\zeta - z - h)^{n+1}} - \frac{1}{(\zeta - z)^{n+1}} \right] d\zeta,$$

et l'on montre par une majoration analogue que cette expression tend vers

$$\frac{(n+1)!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+2}} d\zeta$$

lorsque $h \rightarrow 0$. Le facteur $(n+1)$ provient de l'identité algébrique

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{(\zeta - z - h)^{n+1}} - \frac{1}{(\zeta - z)^{n+1}} \right] = \frac{n+1}{(\zeta - z)^{n+2}},$$

et la convergence uniforme en $\zeta \in \gamma^*$ permet d'intervertir limite et intégrale. $\square$

Corollaire 5.7 (Holomorphie implique analyticité). *Toute fonction holomorphe est indéfiniment dérivable. En particulier, si f est holomorphe sur un ouvert U , alors f' , f'' , ... sont toutes holomorphes sur U .*

Démonstration. Le théorème 5.6 montre que $f^{(n)}$ existe pour tout $n \geq 0$ en tout point de U . Chaque $f^{(n)}$ s'exprime par une intégrale de Cauchy et est donc continue, puis holomorphe. $\square$

Exemple 5.8 (Application de la formule des dérivées). Calculons $I = \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^4} dz$.

On reconnaît la formule de Cauchy pour la dérivée avec $f(\zeta) = e^\zeta$, $z_0 = 0$, et $n = 3$. Ainsi

$$I = \frac{2\pi i}{3!} f'''(0) = \frac{2\pi i}{6} \cdot e^0 = \frac{\pi i}{3}.$$

5.5 Théorème de Morera

Théorème 5.9 (Morera). *Soit $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ continue sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$. Si*

$$\oint_T f(z) dz = 0$$

pour tout triangle T dont l'intérieur est contenu dans U , alors f est holomorphe sur U .

Démonstration. Il suffit de montrer que f est holomorphe au voisinage de chaque point de U . Soit $z_0 \in U$ et $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset U$. Définissons $F: D(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$F(z) = \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta,$$

où $[z_0, z]$ désigne le segment de z_0 à z . L'hypothèse sur les intégrales triangulaires assure que cette intégrale ne dépend pas du chemin (dans le disque), et donc F est bien définie.

Montrons que $F'(z) = f(z)$ pour tout $z \in D(z_0, r)$. Pour h assez petit,

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z, z+h]} f(\zeta) d\zeta,$$

d'où

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} [f(\zeta) - f(z)] d\zeta.$$

Par continuité de f , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$ pour $|\zeta - z| < \delta$. Si $|h| < \delta$,

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| \leq \frac{1}{|h|} \cdot |h| \cdot \varepsilon = \varepsilon.$$

Donc $F'(z) = f(z)$, et F est holomorphe sur $D(z_0, r)$. Par le corollaire 5.7, $f = F'$ est aussi holomorphe sur $D(z_0, r)$. $\square$

Remarque 5.10 (Réciproque partielle). Le théorème de Morera est une réciproque partielle du théorème de Cauchy-Goursat : Cauchy-Goursat dit que l'holomorphic implique la nullité des intégrales le long de contours fermés ; Morera dit que la nullité des intégrales triangulaires (avec la continuité) implique l'holomorphic.

5.6 Inégalités de Cauchy

Théorème 5.11 (Inégalités de Cauchy). *Soit f holomorphe sur un ouvert contenant $\overline{D}(z_0, R)$. Alors pour tout $n \geq 0$,*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! M_R}{R^n},$$

où $M_R = \max_{|z-z_0|=R} |f(z)|$.

Démonstration. Par la formule de Cauchy pour les dérivées (théorème 5.6), en paramétrant le cercle $C_R : \zeta = z_0 + Re^{i\theta}$,

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M_R}{R^{n+1}} \cdot 2\pi R = \frac{n! M_R}{R^n}. \end{aligned}$$

On a utilisé l'inégalité ML : $\left| \oint_{\gamma} g(\zeta) d\zeta \right| \leq \max_{\gamma^*} |g| \cdot \text{longueur}(\gamma) = \frac{M_R}{R^{n+1}} \cdot 2\pi R$. $\square$

5.7 Théorème de Liouville

Théorème 5.12 (Liouville). *Toute fonction entière bornée est constante. Autrement dit, si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe et s'il existe $M > 0$ tel que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, alors f est constante.*

Démonstration. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ quelconque. Pour tout $R > 0$, l'inégalité de Cauchy pour $n = 1$ donne

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R}.$$

En faisant tendre $R \rightarrow +\infty$, on obtient $f'(z_0) = 0$. Ceci étant vrai pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, la fonction f est de dérivée nulle sur $\mathbb{C}$ (connexe), donc constante. $\square$

Théorème 5.13 (Théorème fondamental de l'algèbre). *Tout polynôme non constant $P \in \mathbb{C}[z]$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que $P(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Alors $g(z) = \frac{1}{P(z)}$ est entière. Écrivons $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ avec $a_n \neq 0$ et $n \geq 1$. Pour $|z|$ assez grand,

$$|P(z)| = |a_n| |z|^n \left| 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \dots + \frac{a_0}{a_n z^n} \right| \geq \frac{|a_n|}{2} |z|^n,$$

car le terme entre barres de valeur absolue tend vers 1. Plus précisément, il existe $R_0 > 0$ tel que pour $|z| \geq R_0$, $|P(z)| \geq \frac{|a_n|}{2} |z|^n$.

$$\text{Donc pour } |z| \geq R_0, |g(z)| \leq \frac{2}{|a_n| |z|^n} \leq \frac{2}{|a_n| R_0^n}.$$

Sur le compact $\overline{D}(0, R_0)$, g est continue (car P ne s'annule pas) donc bornée. Ainsi g est bornée sur $\mathbb{C}$ tout entier. Par le théorème de Liouville, g est constante, ce qui contredit $\deg P \geq 1$. $\square$

Corollaire 5.14 (Factorisation complète). *Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[z]$ de degré $n \geq 1$ admet exactement n racines dans $\mathbb{C}$ (comptées avec multiplicité) :*

$$P(z) = a_n (z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} \dots (z - z_k)^{m_k}, \quad m_1 + m_2 + \dots + m_k = n.$$

5.8 Théorème de la moyenne

Théorème 5.15 (Propriété de la valeur moyenne). *Soit f holomorphe sur un ouvert contenant $\overline{D}(z_0, R)$. Alors*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta.$$

Démonstration. On paramétrise le cercle $|\zeta - z_0| = R$ par $\zeta = z_0 + Re^{i\theta}$, $d\zeta = iRe^{i\theta} d\theta$. Par la formule intégrale de Cauchy,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}} \cdot iRe^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta.$$

□

Remarque 5.16 (Interprétation). La valeur d'une fonction holomorphe en un point est la moyenne de ses valeurs sur tout cercle centré en ce point et contenu dans le domaine d'holomorphie. C'est une propriété caractéristique des fonctions harmoniques (dont les parties réelle et imaginaire d'une fonction holomorphe sont des exemples).

5.9 Principe du maximum

Théorème 5.17 (Principe du maximum). *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Si $|f|$ atteint son maximum en un point de U , alors f est constante sur U .*

Démonstration. Supposons qu'il existe $z_0 \in U$ tel que $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ pour tout $z \in U$. Posons $M = |f(z_0)|$.

Cas $M = 0$. Alors $f \equiv 0$ sur U .

Cas $M > 0$. Soit $R > 0$ tel que $\overline{D}(z_0, R) \subset U$. Par la propriété de la valeur moyenne (théorème 5.15),

$$M = |f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + Re^{i\theta})| d\theta \leq M.$$

La dernière inégalité vient de $|f| \leq M$ sur U . On a donc égalité partout, ce qui nécessite

$$|f(z_0 + Re^{i\theta})| = M \quad \text{pour tout } \theta \in [0, 2\pi].$$

En effet, si $|f(z_0 + Re^{i\theta_0})| < M$ pour un certain θ_0 , par continuité, il existerait un arc sur lequel $|f| < M - \varepsilon$, ce qui donnerait une inégalité stricte, contradiction.

Ainsi $|f|$ est constante (égale à M) sur tout cercle de centre z_0 contenu dans U , donc sur tout le disque $D(z_0, R)$. Écrivons $f(z) = Me^{i\varphi(z)}$ sur ce disque; une fonction holomorphe de module constant est constante (car $|f|^2 = u^2 + v^2$ est constant, et les équations de Cauchy-Riemann entraînent $f' = 0$).

Donc f est constante sur $D(z_0, R)$. Par le principe du prolongement analytique (ou par connexité de U et le fait que l'ensemble des points où f est constante est à la fois ouvert et fermé dans U), f est constante sur U . □

Corollaire 5.18 (Principe du maximum pour les domaines bornés). *Soit U un ouvert borné et connexe, et f continue sur $\overline{U}$ et holomorphe sur U . Alors*

$$\max_{z \in \overline{U}} |f(z)| = \max_{z \in \partial U} |f(z)|.$$

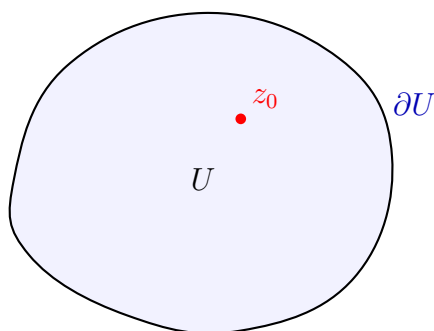
En d'autres termes, le maximum de $|f|$ sur l'adhérence est atteint sur le bord.

Démonstration. Puisque $\overline{U}$ est compact et $|f|$ est continue, le maximum est atteint en un certain $z_1 \in \overline{U}$. Si $z_1 \in U$, le théorème 5.17 implique que f est constante, et le maximum est atteint partout, en particulier sur ∂U . Si $z_1 \in \partial U$, c'est immédiat. $\square$

Théorème 5.19 (Principe du minimum). *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et non identiquement nulle. Si $|f|$ atteint son minimum en un point de U , alors f est constante.*

Démonstration. Supposons que $|f|$ atteint son minimum en $z_0 \in U$.

Si $f(z_0) = 0$, alors le minimum de $|f|$ est 0, ce qui signifie que f s'annule en z_0 . Dans ce cas, le résultat ne donne pas directement la constance (il faut que f ne s'annule pas). Mais si $f(z_0) \neq 0$, on considère $g = 1/f$, qui est holomorphe sur U (car f ne s'annule pas — en effet, si $f(z_1) = 0$ pour un certain $z_1 \in U$, on aurait $|f(z_1)| = 0 < |f(z_0)|$, contredisant la minimalité en z_0). Alors $|g|$ atteint son maximum en z_0 , et par le principe du maximum, g est constante, donc f l'est aussi. $\square$



$\max_{\overline{U}} |f|$ est atteint sur ∂U

FIGURE 5.2 – Principe du maximum : sur un domaine borné, le maximum de $|f|$ ne peut être atteint qu'au bord.

5.10 Développement en série de Taylor

Théorème 5.20 (Développement de Taylor). *Soit f holomorphe sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ et $z_0 \in U$. Soit $R = d(z_0, \mathbb{C} \setminus U)$ le rayon du plus grand disque ouvert de centre z_0 contenu dans U (avec $R = +\infty$ si $U = \mathbb{C}$). Alors f admet un développement en série*

entière convergente sur $D(z_0, R)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R,$$

avec $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. La convergence est normale (donc uniforme) sur tout compact de $D(z_0, R)$.

Démonstration. Soit $z \in D(z_0, R)$ fixé. Choisissons r tel que $|z - z_0| < r < R$ et notons C_r le cercle $|\zeta - z_0| = r$ parcouru positivement. Par la formule intégrale de Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

La clé est de développer le noyau de Cauchy en série géométrique. On écrit

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}.$$

Pour $\zeta \in C_r$, on a $|\zeta - z_0| = r$ et $|z - z_0| < r$, donc $\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{r} < 1$. La série géométrique converge :

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

La convergence est uniforme en $\zeta \in C_r$ car $\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| \leq \frac{|z - z_0|}{r} < 1$ est indépendant de ζ . On peut donc intervertir somme et intégrale :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta) (z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right] (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

Par la formule de Cauchy pour les dérivées (théorème 5.6),

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = a_n.$$

On obtient bien $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.

Pour la convergence normale, soit $K \subset D(z_0, R)$ compact. Il existe $\rho < R$ tel que $K \subset \overline{D}(z_0, \rho)$. Choisissons r avec $\rho < r < R$. Pour $z \in K$,

$$|a_n (z - z_0)^n| \leq \frac{M_r}{r^n} \rho^n = M_r \left(\frac{\rho}{r} \right)^n,$$

où $M_r = \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|$. Puisque $\rho/r < 1$, la série $\sum M_r (\rho/r)^n$ converge, ce qui prouve la convergence normale sur K . $\square$

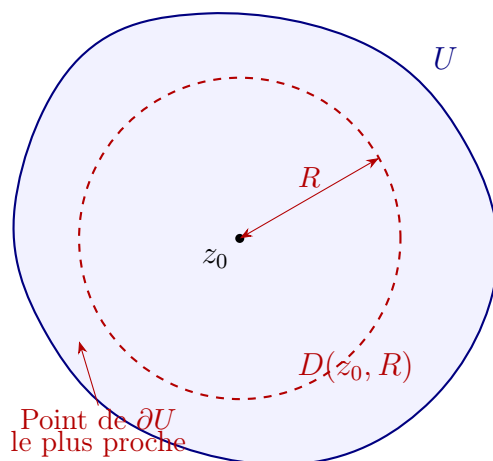


FIGURE 5.3 – Le rayon de convergence de la série de Taylor est au moins la distance de z_0 au bord de U .

Exemple 5.21 (Série de Taylor de $1/(1-z)$). La fonction $f(z) = \frac{1}{1-z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Autour de $z_0 = 0$, le plus grand disque contenu dans le domaine est $D(0, 1)$. On a

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1.$$

Le rayon de convergence est $R = 1 = d(0, \{1\}) = d(0, \mathbb{C} \setminus U)$.

Exemple 5.22 (Série de Taylor de $\text{Log}(1+z)$). La fonction $f(z) = \text{Log}(1+z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$. Autour de $z_0 = 0$, le rayon de convergence est $R = 1$ (la singularité la plus proche est $z = -1$). On a $f(0) = 0$, $f'(z) = \frac{1}{1+z}$, $f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+z)^n}$ pour $n \geq 1$, donc $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Ainsi

$$\text{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots, \quad |z| < 1.$$

5.11 Exercices

Exercice 5.1 (Calculs par la formule de Cauchy). Calculer les intégrales suivantes à l'aide de la formule intégrale de Cauchy ou de ses variantes pour les dérivées.

- a) $\oint_{|z|=3} \frac{\cos z}{z - \pi} dz$
- b) $\oint_{|z|=1} \frac{z^2 + 1}{z(z-2)} dz$
- c) $\oint_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} dz$

d) $\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^5} dz$

e) $\oint_{|z|=4} \frac{z}{(z-1)(z-3)} dz$

Exercice 5.2 (Théorème de Liouville et applications). **a)** Soit f entière telle que $|f(z)| \leq A + B|z|^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, où $A, B > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f est un polynôme de degré au plus n .

b) Soit f entière et injective. Montrer que $f(z) = az + b$ avec $a \neq 0$. *Indication* : étudier le comportement de f au voisinage de l'infini.

c) Soit f entière telle que $\operatorname{Re}(f(z)) \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que f est constante. *Indication* : considérer $g(z) = e^{f(z)}$.

Exercice 5.3 (Principe du maximum). **a)** Soit f holomorphe sur $\mathbb{D} = D(0, 1)$, continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, avec $|f(z)| = 1$ pour tout $z \in \mathbb{T}$. Montrer que f est constante ou que f admet au moins un zéro dans $\mathbb{D}$. *Indication* : appliquer le principe du minimum à f si f ne s'annule pas.

b) Soit f holomorphe sur $\mathbb{D}$ avec $|f(z)| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ et $f(0) = 0$. Montrer que $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ (lemme de Schwarz). *Indication* : appliquer le principe du maximum à $g(z) = f(z)/z$.

c) Soit f holomorphe et non constante sur un ouvert connexe U . Montrer que $|f|$ ne peut atteindre de minimum local strict en un point de U où f ne s'annule pas.

Exercice 5.4 (Propriété de la valeur moyenne). **a)** Soit $f(z) = z^2 + 3z + 1$. Vérifier directement la propriété de la valeur moyenne pour $z_0 = 0$ et $R = 1$.

b) Soit $u(x, y)$ une fonction harmonique sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$. En utilisant le fait que u est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe, montrer que u satisfait aussi la propriété de la valeur moyenne.

Exercice 5.5 (Morera et limites uniformes). Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert U qui converge uniformément sur tout compact de U vers une fonction $f: U \rightarrow \mathbb{C}$.

a) Montrer que f est continue sur U .

b) En utilisant le théorème de Morera, montrer que f est holomorphe sur U .

c) Montrer que $f'_n \rightarrow f'$ uniformément sur tout compact de U .

Exercice 5.6 (Série de Taylor et rayon de convergence). Déterminer la série de Taylor autour de $z_0 = 0$ et son rayon de convergence pour chacune des fonctions suivantes.

a) $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$

b) $f(z) = \frac{z}{(1-z)(1-2z)}$

c) $f(z) = \operatorname{Log}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$

d) $f(z) = e^{\sin z}$ (calculer les premiers termes)

Exercice 5.7 (Inégalités de Cauchy et applications). **a)** Soit f entière avec $|f(z)| \leq e^{|z|}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|f^{(n)}(0)| \leq \left(\frac{e}{n}\right)^n n!$ pour tout $n \geq 1$, en optimisant le choix de R dans l'inégalité de Cauchy.

- b)** Soit f holomorphe sur $D(0, R)$ avec $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leq M$ pour $|z| < R$. Montrer que $|f(z)| \leq \frac{M|z|}{R}$ pour $|z| < R$.
- c)** (*Inégalité de Cauchy généralisée*) Soit f holomorphe sur un ouvert contenant $\overline{D}(z_0, R)$ et soit $z \in D(z_0, R)$. Montrer que

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n! M_R}{(R - |z - z_0|)^n},$$

où $M_R = \max_{|\zeta - z_0| = R} |f(\zeta)|$.

Exercice 5.8 (Formule de Cauchy et intégrales réelles). En utilisant la formule intégrale de Cauchy, calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta}, \quad a > 1.$$

Indication : poser $z = e^{i\theta}$ et exprimer $\cos \theta$ en fonction de z et $\bar{z} = 1/z$ sur $\mathbb{T}$.

Chapitre 6

Séries de Laurent et Singularités Isolées

6.1 Introduction

Lorsqu'une fonction holomorphe présente des singularités isolées, le développement en série de Taylor ne suffit plus à la décrire au voisinage de ces points. La série de Laurent, qui autorise les puissances négatives, offre un outil adapté. Ce chapitre développe la théorie des séries de Laurent, classifie les singularités isolées, et aboutit au théorème de Casorati-Weierstrass.

6.2 Séries de Laurent : existence et unicité

Définition 6.1 (Couronne). Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$. La *couronne* (ou anneau) ouverte de centre z_0 et de rayons r_1, r_2 est

$$A(z_0; r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}.$$

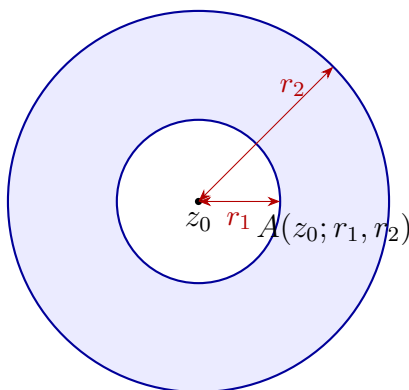


FIGURE 6.1 – Couronne ouverte $A(z_0; r_1, r_2)$.

Définition 6.2 (Série de Laurent). Une *série de Laurent* centrée en z_0 est une série de la forme

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n}_{\text{partie régulière}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}}_{\text{partie principale}}.$$

On dit qu'elle converge si les deux sous-séries convergent séparément.

Théorème 6.3 (Développement de Laurent). *Soit f holomorphe sur la couronne $A(z_0; r_1, r_2)$ avec $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$. Alors f admet un unique développement en série de Laurent*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad r_1 < |z - z_0| < r_2,$$

où les coefficients sont donnés par

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z},$$

pour tout $\rho \in (r_1, r_2)$, et C_ρ est le cercle $|\zeta - z_0| = \rho$ parcouru positivement. La convergence est normale sur toute couronne fermée $A(z_0; \rho_1, \rho_2)$ avec $r_1 < \rho_1 \leq \rho_2 < r_2$.

Démonstration. Soit $z \in A(z_0; r_1, r_2)$ fixé. Choisissons ρ_1, ρ_2 tels que $r_1 < \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2 < r_2$. Notons $C_1 = C_{\rho_1}$ et $C_2 = C_{\rho_2}$ les cercles de centre z_0 et de rayons ρ_1 et ρ_2 respectivement, parcourus dans le sens positif.

Étape 1 : Décomposition par la formule de Cauchy. Par le théorème de Cauchy appliqué à la couronne (en joignant les deux cercles par des fentes), on obtient

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Le signe moins devant la deuxième intégrale provient du fait que C_1 doit être parcouru dans le sens négatif dans le contour bordant la couronne.

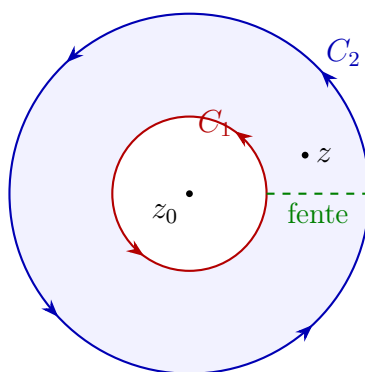


FIGURE 6.2 – Contour pour la preuve du théorème de Laurent : les deux cercles C_1 et C_2 reliés par une fente.

Étape 2 : Développement de l'intégrale sur C_2 . Pour $\zeta \in C_2$, on a $|z - z_0| < \rho_2 = |\zeta - z_0|$, donc comme dans la preuve de la série de Taylor,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}},$$

avec convergence uniforme en $\zeta \in C_2$. En intégrant terme à terme,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right] (z - z_0)^n.$$

C'est la partie régulière de la série de Laurent.

Étape 3 : Développement de l'intégrale sur C_1 . Pour $\zeta \in C_1$, on a $|\zeta - z_0| = \rho_1 < |z - z_0|$, donc cette fois on développe autrement :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{-1}{(z - z_0) - (\zeta - z_0)} = \frac{-1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} \\ &= - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^m}{(z - z_0)^{m+1}}, \end{aligned}$$

avec convergence uniforme en $\zeta \in C_1$. En intégrant :

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} f(\zeta)(\zeta - z_0)^m d\zeta \right] \frac{1}{(z - z_0)^{m+1}}.$$

En posant $n = -(m + 1)$, c'est-à-dire $m = -n - 1$, on obtient

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right] (z - z_0)^n.$$

C'est la partie principale.

Étape 4 : Indépendance du rayon. Par le théorème de Cauchy, les intégrales $\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$ ne dépendent pas de $\rho \in (r_1, r_2)$, car l'intégrande est holomorphe dans la couronne. On peut donc écrire les coefficients avec un seul rayon ρ quelconque.

Unicité. Supposons que $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n (z - z_0)^n$ sur la couronne. Multiplions par $(z - z_0)^{-k-1}$ et intégrons sur C_ρ :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} (\zeta - z_0)^{n-k-1} d\zeta.$$

Or $\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} (\zeta - z_0)^m d\zeta = \delta_{m,-1}$ (vaut 1 si $m = -1$, et 0 sinon). Donc le membre de droite vaut b_k , ce qui donne $b_k = a_k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

6.3 Exemples de développements de Laurent

Exemple 6.4 (Laurent de $\frac{1}{z(z-1)}$). Développons $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ en série de Laurent autour de $z_0 = 0$. La fonction a des singularités en $z = 0$ et $z = 1$. Il y a deux couronnes à considérer.

Région $0 < |z| < 1$: On décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{-1}{z} + \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z}.$$

Pour $|z| < 1$, $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, donc

$$f(z) = -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \dots = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n z^n,$$

avec $a_{-1} = -1$ et $a_n = -1$ pour $n \geq 0$.

Région $|z| > 1$: On écrit $\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-(n+1)}$ pour $|z| > 1$. Donc

$$f(z) = -\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^{-(n+1)} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} z^{-n}.$$

Exemple 6.5 (Laurent de $e^{1/z}$). La fonction $f(z) = e^{1/z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, c'est-à-dire sur la couronne $A(0; 0, +\infty)$. En remplaçant z par $1/z$ dans le développement de l'exponentielle, on obtient

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} z^{-2} + \frac{1}{3!} z^{-3} + \dots$$

La partie principale a une infinité de termes non nuls.

Exemple 6.6 (Laurent de $\frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)}$). Développons $f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)}$ en série de Laurent autour de $z_0 = 2$. La décomposition en éléments simples donne

$$f(z) = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z^2+1}.$$

Le premier terme est déjà sous forme de Laurent en $z_0 = 2$. Pour le second, on pose $w = z - 2$ et on écrit

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(w+2)^2+1} = \frac{1}{w^2+4w+5} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1+\frac{4w+w^2}{5}}.$$

Pour $|w|$ assez petit (en fait $|w| < \sqrt{5}$, la distance de 2 aux pôles $\pm i$), on développe en série géométrique :

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{4w+w^2}{5} \right)^n,$$

ce qui donne un développement en puissances positives de $(z-2)$. Ainsi, dans la

couronne $0 < |z - 2| < \sqrt{5}$, la série de Laurent est

$$f(z) = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{5} - \frac{4}{25}(z-2) + \dots$$

Exemple 6.7 (Laurent de $\frac{\sin z}{z^3}$). Pour $z \neq 0$,

$$\frac{\sin z}{z^3} = \frac{1}{z^3} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{6} + \frac{z^2}{120} - \dots$$

La partie principale est z^{-2} , c'est un pôle d'ordre 2 en $z = 0$.

6.4 Classification des singularités isolées

Définition 6.8 (Singularité isolée). Soit f holomorphe sur un ensemble de la forme $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ pour un certain $R > 0$. On dit que z_0 est une *singularité isolée* de f .

Définition 6.9 (Types de singularités). Soit z_0 une singularité isolée de f et $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ son développement de Laurent dans $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$. On distingue trois cas :

- (i) **Singularité éliminable** (ou effaçable) : $a_n = 0$ pour tout $n < 0$. Dans ce cas, f se prolonge en une fonction holomorphe sur $D(z_0, R)$ en posant $f(z_0) = a_0$.
- (ii) **Pôle d'ordre m** (avec $m \geq 1$) : $a_{-m} \neq 0$ et $a_n = 0$ pour tout $n < -m$. La partie principale est $\sum_{n=1}^m a_{-n}(z-z_0)^{-n}$.
- (iii) **Singularité essentielle** : $a_n \neq 0$ pour une infinité de valeurs de $n < 0$. La partie principale a une infinité de termes.

Remarque 6.10 (Terminologie). Un pôle d'ordre 1 est appelé *pôle simple*. Un pôle d'ordre 2 est un *pôle double*, etc. Le coefficient a_{-m} (pour un pôle d'ordre m) est parfois appelé le *coefficient dominant* de la partie principale.

6.5 Critère de Riemann pour les singularités éliminables

Théorème 6.11 (Critère de Riemann). Soit z_0 une singularité isolée de f . Alors z_0 est une singularité éliminable si et seulement si f est bornée au voisinage de z_0 , c'est-à-dire s'il existe $M, \delta > 0$ tels que $|f(z)| \leq M$ pour $0 < |z - z_0| < \delta$.

Démonstration. ($\Rightarrow$) Si z_0 est éliminable, f se prolonge en une fonction holomorphe sur $D(z_0, R)$, qui est continue donc bornée au voisinage de z_0 .

($\Leftarrow$) Supposons $|f(z)| \leq M$ pour $0 < |z - z_0| < \delta$. Montrons que $a_n = 0$ pour tout $n < 0$.

Pour $n < 0$ et $0 < \rho < \delta$,

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{\rho^{n+1}} \cdot 2\pi\rho = \frac{M}{\rho^n} = M\rho^{-n}.$$

Puisque $n < 0$, on a $-n > 0$, et en faisant $\rho \rightarrow 0^+$, $|a_n| \leq M\rho^{-n} \rightarrow 0$. Donc $a_n = 0$ pour tout $n < 0$. $\square$

Corollaire 6.12 (Critère par la limite). *La singularité z_0 est éliminable si et seulement si $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$.*

Démonstration. Si z_0 est éliminable, f est bornée au voisinage de z_0 , donc $(z - z_0)f(z) \rightarrow 0$. Réciproquement, si $(z - z_0)f(z) \rightarrow 0$, la fonction $g(z) = (z - z_0)f(z)$ (étendue par $g(z_0) = 0$) est holomorphe en z_0 avec $g(z_0) = 0$. Donc $g(z) = (z - z_0)h(z)$ avec h holomorphe en z_0 , et $f(z) = h(z)$ pour $z \neq z_0$, ce qui montre que z_0 est éliminable. $\square$

Exemple 6.13 (Singularité éliminable de $\frac{\sin z}{z}$). La fonction $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ a une singularité en $z = 0$. Puisque $\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \dots$, on a $f(z) = 1 - \frac{z^2}{6} + \dots$. Tous les coefficients de Laurent négatifs sont nuls : la singularité est éliminable. On pose $f(0) = 1$.

6.6 Ordre d'un pôle et partie principale

Proposition 6.14 (Caractérisation des pôles). *Soit z_0 une singularité isolée de f . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) z_0 est un pôle d'ordre m de f .
- (ii) $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$ et $(z - z_0)^m f(z)$ admet une limite finie non nulle en z_0 .
- (iii) Il existe une fonction g holomorphe au voisinage de z_0 avec $g(z_0) \neq 0$ telle que $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$ au voisinage de z_0 .
- (iv) La fonction $1/f$ a un zéro d'ordre m en z_0 .

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii). Si z_0 est un pôle d'ordre m , le développement de Laurent est $f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$ avec $a_{-m} \neq 0$. Donc $(z - z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z - z_0) + \dots \rightarrow a_{-m} \neq 0$. Et $|f(z)| \rightarrow +\infty$ car le terme dominant est $a_{-m}(z - z_0)^{-m}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). On pose $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ pour $z \neq z_0$ et $g(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) \neq 0$. La fonction g est holomorphe sur $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ et bornée au voisinage de z_0 , donc elle se prolonge holomorphiquement par le critère de Riemann.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). On a $1/f(z) = (z - z_0)^m/g(z)$ au voisinage de z_0 , et $g(z_0) \neq 0$, donc $1/f$ a un zéro d'ordre m en z_0 .

(iv) $\Rightarrow$ (i). Si $1/f$ a un zéro d'ordre m en z_0 , alors $1/f(z) = (z - z_0)^m h(z)$ avec h holomorphe et $h(z_0) \neq 0$. Donc $f(z) = 1/[(z - z_0)^m h(z)]$ et $1/h$ est holomorphe au voisinage de z_0 avec

$1/h(z_0) \neq 0$. Posons $g = 1/h$; alors $f(z) = g(z)/(z - z_0)^m$ et le développement de Taylor de g donne le développement de Laurent de f avec $a_{-m} = g(z_0) \neq 0$. $\square$

Définition 6.15 (Partie principale). Soit z_0 un pôle d'ordre m de f . La *partie principale* de f en z_0 est

$$P(z) = \sum_{n=1}^m \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0}.$$

Le coefficient a_{-1} est appelé le *résidu* de f en z_0 , noté $\text{Res}(f, z_0)$ ou $\text{Res}_{z_0} f$.

Exemple 6.16 (Pôles de $\frac{1}{\sin z}$). La fonction $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ a des pôles aux points $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Puisque $\sin z$ a un zéro simple en chaque z_k (car $\sin'(k\pi) = \cos(k\pi) = (-1)^k \neq 0$), f a un pôle simple en chaque z_k .

Pour $z_0 = 0$, la partie principale est $\frac{1}{z}$, car $\sin z = z - z^3/6 + \cdots$, donc $\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - z^2/6 + \cdots} = \frac{1}{z}(1 + z^2/6 + \cdots) = \frac{1}{z} + \frac{z}{6} + \cdots$. Le résidu en 0 est $\text{Res}(f, 0) = 1$.

6.7 Théorème de Casorati-Weierstrass

Théorème 6.17 (Casorati-Weierstrass). Soit z_0 une singularité essentielle de f . Alors pour tout $\varepsilon > 0$, l'image $f(D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\})$ est dense dans $\mathbb{C}$. En d'autres termes, pour tout $w \in \mathbb{C}$ et tout $\delta > 0$, il existe z avec $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ tel que $|f(z) - w| < \delta$.

Démonstration. Raisonnons par contraposée. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\})$ n'est pas dense dans $\mathbb{C}$. Alors il existe $w_0 \in \mathbb{C}$ et $\delta > 0$ tels que

$$|f(z) - w_0| \geq \delta \quad \text{pour tout } z \in D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}.$$

La fonction $g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0}$ est alors holomorphe sur $D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$ et satisfait $|g(z)| \leq 1/\delta$. Par le critère de Riemann (théorème 6.11), z_0 est une singularité éliminable de g .

Cas 1 : $g(z_0) \neq 0$ (après prolongement). Alors $f(z) = w_0 + 1/g(z)$ est holomorphe en z_0 , donc z_0 est une singularité éliminable de f .

Cas 2 : $g(z_0) = 0$. Alors g a un zéro d'ordre $m \geq 1$ en z_0 , et $f(z) = w_0 + 1/g(z)$ a un pôle d'ordre m en z_0 .

Dans les deux cas, z_0 n'est pas une singularité essentielle. Par contraposée, si z_0 est une singularité essentielle, alors l'image est dense. $\square$

Remarque 6.18 (Théorème de Picard). Le théorème de Casorati-Weierstrass est considérablement renforcé par le *grand théorème de Picard*, qui affirme que f prend en fait toute valeur de $\mathbb{C}$ à l'exception d'au plus une (une infinité de fois) dans tout voisinage épointé de z_0 . Par exemple, $e^{1/z}$ prend toute valeur sauf 0 au voisinage de 0.

Exemple 6.19 (Comportement de $e^{1/z}$ près de 0). La fonction $f(z) = e^{1/z}$ a une singularité essentielle en $z = 0$ (car la série de Laurent $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$ a une infinité de termes en puissances négatives).

Par le théorème de Casorati-Weierstrass, l'image de tout voisinage épointé de 0 est dense dans $\mathbb{C}$. Vérifions-le directement : soit $w_0 \in \mathbb{C}^*$. On cherche z proche de 0 tel que $e^{1/z} = w_0$, c'est-à-dire $1/z = \text{Log } w_0 + 2k\pi i$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Donc $z = \frac{1}{\text{Log } w_0 + 2k\pi i}$, et $z \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \pm\infty$. Ainsi f prend la valeur w_0 dans tout voisinage de 0. La seule valeur non atteinte est $w_0 = 0$ (car $e^w \neq 0$ pour tout w).

6.8 Développements de Laurent : exemples supplémentaires

Exemple 6.20 (Laurent de $\frac{1}{z^2 + 1}$ autour de $z_0 = i$). On a $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$. Autour de $z_0 = i$, posons $w = z - i$:

$$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{w(w + 2i)} = \frac{1}{2iw} \cdot \frac{1}{1 + w/(2i)}.$$

Pour $0 < |w| < 2$ (soit $0 < |z - i| < 2$), on développe :

$$\frac{1}{1 + w/(2i)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{w}{2i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2i)^n} w^n.$$

Donc

$$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2i)^n} (z - i)^{n-1} = \frac{1}{2i(z - i)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2i)^{n+2}} (z - i)^n.$$

Il y a un pôle simple en $z = i$ avec résidu $\text{Res}(f, i) = \frac{1}{2i}$.

Exemple 6.21 (Laurent de $z e^{1/(z-1)}$ autour de $z_0 = 1$). Posons $w = z - 1$, de sorte que $z = w + 1$. Alors

$$\begin{aligned} z e^{1/(z-1)} &= (w + 1) e^{1/w} = (w + 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! w^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w}{n! w^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! w^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! w^{n-1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! w^n}. \end{aligned}$$

En posant $m = n - 1$ dans la première somme :

$$z e^{1/(z-1)} = \sum_{m=-1}^{\infty} \frac{1}{(m+1)! w^m} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! w^n} = \frac{1}{w^{-1}} [\dots]$$

Plus explicitement, regroupons les termes. Pour $m \leq -1$ (c'est-à-dire les puissances négatives), la première somme contribue $\frac{1}{(m+1)! w^m}$ pour $m \geq -1$, c'est-à-dire un seul terme $\frac{1}{0! w^{-1}} = w$ (pour $m = -1$), ce qui n'est pas une puissance négative. Recalculons plus soigneusement :

$$\begin{aligned} (w+1)e^{1/w} &= we^{1/w} + e^{1/w} \\ &= w \left(1 + \frac{1}{w} + \frac{1}{2w^2} + \frac{1}{6w^3} + \dots \right) + \left(1 + \frac{1}{w} + \frac{1}{2w^2} + \frac{1}{6w^3} + \dots \right) \\ &= \left(w+1 + \frac{1}{2w} + \frac{1}{6w^2} + \dots \right) + \left(1 + \frac{1}{w} + \frac{1}{2w^2} + \frac{1}{6w^3} + \dots \right) \\ &= w+2 + \frac{3}{2w} + \frac{2}{3w^2} + \dots \end{aligned}$$

En revenant à $z - 1$:

$$z e^{1/(z-1)} = (z-1) + 2 + \frac{3}{2(z-1)} + \frac{2}{3(z-1)^2} + \dots$$

La partie principale a une infinité de termes, donc $z_0 = 1$ est une singularité essentielle. Le résidu est $a_{-1} = \frac{3}{2}$.

Exemple 6.22 (Laurent de $\cos\left(\frac{1}{z}\right)$). Pour $z \neq 0$, en remplaçant z par $1/z$ dans le développement de $\cos$:

$$\cos\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \frac{1}{z^{2n}} = 1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{24z^4} - \dots$$

Singularité essentielle en $z = 0$. Le résidu est $a_{-1} = 0$ (seules les puissances paires apparaissent).

6.9 Singularité à l'infini

Définition 6.23 (Singularité à l'infini). Soit f holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ pour un certain $R \geq 0$. On dit que f a une singularité à l'infini. On étudie la nature de cette singularité en considérant la fonction $g(w) = f(1/w)$, qui est holomorphe sur $D(0, 1/R) \setminus \{0\}$.

(i) ∞ est une *singularité éliminable* de f si 0 est une singularité éliminable de g .

- (ii) ∞ est un pôle d'ordre m de f si 0 est un pôle d'ordre m de g .
- (iii) ∞ est une singularité essentielle de f si 0 est une singularité essentielle de g .

Exemple 6.24 (Singularités à l'infini). a) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$: on a $g(w) = \frac{w^2}{1+w^2}$, qui a une singularité éliminable en $w = 0$ (avec $g(0) = 0$). Donc ∞ est une singularité éliminable de f .

b) $f(z) = z^3 + 2z$: on a $g(w) = \frac{1}{w^3} + \frac{2}{w}$, qui a un pôle d'ordre 3 en $w = 0$. Donc ∞ est un pôle d'ordre 3 de f (comme tout polynôme de degré 3).

c) $f(z) = e^z$: on a $g(w) = e^{1/w}$, qui a une singularité essentielle en $w = 0$. Donc ∞ est une singularité essentielle de e^z .

Proposition 6.25 (Laurent et singularité à l'infini). Soit f holomorphe sur $\{z : |z| > R\}$. Le développement de Laurent de f en $z_0 = 0$ dans la couronne $|z| > R$ est

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n.$$

Alors :

- ∞ est éliminable $\iff a_n = 0$ pour tout $n > 0 \iff f$ est bornée pour $|z|$ grand.
- ∞ est un pôle d'ordre m $\iff a_m \neq 0$ et $a_n = 0$ pour $n > m$.
- ∞ est une singularité essentielle $\iff a_n \neq 0$ pour une infinité de $n > 0$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que le développement de Laurent de $g(w) = f(1/w)$ en $w = 0$ est $g(w) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n w^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{-k} w^k$. Les puissances négatives de w (partie principale de g) correspondent aux puissances positives de z . $\square$

6.10 Résumé : tableau des singularités

	Éliminable	Pôle d'ordre m	Essentielle
Partie principale	nulle	finie (m termes)	infinie
$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$	existe (finie)	∞	n'existe pas
$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z)$	0 ($m \geq 1$)	fini $\neq 0$	n'existe pas
Comportement de $ f $	borné	$\rightarrow +\infty$	oscillation
Image de $D'(z_0, \varepsilon)$	$\approx f(z_0)$	$\approx \infty$	dense dans $\mathbb{C}$

TABLE 6.1 – Résumé comparatif des trois types de singularités isolées.

FIGURE 6.3 – Comportement schématique des trois types de singularités.

6.11 Exercices

Exercice 6.1 (Développements de Laurent). Déterminer le développement de Laurent des fonctions suivantes dans les régions indiquées.

a) $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ dans les couronnes $0 < |z| < 1$, $1 < |z| < 2$, et $|z| > 2$.

b) $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$ dans la couronne $0 < |z-1| < +\infty$.

c) $f(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ dans $|z| > 0$.

d) $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$ dans $0 < |z| < 2\pi$ (calculer les premiers termes).

Exercice 6.2 (Classification des singularités). Déterminer et classer les singularités isolées des fonctions suivantes.

a) $f(z) = \frac{z^3 - 1}{z - 1}$

b) $f(z) = \frac{1}{\cos z - 1}$

c) $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2}$

d) $f(z) = \frac{1}{z^2 \sin z}$

e) $f(z) = e^{1/(z^2+1)}$

f) $f(z) = \frac{z}{\sin^2 z}$

Exercice 6.3 (Singularités éliminables). a) Soit f holomorphe sur $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ et continue sur $D(z_0, R)$. Montrer que z_0 est une singularité éliminable.

b) Soit f holomorphe sur $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$. Montrer que z_0 est une singularité éliminable si et seulement si $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$.

c) Soit f holomorphe et bornée sur le demi-plan $\{\operatorname{Re}(z) > 0\} \setminus \{1\}$. Montrer que f se prolonge holomorphiquement en $z = 1$.

Exercice 6.4 (Pôles et résidus). Déterminer l'ordre des pôles et les résidus des fonctions suivantes.

a) $f(z) = \frac{z}{(z^2 + 1)^2}$ aux pôles $z = \pm i$.

b) $f(z) = \frac{1}{\sin^2 z}$ au pôle $z = 0$.

c) $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z-1)}$ aux pôles $z = 0$ et $z = 1$.

d) $f(z) = \frac{z^3}{(z-1)^2(z+2)}$ aux pôles $z = 1$ et $z = -2$.

Exercice 6.5 (Casorati-Weierstrass). **a)** Montrer directement (sans utiliser le théorème de Casorati-Weierstrass) que pour tout $w_0 \in \mathbb{C}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe z avec $0 < |z| < \varepsilon$ tel que $|\sin(1/z) - w_0| < \varepsilon$.

b) Soit f holomorphe sur $D(0, 1) \setminus \{0\}$ avec une singularité essentielle en 0. Montrer qu'il existe une suite (z_n) dans $D(0, 1) \setminus \{0\}$ telle que $z_n \rightarrow 0$ et $|f(z_n)| \rightarrow +\infty$.

c) Construire un exemple de fonction ayant une singularité essentielle en $z = 0$ et telle que $\operatorname{Re}(f(z)) > 0$ pour z dans un certain voisinage épointé de 0, ou montrer qu'un tel exemple n'existe pas.

Exercice 6.6 (Singularité à l'infini). Déterminer la nature de la singularité à l'infini des fonctions suivantes.

a) $f(z) = \frac{z^4 + z}{z^2 + 1}$

b) $f(z) = e^{1/z}$

c) $f(z) = \frac{z^2}{z^2 + 1}$

d) $f(z) = \tan z$

e) $f(z) = ze^z$

Exercice 6.7 (Principe de Casorati-Weierstrass et topologie). Soit f une fonction entière non polynomiale.

a) Montrer que f a une singularité essentielle à l'infini.

b) En déduire que pour tout $w \in \mathbb{C}$ et tout $R > 0$, il existe z avec $|z| > R$ tel que $|f(z) - w| < 1$. *Indication* : appliquer Casorati-Weierstrass à $g(w) = f(1/w)$.

c) En déduire le *petit théorème de Picard* : l'image d'une fonction entière non constante est $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}$ privé d'un point. (*Cet exercice ne demande pas une preuve complète de Picard, mais une discussion de ce que Casorati-Weierstrass implique.*)

Exercice 6.8 (Unicité du développement de Laurent). **a)** Soit $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ conver-

gente dans une couronne $A(0; r_1, r_2)$. Montrer que $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \cdot \rho^{-n}$ pour tout $\rho \in (r_1, r_2)$.

b) En déduire que si $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n z^n$ dans la même couronne, alors $a_n = b_n$ pour tout n .

c) Utiliser l'unicité pour trouver le développement de Laurent de $f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}$ dans $1 < |z| < 2$ sans calculer les intégrales de Cauchy directement.

Exercice 6.9 (Développements de Laurent par manipulation). Sans calculer les intégrales de Cauchy, déterminer les développements de Laurent indiqués en utilisant des développements connus et des manipulations algébriques.

a) $\frac{z+1}{z-1}$ dans $|z| > 1$. *Indication* : écrire $\frac{z+1}{z-1} = 1 + \frac{2}{z-1}$.

b) $\frac{1}{z^2 - 3z + 2}$ dans $1 < |z| < 2$. *Indication* : décomposer en éléments simples.

- c) $\operatorname{Log}\left(\frac{z-1}{z-2}\right)$ dans $|z| > 2$. *Indication* : écrire $\operatorname{Log}(1 - 1/z) - \operatorname{Log}(1 - 2/z)$ et utiliser le développement de $\operatorname{Log}(1 - w)$.
- d) $\frac{z}{(z-1)(z-2)(z-3)}$ dans $2 < |z| < 3$.

Chapitre 7

Théorème des Résidus et Applications

Contents

5.1	Introduction	69
5.2	Formule intégrale de Cauchy pour un disque	69
5.3	Formule intégrale de Cauchy — version générale	70
5.4	Formule de Cauchy pour les dérivées	71
5.5	Théorème de Morera	72
5.6	Inégalités de Cauchy	73
5.7	Théorème de Liouville	74
5.8	Théorème de la moyenne	75
5.9	Principe du maximum	75
5.10	Développement en série de Taylor	76
5.11	Exercices	78

Le théorème des résidus constitue l'un des résultats les plus puissants de l'analyse complexe. Il ramène le calcul d'intégrales curvilignes à un problème purement algébrique : la détermination de coefficients dans un développement en série de Laurent. Ce chapitre développe la théorie des résidus et démontre sa remarquable efficacité pour le calcul d'intégrales réelles qui résistent aux méthodes classiques.

7.1 Résidus : définition et calcul

7.1.1 Définition du résidu

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ privé d'un point isolé z_0 . Au voisinage de z_0 , la fonction f admet un développement en série de Laurent :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < R.$$

Définition 7.1 (Résidu en une singularité isolée). Soit f holomorphe sur un voisinage épointé de z_0 . Le **résidu** de f en z_0 est le coefficient a_{-1} du développement de Laurent

de f au voisinage de z_0 :

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) \, dz,$$

où γ est un cercle de centre z_0 , de rayon suffisamment petit, parcouru dans le sens direct.

Remarque 7.2. Le résidu est une notion intrinsèque : il ne dépend pas du choix du cercle γ , pourvu que celui-ci soit contenu dans le domaine d'holomorphic et n'entoure que la singularité z_0 . Plus généralement, γ peut être remplacé par tout lacet simple entourant z_0 une fois dans le sens positif.

7.1.2 Formules de calcul des résidus

Proposition 7.3 (Résidu en un pôle simple). *Si f possède un pôle simple en z_0 , alors :*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

Démonstration. Au voisinage de z_0 , on a $f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$. En multipliant par $(z - z_0)$:

$$(z - z_0) f(z) = a_{-1} + a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + \dots$$

et le passage à la limite $z \rightarrow z_0$ donne $a_{-1} = \operatorname{Res}(f, z_0)$. □

Proposition 7.4 (Résidu par quotient). *Si $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ où g et h sont holomorphes au voisinage de z_0 , avec $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ et $h'(z_0) \neq 0$, alors :*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Démonstration. On écrit :

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \cdot \frac{z - z_0}{h(z) - h(z_0)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}. \quad \square$$

Proposition 7.5 (Résidu en un pôle d'ordre n). *Si f possède un pôle d'ordre $n \geq 1$ en z_0 , alors :*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)].$$

Démonstration. La fonction $\varphi(z) = (z - z_0)^n f(z)$ est holomorphe au voisinage de z_0 avec $\varphi(z_0) \neq 0$. Son développement de Taylor est :

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k.$$

Or $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$, donc :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^{k-n}.$$

Le coefficient de $(z-z_0)^{-1}$ correspond à $k = n-1$:

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{\varphi^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}.$$

□

Remarque 7.6. Pour un pôle double ($n = 2$), la formule se réduit à :

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} [(z-z_0)^2 f(z)].$$

Exemple 7.7 (Calculs de résidus élémentaires). 1. $f(z) = \frac{e^z}{z^2+1}$. Les pôles sont $z = \pm i$, simples.

$$\text{Res}(f, i) = \frac{e^i}{2i}, \quad \text{Res}(f, -i) = \frac{e^{-i}}{-2i}.$$

2. $f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}$. Pôle double en 0, pôle simple en 1.

$$\text{Res}(f, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{z^2} = 1, \quad \text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{z-1} \right] = \frac{-1}{1} = -1.$$

3. $f(z) = \frac{\cos z}{z^3}$. On développe :

$$f(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2z} + \frac{z}{24} - \dots, \quad \text{donc } \text{Res}(f, 0) = -\frac{1}{2}.$$

7.2 Le théorème des résidus

Théorème 7.8 (Théorème des résidus). Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $\{z_1, \dots, z_N\}$ un ensemble fini de points de U , et $f: U \setminus \{z_1, \dots, z_N\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Si γ est un cycle dans $U \setminus \{z_1, \dots, z_N\}$ homologue à zéro dans U , alors :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^N \text{ind}(\gamma, z_k) \text{Res}(f, z_k).$$

Démonstration. Pour chaque k , soit $P_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}^{(k)}(z-z_k)^{-n}$ la partie principale du développement de Laurent de f en z_k . Posons $g(z) = f(z) - \sum_{k=1}^N P_k(z)$. En chaque z_k , la singularité de f est exactement compensée par P_k , et les autres P_j ($j \neq k$) sont holomorphes en z_k . Donc g se prolonge holomorphiquement à U entier.

Puisque γ est homologue à zéro dans U , le théorème de Cauchy donne $\oint_{\gamma} g(z) dz = 0$.

Donc :

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^N \oint_{\gamma} P_k(z) dz.$$

Par convergence uniforme sur γ :

$$\oint_{\gamma} P_k(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}^{(k)} \oint_{\gamma} (z - z_k)^{-n} dz.$$

Pour $n \geq 2$, $(z - z_k)^{-n}$ admet une primitive sur $\mathbb{C} \setminus \{z_k\}$, donc l'intégrale est nulle. Pour $n = 1$:

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z - z_k} = 2\pi i \operatorname{ind}(\gamma, z_k).$$

Ainsi $\oint_{\gamma} P_k(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_k) \operatorname{ind}(\gamma, z_k)$, et en sommant on obtient le résultat. $\square$

Corollaire 7.9 (Version pour les lacets simples). *Si γ est un lacet simple parcouru dans le sens direct entourant exactement les singularités $z_1, \dots, z_m$, alors :*

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}(f, z_k).$$

Exemple 7.10. Calculons $I = \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z-1)^2} dz$.

Les singularités $z = 0$ (pôle simple) et $z = 1$ (pôle double) sont dans $|z| < 2$.

Résidu en $z = 0$: $\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z}{(z-1)^2} = 1$.

Résidu en $z = 1$: $\operatorname{Res}(f, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left[\frac{e^z}{z} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{ze^z - e^z}{z^2} = 0$.

Donc $I = 2\pi i$.

7.3 Applications au calcul d'intégrales réelles

La puissance du théorème des résidus réside dans sa capacité à évaluer des intégrales réelles en les reliant à des intégrales complexes sur des contours fermés judicieusement choisis.

7.3.1 Intégrales de fractions rationnelles sur $\mathbb{R}$

Théorème 7.11 (Intégrales rationnelles sur $\mathbb{R}$). *Soit $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle telle que :*

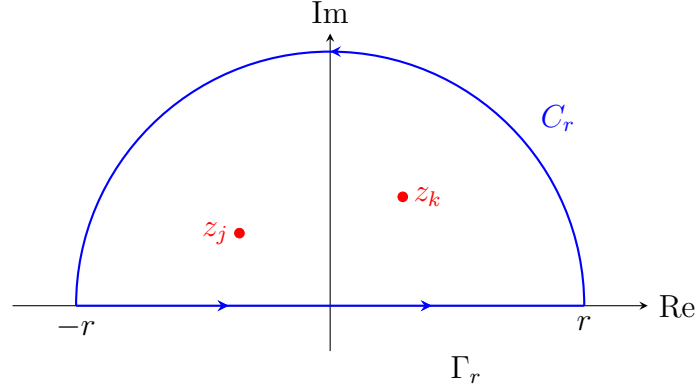
(i) Q n'a pas de zéro réel ;

(ii) $\deg Q \geq \deg P + 2$.

Alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{\substack{z_k \text{ pôle de } R \\ \operatorname{Im}(z_k) > 0}} \operatorname{Res}(R, z_k).$$

Démonstration. On considère le contour Γ_r formé du segment $[-r, r]$ et du demi-cercle $C_r = \{re^{i\theta} : \theta \in [0, \pi]\}$ parcouru dans le sens direct.



Pour r assez grand, tous les pôles de R dans le demi-plan supérieur sont à l'intérieur de Γ_r . Par le théorème des résidus :

$$\int_{-r}^r R(x) dx + \int_{C_r} R(z) dz = 2\pi i \sum_{\substack{z_k \\ \text{Im}(z_k) > 0}} \text{Res}(R, z_k).$$

Il suffit de montrer que $\int_{C_r} R(z) dz \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow +\infty$. Sur C_r , $|z| = r$ et la condition $\deg Q \geq \deg P + 2$ entraîne $|R(z)| = O(1/r^2)$. Donc :

$$\left| \int_{C_r} R(z) dz \right| \leq \pi r \cdot \sup_{z \in C_r} |R(z)| = O\left(\frac{1}{r}\right) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0. \quad \square$$

Exemple 7.12 (Intégrale de $1/(1+x^2)^2$). Calculons $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

La fraction $R(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2} = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$ a un pôle double en $z = i$ (dans le demi-plan supérieur) et en $z = -i$.

Résidu en $z = i$:

$$\text{Res}(R, i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(z+i)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow i} \frac{-2}{(z+i)^3} = \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{-2}{-8i} = \frac{1}{4i}.$$

Donc :

$$I = 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}.$$

Exemple 7.13 (Intégrale de $1/(1+x^4)$). Calculons $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$.

Les pôles de $\frac{1}{1+z^4}$ sont les racines quatrièmes de -1 : $z_k = e^{i(2k+1)\pi/4}$ pour $k = 0, 1, 2, 3$. Ceux dans le demi-plan supérieur sont :

$$z_0 = e^{i\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad z_1 = e^{3i\pi/4} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}.$$

Tous sont des pôles simples. Avec $h(z) = 1 + z^4$, $h'(z) = 4z^3$:

$$\operatorname{Res}(R, z_k) = \frac{1}{4z_k^3} = \frac{1}{4} \cdot z_k^{-3} = \frac{z_k}{4z_k^4} = \frac{z_k}{4(-1)} = -\frac{z_k}{4}.$$

Donc :

$$I = 2\pi i \left(-\frac{z_0}{4} - \frac{z_1}{4} \right) = -\frac{\pi i}{2} (z_0 + z_1) = -\frac{\pi i}{2} \cdot \frac{(1+i) + (-1+i)}{\sqrt{2}} = -\frac{\pi i}{2} \cdot \frac{2i}{\sqrt{2}} = -\frac{\pi i^2 \sqrt{2}}{1} \cdot \frac{1}{1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

7.3.2 Intégrales trigonométriques

Théorème 7.14 (Intégrales trigonométriques). *Soit $R(u, v)$ une fraction rationnelle en deux variables, sans pôle sur le cercle unité (paramétré par $(\cos \theta, \sin \theta)$). Alors :*

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz}.$$

Démonstration. On paramètre le cercle unité par $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Alors $dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta$, soit $d\theta = \frac{dz}{iz}$. De plus :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}.$$

La substitution transforme l'intégrale en une intégrale curviligne sur $\mathbb{T}$, évaluable par le théorème des résidus. $\square$

Exemple 7.15 (Intégrale trigonométrique classique). Calculons $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta}$.

Avec $z = e^{i\theta}$, $\cos \theta = \frac{z+z^{-1}}{2}$:

$$I = \oint_{\mathbb{T}} \frac{1}{2 + \frac{z+z^{-1}}{2}} \cdot \frac{dz}{iz} = \oint_{\mathbb{T}} \frac{2 dz}{iz(4 + z + z^{-1})} = \oint_{\mathbb{T}} \frac{2 dz}{i(z^2 + 4z + 1)}.$$

Les racines de $z^2 + 4z + 1 = 0$ sont $z = -2 \pm \sqrt{3}$. Seule $z_0 = -2 + \sqrt{3}$ vérifie $|z_0| < 1$ (car $|-2 + \sqrt{3}| \approx 0,27$).

C'est un pôle simple :

$$\operatorname{Res}\left(\frac{2}{i(z^2 + 4z + 1)}, z_0\right) = \frac{2}{i \cdot 2z_0 + 4i} = \frac{2}{i(2(-2 + \sqrt{3}) + 4)} = \frac{2}{2i\sqrt{3}} = \frac{1}{i\sqrt{3}}.$$

Donc :

$$I = 2\pi i \cdot \frac{1}{i\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}.$$

Exemple 7.16 (Intégrale avec $\cos^2$). Calculons $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \cos^2 \theta}$, avec $a > 0$, $b > 0$.

On utilise $\cos^2 \theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$, mais il est plus direct d'employer la substitution $z = e^{i\theta}$ avec $\cos^2 \theta = \left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^2 = \frac{z^2+2+z^{-2}}{4}$:

$$I = \oint_{\mathbb{T}} \frac{1}{a+b \frac{z^2+2+z^{-2}}{4}} \cdot \frac{dz}{iz} = \oint_{\mathbb{T}} \frac{4 dz}{iz(4a+2b+b(z^2+z^{-2}))} = \oint_{\mathbb{T}} \frac{4 dz}{i(bz^4+(4a+2b)z^2+b)/z}.$$

En posant $w = z^2$, l'intégrale se simplifie. Le dénominateur en z est $bz^4+(4a+2b)z^2+b$, dont les racines en $w = z^2$ sont :

$$w = \frac{-(4a+2b) \pm \sqrt{(4a+2b)^2 - 4b^2}}{2b} = \frac{-(2a+b) \pm 2\sqrt{a^2+ab}}{b}.$$

Pour $a = b = 1$: $w = \frac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{1}$, d'où $w_1 = -3 + 2\sqrt{2} \approx -0,17$, $w_2 = -3 - 2\sqrt{2} \approx -5,83$. Les pôles en z avec $|z| < 1$ donnent, après calcul des résidus :

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{a(a+b)}}.$$

7.3.3 Lemme de Jordan et intégrales oscillantes

Pour traiter des intégrales de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax} dx$ avec $a > 0$, la condition $\deg Q \geq \deg P + 2$ peut être affaiblie grâce au lemme de Jordan.

Lemme 7.17 (Lemme de Jordan). Soit $C_r = \{re^{i\theta} : \theta \in [0, \pi]\}$ le demi-cercle supérieur de rayon r , et soit $a > 0$. Si $M_r = \sup_{\theta \in [0, \pi]} |g(re^{i\theta})|$ et $M_r \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow +\infty$, alors :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{C_r} g(z)e^{iaz} dz = 0.$$

Démonstration. On paramètre $z = re^{i\theta}$, $dz = ire^{i\theta} d\theta$:

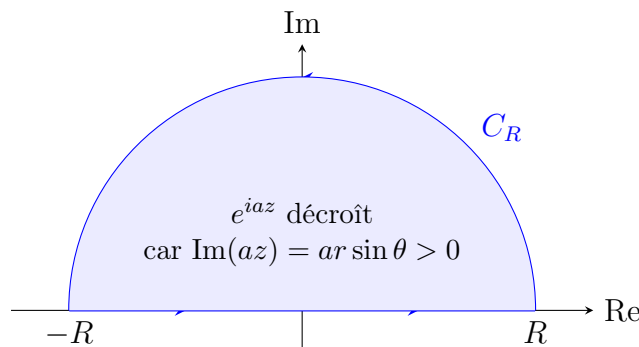
$$\left| \int_{C_r} g(z)e^{iaz} dz \right| \leq \int_0^\pi |g(re^{i\theta})| \cdot e^{-ar \sin \theta} \cdot r d\theta \leq M_r \cdot r \int_0^\pi e^{-ar \sin \theta} d\theta.$$

L'inégalité de Jordan $\sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$ pour $\theta \in [0, \pi/2]$ donne :

$$r \int_0^\pi e^{-ar \sin \theta} d\theta = 2r \int_0^{\pi/2} e^{-ar \sin \theta} d\theta \leq 2r \int_0^{\pi/2} e^{-2ar\theta/\pi} d\theta = 2r \cdot \frac{\pi}{2ar} (1 - e^{-ar}) = \frac{\pi}{a} (1 - e^{-ar}) \leq \frac{\pi}{a}.$$

$$\text{Donc } \left| \int_{C_r} g(z)e^{iaz} dz \right| \leq \frac{\pi M_r}{a} \rightarrow 0.$$

□



Théorème 7.18 (Intégrales de type Fourier). Soit $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle avec $\deg Q \geq \deg P + 1$ et Q sans zéro réel, et soit $a > 0$. Alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{\substack{z_k \text{ pôle de } R \\ \operatorname{Im}(z_k) > 0}} \operatorname{Res}(R(z)e^{iaz}, z_k).$$

Démonstration. On utilise le même contour en demi-cercle. Le lemme de Jordan avec $g(z) = R(z)$ assure que $M_r \rightarrow 0$ dès que $\deg Q \geq \deg P + 1$, et l'intégrale sur C_r tend vers zéro. $\square$

Exemple 7.19 (Intégrale de Fourier classique). Calculons $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx$.

On écrit $I = \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 1} dx \right)$. La fonction $\frac{e^{iz}}{z^2 + 1}$ a un pôle simple en $z = i$ dans le demi-plan supérieur :

$$\operatorname{Res} \left(\frac{e^{iz}}{z^2 + 1}, i \right) = \frac{e^{i \cdot i}}{2i} = \frac{e^{-1}}{2i}.$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 1} dx = 2\pi i \cdot \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}$, et :

$$I = \operatorname{Re} \left(\frac{\pi}{e} \right) = \frac{\pi}{e}.$$

Exemple 7.20 (Intégrale de $x \sin x / (x^2 + a^2)$). Calculons $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx$ pour $a > 0$.

On a $I = \operatorname{Im} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 + a^2} dx \right)$. Le pôle dans le demi-plan supérieur est $z = ia$:

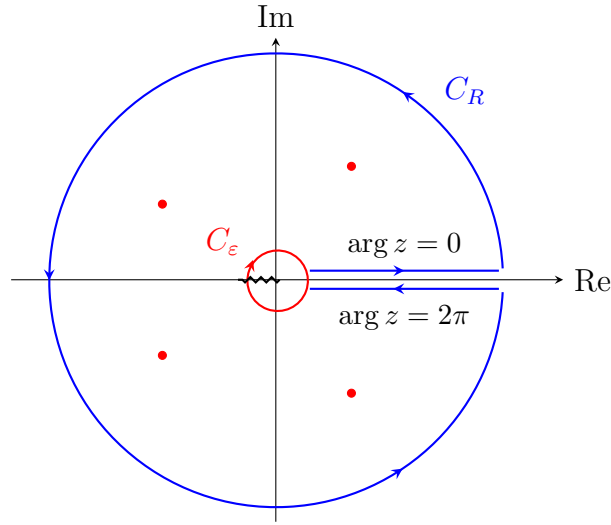
$$\operatorname{Res} \left(\frac{z e^{iz}}{z^2 + a^2}, ia \right) = \frac{ia \cdot e^{-a}}{2ia} = \frac{e^{-a}}{2}.$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 + a^2} dx = 2\pi i \cdot \frac{e^{-a}}{2} = \pi i e^{-a}$, et :

$$I = \operatorname{Im}(\pi i e^{-a}) = \pi e^{-a}.$$

7.3.4 Intégrales avec coupure logarithmique

Pour calculer des intégrales du type $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{Q(x)} dx$ avec $0 < \alpha < 1$ et Q un polynôme sans zéro sur $\mathbb{R}_+$, on utilise un contour en « trou de serrure » (ou *keyhole contour*).



Contour en trou de serrure

Théorème 7.21 (Intégrales de type Mellin). *Soit Q un polynôme de degré $d \geq 1$ sans zéro sur $[0, +\infty)$, et soit $0 < \alpha < d$ un réel non entier. Alors, en choisissant la détermination $z^{\alpha-1} = |z|^{\alpha-1} e^{i(\alpha-1)\arg z}$ avec $\arg z \in [0, 2\pi)$:*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{Q(x)} dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \sum_k \operatorname{Res} \left(\frac{z^{\alpha-1}}{Q(z)}, z_k \right),$$

où la somme porte sur tous les pôles z_k de $1/Q$ dans $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$.

Démonstration. On intègre $f(z) = \frac{z^{\alpha-1}}{Q(z)}$ sur le contour en trou de serrure formé de :

- le segment supérieur de ε à R (avec $\arg z = 0$) ;
- le grand cercle C_R de rayon R (sens direct) ;
- le segment inférieur de R à ε (avec $\arg z = 2\pi$) ;
- le petit cercle C_ε de rayon ε (sens indirect).

Par le théorème des résidus :

$$\int_\varepsilon^R \frac{x^{\alpha-1}}{Q(x)} dx + \int_{C_R} f(z) dz + \int_R^\varepsilon \frac{(xe^{2\pi i})^{\alpha-1}}{Q(x)} dx + \int_{C_\varepsilon} f(z) dz = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}(f, z_k).$$

Sur le bord inférieur, $z = xe^{2\pi i}$ donne $z^{\alpha-1} = x^{\alpha-1} e^{2\pi i(\alpha-1)}$. L'intégrale sur ce bord vaut :

$$-e^{2\pi i(\alpha-1)} \int_\varepsilon^R \frac{x^{\alpha-1}}{Q(x)} dx.$$

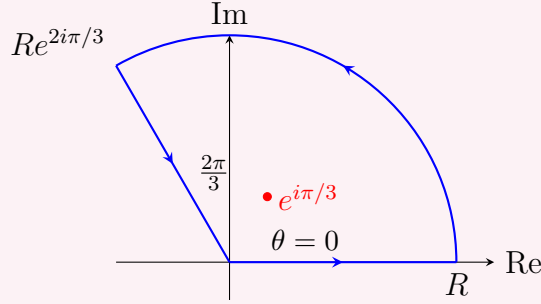
Les intégrales sur C_R et C_ε tendent vers 0 quand $R \rightarrow +\infty$ et $\varepsilon \rightarrow 0$ (grâce à la condition $0 < \alpha < d$). Il reste :

$$(1 - e^{2\pi i(\alpha-1)}) \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}(f, z_k).$$

Or $1 - e^{2\pi i(\alpha-1)} = 1 - e^{-2\pi i} e^{2\pi i\alpha} = 1 - e^{2\pi i\alpha}$ (car $e^{-2\pi i} = 1$), d'où le résultat. $\square$

Exemple 7.22 (Intégrale de $1/(1+x^3)$). Calculons $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

On pose $\alpha = 1$ (attention, $\alpha - 1 = 0$, c'est un cas limite). On utilise plutôt un contour sectoriel. Considérons le secteur d'angle $2\pi/3$:



Sur le rayon $\arg z = 2\pi/3$, on pose $z = te^{2i\pi/3}$ avec t de R à 0 :

$$\int_{\text{rayon}} \frac{dz}{1+z^3} = \int_R^0 \frac{e^{2i\pi/3} dt}{1+t^3 e^{2i\pi}} = -e^{2i\pi/3} \int_0^R \frac{dt}{1+t^3}.$$

Le seul pôle dans le secteur est $z_0 = e^{i\pi/3}$, pôle simple :

$$\text{Res}\left(\frac{1}{1+z^3}, e^{i\pi/3}\right) = \frac{1}{3z_0^2} = \frac{1}{3e^{2i\pi/3}}.$$

Par le théorème des résidus (l'intégrale sur l'arc tend vers 0) :

$$(1 - e^{2i\pi/3})I = 2\pi i \cdot \frac{1}{3e^{2i\pi/3}}.$$

Calculons $1 - e^{2i\pi/3} = 1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Son module est $\sqrt{3}$, et :

$$I = \frac{2\pi i}{3e^{2i\pi/3} \left(\frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{2\pi i}{3 \cdot e^{2i\pi/3} \cdot \sqrt{3} e^{-i\pi/6}} = \frac{2\pi i}{3\sqrt{3} e^{i\pi/2}} = \frac{2\pi i}{3\sqrt{3} \cdot i} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Exemple 7.23 (Intégrale de $x^{s-1}/(1+x)$). Calculons $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{1+x} dx$ pour $0 < s < 1$.

On applique le théorème 7.21 avec $Q(x) = 1+x$, $\alpha = s$. Le seul pôle de $1/(1+z)$ est $z = -1 = e^{i\pi}$ (dans la coupure $\arg z \in [0, 2\pi)$). On a :

$$\text{Res}\left(\frac{z^{s-1}}{1+z}, e^{i\pi}\right) = z^{s-1} \Big|_{z=e^{i\pi}} = e^{i\pi(s-1)} = -e^{i\pi s}.$$

Attendons : $z^{s-1} = e^{i\pi(s-1)}$ car $\arg(-1) = \pi$. Donc :

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i s}} \cdot (-e^{i\pi s}) = \frac{-2\pi i e^{i\pi s}}{1 - e^{2\pi i s}} = \frac{2\pi i e^{i\pi s}}{e^{2\pi i s} - 1} = \frac{2\pi i}{e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}} = \frac{2\pi i}{2i \sin(\pi s)} = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$

On retrouve le **complément d'Euler** : $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$.

7.4 Principe de l'argument et théorème de Rouché

Théorème 7.24 (Principe de l'argument). *Soit f méromorphe sur un ouvert U , avec des zéros $a_1, \dots, a_p$ (de multiplicités $m_1, \dots, m_p$) et des pôles $b_1, \dots, b_q$ (d'ordres $n_1, \dots, n_q$). Si γ est un lacet simple dans U ne passant par aucun zéro ni pôle, parcouru dans le sens direct, alors :*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^p m_j \cdot \text{ind}(\gamma, a_j) - \sum_{k=1}^q n_k \cdot \text{ind}(\gamma, b_k).$$

En particulier, si γ entoure tous les zéros et pôles :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z - P,$$

où $Z = \sum m_j$ est le nombre de zéros et $P = \sum n_k$ le nombre de pôles, comptés avec multiplicité.

Démonstration. Au voisinage d'un zéro a_j de multiplicité m_j , on écrit $f(z) = (z - a_j)^{m_j} g(z)$ avec g holomorphe et $g(a_j) \neq 0$. Alors :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_j}{z - a_j} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Donc $\frac{f'}{f}$ a un pôle simple en a_j de résidu m_j .

De même, au voisinage d'un pôle b_k d'ordre n_k , $f(z) = (z - b_k)^{-n_k} h(z)$ avec $h(b_k) \neq 0$, et $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-n_k}{z - b_k} + \frac{h'(z)}{h(z)}$. Le résidu en b_k est $-n_k$.

Le théorème des résidus donne alors le résultat. $\square$

Théorème 7.25 (Théorème de Rouché). *Soient f et g holomorphes sur un ouvert contenant le lacet simple γ et son intérieur. Si :*

$$|g(z)| < |f(z)| \quad \text{pour tout } z \in \gamma,$$

alors f et $f + g$ ont le même nombre de zéros (comptés avec multiplicité) à l'intérieur de γ .

Démonstration. Pour $t \in [0, 1]$, posons $F_t = f + tg$. Sur γ , $|tg(z)| \leq |g(z)| < |f(z)|$, donc

F_t ne s'annule pas sur γ . La quantité

$$N(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{F'_t(z)}{F_t(z)} dz$$

est entière et continue en t , donc constante. Ainsi $N(0) = N(1)$, ce qui signifie que $f = F_0$ et $f + g = F_1$ ont le même nombre de zéros. $\square$

Exemple 7.26 (Application du théorème de Rouché). Montrons que $p(z) = z^5 + 3z + 1$ a exactement un zéro dans $|z| < 1$.

Posons $f(z) = 3z$ et $g(z) = z^5 + 1$. Sur $|z| = 1$:

$$|f(z)| = 3, \quad |g(z)| \leq |z|^5 + 1 = 2 < 3 = |f(z)|.$$

Par Rouché, $p = f + g$ a le même nombre de zéros que $f(z) = 3z$ dans $|z| < 1$, à savoir exactement un zéro.

7.5 Exercices

Exercice 7.1 (Calcul de résidus). Calculer les résidus des fonctions suivantes aux points indiqués :

- a) $\frac{z^2}{(z^2 + 1)(z - 2)}$ en $z = i$, $z = -i$, $z = 2$;
- b) $\frac{e^z}{z^2(z + 1)^3}$ en $z = 0$ et $z = -1$;
- c) $\frac{\sin z}{z^4}$ en $z = 0$;
- d) $\frac{z}{e^z - 1}$ en $z = 2k\pi i$ pour $k \in \mathbb{Z}^*$.

Exercice 7.2 (Intégrales rationnelles). Calculer à l'aide du théorème des résidus :

- a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$;
- b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^3}$ pour $a > 0$;
- c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^n}$ pour $n \geq 1$ entier.

Exercice 7.3 (Intégrales trigonométriques). Calculer :

- a) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4 \cos \theta}$;
- b) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{5 - 4 \cos \theta} d\theta$;
- c) $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2}$ pour $a > 1$.

Exercice 7.4 (Intégrales de Fourier). Calculer à l'aide du lemme de Jordan :

- a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ (intégrale de Dirichlet — utiliser un contour avec indentation);
- b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{(x^2 + 1)^2} dx$;
- c) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2 + b^2} dx$ pour $a > 0, b > 0$.

Exercice 7.5 (Intégrale de Fresnel). En intégrant e^{-z^2} sur le contour formé du segment $[0, R]$, de l'arc $Re^{i\theta}$ ($\theta \in [0, \pi/4]$) et du segment de $Re^{i\pi/4}$ à 0, montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Exercice 7.6 (Intégrales avec coupure). Calculer :

- a) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} dx$;
- b) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x^2 + 1)^2} dx$;
- c) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{1/3}}{1 + x^2} dx$.

Exercice 7.7 (Rouché et localisation de zéros). a) Montrer que $z^7 - 5z^3 + 12$ n'a aucun zéro dans $|z| < 1$ et a exactement trois zéros dans $|z| < 2$.

b) Montrer que l'équation $e^z = 3z^2$ a exactement deux solutions dans $|z| < 1$.

c) Soit $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ un polynôme de degré n . Montrer que pour R assez grand, p a exactement n zéros dans $|z| < R$. (Retrouver le théorème fondamental de l'algèbre.)

Exercice 7.8 (Somme de séries par les résidus). En intégrant $\frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2}$ sur un carré de côté $2N + 1$ centré à l'origine, montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Indication : les résidus de $\pi \cot(\pi z)/z^2$ en $z = n \neq 0$ valent $1/n^2$.

Chapitre 8

Transformations Conformes

Contents

6.1	Introduction	81
6.2	Séries de Laurent : existence et unicité	81
6.3	Exemples de développements de Laurent	83
6.4	Classification des singularités isolées	85
6.5	Critère de Riemann pour les singularités éliminables	85
6.6	Ordre d'un pôle et partie principale	86
6.7	Théorème de Casorati-Weierstrass	87
6.8	Développements de Laurent : exemples supplémentaires	88
6.9	Singularité à l'infini	89
6.10	Résumé : tableau des singularités	90
6.11	Exercices	92

Les transformations conformes — applications holomorphes à dérivée non nulle — préservent les angles et les formes infinitésimales. Elles jouent un rôle central tant en mathématiques pures (uniformisation des surfaces de Riemann) qu'en physique mathématique (mécanique des fluides, électrostatique). Ce chapitre étudie les propriétés fondamentales des applications conformes, avec un accent sur les transformations de Möbius et leurs applications géométriques.

8.1 Applications conformes : généralités

8.1.1 Définition et conservation des angles

Définition 8.1 (Application conforme). Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Une application $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ est dite **conforme** si elle est holomorphe et $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$. On dit aussi que f est un **biholomorphisme** (ou application conforme) de U sur $V = f(U)$ si de plus f est bijective.

Proposition 8.2 (Conservation des angles). Une application conforme f préserve les angles orientés entre courbes. Plus précisément, si γ_1 et γ_2 sont deux courbes régulières se coupant en z_0 avec un angle α , alors $f \circ \gamma_1$ et $f \circ \gamma_2$ se coupent en $f(z_0)$ avec le

même angle α .

Démonstration. Soient $\gamma_1(t)$ et $\gamma_2(t)$ avec $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$. L'angle entre les deux courbes en z_0 est $\alpha = \arg(\gamma_2'(0)) - \arg(\gamma_1'(0))$.

Les courbes images ont pour vecteurs tangents :

$$(f \circ \gamma_j)'(0) = f'(z_0) \cdot \gamma_j'(0), \quad j = 1, 2.$$

L'angle entre les courbes images est :

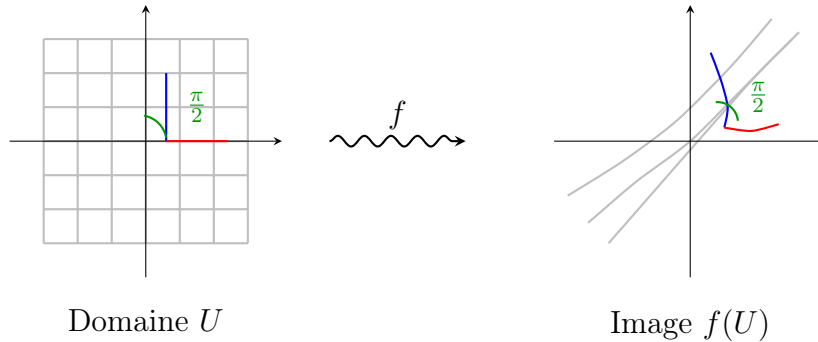
$$\begin{aligned} \arg(f'(z_0)\gamma_2'(0)) - \arg(f'(z_0)\gamma_1'(0)) &= [\arg f'(z_0) + \arg \gamma_2'(0)] - [\arg f'(z_0) + \arg \gamma_1'(0)] \\ &= \arg \gamma_2'(0) - \arg \gamma_1'(0) = \alpha. \end{aligned}$$

L'angle est préservé car $f'(z_0) \neq 0$ assure que la multiplication par $f'(z_0)$ est une similitude directe non dégénérée. $\square$

Remarque 8.3. Géométriquement, la dérivée $f'(z_0)$ agit par multiplication :

- $|f'(z_0)|$ est le *facteur d'échelle* local (dilatation) ;
- $\arg f'(z_0)$ est l'*angle de rotation* local.

Ainsi une application conforme est, infinitésimalement, une similitude directe : elle dilate et tourne, sans cisailer ni refléter.



8.1.2 Exemples fondamentaux

Exemple 8.4 (Transformations affines). Les applications conformes les plus simples sont :

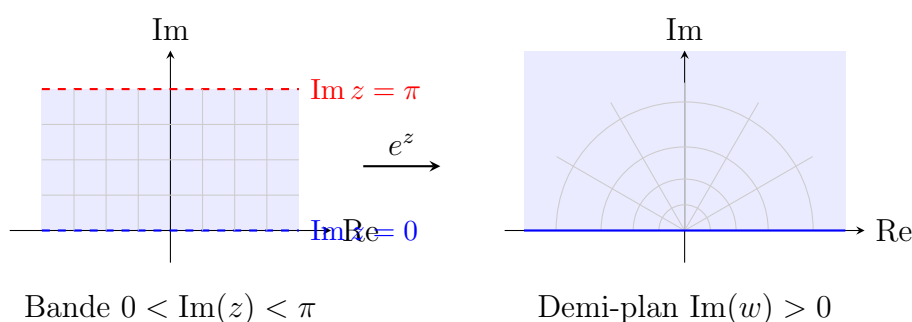
1. **Translation** : $f(z) = z + b$, $b \in \mathbb{C}$. Déplace le plan sans déformation.
2. **Rotation** : $f(z) = e^{i\theta}z$, $\theta \in \mathbb{R}$. Rotation d'angle θ autour de l'origine.
3. **Homothétie** : $f(z) = \lambda z$, $\lambda > 0$. Dilatation de rapport λ .
4. **Similitude directe** : $f(z) = az + b$, $a \neq 0$. Composition d'une rotation, d'une homothétie et d'une translation.

Toutes ces applications sont conformes sur $\mathbb{C}$ entier (et bijectives).

Exemple 8.5 (La fonction puissance). L'application $f(z) = z^n$ ($n \geq 2$ entier) est holomorphe sur $\mathbb{C}$ mais n'est pas conforme en $z = 0$ (car $f'(0) = 0$). Elle multiplie les angles par n en l'origine : le secteur $\{0 < \arg z < \pi/n\}$ est envoyé sur le demi-plan supérieur.

Exemple 8.6 (La fonction exponentielle). L'application $f(z) = e^z$ est conforme sur $\mathbb{C}$ entier (car $f'(z) = e^z \neq 0$). Elle envoie :

- la bande $\{0 < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$ sur le demi-plan supérieur ;
- les droites horizontales $\operatorname{Im}(z) = c$ sur les demi-droites d'angle c ;
- les droites verticales $\operatorname{Re}(z) = a$ sur les cercles $|w| = e^a$.



Exemple 8.7 (L'inversion $z \mapsto 1/z$). L'application $f(z) = 1/z$ est un biholomorphisme de $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sur lui-même. Elle est son propre inverse ($f \circ f = \operatorname{id}$). Elle envoie :

- les cercles ne passant pas par 0 sur des cercles ;
- les cercles passant par 0 sur des droites (et réciproquement) ;
- le disque unité $\mathbb{D}$ sur l'extérieur du disque unité, et vice versa.

8.2 Transformations de Möbius

8.2.1 Définition et propriétés algébriques

Définition 8.8 (Transformation de Möbius). Une **transformation de Möbius** (ou *homographie*) est une application de la forme :

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Elle définit une bijection de la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sur elle-même, avec les conventions $T(-d/c) = \infty$ et $T(\infty) = a/c$ (si $c \neq 0$), ou $T(\infty) = \infty$ (si $c = 0$).

Remarque 8.9. On associe à T la matrice $M_T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{GL}_2(\mathbb{C})$. Deux matrices M et λM ($\lambda \neq 0$) définissent la même transformation. Le groupe des transforma-

tions de Möbius est donc isomorphe au groupe projectif $\text{PGL}_2(\mathbb{C}) = \text{GL}_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^*$. La composition correspond au produit matriciel :

$$T_1 \circ T_2 \longleftrightarrow M_{T_1} \cdot M_{T_2}.$$

L'inverse de $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ est $T^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$.

Proposition 8.10 (Décomposition des transformations de Möbius). *Toute transformation de Möbius est la composée de translations, rotations-homothéties et d'au plus une inversion $z \mapsto 1/z$.*

Démonstration. Si $c = 0$, alors $T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$, qui est une similitude directe.

Si $c \neq 0$, on effectue la division euclidienne :

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c^2} \cdot \frac{1}{z+d/c}.$$

C'est la composée : $z \mapsto z + d/c$ (translation), puis $z \mapsto 1/z$ (inversion), puis $z \mapsto -\frac{ad-bc}{c^2}z$ (similitude), puis $z \mapsto z + a/c$ (translation). $\square$

Théorème 8.11 (Transformations de Möbius et cercles généralisés). *Les transformations de Möbius envoient les cercles généralisés (cercles et droites dans $\widehat{\mathbb{C}}$) sur des cercles généralisés.*

Démonstration. Par la proposition 8.10, il suffit de le vérifier pour les translations, les similitudes et l'inversion $z \mapsto 1/z$.

Pour les translations et similitudes, c'est évident (les cercles et droites sont préservés par ces applications).

Pour l'inversion, un cercle généralisé est l'ensemble des points vérifiant $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$ avec $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, ($B^2 + C^2 > 4AD$). En coordonnées complexes, cela s'écrit :

$$Az\bar{z} + \text{Re}(Ez) + D = 0, \quad E = B - iC.$$

Si $w = 1/z$, alors $z = 1/w$ et l'équation devient :

$$\frac{A}{w\bar{w}} + \text{Re}\left(\frac{E}{w}\right) + D = 0 \iff Dw\bar{w} + \text{Re}(\bar{E}w) + A = 0,$$

qui est à nouveau l'équation d'un cercle généralisé. $\square$

8.2.2 Birapport et action triple transitive

Définition 8.12 (Birapport). Le **birapport** de quatre points distincts $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ est :

$$(z_1, z_2; z_3, z_4) = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}.$$

Si l'un des points est ∞ , on prend la limite naturelle, par exemple $(\infty, z_2; z_3, z_4) =$

$$\frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}.$$

Théorème 8.13 (Invariance du birapport). *Les transformations de Möbius préservent le birapport : si T est une transformation de Möbius, alors :*

$$(T(z_1), T(z_2); T(z_3), T(z_4)) = (z_1, z_2; z_3, z_4).$$

Démonstration. Il suffit de vérifier pour les générateurs (translations, similitudes, inversion). Pour une translation $T(z) = z + b$: chaque différence $T(z_i) - T(z_j) = z_i - z_j$ est inchangée, donc le birapport est préservé. Pour une similitude $T(z) = az$: chaque différence est multipliée par a , et les facteurs a se simplifient dans le rapport. Pour l'inversion $T(z) = 1/z$: $T(z_i) - T(z_j) = \frac{z_j - z_i}{z_i z_j}$, et les dénominateurs se simplifient dans le birapport. $\square$

Théorème 8.14 (Triple transitivité). *Pour tout triplet de points distincts (z_1, z_2, z_3) et tout triplet (w_1, w_2, w_3) dans $\widehat{\mathbb{C}}$, il existe une unique transformation de Möbius T telle que $T(z_k) = w_k$ pour $k = 1, 2, 3$.*

Démonstration. Existence. La transformation $S(z) = (z, z_1; z_2, z_3)$ envoie $z_1 \mapsto 0$, $z_2 \mapsto 1$, $z_3 \mapsto \infty$. De même, soit $U(w) = (w, w_1; w_2, w_3)$, qui envoie $w_1 \mapsto 0$, $w_2 \mapsto 1$, $w_3 \mapsto \infty$. Alors $T = U^{-1} \circ S$ convient.

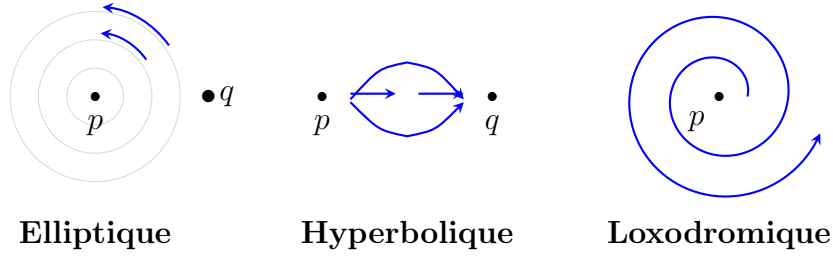
Unicité. Si T_1 et T_2 conviennent, alors $T_2^{-1} \circ T_1$ fixe z_1, z_2, z_3 , donc fixe trois points distincts. Or une transformation de Möbius non triviale a au plus deux points fixes (car $\frac{az+b}{cz+d} = z$ conduit à une équation de degré au plus 2). Donc $T_2^{-1} \circ T_1 = \text{id}$. $\square$

8.2.3 Points fixes et classification

Définition 8.15 (Classification des transformations de Möbius). Soit $T \neq \text{id}$ une transformation de Möbius. Les points fixes de T sont les solutions de $T(z) = z$, soit $cz^2 + (d - a)z - b = 0$. On distingue :

1. **Parabolique** : un seul point fixe (discriminant nul). La matrice associée a une seule valeur propre. Exemples : les translations.
2. **Elliptique** : deux points fixes, avec multiplicateur $\lambda = \frac{T'(\text{pt fixe}_1)}{1}$ de module $|\lambda| = 1$. Exemples : les rotations.
3. **Hyperbolique** : deux points fixes, avec multiplicateur réel positif $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$. Exemples : les homothéties.
4. **Loxodromique** : deux points fixes, avec multiplicateur $\lambda \notin \mathbb{R}_+$ et $|\lambda| \neq 1$. Cas général.

Remarque 8.16. Toute transformation de Möbius avec deux points fixes p, q est conjuguée à $w \mapsto \lambda w$ par la transformation qui envoie $p \mapsto 0$ et $q \mapsto \infty$. Le nombre λ est le *multiplicateur*.



8.3 La transformation de Cayley

Définition 8.17 (Transformation de Cayley). La **transformation de Cayley** est la transformation de Möbius :

$$\varphi(z) = \frac{z - i}{z + i}.$$

Théorème 8.18 (Propriétés de la transformation de Cayley). *La transformation de Cayley réalise un biholomorphisme :*

$$\varphi: \{\operatorname{Im}(z) > 0\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D} = \{|w| < 1\}.$$

Son inverse est $\varphi^{-1}(w) = i \frac{1+w}{1-w}$. De plus :

- (i) φ envoie l'axe réel $\mathbb{R}$ sur le cercle unité $\mathbb{T}$ (privé de 1) ;
- (ii) $\varphi(0) = -1$, $\varphi(\infty) = 1$, $\varphi(i) = 0$;
- (iii) $\varphi(-1) = \frac{-1-i}{-1+i} = i$, $\varphi(1) = \frac{1-i}{1+i} = -i$.

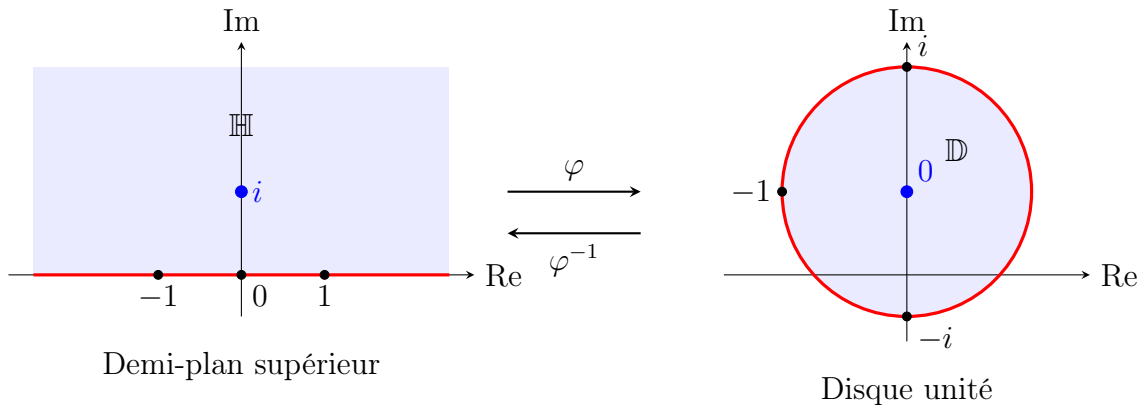
Démonstration. Pour z avec $\operatorname{Im}(z) > 0$, montrons que $|\varphi(z)| < 1$. Posons $z = x + iy$ avec $y > 0$:

$$|\varphi(z)|^2 = \frac{|z - i|^2}{|z + i|^2} = \frac{x^2 + (y - 1)^2}{x^2 + (y + 1)^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2y + 1}{x^2 + y^2 + 2y + 1} < 1,$$

car le numérateur est strictement inférieur au dénominateur (la différence est $-4y < 0$).

Pour $z \in \mathbb{R}$ (i.e. $y = 0$), $|\varphi(z)|^2 = \frac{x^2+1}{x^2+1} = 1$, donc $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{T}$.

L'inverse se calcule en résolvant $w = \frac{z-i}{z+i}$ en $z : w(z+i) = z-i$, soit $z(w-1) = -i(w+1)$, d'où $z = i \frac{1+w}{1-w}$. $\square$



Proposition 8.19 (Automorphismes du disque). *Tout automorphisme (biholomorphisme sur lui-même) du disque unité $\mathbb{D}$ est de la forme :*

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad \theta \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{D}.$$

Démonstration. Soit $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ un automorphisme, et posons $a = f^{-1}(0)$. L'automorphisme de Blaschke $B_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ vérifie $B_a(a) = 0$. Donc $g = f \circ B_a^{-1}$ est un automorphisme de $\mathbb{D}$ fixant l'origine.

Par le lemme de Schwarz, $|g(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. En appliquant le même raisonnement à $g^{-1}: |g^{-1}(w)| \leq |w|$, soit $|z| \leq |g(z)|$. Donc $|g(z)| = |z|$, et le cas d'égalité du lemme de Schwarz donne $g(z) = e^{i\theta}z$. Ainsi $f = g \circ B_a$, ce qui donne la forme annoncée. $\square$

Corollaire 8.20 (Automorphismes du demi-plan). *Tout automorphisme du demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{\operatorname{Im}(z) > 0\}$ est de la forme :*

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc > 0.$$

Le groupe $\operatorname{Aut}(\mathbb{H})$ est isomorphe à $\operatorname{PSL}_2(\mathbb{R})$.

8.4 Le théorème de Riemann

Théorème 8.21 (Théorème de représentation conforme de Riemann). *Soit $U \subsetneq \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe non vide, distinct de $\mathbb{C}$. Alors il existe un biholomorphisme $f: U \rightarrow \mathbb{D}$. De plus, pour tout $z_0 \in U$, il existe un unique tel biholomorphisme f vérifiant $f(z_0) = 0$ et $f'(z_0) > 0$.*

Remarque 8.22. Ce théorème fondamental affirme que tous les ouverts simplement connexes (différents de $\mathbb{C}$) sont conformément équivalents. Sa preuve complète, due à Koebe (1912) et reposant sur le théorème de Montel, dépasse le cadre de ce cours. Nous en donnons les grandes lignes :

- Étape 1.** On considère la famille $\mathcal{F}$ de toutes les injections holomorphes $f: U \rightarrow \mathbb{D}$ avec $f(z_0) = 0$.
- Étape 2.** On montre que $\mathcal{F}$ est non vide (en utilisant l'hypothèse $U \neq \mathbb{C}$ et l'existence d'une racine carrée holomorphe).
- Étape 3.** On prend $f \in \mathcal{F}$ maximisant $|f'(z_0)|$ (l'existence est assurée par le théorème de Montel : $\mathcal{F}$ est une famille normale).
- Étape 4.** On montre que ce f est surjectif, sinon on pourrait construire un élément de $\mathcal{F}$ avec une dérivée strictement plus grande.

Remarque 8.23. L'hypothèse $U \neq \mathbb{C}$ est essentielle : $\mathbb{C}$ n'est pas conformément équivalent à $\mathbb{D}$. En effet, toute application holomorphe bornée sur $\mathbb{C}$ est constante (théorème

de Liouville).

8.5 Applications conformes classiques

Le théorème de Riemann garantit l'existence de biholomorphismes, mais ne les construit pas explicitement. Voici un catalogue de transformations conformes classiques, indispensables en pratique.

8.5.1 La fonction de Joukowski

Définition 8.24 (Transformation de Joukowski). La **transformation de Joukowski** est :

$$J(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

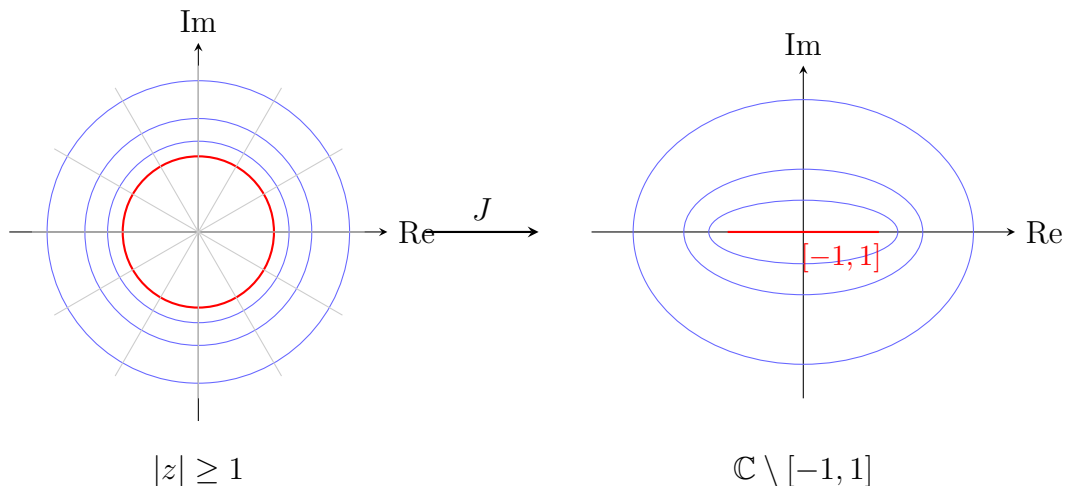
Proposition 8.25. *La transformation de Joukowski :*

- (i) est conforme sur $\mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$ (les points critiques sont ± 1) ;
- (ii) envoie le cercle $|z| = r > 1$ sur l'ellipse $\frac{u^2}{\left(\frac{r+r^{-1}}{2}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{r-r^{-1}}{2}\right)^2} = 1$;
- (iii) réalise un biholomorphisme de $\{|z| > 1\}$ sur $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Démonstration. On a $J'(z) = \frac{1}{2}(1 - z^{-2})$, qui s'annule en $z = \pm 1$. Pour $z = re^{i\theta}$ avec $r > 1$:

$$J(re^{i\theta}) = \frac{r + r^{-1}}{2} \cos \theta + i \frac{r - r^{-1}}{2} \sin \theta,$$

ce qui décrit une ellipse de demi-axes $a = \frac{r+r^{-1}}{2}$ et $b = \frac{r-r^{-1}}{2}$. Pour la bijectivité sur $\{|z| > 1\}$: si $J(z_1) = J(z_2)$ alors $z_1 + 1/z_1 = z_2 + 1/z_2$, donc $(z_1 - z_2)(1 - 1/(z_1 z_2)) = 0$, soit $z_1 = z_2$ ou $z_1 z_2 = 1$. Comme $|z_1|, |z_2| > 1$, la seconde possibilité est exclue. $\square$



8.5.2 Bandes, secteurs et demi-plans

Exemple 8.26 (Secteur angulaire vers demi-plan). Le secteur $S_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \alpha\}$ (avec $0 < \alpha \leq 2\pi$) est envoyé sur le demi-plan supérieur par :

$$f(z) = z^{\pi/\alpha}.$$

En effet, si $z = re^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \alpha$, alors $f(z) = r^{\pi/\alpha} e^{i\pi\theta/\alpha}$ et $0 < \pi\theta/\alpha < \pi$, donc $\operatorname{Im}(f(z)) > 0$.

Exemple 8.27 (Bande vers demi-plan). La bande horizontale $B = \{z : 0 < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$ est envoyée sur le demi-plan supérieur par $f(z) = e^z$ (cf. exemple 8.6).

Exemple 8.28 (Bande verticale vers disque). La bande verticale $V = \{z : -\pi/2 < \operatorname{Re}(z) < \pi/2\}$ est envoyée sur le disque par la composée : d'abord $z \mapsto iz$ (rotation de $\pi/2$, transformant V en la bande horizontale $\{0 < \operatorname{Im}(w) < \pi/2\}$), puis $w \mapsto e^{2w}$ (envoi sur le demi-plan supérieur, en ajustant), puis la transformation de Cayley. Plus directement :

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{e^z + 1} = \tanh(z/2)$$

envoie la bande $\{-\pi < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$ sur $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$. Avec un ajustement, $g(z) = \tanh(z)$ réalise une application conforme de la bande $\{-\pi/4 < \operatorname{Im}(z) < \pi/4\}$ sur un domaine du disque.

Exemple 8.29 (Lentille). Une **lentille** est l'intersection de deux disques. Considérons la lentille délimitée par deux arcs de cercle passant par -1 et 1 avec des angles intérieurs α en ces points. La transformation :

$$f(z) = \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{\pi/\alpha}$$

envoie cette lentille sur le demi-plan supérieur. En effet, $g(z) = \frac{1+z}{1-z}$ envoie $-1 \mapsto 0$, $1 \mapsto \infty$ et transforme la lentille en un secteur d'angle α , puis $w \mapsto w^{\pi/\alpha}$ ouvre ce secteur en demi-plan.

8.5.3 Tableau récapitulatif

Domaine source	Domaine image	Application
Demi-plan $\mathbb{H}$	Disque $\mathbb{D}$	$\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}$
Secteur $0 < \arg z < \alpha$	Demi-plan $\mathbb{H}$	$z^{\pi/\alpha}$
Bande $0 < \operatorname{Im} z < \pi$	Demi-plan $\mathbb{H}$	e^z
Bande $0 < \operatorname{Im} z < h$	Demi-plan $\mathbb{H}$	$e^{\pi z/h}$
$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$	Bande $-\pi < \operatorname{Im} w < \pi$	$\operatorname{Log} z$
$\{ z > 1\}$	$\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$	$\frac{1}{2}(z + 1/z)$
$\mathbb{D}$	$\mathbb{D}$	$e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$

8.6 Exercices

Exercice 8.1 (Transformations de Möbius élémentaires). a) Trouver la transformation de Möbius qui envoie $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto i$, $\infty \mapsto -1$.

b) Trouver la transformation de Möbius qui envoie le cercle $|z| = 1$ sur l'axe réel, avec $1 \mapsto 0$, $i \mapsto 1$, $-1 \mapsto \infty$.

c) Montrer que la transformation $T(z) = \frac{z-1}{z+1}$ envoie le demi-plan $\operatorname{Re}(z) > 0$ sur le disque $|w| < 1$.

Exercice 8.2 (Birapport). a) Calculer le birapport $(0, 1; 2, \infty)$.

b) Montrer que quatre points z_1, z_2, z_3, z_4 sont cocycliques (sur un même cercle généralisé) si et seulement si leur birapport est réel.

c) Soit T une transformation de Möbius fixant 0 et ∞ . Montrer que $T(z) = \lambda z$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Exercice 8.3 (Points fixes et classification). Classifier les transformations de Möbius suivantes (parabolique, elliptique, hyperbolique, loxodromique) et déterminer leurs points fixes :

a) $T(z) = \frac{2z+1}{z+1}$;

b) $T(z) = \frac{3z-2}{z}$;

c) $T(z) = \frac{(1+i)z}{z+i}$;

d) $T(z) = z + 1$.

Exercice 8.4 (Automorphismes du disque). a) Montrer que $B_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ envoie $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{D}$ et $\mathbb{T}$ sur $\mathbb{T}$ pour tout $a \in \mathbb{D}$.

b) Calculer $B_a \circ B_a$ et vérifier que $B_a^{-1} = B_{-a}$ (à rotation près).

c) Soit $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ holomorphe avec $f(0) = 0$ et $f(a) = 0$ pour un $a \neq 0$. Montrer que $|f'(0)| \leq |a|$.

Exercice 8.5 (Construction d'applications conformes). Construire explicitement des biholomorphismes entre les domaines suivants et $\mathbb{D}$:

- a) le quart de plan $\{z : \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$;
- b) la bande $\{z : 0 < \operatorname{Im}(z) < 1\}$;
- c) le domaine $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ (plan coupé) ;
- d) le demi-disque $\{z : |z| < 1, \operatorname{Im}(z) > 0\}$;
- e) l'intersection des disques $|z - 1| < 2$ et $|z + 1| < 2$.

Indication : procéder par étapes, en composant des transformations du tableau récapitulatif.

Exercice 8.6 (Formule de Schwarz–Christoffel). La formule de Schwarz–Christoffel donne l'application conforme du demi-plan supérieur sur un polygone à n sommets. Pour un rectangle de sommets $0, K, K + iK', iK'$, l'application conforme du demi-plan supérieur est :

$$f(z) = C \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}}$$

où $0 < k < 1$ et C est une constante.

- a) Vérifier que f envoie l'axe réel sur le bord du rectangle (identifier les points $-1/k, -1, 0, 1, 1/k$ avec les sommets).
- b) En déduire que $K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$ (intégrale elliptique complète de première espèce).

Exercice 8.7 (Application à la physique). Le potentiel complexe d'un écoulement de fluide parfait incompressible est une fonction holomorphe $\Phi(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ où ϕ est le potentiel de vitesse et ψ la fonction de courant.

- a) On considère l'écoulement uniforme $\Phi(z) = Vz$ autour d'un cylindre circulaire. En utilisant la transformation de Joukowski $J(z) = z + 1/z$, montrer que le potentiel complexe de l'écoulement autour d'un profil de Joukowski est $\Phi(J^{-1}(w))$.
- b) Déterminer les lignes de courant de l'écoulement $\Phi(z) = z^2$ (écoulement dans un coin de 90°).
- c) En utilisant $f(z) = \cosh(z)$, décrire l'écoulement dans une bande infinie.

Chapitre 9

Théorème de Rouché et Principe de l'Argument

9.1 Zéros des fonctions holomorphes

Nous commençons ce chapitre par une étude systématique des zéros des fonctions holomorphes, en précisant la notion fondamentale d'ordre d'un zéro.

Définition 9.1 (Zéro d'ordre m). Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ et soit $a \in \Omega$ tel que $f(a) = 0$. On dit que a est un **zéro d'ordre** (ou de **multiplicité**) $m \geq 1$ de f si

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(m)}(a) \neq 0.$$

De manière équivalente, a est un zéro d'ordre m si et seulement s'il existe une fonction holomorphe g sur Ω avec $g(a) \neq 0$ telle que

$$f(z) = (z - a)^m g(z) \quad \text{pour tout } z \in \Omega.$$

Proposition 9.2 (Isolement des zéros). Soit f holomorphe et non identiquement nulle sur un domaine (ouvert connexe) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Alors les zéros de f sont **isolés** : pour tout zéro a de f , il existe $r > 0$ tel que $f(z) \neq 0$ pour $0 < |z - a| < r$.

Démonstration. Soit a un zéro d'ordre m de f . Par la définition 9.1, on écrit $f(z) = (z - a)^m g(z)$ avec g holomorphe et $g(a) \neq 0$. Puisque g est continue et $g(a) \neq 0$, il existe $r > 0$ tel que $g(z) \neq 0$ pour $|z - a| < r$. Ainsi, pour $0 < |z - a| < r$, on a $f(z) = (z - a)^m g(z) \neq 0$. $\square$

Corollaire 9.3 (Principe des zéros isolés). Soient f et g holomorphes sur un domaine Ω . Si l'ensemble $\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ admet un point d'accumulation dans Ω , alors $f \equiv g$ sur Ω .

Démonstration. La fonction $h = f - g$ est holomorphe sur Ω et ses zéros admettent un point d'accumulation. Si h n'était pas identiquement nulle, ses zéros seraient isolés par la proposition 9.2, contradiction. Donc $h \equiv 0$, c'est-à-dire $f \equiv g$. $\square$

Proposition 9.4 (Nombre de zéros par formule intégrale). *Soit f holomorphe sur un ouvert contenant le disque fermé $\overline{D(a, r)}$ et sans zéros sur le cercle $|z - a| = r$. Alors le nombre de zéros de f dans $D(a, r)$, comptés avec multiplicité, est donné par*

$$N = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Démonstration. Soient $a_1, \dots, a_k$ les zéros de f dans $D(a, r)$, de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_k$. Alors $f(z) = (z - a_j)^{m_j} g_j(z)$ où g_j est holomorphe et $g_j(a_j) \neq 0$. On calcule la dérivée logarithmique :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^k \frac{m_j}{z - a_j} + h(z),$$

où $h(z) = \sum_{j=1}^k g'_j(z)/g_j(z)$ est holomorphe dans $D(a, r)$ (plus précisément, chaque terme g'_j/g_j est holomorphe au voisinage de a_j , et la décomposition complète montre que h est holomorphe sur $D(a, r)$). Par le théorème des résidus :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^k m_j = N. \quad \square$$

9.2 Le principe de l'argument

Le principe de l'argument est l'une des applications les plus élégantes et puissantes du théorème des résidus. Il relie le nombre de zéros et de pôles d'une fonction méromorphe à une intégrale de contour de sa dérivée logarithmique.

Théorème 9.5 (Principe de l'argument). *Soit f une fonction méromorphe sur un ouvert contenant le disque fermé $\overline{D(a, R)}$, n'ayant ni zéros ni pôles sur le cercle $\gamma : |z - a| = R$. Notons N le nombre de zéros et P le nombre de pôles de f dans $D(a, R)$, comptés avec multiplicité. Alors*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P. \quad (9.1)$$

Plus généralement, si γ est une courbe de Jordan rectifiable, positivement orientée, bordant un domaine Ω , et si f est méromorphe sur un ouvert contenant $\overline{\Omega}$, sans zéros ni pôles sur γ , alors la même formule vaut avec N et P comptés dans Ω .

Démonstration. Soient $a_1, \dots, a_k$ les zéros de f dans $D(a, R)$, de multiplicités $m_1, \dots, m_k$, et $b_1, \dots, b_\ell$ les pôles de f dans $D(a, R)$, d'ordres $n_1, \dots, n_\ell$.

Au voisinage d'un zéro a_j d'ordre m_j , on écrit $f(z) = (z - a_j)^{m_j} g_j(z)$ avec g_j holomorphe et $g_j(a_j) \neq 0$. Alors :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_j}{z - a_j} + \frac{g'_j(z)}{g_j(z)},$$

et donc $\text{Res}_{z=a_j} \frac{f'(z)}{f(z)} = m_j$.

Au voisinage d'un pôle b_j d'ordre n_j , on écrit $f(z) = (z - b_j)^{-n_j} h_j(z)$ avec h_j holomorphe et $h_j(b_j) \neq 0$. Alors :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-n_j}{z - b_j} + \frac{h'_j(z)}{h_j(z)},$$

et donc $\text{Res}_{z=b_j} \frac{f'(z)}{f(z)} = -n_j$.

Par le théorème des résidus :

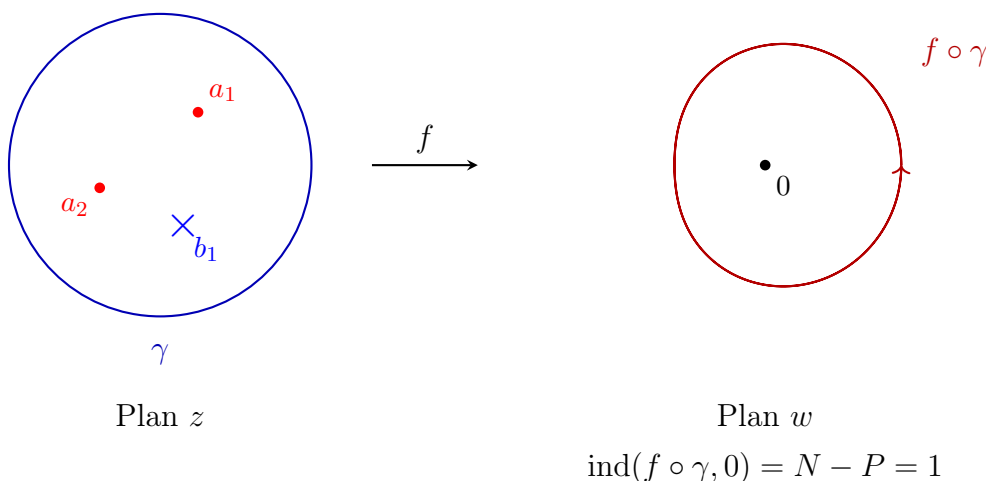
$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^k m_j + \sum_{j=1}^{\ell} (-n_j) = N - P. \quad \square$$

Remarque 9.6 (Interprétation géométrique). L'intégrale $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ représente la **variation totale** de l'argument de $f(z)$ lorsque z parcourt γ , divisée par 2π . En effet, formellement :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} d(\text{Log } f(z)) = \frac{1}{2\pi i} \Delta_{\gamma} \log f(z) = \frac{\Delta_{\gamma} \text{Arg } f}{2\pi},$$

où $\Delta_{\gamma} \text{Arg } f$ désigne la variation totale de l'argument de f le long de γ . Géométriquement, $N - P$ est le nombre de tours que la courbe image $f \circ \gamma$ effectue autour de l'origine, c'est-à-dire l'indice de $f \circ \gamma$ par rapport à 0 :

$$N - P = \text{ind}(f \circ \gamma, 0).$$



Exemple 9.7 (Application directe du principe de l'argument). Considérons $f(z) = \frac{z^3 - 1}{z - 2}$ et le cercle $\gamma : |z| = 3$. Les zéros de f dans $D(0, 3)$ sont les racines cubiques de l'unité : $z = 1, e^{2\pi i/3}, e^{-2\pi i/3}$, chacune de multiplicité 1, donc $N = 3$. Le seul pôle dans $D(0, 3)$ est $z = 2$, simple, donc $P = 1$. Par le principe de l'argument :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=3} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 3 - 1 = 2.$$

Exemple 9.8 (Variation de l'argument). Soit $f(z) = z^2 + 1$ et $\gamma : |z| = 2$. Les zéros de f sont $z = \pm i$, chacun de multiplicité 1. Il n'y a pas de pôle. Donc :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=2} \frac{2z}{z^2 + 1} dz = 2.$$

La courbe $f \circ \gamma$ fait 2 tours autour de l'origine, ce qui correspond à la variation totale $\Delta_\gamma \operatorname{Arg} f = 4\pi$.

9.3 Le théorème de Rouché

Le théorème de Rouché est un outil remarquable pour déterminer le nombre de zéros d'une fonction holomorphe dans un domaine. Il repose sur le principe de l'argument et l'idée qu'une « petite perturbation » ne change pas le nombre de zéros.

Théorème 9.9 (Théorème de Rouché). Soient f et g holomorphes sur un ouvert contenant $\overline{\Omega}$, où Ω est un domaine borné dont le bord $\partial\Omega$ est une courbe de Jordan rectifiable. Si

$$|g(z)| < |f(z)| \quad \text{pour tout } z \in \partial\Omega, \quad (9.2)$$

alors f et $f + g$ ont le même nombre de zéros dans Ω , comptés avec multiplicité.

Démonstration. La condition (9.2) implique que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \partial\Omega$ (car $|g(z)| < |f(z)|$ force $|f(z)| > 0$). De plus, pour $z \in \partial\Omega$:

$$|(f + g)(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0,$$

donc $f + g$ n'a pas de zéro sur $\partial\Omega$ non plus.

Considérons la famille $F_t(z) = f(z) + tg(z)$ pour $t \in [0, 1]$. Pour tout $z \in \partial\Omega$ et tout $t \in [0, 1]$:

$$|F_t(z)| = |f(z) + tg(z)| \geq |f(z)| - t|g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0.$$

Donc F_t n'a pas de zéro sur $\partial\Omega$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Par le principe de l'argument, le nombre de zéros de F_t dans Ω est :

$$N(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\Omega} \frac{F'_t(z)}{F_t(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\Omega} \frac{f'(z) + tg'(z)}{f(z) + tg(z)} dz.$$

La fonction $t \mapsto N(t)$ est continue (l'intégrande dépend continûment de t et le dénominateur ne s'annule pas sur $\partial\Omega$). Comme $N(t)$ est à valeurs entières, il est constant. En particulier :

$$N(1) = N(0),$$

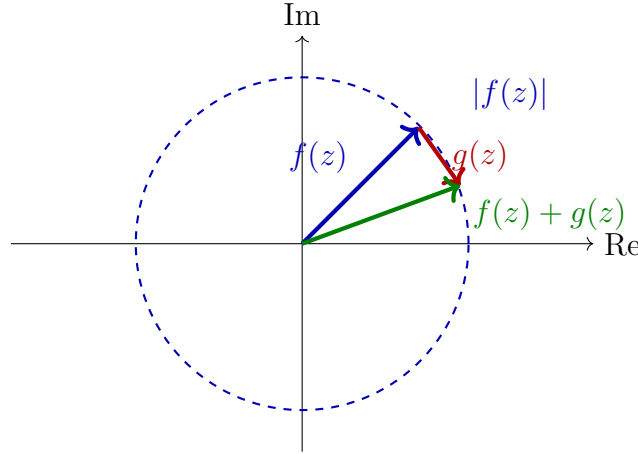
c'est-à-dire que le nombre de zéros de $f + g$ dans Ω est égal au nombre de zéros de f dans Ω . $\square$

Remarque 9.10 (Forme symétrique du théorème de Rouché). Une version équivalente, parfois plus commode, est la suivante : si f et g sont holomorphes sur un voisinage de

$\overline{\Omega}$ et si

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \quad \text{pour tout } z \in \partial\Omega,$$

alors f et g ont le même nombre de zéros dans Ω . Cette version, due à Estermann, est strictement plus forte que la version classique.



$$\begin{aligned} \text{Condition de Rouché : } & |g(z)| < |f(z)| \\ \Rightarrow & f(z) + g(z) \neq 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

9.4 Applications du théorème de Rouché

9.4.1 Le théorème fondamental de l'algèbre

Théorème 9.11 (Théorème fondamental de l'algèbre). *Tout polynôme non constant $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ à coefficients complexes ($a_n \neq 0$, $n \geq 1$) possède exactement n racines dans $\mathbb{C}$, comptées avec multiplicité.*

Démonstration. Posons $f(z) = a_n z^n$ et $g(z) = a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$, de sorte que $P(z) = f(z) + g(z)$.

Pour $|z| = R$:

$$|g(z)| \leq |a_{n-1}| R^{n-1} + \dots + |a_0|$$

et $|f(z)| = |a_n| R^n$. Pour R suffisamment grand :

$$\frac{|g(z)|}{|f(z)|} \leq \frac{|a_{n-1}|}{|a_n| R} + \frac{|a_{n-2}|}{|a_n| R^2} + \dots + \frac{|a_0|}{|a_n| R^n} < 1.$$

Plus précisément, il suffit de choisir

$$R > \max\left(1, \frac{n(|a_{n-1}| + \dots + |a_0|)}{|a_n|}\right).$$

Par le théorème de Rouché 9.9 appliqué à $\Omega = D(0, R)$, $P = f + g$ a le même nombre de zéros que $f(z) = a_n z^n$ dans $D(0, R)$, c'est-à-dire exactement n zéros (comptés avec multiplicité), puisque f a un unique zéro en $z = 0$ de multiplicité n . $\square$

Exemple 9.12 (Localisation des zéros). Montrons que le polynôme $P(z) = z^5 + 3z + 1$ a exactement un zéro dans le disque $D(0, 1)$.

Posons $f(z) = 3z$ et $g(z) = z^5 + 1$. Sur $|z| = 1$:

$$|f(z)| = 3, \quad |g(z)| \leq |z|^5 + 1 = 2 < 3 = |f(z)|.$$

Par Rouché, $P = f + g$ a le même nombre de zéros que $f(z) = 3z$ dans $D(0, 1)$, soit exactement 1.

Exemple 9.13 (Zéros dans une couronne). Montrons que $P(z) = z^4 - 6z + 3$ a exactement trois zéros dans la couronne $1 < |z| < 2$.

Étape 1 : Sur $|z| = 2$, posons $f(z) = z^4$ et $g(z) = -6z + 3$. Alors $|f(z)| = 16$ et $|g(z)| \leq 12 + 3 = 15 < 16$. Par Rouché, P a 4 zéros dans $D(0, 2)$.

Étape 2 : Sur $|z| = 1$, posons $f(z) = -6z$ et $g(z) = z^4 + 3$. Alors $|f(z)| = 6$ et $|g(z)| \leq 1 + 3 = 4 < 6$. Par Rouché, P a 1 zéro dans $D(0, 1)$.

Donc P a $4 - 1 = 3$ zéros dans la couronne $1 < |z| < 2$.

9.4.2 Perturbation des racines

Proposition 9.14 (Stabilité du nombre de zéros). Soit f holomorphe sur un voisinage de $\overline{D(a, r)}$ avec exactement n zéros dans $D(a, r)$ et $f(z) \neq 0$ sur $|z - a| = r$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que toute fonction h holomorphe sur un voisinage de $\overline{D(a, r)}$ avec $\sup_{|z-a|=r} |h(z) - f(z)| < \varepsilon$ possède également exactement n zéros dans $D(a, r)$.

Démonstration. Posons $\varepsilon = \min_{|z-a|=r} |f(z)| > 0$ (le minimum est atteint car f est continue et non nulle sur le cercle compact). Si $|h(z) - f(z)| < \varepsilon \leq |f(z)|$ sur $|z - a| = r$, le théorème de Rouché avec $g = h - f$ donne le résultat. $\square$

9.5 Le théorème de Hurwitz

Théorème 9.15 (Théorème de Hurwitz). Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions holomorphes sur un domaine Ω convergeant uniformément sur tout compact vers une fonction f . Si f n'est pas identiquement nulle, alors pour tout $a \in \Omega$ tel que $f(a) = 0$ d'ordre m , et pour tout $r > 0$ assez petit (avec $\overline{D(a, r)} \subset \Omega$ et $f(z) \neq 0$ pour $0 < |z - a| \leq r$), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, f_n possède exactement m zéros dans $D(a, r)$, comptés avec multiplicité.

En particulier, si chaque f_n est sans zéro dans Ω et $f_n \rightarrow f$ uniformément sur tout compact, alors f est soit identiquement nulle, soit sans zéro dans Ω .

Démonstration. Choisissons $r > 0$ tel que $\overline{D(a, r)} \subset \Omega$ et f n'a pas de zéro sur le cercle $|z - a| = r$ ni dans le disque épointé $0 < |z - a| \leq r$ (c'est possible car les zéros de f sont isolés).

Le nombre de zéros de f dans $D(a, r)$ est exactement m (le zéro en a d'ordre m). Posons

$$\varepsilon = \min_{|z-a|=r} |f(z)| > 0.$$

Par convergence uniforme sur le compact $\{|z - a| = r\}$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$:

$$\max_{|z-a|=r} |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \leq |f(z)|.$$

Par le théorème de Rouché, f_n et f ont le même nombre de zéros dans $D(a, r)$, soit m .

Pour la seconde assertion : si chaque f_n est sans zéro, alors le nombre de zéros de f_n dans tout $D(a, r)$ est 0. Par ce qui précède, si f n'est pas identiquement nulle, tout zéro de f aurait multiplicité 0, ce qui est impossible. Donc $f \equiv 0$ ou f est sans zéro. $\square$

9.6 Le théorème de l'application ouverte

Théorème 9.16 (Théorème de l'application ouverte). *Soit f une fonction holomorphe et non constante sur un domaine $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Alors f est une **application ouverte** : l'image de tout ouvert de Ω par f est un ouvert de $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Soit $U \subseteq \Omega$ un ouvert et soit $w_0 = f(z_0)$ avec $z_0 \in U$. Nous devons montrer que w_0 est un point intérieur de $f(U)$.

Puisque f n'est pas constante, z_0 est un zéro isolé de $f(z) - w_0$. Soit $m \geq 1$ l'ordre de ce zéro. Choisissons $r > 0$ tel que $\overline{D(z_0, r)} \subset U$ et $f(z) - w_0 \neq 0$ pour $0 < |z - z_0| \leq r$.

Posons $\delta = \min_{|z-z_0|=r} |f(z) - w_0| > 0$. Nous affirmons que $D(w_0, \delta) \subset f(U)$.

En effet, soit $w \in D(w_0, \delta)$, c'est-à-dire $|w - w_0| < \delta$. Considérons la fonction $F(z) = f(z) - w_0$ et la perturbation $G(z) = w_0 - w$ (constante). Pour $|z - z_0| = r$:

$$|G(z)| = |w - w_0| < \delta \leq |f(z) - w_0| = |F(z)|.$$

Par le théorème de Rouché, $F + G = f(z) - w$ a le même nombre de zéros que $F = f(z) - w_0$ dans $D(z_0, r)$, soit $m \geq 1$.

Donc il existe $z_1 \in D(z_0, r) \subset U$ avec $f(z_1) = w$. Ceci montre que $w \in f(U)$, et donc $D(w_0, \delta) \subset f(U)$. $\square$

Corollaire 9.17 (Principe du maximum (variante)). *Soit f holomorphe et non constante sur un domaine Ω . Alors $|f|$ n'atteint pas son maximum dans Ω .*

Démonstration. Supposons par l'absurde que $|f|$ atteint son maximum en $z_0 \in \Omega$, c'est-à-dire $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ pour tout $z \in \Omega$. Puisque f est une application ouverte, $f(\Omega)$ est un ouvert contenant $w_0 = f(z_0)$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ avec $D(w_0, \varepsilon) \subset f(\Omega)$, et en particulier il existe $z_1 \in \Omega$ avec $|f(z_1)| > |f(z_0)|$, contradiction. $\square$

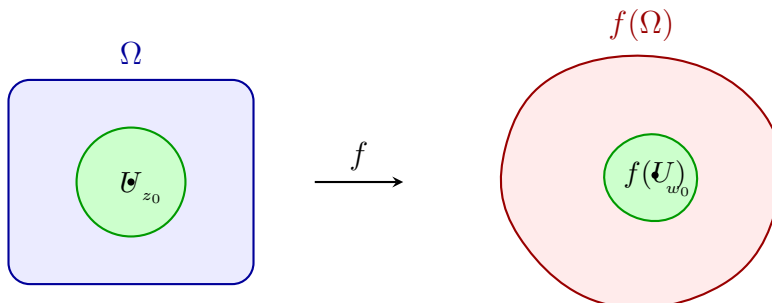
Corollaire 9.18 (Inverse d'une bijection holomorphe). *Si $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ est une bijection holomorphe entre domaines, alors f^{-1} est holomorphe (et $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega_1$).*

Démonstration. Puisque f est une application ouverte, f^{-1} est continue. Pour montrer que f^{-1} est holomorphe, il suffit de montrer que $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega_1$.

Supposons que $f'(z_0) = 0$ pour un $z_0 \in \Omega_1$, et soit $w_0 = f(z_0)$. Alors $f(z) - w_0$ a un zéro d'ordre $m \geq 2$ en z_0 . Par la preuve du théorème de l'application ouverte, pour w proche de w_0 (mais $w \neq w_0$), l'équation $f(z) = w$ a $m \geq 2$ solutions (comptées avec

multiplicité) dans un voisinage de z_0 . Pour w générique (hors d'un ensemble discret), ces solutions sont distinctes, contredisant l'injectivité de f .

Donc $f'(z) \neq 0$ partout, et f^{-1} est holomorphe par le théorème d'inversion locale (ou directement : $(f^{-1})'(w) = 1/f'(f^{-1}(w))$). $\square$



9.7 Exercices

Exercice 9.1 (Dénombrement de zéros). Déterminer le nombre de zéros (comptés avec multiplicité) des fonctions suivantes dans le disque $D(0, 1)$:

(a) $f(z) = z^7 - 5z^3 + z - 2$,

(b) $g(z) = z^6 + 4z^2 + 1$,

(c) $h(z) = e^z - 4z^3$.

Indication : appliquer le théorème de Rouché avec un choix judicieux de décomposition $f = F + G$.

Exercice 9.2 (Zéros dans le demi-plan). Montrer que le polynôme $P(z) = z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3$ a exactement deux zéros dans le demi-plan $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Indication : montrer d'abord que P n'a pas de zéro réel ni de zéro purement imaginaire, puis utiliser le principe de l'argument sur un grand demi-cercle dans le demi-plan droit.

Exercice 9.3 (Théorème de Rouché généralisé). Soient f et g holomorphes sur un voisinage de $\overline{D(0, 1)}$ telles que $|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$ pour tout z avec $|z| = 1$. Montrer que f et g ont le même nombre de zéros dans $D(0, 1)$.

Indication : montrer que f/g n'a pas de valeur réelle négative ni nulle sur $|z| = 1$, puis considérer $\operatorname{ind}((f/g) \circ \gamma, 0)$.

Exercice 9.4 (Application du principe de l'argument). Soit $f(z) = \frac{z^2 e^z}{(z-1)(z+3)}$. Calculer

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Exercice 9.5 (Théorème de Hurwitz et injectivité). Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes injectives sur un domaine Ω , convergeant uniformément sur tout compact vers f . Montrer que f est soit injective, soit constante.

Indication : si $f(a) = f(b)$ pour $a \neq b$, appliquer Hurwitz à $f_n(z) - f_n(a)$ au voisinage de b .

Exercice 9.6 (Localisation fine par Rouché). Soit $P(z) = z^5 + z + 16$. Montrer que :

- (a) P a exactement un zéro dans chacun des quatre disques $D(2e^{ik\pi/2}, 1)$ pour $k = 0, 1, 2, 3$,
 (b) le cinquième zéro est situé dans $D(0, 1/16)$.

Indication : pour (b), écrire $P(z) = 16(1 + z/16 + z^5/16)$ et montrer que $z + z^5$ est petit devant 16 sur $|z| = 1/16$.

Exercice 9.7 (Nombre de solutions d'une équation transcendante). Montrer que l'équation $e^z = az^n$ (où $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $n \geq 1$) a exactement n solutions dans un disque $D(0, R)$ pour R suffisamment grand.

Indication : réécrire sous la forme $e^z - az^n = 0$ et comparer avec $-az^n$ sur $|z| = R$.

Exercice 9.8 (Application ouverte et non-constance). Soit f holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que $f(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{R}$. Montrer que f est constante, en utilisant le théorème de l'application ouverte.

Exercice 9.9 (Variation de l'argument — calcul explicite). Soit $f(z) = z^3 - 2z + 2$.

- (a) Calculer le nombre de zéros de f dans le premier quadrant $\{z : \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$ en calculant la variation de l'argument de f le long du contour constitué du segment $[0, R]$, de l'arc de cercle de rayon R dans le premier quadrant, et du segment $[iR, 0]$, pour $R \rightarrow +\infty$.
 (b) Vérifier le résultat avec le théorème de Rouché.

Chapitre 10

Introduction aux Fonctions Entières et Méromorphes

10.1 Fonctions entières

Définition 10.1 (Fonction entière). Une fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite **entière** si elle est holomorphe sur tout $\mathbb{C}$. De manière équivalente, f est représentable par une série entière de rayon de convergence infini :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \in \mathbb{C}, \quad \text{convergente pour tout } z \in \mathbb{C}.$$

Exemple 10.2 (Fonctions entières classiques). Les fonctions suivantes sont entières :

- (i) **Polynômes** : $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$.
- (ii) **L'exponentielle** : $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.
- (iii) **Les fonctions trigonométriques** : $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$.
- (iv) **Les fonctions hyperboliques** : $\sinh z, \cosh z$.
- (v) **La fonction d'Airy** : $\text{Ai}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + zt\right) dt$.
- (vi) **Compositions et produits** : $e^{e^z}, \sin(z^2), ze^z$, etc.

Théorème 10.3 (Théorème de Liouville). *Toute fonction entière bornée est constante. Plus généralement, si f est entière et s'il existe $C > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $|f(z)| \leq C(1 + |z|^n)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, alors f est un polynôme de degré au plus n .*

Démonstration. Le cas $n = 0$ est le théorème de Liouville classique. Pour le cas général, écrivons $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Par les inégalités de Cauchy sur le cercle de rayon R :

$$|a_k| \leq \frac{\max_{|z|=R} |f(z)|}{R^k} \leq \frac{C(1 + R^n)}{R^k}.$$

Pour $k > n$, en faisant $R \rightarrow +\infty$:

$$|a_k| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{C(1 + R^n)}{R^k} = 0.$$

Donc $a_k = 0$ pour tout $k > n$, et f est un polynôme de degré $\leq n$. $\square$

Corollaire 10.4 (Théorème fondamental de l'algèbre — par Liouville). *Tout polynôme non constant possède au moins une racine complexe.*

Démonstration. Si P est un polynôme sans racine, alors $1/P$ est entière. Comme $|P(z)| \rightarrow \infty$ quand $|z| \rightarrow \infty$, $1/P$ est bornée, donc constante par Liouville, ce qui contredit le fait que P est non constant. $\square$

10.2 Ordre de croissance

L'une des questions fondamentales sur les fonctions entières est la vitesse à laquelle elles croissent. Pour les polynômes, la croissance est polynomiale ; pour e^z , elle est exponentielle. L'« ordre » d'une fonction entière quantifie précisément cette croissance.

Définition 10.5 (Ordre d'une fonction entière). Soit f une fonction entière. On définit la **fonction maximum** de f par

$$M(r) = M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \quad r \geq 0.$$

L'**ordre** de f est

$$\rho = \rho(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log M(r)}{\log r} \in [0, +\infty].$$

On dit que f est d'**ordre fini** si $\rho < +\infty$.

Remarque 10.6 (Interprétation). L'ordre ρ est le plus petit nombre (dans $[0, +\infty]$) tel que $M(r) \leq e^{r^{\rho+\varepsilon}}$ pour tout $\varepsilon > 0$ et r assez grand. Autrement dit, f est d'ordre ρ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad M(r) = O(e^{r^{\rho+\varepsilon}}) \quad \text{et} \quad M(r) \neq O(e^{r^{\rho-\varepsilon}}).$$

Exemple 10.7 (Ordres de fonctions classiques). (i) Tout polynôme non nul est d'ordre $\rho = 0$.

(ii) e^z : on a $M(r) = e^r$, donc $\frac{\log \log M(r)}{\log r} = \frac{\log r}{\log r} = 1$, et $\rho = 1$.

(iii) e^{z^k} pour $k \in \mathbb{N}^*$: $M(r) = e^{r^k}$, donc $\rho = k$.

(iv) $\sin z$: $M(r) \sim \frac{1}{2}e^r$ pour $r \rightarrow \infty$, donc $\rho = 1$.

(v) $\cos \sqrt{z}$ (entière car la série ne contient que des puissances entières) : on a $M(r) \sim \frac{1}{2}e^{\sqrt{r}}$, donc $\rho = 1/2$.

(vi) e^{e^z} : $M(r) = e^{e^r}$, donc $\rho = +\infty$ (ordre infini).

Définition 10.8 (Type d'une fonction entière). Soit f une fonction entière d'ordre $\rho \in (0, +\infty)$. Le **type** de f est

$$\sigma = \sigma(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log M(r)}{r^\rho} \in [0, +\infty].$$

On dit que f est de **type normal** si $0 < \sigma < +\infty$, de **type minimal** si $\sigma = 0$, et de **type maximal** si $\sigma = +\infty$.

Exemple 10.9 (Types). (i) e^{az} ($a \neq 0$) est d'ordre 1 et de type $|a|$.

(ii) $\sin z$ est d'ordre 1 et de type 1.

(iii) e^{z^2} est d'ordre 2 et de type 1.

Proposition 10.10 (Ordre et coefficients de Taylor). Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une fonction entière d'ordre ρ . Alors

$$\rho = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{-\log |a_n|}.$$

Réciproquement, cette formule permet de calculer l'ordre directement à partir des coefficients de Taylor.

Démonstration. Ceci est une conséquence de la formule de Hadamard reliant le rayon de convergence aux coefficients. La preuve complète procède en deux étapes.

Borne supérieure. Soit $\rho' > \rho$. Alors $M(r) \leq e^{r^{\rho'}}$ pour r assez grand. Par les inégalités de Cauchy, $|a_n| \leq M(r)/r^n$ pour tout $r > 0$. Choisissons $r = (n/(\rho'e))^{1/\rho'}$ (qui minimise approximativement $e^{r^{\rho'}}/r^n$). Un calcul direct donne $|a_n| \leq C \cdot (\rho'e/n)^{n/\rho'}$ pour une constante C , d'où

$$-\log |a_n| \geq \frac{n}{\rho'} (\log n - \log(\rho'e)) + O(1),$$

ce qui implique $\limsup \frac{n \log n}{-\log |a_n|} \leq \rho'$. En faisant $\rho' \rightarrow \rho$, on obtient la borne supérieure.

Borne inférieure. On montre de façon analogue, en utilisant $M(r) \leq \sum |a_n| r^n$ et le terme dominant, que $\limsup \frac{n \log n}{-\log |a_n|} \geq \rho$. $\square$

10.3 Le petit théorème de Picard

L'un des résultats les plus profonds de l'analyse complexe est le théorème de Picard, qui renforce spectaculairement le théorème de Liouville.

Théorème 10.11 (Petit théorème de Picard). Toute fonction entière non constante prend toute valeur complexe, à une exception au plus. Autrement dit, si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est entière et s'il existe deux valeurs distinctes $a, b \in \mathbb{C}$ telles que $f(z) \neq a$ et $f(z) \neq b$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, alors f est constante.

Remarque 10.12 (Sur la preuve). La preuve du petit théorème de Picard dépasse le cadre de ce cours introductif. Elle repose sur la théorie du revêtement universel et la fonction modulaire $\lambda : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Une autre approche utilise le lemme de Schottky et le théorème de Bloch.

Remarque 10.13 (Optimalité). L'exception d'une valeur est nécessaire : e^z est entière, non constante, et ne prend jamais la valeur 0. Mais e^z prend toute autre valeur $w \neq 0$ (en effet, $e^z = w \Leftrightarrow z = \log |w| + i \operatorname{Arg}(w) + 2k\pi i$).

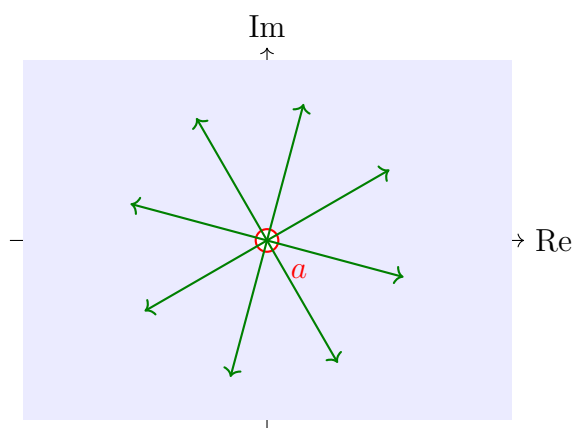


Image d'une fonction entière non constante
 $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{a\}$ (au plus une valeur omise)

Théorème 10.14 (Grand théorème de Picard — énoncé). Soit f holomorphe sur un voisinage épointé $D(a, r) \setminus \{a\}$ d'une singularité essentielle isolée a . Alors f prend toute valeur complexe, à une exception au plus, dans tout voisinage de a .
 En d'autres termes, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $f(D(a, \varepsilon) \setminus \{a\})$ contient $\mathbb{C}$ privé d'au plus un point.

10.4 Produits infinis et théorème de Weierstrass

La question fondamentale que nous abordons maintenant est celle de la *factorisation* des fonctions entières : peut-on exprimer une fonction entière comme un produit (infini) faisant intervenir ses zéros, à l'image de la factorisation des polynômes ?

Définition 10.15 (Produit infini). Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres complexes. On dit que le **produit infini** $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge** si les produits partiels $P_N = \prod_{n=1}^N a_n$ tendent vers une limite $P \neq 0$ quand $N \rightarrow \infty$. On écrit alors $\prod_{n=1}^{\infty} a_n = P$.
 On dit que $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ converge **absolument** si $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ converge.

Proposition 10.16 (Convergence absolue des produits). Le produit $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ converge absolument si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ converge. Dans ce cas, le produit ne dépend pas de l'ordre des facteurs.

CHAPITRE 10. INTRODUCTION AUX FONCTIONS ENTIÈRES ET MÉROMORPHES

Démonstration. Si $\sum |u_n| < \infty$, alors $|u_n| < 1$ pour n assez grand. Pour ces n , on utilise l'inégalité $|\log(1 + u_n)| \leq 2|u_n|$ (valable pour $|u_n| \leq 1/2$). Donc $\sum \log(1 + u_n)$ converge absolument, et par conséquent $\prod(1 + u_n) = \exp(\sum \log(1 + u_n))$ converge vers une valeur non nulle.

Réciproquement, si $\prod(1 + u_n)$ converge absolument (c'est-à-dire $\prod(1 + |u_n|)$ converge), alors $\sum \log(1 + |u_n|)$ converge, ce qui entraîne $\sum |u_n| < \infty$ puisque $\log(1 + x) \geq x/2$ pour $0 \leq x \leq 1$. $\square$

Définition 10.17 (Facteurs élémentaires de Weierstrass). Pour $p \in \mathbb{N}$, on définit le **facteur élémentaire** E_p par

$$E_0(z) = 1 - z, \quad E_p(z) = (1 - z) \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right) \quad \text{pour } p \geq 1.$$

Lemme 10.18 (Estimation du facteur élémentaire). Pour tout $p \geq 0$ et tout $|z| \leq 1$:

$$|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}.$$

Démonstration. Écrivons $E_p(z) = \exp(h_p(z))$ où $h_p(z) = \log(1 - z) + z + z^2/2 + \cdots + z^p/p$ (pour $|z| < 1$). Le développement en série de $\log(1 - z) = -\sum_{k=1}^{\infty} z^k/k$ donne :

$$h_p(z) = -\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{z^k}{k}.$$

Pour $|z| \leq 1$: $|h_p(z)| \leq \sum_{k=p+1}^{\infty} |z|^k/k \leq |z|^{p+1} \sum_{k=0}^{\infty} |z|^k/(p+1+k) \leq |z|^{p+1}$. Puis $|1 - E_p(z)| = |1 - e^{h_p(z)}| \leq |h_p(z)| e^{|h_p(z)|} \leq |z|^{p+1} \cdot e \leq C |z|^{p+1}$. On peut affiner pour obtenir $|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}$ par un argument plus soigné utilisant le fait que les coefficients de Taylor de $1 - E_p(z)$ sont positifs. $\square$

Théorème 10.19 (Théorème de factorisation de Weierstrass). Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres complexes non nuls avec $|a_n| \rightarrow +\infty$, et soit $m \geq 0$ un entier. Alors il existe une fonction entière dont les zéros sont exactement $z = 0$ (de multiplicité m) et les a_n (chacun comptés avec multiplicité). Plus précisément, si (p_n) est une suite d'entiers positifs telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|} \right)^{p_n+1} < \infty \quad \text{pour tout } r > 0,$$

alors le produit

$$f(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

converge uniformément sur tout compact et définit une fonction entière ayant exactement les zéros prescrits.

En particulier, on peut toujours choisir $p_n = n - 1$.

Esquisse de preuve. Il suffit de montrer la convergence uniforme sur tout disque $|z| \leq R$.

Pour n assez grand, $|a_n| > R$, donc $|z/a_n| \leq R/|a_n| < 1$. Par le lemme 10.18 :

$$|1 - E_{p_n}(z/a_n)| \leq \left(\frac{R}{|a_n|} \right)^{p_n+1}.$$

La condition $\sum (R/|a_n|)^{p_n+1} < \infty$ assure la convergence absolue du produit $\prod E_{p_n}(z/a_n)$, uniformément sur $|z| \leq R$.

Un produit uniformément convergent de fonctions holomorphes est holomorphe (par passage à la limite sous le signe $\exp \circ \log$), et les zéros du produit sont exactement les a_n avec les multiplicités souhaitées. $\square$

Corollaire 10.20 (Forme générale d'une fonction entière). *Toute fonction entière f admet une factorisation de la forme*

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n} \left(\frac{z}{a_n} \right),$$

où $m \geq 0$ est l'ordre du zéro en 0, (a_n) sont les zéros non nuls de f , et g est une fonction entière.

10.4.1 Factorisation du sinus

L'exemple le plus classique de produit de Weierstrass est la factorisation de $\sin(\pi z)$.

Théorème 10.21 (Produit d'Euler pour le sinus). *Pour tout $z \in \mathbb{C}$:*

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right). \quad (10.1)$$

Démonstration. Les zéros de $\sin(\pi z)$ sont les entiers $z = n \in \mathbb{Z}$, chacun simple. Par le théorème de Weierstrass (avec $p_n = 1$ pour assurer la convergence, car $\sum 1/n^2 < \infty$) :

$$\sin(\pi z) = z e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_1 \left(\frac{z}{n} \right) E_1 \left(\frac{z}{-n} \right) = z e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n} \right) e^{z/n} \cdot \left(1 + \frac{z}{n} \right) e^{-z/n}.$$

Les facteurs exponentiels se simplifient deux à deux, et on obtient :

$$\sin(\pi z) = z e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right).$$

Il reste à montrer que $g(z) = \log \pi$ (constante). En divisant par z et prenant la limite $z \rightarrow 0$:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi z)}{z} = \pi = e^{g(0)} \prod_{n=1}^{\infty} 1 = e^{g(0)},$$

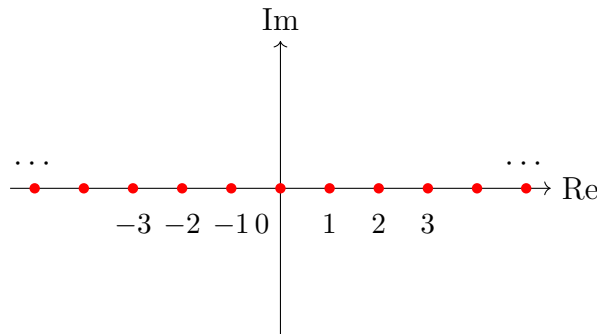
donc $g(0) = \log \pi$. On peut montrer que $g'(z) = 0$ en comparant les dérivées logarithmiques des deux membres : la dérivée logarithmique de $\sin(\pi z)$ est $\pi \cot(\pi z)$, et celle du produit (avec le facteur z) est $1/z + \sum_{n=1}^{\infty} 2z/(z^2 - n^2)$, ce qui donne exactement le développement en série partielle de $\pi \cot(\pi z)$ (identité classique). Donc $g'(z) = 0$ et g est constante, d'où $e^{g(z)} = \pi$. $\square$

Corollaire 10.22 (Formule de Wallis). En évaluant (10.1) en $z = 1/2$:

$$1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2},$$

ce qui donne la **formule de Wallis** :

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots$$



Zéros de $\sin(\pi z)$: les entiers $\mathbb{Z}$

10.5 Fonctions méromorphes et décomposition de Mittag-Leffler

Définition 10.23 (Fonction méromorphe). Une fonction f est **méromorphe** sur un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ si elle est holomorphe sur Ω privé d'un ensemble discret $S \subset \Omega$, et si chaque point de S est un pôle de f .

L'ensemble des fonctions méromorphes sur Ω forme un **corps** pour les opérations d'addition et de multiplication.

Exemple 10.24 (Fonctions méromorphes classiques). (i) Toute fonction rationnelle $P(z)/Q(z)$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$.

(ii) $\tan z = \sin z / \cos z$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec des pôles simples en $z = \pi/2 + n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$).

(iii) La fonction Γ d'Euler est méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec des pôles simples en $z = 0, -1, -2, \dots$

(iv) $\pi \cot(\pi z)$ est méromorphe avec des pôles simples en $z \in \mathbb{Z}$.

Le théorème de Mittag-Leffler est l'analogue « additif » du théorème de Weierstrass : là où Weierstrass prescrit les zéros d'une fonction entière, Mittag-Leffler prescrit les parties principales aux pôles d'une fonction méromorphe.

Théorème 10.25 (Théorème de Mittag-Leffler). Soit $(b_n)_{n \geq 1}$ une suite de points distincts de $\mathbb{C}$ avec $|b_n| \rightarrow +\infty$, et pour chaque n , soit P_n une **partie principale** (c'est-à-dire un polynôme en $1/(z - b_n)$ sans terme constant) :

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^{m_n} \frac{c_{n,k}}{(z - b_n)^k}.$$

Alors il existe une fonction méromorphe f sur $\mathbb{C}$ dont les seules singularités sont des pôles en les b_n , avec partie principale P_n en chaque b_n . Plus précisément, il existe des polynômes $p_n(z)$ tels que

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (P_n(z) - p_n(z))$$

converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \{b_1, b_2, \dots\}$.

De plus, la fonction méromorphe la plus générale ayant ces parties principales est de la forme $f(z) + g(z)$, où g est une fonction entière arbitraire.

Esquisse de preuve. L'idée est de soustraire à chaque $P_n(z)$ un polynôme $p_n(z)$ (le début de son développement de Taylor en 0) pour assurer la convergence.

Pour n assez grand, $|b_n| > 0$ et $P_n(z)$ est holomorphe dans le disque $D(0, |b_n|/2)$. On développe $P_n(z)$ en série de Taylor au voisinage de 0 :

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n,k} z^k \quad \text{pour } |z| < |b_n|.$$

On choisit $p_n(z) = \sum_{k=0}^{d_n} \alpha_{n,k} z^k$ (troncature à l'ordre d_n). Pour $|z| \leq R < |b_n|$:

$$|P_n(z) - p_n(z)| \leq \sum_{k=d_n+1}^{\infty} |\alpha_{n,k}| R^k \leq C_n \left(\frac{R}{|b_n|} \right)^{d_n+1} \cdot \frac{1}{1 - R/|b_n|}.$$

En choisissant d_n assez grand (par exemple $d_n = n$), on assure $|P_n(z) - p_n(z)| \leq 2^{-n}$ sur $|z| \leq R$ pour tout R fixé et n assez grand. La convergence uniforme sur les compacts en résulte. $\square$

Exemple 10.26 (Décomposition de $\pi \cot(\pi z)$). La fonction $\pi \cot(\pi z)$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec des pôles simples en $z = n \in \mathbb{Z}$, chacun de résidu 1. La partie principale en $z = n$ est $\frac{1}{z-n}$. Par le théorème de Mittag-Leffler (ou par un calcul direct) :

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}. \quad (10.2)$$

Cette série converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Justification de (10.2). Posons $g(z) = \pi \cot(\pi z) - \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right)$. On montre que g est bornée : elle est holomorphe (les singularités sont levées) et périodique de période 1. Sur la bande $\{z : 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1, |\operatorname{Im}(z)| \geq 1\}$, $\pi \cot(\pi z) \rightarrow \mp \pi i$ quand $\operatorname{Im}(z) \rightarrow \pm \infty$, et les

termes $\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} = \frac{2z}{z^2-n^2} \rightarrow 0$. Donc la différence $h(z) = \pi \cot(\pi z) - \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right)$ est entière (les pôles s'annulent) et bornée, donc constante par Liouville. Comme $h(z) \rightarrow 0$ quand $z \rightarrow 0$ (par parité), cette constante est 0. $\square$

10.6 Fonctions elliptiques : un aperçu

Définition 10.27 (Fonction elliptique). Une **fonction elliptique** est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ qui est doublement périodique : il existe deux nombres complexes ω_1, ω_2 , $\mathbb{R}$ -linéairement indépendants, tels que

$$f(z + \omega_1) = f(z) \quad \text{et} \quad f(z + \omega_2) = f(z) \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}.$$

Le **réseau** associé est $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$, et le **parallélogramme fondamental** est

$$\Pi = \{t_1\omega_1 + t_2\omega_2 : 0 \leq t_1, t_2 < 1\}.$$

Proposition 10.28 (Propriétés élémentaires). *Soit f une fonction elliptique non constante de réseau Λ . Alors :*

- (i) *f a un nombre fini de pôles dans Π (et de même pour les zéros).*
- (ii) *La somme des résidus de f dans Π est nulle.*
- (iii) *f a au moins deux pôles dans Π (comptés avec multiplicité) ; en particulier, il n'existe pas de fonction elliptique holomorphe non constante.*
- (iv) *Le nombre de zéros de f dans Π est égal au nombre de pôles (comptés avec multiplicité). Ce nombre commun est appelé l'**ordre** de f .*

Démonstration. (i) L'adhérence $\overline{\Pi}$ est compacte et les pôles sont isolés, donc il n'y en a qu'un nombre fini.

(ii) Par le théorème des résidus, $\sum \text{Res} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\Pi} f(z) dz$. Par double périodicité, les contributions des côtés opposés s'annulent.

(iii) Si f n'a pas de pôle, elle est entière et doublement périodique, donc bornée sur $\overline{\Pi}$, donc bornée sur $\mathbb{C}$ par périodicité. Par Liouville, f est constante. Si f a un seul pôle simple, son résidu est non nul, contredisant (ii). Donc f a au moins deux pôles (ou un pôle d'ordre ≥ 2).

(iv) Appliquer le principe de l'argument à $\partial\Pi$ (avec le même argument de cancellation par périodicité). $\square$

Définition 10.29 (Fonction $\wp$ de Weierstrass). La **fonction $\wp$ de Weierstrass** associée au réseau Λ est

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

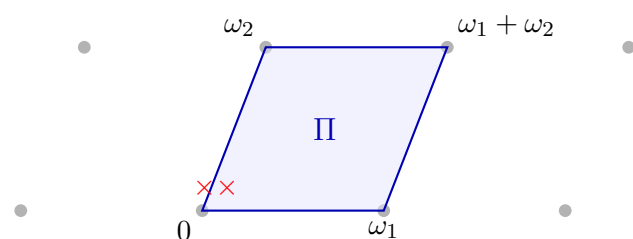
Proposition 10.30 (Propriétés de $\wp$). *La fonction $\wp$ est une fonction elliptique d'ordre 2 par rapport au réseau Λ . Elle est paire ($\wp(-z) = \wp(z)$), et son unique pôle dans Π est un pôle double en $z = 0$. De plus :*

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z - \omega)^3},$$

et $\wp$ satisfait l'équation différentielle

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3, \quad (10.3)$$

où $g_2 = 60 \sum_{\omega \neq 0} \omega^{-4}$ et $g_3 = 140 \sum_{\omega \neq 0} \omega^{-6}$ sont les **invariants** du réseau.



Parallélogramme fondamental et réseau Λ

10.7 Exercices

Exercice 10.1 (Ordre de croissance). Calculer l'ordre de croissance des fonctions entières suivantes :

- (a) $f(z) = e^{z^3+z}$,
- (b) $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^2}$,
- (c) $h(z) = \cos(\sqrt{z})$ (vérifier d'abord que h est entière),
- (d) $k(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n^2}\right)$.

Exercice 10.2 (Application de Liouville généralisé). Soit f entière telle que $|f(z)| \leq Ce^{a|z|}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, avec $C, a > 0$. Montrer que f est d'ordre au plus 1 et de type au plus a .

Soit de plus f telle que $f(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $f \equiv 0$.

Indication : considérer $g(z) = f(z)/\sin(\pi z)$ et montrer que g est entière bornée.

Exercice 10.3 (Formules pour $\zeta(2k)$). En développant $\pi \cot(\pi z)$ en série de Laurent au voisinage de $z = 0$ et en utilisant la décomposition (10.2), montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k+1} (2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k},$$

où B_{2k} sont les nombres de Bernoulli. En déduire $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Exercice 10.4 (Produit de Weierstrass pour $1/\Gamma$). La fonction $1/\Gamma(z)$ est entière avec des zéros simples en $z = 0, -1, -2, \dots$. Montrer que

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n},$$

où $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n\right)$ est la constante d'Euler–Mascheroni.

Indication : identifier les zéros, appliquer Weierstrass avec $p_n = 1$, et déterminer le facteur exponentiel $e^{g(z)}$ par des arguments de croissance.

Exercice 10.5 (Théorème de Mittag-Leffler — application). Construire une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ dont les seuls pôles sont les entiers positifs $n \geq 1$, avec partie principale $\frac{1}{(z-n)^2}$ en chaque n . Donner une expression en série.

Indication : considérer $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(z-n)^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ et montrer la convergence.

Exercice 10.6 (Petit théorème de Picard — applications). (a) Montrer que si f est entière et $\operatorname{Re}(f(z)) > 0$ pour tout z , alors f est constante.

(b) Montrer que si f est entière et $f(z) \notin \mathbb{R}^-$ pour tout z , alors f est constante.

(c) Montrer que si f est entière et $|f(z)| \neq 1$ pour tout z , alors f est constante.
(*Indication* : $f(\mathbb{C})$ est connexe.)

Exercice 10.7 (Fonctions elliptiques élémentaires). Soit $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ le réseau des entiers de Gauss.

(a) Montrer que la fonction $\wp$ associée satisfait $\wp(iz) = -\wp(z)$. En déduire que $g_3 = 0$ dans l'équation (10.3).

(b) Quelles sont les valeurs de $\wp$ aux demi-périodes $\omega_1/2 = 1/2$, $\omega_2/2 = i/2$ et $(\omega_1 + \omega_2)/2 = (1+i)/2$?

Exercice 10.8 (Théorème de Casorati-Weierstrass). Soit a une singularité essentielle isolée de f . Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, l'image $f(D(a, \varepsilon) \setminus \{a\})$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Indication : supposer le contraire, c'est-à-dire qu'il existe w_0 et $\delta > 0$ tels que $|f(z) - w_0| \geq \delta$ au voisinage de a . Considérer $g(z) = 1/(f(z) - w_0)$ et montrer que a est un pôle ou une singularité effaçable de f , contradiction.

Exercice 10.9 (Produit de Blaschke). Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite dans le disque unité $\mathbb{D}$ avec $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) < \infty$ et $a_n \neq 0$ pour tout n . Montrer que le **produit de Blaschke**

$$B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \cdot \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n}z}$$

converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$ et définit une fonction holomorphe bornée sur $\mathbb{D}$ dont les zéros sont exactement les a_n .

Indication : montrer que $\left|1 - \frac{|a_n|}{a_n} \cdot \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n}z}\right| \leq C(1 - |a_n|)$ sur tout compact de $\mathbb{D}$.

Bibliographie

- [1] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis : An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*, 3^e édition, McGraw-Hill, New York, 1979.
- [2] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, 2^e édition, Graduate Texts in Mathematics 11, Springer-Verlag, New York, 1978.
- [3] E. M. Stein et R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton Lectures in Analysis II, Princeton University Press, Princeton, 2003.
- [4] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, Paris, 1961.
- [5] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3^e édition, McGraw-Hill, New York, 1987.
- [6] C. A. Berenstein et R. Gay, *Complex Variables : An Introduction*, Graduate Texts in Mathematics 125, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [7] R. Remmert, *Classical Topics in Complex Function Theory*, traduit par L. Kay, Graduate Texts in Mathematics 172, Springer-Verlag, New York, 1998.

Index

- Ahlfors, [140](#)
- Berenstein, [140](#)
- Cartan, [140](#)
- chemin, [48](#)
 - inverse, [49](#)
 - lisse, [48](#)
 - lisse par morceaux, [48](#)
- concaténation, [49](#)
- Conway, [140](#)
- domaine étoilé, [55](#)
- facteur élémentaire, [133](#)
- fonction de Weierstrass $\wp$, [137](#)
- fonction elliptique, [137](#)
- fonction entière, [129](#)
- fonction méromorphe, [135](#)
- formule de Wallis, [135](#)
- Gay, [140](#)
- homologue à zéro, [62](#)
- homotopie, [58](#)
- indice (nombre d'enroulement), [60](#)
- intégrale curviligne, [50](#)
- lacet, [49](#)
 - contractile, [59](#)
 - simple, [49](#)
- longueur d'un chemin, [50](#)
- multiplicité d'un zéro, [120](#)
- ordre
 - d'une fonction entière, [130](#)
- primitive, [52](#)
- principe de l'argument, [121](#)
- produit d'Euler
 - sinus, [134](#)
- produit infini, [132](#)
- Remmert, [140](#)
- Rudin, [140](#)
- Shakarchi, [140](#)
- simplement connexe, [57](#)
- Stein, [140](#)
- théorème de Hurwitz, [125](#)
- théorème de l'application ouverte, [126](#)
- théorème de Liouville, [129](#)
- théorème de Mittag-Leffler, [136](#)
- théorème de Picard
 - grand, [132](#)
 - petit, [131](#)
- théorème de Rouché, [123](#)
- théorème de Weierstrass
 - factorisation, [133](#)
- théorème fondamental de l'algèbre, [124](#)
- type d'une fonction entière, [131](#)
- zéro
 - ordre, [120](#)